Т е м а 3. ДВОЙСТВЕННЫЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

В процессе получения конечной продукции в производстве используются многие ресурсы. При этом расход одних и тех же ресурсов для получения продукции в разных организациях может быть неодинаковым. Все это происходит из-за разных почвенно-климатических условий, неодинаковых форм собственности, форм организации труда, несовпадения применяемых технологий. В результате при наличии одинакового количества ресурсов предприятия имеют разную прибыль, уровень рентабельности и т. д.

Поэтому необходимо определить ценность (оценку) каждого ресурса для конкретного предприятия с целью повышения эффективности их использования и определения последовательности их приобретения (освоения). Эти задачи можно решить, зная двойственные или объективно обусловленные оценки, получаемые при решении двойственной задачи.

Двойственные оценки показывают влияние отдельных ресурсов в формировании конечного продукта конкретного предприятия в данных экономических условиях. Двойственные оценки также могут служить *мерой дефицитности* ресурсов. *Дефицитный ресурс* – ресурс, который используется полностью по оптимальному плану производства, имеет положительную оценку, а ресурс *избыточный* используется не полностью, имеет нулевую оценку.

Нулевая оценка избыточных ресурсов не означает отсутствия хозяйственной ценности таких ресурсов, а указывает всего лишь на их неполное и нерациональное использование. В изменившихся условиях избыточный ресурс может стать недостаточным.

Двойственные оценки получают в результате решения двойственной задачи (ДЗ), которую составляют на основании прямой задачи (ПЗ). Пусть имеем ПЗ. Приведем ограничения прямой задачи к единому виду типа «≤»:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le A_1;$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le A_2;$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n \ge A_3;$$

или после преобразования

$$-a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - \dots - a_{3n}x_n \le -A_3;$$

$$a_{m}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le A_m.$$
$$F_{\max} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Введем двойственные оценки по количеству ограничений прямой задачи: u_1 означает, на сколько единиц изменится функция, если использование первого ресурса изменится на 1; u_2 – аналогично, и по всем ограничениям типа «≤»; u_3 показывает, на сколько единиц возрастет функция, если объем ограничения или использование ресурса уменьшится на единицу. Итак, величина двойственной оценки численно равна изменению целевой функции при изменении соответствующего свободного члена на единицу.

Двойственная оценка имеет такую же единицу измерения, что и целевая функция прямой задачи.

Двойственная задача составляется по следующему правилу:

1) коэффициентами строк двойственной задачи будут являться коэффициенты столбцов прямой задачи, т. е. матрица коэффициентов ДЗ является транспонированной матрицей коэффициентов ПЗ;

2) знаки ограничений и целевая функция двойственной задачи противоположны знакам ограничений и целевой функции прямой задачи;

3) свободными членами двойственной задачи будут коэффициенты целевой функции прямой задачи;

4) коэффициентами целевой функции двойственной задачи будут являться свободные члены прямой задачи.

Примечание. Если в прямой задаче есть ограничения со знаком «=», то при составлении двойственной задачи знак ограничения выбирается исходя из условия двойственной задачи, т. е. если целевая функция двойственной задачи минимизируется, то знаки ограничения будут «≥», если целевая функция максимизируется, то знак будет «≤».

Таким образом, имеем двойственную задачу:

$$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 - a_{31}u_3 + \dots + a_{m1}u_m \ge \lambda_1;$$
$$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 - a_{32}u_3 + \dots + a_{m2}u_m \ge \lambda_2;$$

$$a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 - a_{3n}u_3 + \dots + a_{mn}u_m \ge \lambda_n.$$
$$F_{\min} = A_1u_1 + A_2u_2 + \dots + A_nu_n.$$

Сформулируем задачу в общем виде:

i – номер строки (ограничения);

I_0 – множество строк (ограничений);

j – номер столбца (переменной);

J_0 – множество столбцов (переменных);

a_{ij} – коэффициент строки i столбца j;

A_i – наличие ресурсов строки i;

λ_j – оценочный коэффициент в столбце j.

Прямая задача имеет вид: найти x_j при условии

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j \leq A_i; \; i \in I_0; \; F_{\max} = \sum_{j \in J_0} \lambda_j x_j.$$

Двойственная задача имеет вид: найти u_i при условии

$$\sum_{i \in I_0} a_{ij} u_i \leq \lambda_j; \; j \in J_0; \; F_{\min} = \sum_{i \in I_0} A_i u_i.$$

Основные теоремы двойственности носят следующий характер:

1) если в прямой задаче $F_{\max} = \sum_{j \in J_0} \lambda_j x_j$, то в двойственной задаче $F_{\min} = \sum_{i \in I_0} A_i u_i$;

2) если двойственная оценка >0, то производственный ресурс, для которого она рассчитана, используется полностью, т. е. $\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j = A_i$;

3) если двойственная оценка ресурса =0, то производственный ресурс недоиспользуется, т. е. $\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j < A_i$.

Итак, так как одинаковые ресурсы в каждом предприятии играют разную роль, их двойственные оценки для разных предприятий не совпадают.

Для составления двойственной задачи и нахождения двойственных оценок используем условие прямой задачи, решение которой было рассмотрено в предыдущей теме.

Условия прямой задачи:

1) по минимальному объему производства сыра № 1, ц:

$$x_1 \geq 45;$$

2) по минимальному объему производства сыра № 2, ц:

$$x_2 \geq 35;$$

3) по минимальному объему производства сыра № 3, ц:

$$x_3 \geq 120;$$

4) по использованию трудовых ресурсов, чел.-ч:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 1560;$$

5) по использованию электроэнергии, кВт/ч:

$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 1700;$$

6) по освоению кредитных средств, у. д. е.:

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1580.$$

Целевая функция – максимум прибыли:

$$F_{\max} = 8x_1 + 7x_2 + 4x_3.$$

Приводим все ограничения к одному знаку:

1) $-x_1 \leq -45$;
2) $-x_2 \leq -35$;
3) $-x_3 \leq -120$;
4) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 1560$;
5) $x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 1700$;
6) $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1580$.
$F_{\max} = 8x_1 + 7x_2 + 4x_3$.

Вводим двойственные оценки:

u_1 – оценка производства 1 ц сыра № 1 (показывает, насколько увеличится прибыль, если объем производства сыра № 1 увеличить на 1 ц);

u_2, u_3 – оценка производства 1 ц сыра № 2 и № 3;

u_4 – оценка трудовых ресурсов (показывает, насколько увеличится прибыль, если ресурсы труда возрастут на 1 чел.-дн.);

u_5 – оценка 1 кВт/ч электроэнергии (показывает, насколько увеличится прибыль, если использование электроэнергии возрастет на 1 кВт/ч);

u_6 – оценка кредитных ресурсов (показывает, насколько увеличится прибыль, если сумма используемого кредита возрастет на 1 у. д. е.).

Составляем ограничения двойственной задачи:

$$-u_1 + 2u_4 + u_5 + 3u_6 \geq 8;$$
$$-u_2 + 3u_4 + 4u_5 + 4u_6 \geq 7;$$
$$-u_3 + 4u_4 + 5u_5 + 2u_6 \geq 4.$$
$$F_{\min} = -45u_1 - 35u_2 - 120u_3 + 1560u_4 + 1700u_5 + 1580u_6.$$

Решение данной задачи дает возможность определить сравнительную ценность ресурсов и принять меры по очередности освоения инвестиций. Задача решается симплексным методом. Ее результаты представлены в табл. 3.1.

Т а б л и ц а 3.1. **Оптимальное решение двойственной задачи**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные					
		y_1	y_2	y_3	u_4	u_5	u_1
u_6	2,7	–0,3	0	0	0,7	0,3	–0,3
u_2	3,7	–1,3	1	0	0,7	–2,7	–1,3
u_3	1,3	–0,7	0	1	–2,7	–4,3	–0,7
$F_{\min}$	3925	–400	–35	–120	–175	–560	–355

Таким образом, u_1, u_4, u_5 равны нулю, т. е. эти ресурсы не являются лимитирующими, а находятся в избытке; u_2 равна 3,7, т. е. если предприятие будет иметь возможность увеличить производство сыра № 2 на 1 ц, то это приведет к росту прибыли на 3,7 у. д. е.; u_3 = 1,3. Следовательно, если предприятие будет производить не 120 (минимум), а 121 ц сыра, это приведет к росту прибыли на 3,7 у. д. е.; u_6 − оценка кредитных ресурсов, равная 2,7, показывает, что использование дополнительных кредитных средств в размере 1 у. д. е. обеспечивает приращение прибыли в количестве 2,7 у. д. е.

По последней итерации двойственной задачи можно найти решение прямой задачи (рис. 2).

Прямая задача

Базисные переменные						Небазисные переменные			Целевая функция
x_1	x_2	x_3	y_4	y_5	y_1	y_6	y_2	y_3	$F_{\max}$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
y_1	y_2	y_3	u_4	u_5	u_1	u_6	u_2	u_3	$F_{\min}$
Небазисные переменные						Базисные переменные			Целевая функция

Двойственная задача

Рис. 2. Соответствие переменных двойственной и прямой задач

1. Значение целевой функции двойственной задачи $F_{\min} = F_{\max}$ прямой задачи, т. е. 3925.

2. Дополнительные небазисные переменные двойственной задачи соответствуют основным переменным прямой задачи и их значения берутся в строке целевой функции со знаком «+»:

$$y^{ДЗ\ НБ} = \boldsymbol{x}^{ПЗ\ БП} = +\lambda_j^{ДЗ};$$

$$y_1^{ДЗ\ НБ} = \boldsymbol{x}_1^{ПЗ\ БП} = 400; \quad y_2^{ДЗ\ НБ} = \boldsymbol{x}_2^{ПЗ\ БП} = 35;$$
$$y_3^{ДЗ\ НБ} = \boldsymbol{x}_3^{ПЗ\ БП} = 120.$$

3. Двойственные оценки, стоящие в небазисных переменных двойственной задачи, равны дополнительным переменным прямой задачи и читаются в строке целевой функции со знаком «+»:

$$u^{ДЗ\ НБ} = \boldsymbol{y}^{ПЗ\ БП} = +\lambda_j^{ДЗ};$$

$$u_2^{ДЗ\ БП} = \boldsymbol{y}_2^{ПЗ\ НБП} = \mathbf{340};$$
$$u_4^{ДЗ\ НБ} = \boldsymbol{y}_4^{ПЗ\ БП} = \mathbf{175};$$
$$u_5^{ДЗ\ НБ} = \boldsymbol{y}_5^{ПЗ\ БП} = \mathbf{560};$$
$$u_1^{ДЗ\ НБ} = \boldsymbol{y}_1^{ПЗ\ БП} = \mathbf{355}.$$

4. Базисные переменные двойственной задачи соответствуют небазисным переменным прямой задачи, значения которых равны нулю. (рис. 3).

Прямая задача

Равны положительному значению коэффициентов целевой функции ДЗ						Равны нулю			Равно значению ЦФ ДЗ
x_1 = 400	x_2 = **35**	x_3 = **120**	y_4 = **175**	y_5 = **560**	y_1 = **355**	y_6 = **0**	y_2 = **0**	y_3 = **0**	$F_{\max}$ = = 3925
Базисные переменные						Небазисные переменные			
x_1	x_2	x_3	y_4	y_5	y_1	y_6	y_2	y_3	$F_{\max}$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
y_1	y_2	y_3	u_4	u_5	u_1	u_6	u_2	u_3	$F_{\min}$
Небазисные переменные						Базисные переменные			

Двойственная задача

Рис. 3. Схема нахождения решения *прямой задачи*
по последней итерации двойственной задачи

Также по последней таблице прямой задачи можно определить результат решения двойственной задачи (табл. 3.2, рис. 4).

Т а б л и ц а 3.2. **Оптимальное решение прямой задачи**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_6	y_2	y_3
x_1	400	0,3	1,3	0,7
x_2	35	0	–1	0
x_3	120	0	0	–1
y_4	175	–0,7	–0,7	2,7
y_5	560	–0,3	2,7	4,3
y_1	355	0,3	1,3	0,7
F_{max}	3925	2,7	3,7	1,3

Прямая задача

Базисные переменные						Небазисные переменные			
x_1	x_2	x_3	y_4	y_5	y_1	y_6	y_2	y_3	F_{max}
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
y_1	y_2	y_3	$\boldsymbol{u_4}$	$\boldsymbol{u_5}$	$\boldsymbol{u_1}$	$\boldsymbol{u_6}$	$\boldsymbol{u_2}$	$\boldsymbol{u_3}$	$\boldsymbol{F_{min}}$
Небазисные переменные						Базисные переменные			
Равны нулю						Равны положительному значению коэффициентов целевой функции ПЗ			Равно значению ЦФ ПЗ
$\boldsymbol{y_1 = 0}$	$\boldsymbol{y_2 = 0}$	$\boldsymbol{y_3 = 0}$	$\boldsymbol{u_4 = 0}$	$\boldsymbol{u_5 = 0}$	$\boldsymbol{u_1 = 0}$	$\boldsymbol{u_6 = 2{,}7}$	$\boldsymbol{u_2 = 3{,}7}$	$\boldsymbol{u_3 = 1{,}3}$	$\boldsymbol{F_{min} = 3925}$

Двойственная задача

Рис. 4. Схема нахождения решения *двойственной задачи*
по последней итерации прямой задачи

Итак, расчет двойственных оценок для ресурсов и продуктов по каждому предприятию позволяет провести детальный экономический анализ:

во-первых, оценки позволяют соизмерять разнокачественные затраты и результаты, с их помощью можно оценивать последовательность проведения различных мероприятий с учетом их влияния на критерий оптимальности;

во-вторых, двойственные оценки позволяют определить нормы заменяемости между ресурсами и продуктами, но так как замена одного ресурса другим возможна в определенных границах, то речь идет об относительной заменяемости с учетом влияния на конечный результат;

в-третьих, оценки дают возможность расположить продукты по степени их эффективности.