

## Тема 4. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Теория массового обслуживания представляет собой научное направление, изучающее системы, в которых возникают массовые запросы на выполнение определенных услуг и происходит удовлетворение этих запросов.

Предметом теории массового обслуживания является построение математических моделей, связывающих условия работы системы с показателями эффективности функционирования с целью определения наилучших вариантов управления данными системами.

Эти системы получили название *систем массового обслуживания*, а процессы, возникающие при этом, называются *процессами обслуживания*.

Элементами системы массового обслуживания являются входящий поток заявок, очередь, поток необслуженных (покинувших очередь) заявок, каналы обслуживания, выходящий поток обслуженных заявок.

Обслуживающие устройства системы массового обслуживания (пункты, станции, приборы, устройства, кассовые аппараты, продавцы, телефонные линии связи и т.д.) называются *каналами обслуживания*.

*Заявка (требование)* – это запрос на выполнение каких-либо услуг или удовлетворение определенной потребности.

### 4.1. Одноканальная система массового обслуживания с отказами

**Задача 4.1.** Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

**Исходная информация.**

На телефонную линию торговой фирмы поступает простейший поток заказов покупателей с интенсивностью  $\lambda = 2,5 + 0,1K$  звонков-заказов в минуту. Длительность оформления заказа в среднем равна  $\bar{t}_{об} = 0,9 - 0,1K$ . Звонок-заказ, поступивший в момент, когда телефонная линия занята, получает отказ в обслуживании. Поток вызовов и поток оформления заказов являются простейшими.

**Задача 4.2.** Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

**Исходная информация.**

На телефонную линию филиала банка поступает простейший поток вызовов клиентов с интенсивностью  $\lambda = 0,8 + 0,2K$  звонка в минуту. Средняя продолжительность обслуживания  $\bar{t}_{об} = 1,5 + 0,1N$  мин. Вызов-звонок, поступивший в момент, когда телефонная линия занята, получает отказ в обслуживании. Поток вызовов и поток обслуживания являются простейшими.

Используя приведенную информацию задач 5.1 и 5.2, необходимо:

- 1) определить  $\mu$  – интенсивность потока обслуживания:  $\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}}$ ;
- 2) вычислить  $q$  – относительную пропускную способность:  $q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$ ;
- 3) найти  $A$  – абсолютную пропускную способность:  $A = \lambda \cdot q$ ;
- 4) определить  $p_{отк}$  – вероятность отказа:  $p_{отк} = 1 - q$ ;
- 5) вычислить  $A_{ном}$  – номинальную пропускную способность системы:  $A_{ном} = \frac{1}{\bar{t}_{об}}$ ;
- 6) найти  $\bar{t}_{пр}$  – среднее время простоя канала:  $\bar{t}_{пр} = \frac{1}{\lambda}$ ;
- 7) определить  $p_0$  – вероятность того, что канал свободен:  $p_0 = \frac{\bar{t}_{пр}}{\bar{t}_{об} + \bar{t}_{пр}}$ ;
- 8) вычислить  $p_1$  – вероятность того, что канал занят:
  - а)  $p_1 = 1 - p_0$ ;
  - б)  $p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ ;
- 9) проанализировать работу телефонной линии торговой фирмы, филиала банка (сравнить фактическую пропускную способность системы массового обслуживания с номинальной пропускной способностью; сравнить вероятности того, что телефонная линия занята и свободна; сравнить среднее время обслуживания и среднее время простоя канала).

Построить две модели многоканальной системы массового обслуживания – с бесконечной и ограниченной очередью. Вычислить  $P_0$  – вероятность простаивания всех каналов обслуживания,  $n_w$  – среднее число клиентов, ожидающих обслуживания,  $t_w$  – среднее время ожидания обслуживания,  $W$  – вероятность обязательного пребывания в очереди.

1	m	s	k
8	10	2	4

Используем сервис многоканальная СМО. Выбираем количество каналов равным 4, количество заявок в очереди равным 2.

Модель многоканальной системы массового обслуживания с бесконечной очередью Системы массового обслуживания.

Исчисляем показатели обслуживания многоканальной СМО:

**1. Интенсивность нагрузки.**

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{10} = 0.8$$

Интенсивность нагрузки  $\rho=0.8$  показывает степень согласованности входного и выходного потоков заявок канала обслуживания и определяет устойчивость системы массового обслуживания.

**2. Время обслуживания.**

$$t_{\text{обс}} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ мин.}$$

Поскольку  $0.8 < 4$ , то процесс обслуживания будет стабилен.

**3. Вероятность, что канал свободен (доля времени простоя каналов).**

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}} = \frac{1}{\frac{0.8^0}{0!} + \frac{0.8^1}{1!} + \frac{0.8^2}{2!} + \frac{0.8^3}{3!} + \frac{0.8^4}{4!} + \frac{0.8^{4+1}}{4!(4-0.8)}} = 0.449$$

Следовательно, 45% в течение часа канал будет не занят, время простоя равно  $t_{\text{пр}} = 26.9$  мин.

**4. Доля заявок, получивших отказ.**

Поскольку отказ в обслуживании в таких системах не может быть, то  $p_{\text{отк}} = 0$

**5. Вероятность обслуживания поступающих заявок.**

$$p_{\text{обс}} = Q = 1$$

**6. Среднее число каналов, занятых обслуживанием.**

$$n_3 = \rho \cdot p_{\text{обс}} = 0.8 \cdot 1 = 0.8 \text{ канала.}$$

**Среднее число простаивающих каналов.**

$$n_{\text{пр}} = n - n_3 = 4 - 0.8 = 3.2 \text{ канала.}$$

**7. Коэффициент занятости каналов обслуживанием.**

$$K_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{0.8}{4} = 0.2$$

Следовательно, система на 20% занята обслуживанием.

**8. Абсолютная пропускная способность.**

$$A = p_{\text{обс}} \cdot \lambda = 1 \cdot 8 = 8 \text{ заявок/мин.}$$

**9. Среднее время простоя СМО.**

$$t_{\text{пр}} = p_{\text{отк}} \cdot t_{\text{обс}} = 0 \cdot 0.1 = 0 \text{ мин.}$$

**Вероятность образования очереди.**

$$P_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} P_0$$

$$P_{\text{оч}} = \frac{0.8^{4+1}}{4!(4-0.8)} 0.449 = 0.0019$$

**10. Среднее число заявок, находящихся в очереди.**

$$L_{оч} = \frac{n}{n-\rho} \rho_{оч}$$

$$L_{оч} = \frac{4}{4-0.8} 0.0019 = 0.0024 \text{ ед.}$$

**11. Среднее время простоя СМО** (среднее время ожидания обслуживания заявки в очереди).

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{A} = \frac{0.0024}{8} = 0.00 \text{ мин.}$$

**12. Среднее число обслуживаемых заявок.**

$$L_{об} = \rho = 0.8$$

**13. Среднее число заявок в системе.**

$$L_{СМО} = L_{оч} + L_{обс} = 0.0024 + 0.8 = 0.8 \text{ ед.}$$

**13. Среднее время пребывания заявки в СМО.**

$$T_{СМО} = \frac{L_{СМО}}{A} = \frac{0.8}{8} = 0.1 \text{ мин.}$$

Число заявок, получивших отказ в течение часа:  $\lambda \cdot p_1 = 0$  заявок в мин.

Номинальная производительность СМО:  $4 / 0.1 = 40$  заявок в мин.

Фактическая производительность СМО:  $8 / 40 = 20\%$  от номинальной производительности.

**Системы массового обслуживания.**

Исчисляем показатели обслуживания многоканальной СМО:

**1. Интенсивность нагрузки.**

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{10} = 0.8$$

Интенсивность нагрузки  $\rho=0.8$  показывает степень согласованности входного и выходного потоков заявок канала обслуживания и определяет устойчивость системы массового обслуживания.

**2. Время обслуживания.**

$$t_{обс} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ мин.}$$

Поскольку  $0.8 < 4$ , то процесс обслуживания будет стабилен.

**3. Вероятность, что канал свободен** (доля времени простоя каналов).

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)} = \frac{1}{\frac{0.8^0}{0!} + \frac{0.8^1}{1!} + \frac{0.8^2}{2!} + \frac{0.8^3}{3!} + \frac{0.8^4}{4!} + \frac{0.8^{4+1}}{4!(4-0.8)} \left(1 - \left(\frac{0.8}{4}\right)^2\right)} = 0.449$$

Следовательно, 45% в течение часа канал будет не занят, время простоя равно  $t_{пр} = 26.9$  мин.

Вероятность того, что обслуживанием:

занят 1 канал:

$$p_1 = \rho^1 / 1! \cdot p_0 = 0.8^1 / 1! \cdot 0.449 = 0.359$$

заняты 2 канала:

$$p_2 = \rho^2 / 2! \cdot p_0 = 0.8^2 / 2! \cdot 0.449 = 0.144$$

заняты 3 канала:

$$p_3 = \rho^3 / 3! \cdot p_0 = 0.8^3 / 3! \cdot 0.449 = 0.0383$$

заняты 4 канала:

$$p_4 = \rho^4 / 4! \cdot p_0 = 0.8^4 / 4! \cdot 0.449 = 0.0077$$

**4. Доля заявок, получивших отказ.**

$$p_{отк} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0 = \frac{0.8^{4+2}}{4^2 4!} 0.449 = 0.0003$$

Заявки не получают отказ. Обслуживаются все поступившие заявки.

**5. Вероятность обслуживания поступающих заявок.**

В системах с отказами события отказа и обслуживания составляют полную группу событий, поэтому:

$$p_{\text{отк}} + p_{\text{обс}} = 1$$

Относительная пропускная способность:  $Q = p_{\text{обс}}$ .

$$p_{\text{обс}} = 1 - p_{\text{отк}} = 1 - 0.0003 = 1$$

Следовательно, 100% из числа поступивших заявок будут обслужены. Приемлемый уровень обслуживания должен быть выше 90%.

**6. Среднее число каналов, занятых обслуживанием.**

$$n_3 = \rho \cdot p_{\text{обс}} = 0.8 \cdot 1 = 0.8 \text{ канала.}$$

**Среднее число простаивающих каналов.**

$$n_{\text{пр}} = n - n_3 = 4 - 0.8 = 3.2 \text{ канала.}$$

**7. Коэффициент занятости каналов обслуживанием.**

$$K_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{0.8}{4} = 0.2$$

Следовательно, система на 20% занята обслуживанием.

**8. Абсолютная пропускная способность.**

$$A = p_{\text{обс}} \cdot \lambda = 1 \cdot 8 = 8 \text{ заявок/мин.}$$

**9. Среднее время простоя СМО.**

$$t_{\text{пр}} = p_{\text{отк}} \cdot t_{\text{обс}} = 0.0003 \cdot 0.1 = 0 \text{ мин.}$$

**Вероятность образования очереди.**

$$p_{\text{оч}} = \frac{\rho^n}{n!} \frac{1 - (\rho/n)^m}{1 - \rho/n} p_0$$

$$p_{\text{оч}} = \frac{0.8^4}{4!} \frac{1 - (0.8/4)^2}{1 - 0.8/4} = 0.0092$$

**10. Среднее число заявок, находящихся в очереди.**

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \frac{1 - (\rho/n)^m (m+1 - m \cdot \rho/n)}{(1 - (\rho/n))^2} p_0$$

$$L_{\text{оч}} = \frac{0.8^{4+1}}{4 \cdot 4!} \frac{1 - (0.8/4)^2 (2+1 - 2 \cdot 0.8/4)}{(1 - (0.8/4))^2} = 0.449 = 0.0021 \text{ ед.}$$

**11. Среднее время простоя СМО (среднее время ожидания обслуживания заявки в очереди).**

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{A} = \frac{0.0021}{8} = 0.00 \text{ мин.}$$

**12. Среднее число обслуживаемых заявок.**

$$L_{\text{обс}} = \rho \cdot Q = 0.8 \cdot 1 = 0.8 \text{ ед.}$$

**13. Среднее число заявок в системе.**

$$L_{\text{СМО}} = L_{\text{оч}} + L_{\text{обс}} = 0.0021 + 0.8 = 0.8 \text{ ед.}$$

**13. Среднее время пребывания заявки в СМО.**

$$T_{\text{СМО}} = \frac{L_{\text{СМО}}}{A} = \frac{0.8}{8} = 0.1 \text{ мин.}$$

Число заявок, получивших отказ в течение часа:  $\lambda \cdot p_1 = 0.002$  заявок в мин.

Номинальная производительность СМО:  $4 / 0.1 = 40$  заявок в мин.

Фактическая производительность СМО:  $8 / 40 = 20\%$  от номинальной производительности.