## Тема 4. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ТЕОРИИ ИГР

Математическая теория игр занимается выработкой рекомендаций по рациональному образу действий в условиях конфликтных ситуаций (когда сталкиваются интересы конкурирующих сторон), то есть разрабатываются предложения по наилучшим вариантам поведения, которые обеспечивали бы оптимальный результат. В качестве выигрыша могут быть эффективность использования дефицитных ресурсов, себестоимость, прибыль и т. д.

Рассмотрим основные категории применяемых моделей. *Игра* – это совокупность мероприятий, состоящая из ряда действий сторон. Участвующие стороны являются *игроками*. *Стратегия* – это свод правил, однозначно определяющих последовательность действий игрока в каждой конкретной ситуации в зависимости от сложившейся обстановки. Правила игры – система условий, регламентирующих возможные варианты действий сторон. Выбор игроком одного из предусмотренных правилами вариантов поведения является этапом или ходом игры. Выбирая ту или иную стратегию, каждый из игроков стремится удовлетворить свои интересы: первый – обеспечить себе максимально возможный выигрыш, а второй – минимально возможный проигрыш.

Если в процессе игры игрок применяет попеременно несколько стратегий, то такая стратегия называется смешанной, а ее элементы – чистыми стратегиями, т. е. смешанная стратегия есть комбинация чистых стратегий, взятых в случайном порядке с некоторыми вероятностями.

Результатом игры является выигрыш или проигрыш одного из игроков, выраженный в количественной форме. Оптимальной стратегией будет та, которая при многократном повторении игры обеспечивает данной стороне максимально возможный выигрыш.

Итак, каждая формализованная игра характеризуется:

1) количеством субъектов, которые называются игроками;

2) возможным для каждого из игроков набором действий, называемых

стратегиями;

3) функциями выигрыша, отражающими степень удовлетворения интересов каждого из игроков;

4) результатом игры, к которому приводят выбранные игроками стратегии.

Задачи теории игр можно классифицировать с учетом различных признаков:

– в игре могут сталкиваться интересы двух (игра парная) или нескольких (игра множественная) противников;

– по характеру выигрышей игры делятся на: а) с нулевой суммой; б) с ненулевой суммой;

– в зависимости от количества стратегий игры бывают конечные или бесконечные;

– по количеству ходов игры делятся на одноходовые (выигрыш распределяется после одного хода) и многоходовые, которые в свою очередь бывают позиционные, стохастические, дифференциальные и др.

– если одна сторона не является сознательно действующим противником (спрос населения при выборе рынка сбыта, природно-климатические условия при выборе участка для посева и т.п.), то принятие оптимальных управленческих рекомендаций основывается на теории статистических решений и поэтому такие игры, называются статистическими или игры с «природой».

## 4.1. Парная матричная игра

Специфика задачи парной игры в том, что здесь имеется игра двух лиц с нулевой суммой, в которой одна сторона проигрывает столько, сколько выигрывает другая.

**Методические указания.** У каждого из двух игроков $A$ и $B$ имеется конечное число возможных действий (чистых стратегий) с числом $m$ и $n$ соответственно. Условие игры записывают в форме платежной матрицы (табл. 4.1), а игру называют прямоугольной, или матричной).

Т а б л и ц а 4.1. **Схема платежной матрицы**

| $A_i$ | $B_j$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_n$ |
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1n}$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2n}$ |
| … | … | … | … | … |
| $A_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mn}$ |

Такое представление матричной игры означает, что если игрок *A* использует стратегию *i*, а игрок *B* – стратегию *j*, то платеж игроку *A* за счет *B* составит $a_{ij}$. Выигрыши могут выражаться и отрицательными числами. При $a_{ij} < 0$ игрок *A* платит игроку *B* сумму / $a_{ij}$ /. Это означает, что в подобном случае фактически выигрывает игрок *B*.

Существует ряд методов решения матричных игр. Если матрица игры имеет одну из размерностей, равную двум ($2 \times n$ или $m \times 2$), то решение может быть получено графически. Не вдаваясь в подробности его описания, рассмотрим другой способ.

Целью участников любой матричной игры является выбор наиболее выгодных стратегий, доставляющих игроку *A* максимальный выигрыш, а игроку *B* – минимальный проигрыш. Поэтому стратегия игрока *A* называется оптимальной, если при ее применении его выигрыш не уменьшается, какими бы стратегиями не пользовался игрок *B*. Оптимальной для игрока *B* будет стратегия, при использовании которой его проигрыш не увеличивается, какие бы стратегии не применял игрок *A*. Известно, что в теории игр основополагающим является принцип осторожности, в соответствии с которым каждый игрок, считая своего партнера по игре разумным противником, выбирает свои стратегии исходя из предположения, что соперник не упустит ни единой возможности использовать любую его ошибку в своих интересах.

***Решение задачи.*** Предположим, что игроку *А* надлежит сделать свой выбор. Анализируя платежную матрицу (табл. 4.3), нужно найти для каждой чистой стратегии минимальное значение $\alpha_i$ ожидаемого выигрыша, а затем из всех найденных значений – наибольшее (а также соответствующую ему чистую стратегию). Ее называют максиминной.

Данная величина называется нижней чистой ценой игры, или максимином.

В свою очередь, игрок *B*, стремясь минимизировать проигрыш, при выборе наиболее предпочтительной стратегии поступает так: сначала для каждой чистой стратегии находится максимально возможный проигрыш, а затем среди этих значений выбирается минимальное, которое и укажет приемлемую стратегию.

Следовательно, максимин показывает, какой минимальный выигрыш может получить игрок *A*, правильно применяя свои чистые стратегии при любых действиях игрока *B*. С другой стороны, минимакс показывает, какой максимальный проигрыш может быть у игрока *B* при правильном выборе им своих чистых стратегий независимо от действий игрока *A*.

Таким образом, правильно используя чистые стратегии, игрок *A* обеспечит себе выигрыш не менее *a*, а игрок *B* в результате правильного применения своих чистых стратегий не позволит игроку *A* выиграть больше, чем $b$. Если $a = b$, то такая игра имеет седловую точку, а ее решение лежит в области чистых стратегий: оптимальными будут максиминная и минимаксная стратегии, а ценой игры – седловой элемент платежной матрицы. Если игрок *B* отклонится от своей минимаксной стратегии, его проигрыш может только увеличиться. Аналогично отклонение игрока *A* от своей максиминной стратегии ведет к уменьшению его выигрыша. Значит, наиболее предпочтительные стратегии в игре с седловой точкой обладают свойством устойчивости, создают ситуацию равновесия. Она может возникнуть в игре тогда, когда каждый из игроков выбирает свою оптимальную стратегию и получает соответственно максимальный гарантированный выигрыш и минимальный гарантированный проигрыш, величины которых совпадают.

## 4.2. Статистическая игра

Статистические игры или игры с природой – это ситуации, где существует неизвестность поведения противоположной стороны под влиянием случайных факторов. Здесь два игрока: а) природа, т. е. вся совокупность внешних обстоятельств, безразличная к результату игры; б) статистик, как сознательный игрок.

При решении задач различают две ситуации: а) если вероятности состояний природы неизвестны, то речь идет о проблеме выбора в условиях неопределенности; б) если вероятности состояний природы известны, то соответственно – в условиях риска. Для каждой из ситуаций существуют свои критерии, т. е. математическое обоснование выбора наилучшей стратегии.

Если известны вероятности, с которыми реализуются состояния природы (условиях риска) для принятия решений используется *критерий Байеса*. Он предполагает, что оптимальной будет чистая стратегия $A_i$, при которой максимизируется средний выигрыш статистика (либо минимизируются средние издержки):

Если в задаче отсутствует информация о вероятностях, с которыми реализуются стратегии природы, то, имея ситуацию неопределенности, используют равные критерии.

*Критерий Лапласа* основан на гипотезе равновероятности.

Оптимальной по критерию Лапласа считается чистая стратегия, обеспечивающая максимальный средний выигрыш статистика при равенстве всех априорных вероятностей.

Итак, наступление любого возможного состояния спроса с точки зрения равновероятности приводит к тому, что $p_1 = p_2 = p_3 = 0{,}333$ и тогда нахождение функции решений осуществляется с помощью критерия Лапласа.

*Критерий Вальда* – это максиминный критерий крайнего пессимизма, т. е. выбирается наилучшая альтернатива из наихудших: извлекается самый маленький результат из каждой строки таблицы и выбирается та из них, в которой находится наибольшее из этих чисел. Исходя из этого, игрок выбирает такую чистую стратегию $A_i$, при которой обеспечивается максимум минимального выигрыша, т. е. максиминную стратегию, при которой выигрыш – нижняя чистая цена игры.

*Критерий Сэвиджа*, как и предыдущий, является критерием крайнего пессимизма, потому что статистик исходит из предположения, что природа реализует самые неблагоприятные для него состояния. Критерий Сэвиджа стремится смягчить консерватизм максиминного критерия Вальда путем замены платежной матрицы матрицей риска и рекомендует в качестве оптимальной выбирать ту чистую стратегию $A_i$, при которой минимизируется величина максимального риска.

Риском называют разность между максимально возможным выигрышем при данном состоянии природы и выигрышем при выбранной стратегии.

*Критерий Гурвица* охватывает ряд различных подходов к принятию решений – от наиболее оптимистичного до наиболее пессимистичного. Исходя из субъективных соображений, в данный критерий вводится некоторый коэффициент $\lambda$. В области чистых стратегий оптимальной по Гурвицу считается стратегия, найденная из условия.

При $\lambda = 1$ критерий Гурвица превращается в критерий Вальда (крайнего пессимизма). Если $\lambda = 0$, то получаем критерий крайнего оптимизма, ибо рассчитываем на наилучшее из наилучших условий. Если $\lambda$ принять близкой к 1, то это позволяет говорить о желании подстраховаться в данной ситуации, когда о состоянии природы ничего не известно.