Т е м а 2. АЛГОРИТМ СИМПЛЕКСНОГО МЕТОДА

В экономике отдельные стороны функционирования некоторого экономического объекта можно описать количественно, т. е. в виде уравнений или неравенств. Наиболее распространено использование для этих целей задач линейной оптимизации.

Линейная оптимизация – это раздел оптимизации, включающий теорию и методы отыскания экстремума линейных функций многих переменных при линейных ограничениях, налагаемых на эти переменные.

В общем виде задача линейной оптимизации может быть сформулирована, как задача нахождения наибольшего значения линейной функции:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ge b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$
$$F_{\max\,(\min)} = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$

где x_j – неизвестные (искомые) величины;

c_j, a_{ij}, b_i – заданные действительные числа;

c_j – коэффициенты целевой строки;

b_i – свободные члены;

a_{ij} – технико-экономические коэффициенты ограничений задачи;

j – номер столбца (переменной);

i – номер строки (ограничения).

Поскольку речь идет о реальных объектах, то переменные должны быть неотрицательные: $x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$.

Эквивалентная запись задачи с использованием знака суммирования выглядит следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ \{\le, \ge, =\}\ b_i, \qquad i = \overline{1,m};$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$
$$F_{\max\,(\min)} = \sum_{j=1}^{n} c_j\ x_j.$$

Функция $F_{\max\,(\min)}$ называется целевой функцией (ЦФ) и является математическим выражением критерия оптимальности.

Критерий оптимальности (критерий оптимизации) − это показатель решения задачи, по значению которого оценивается оптимальность найденного решения, т. е. максимальное удовлетворение поставленным требованиям. Например, при оптимизации программы работы торгового объекта в качестве критерия оптимальности можно использовать прибыль от реализации.

На основании выбранного критерия оптимальности составляется ***целевая функция***, представляющая собой зависимость критерия оптимальности от параметров, влияющих на ее значение. Другими словами, целевая функция – это математическое выражение критерия оптимальности. Например, если критерий оптимальности – прибыль от реализации, то математически запись целевой функции может иметь несколько вариантов:

$$F_{\max} = x_i - y_i,$$

где x_i, y_i – соответственно выручка от реализации продукции и себестоимость реализуемой продукции, а формула их расчета заранее задается в ограничениях задачи;

$$F_{\max} = \sum_{i \in I_1}((c_i - s_i) \cdot \tilde{x}_i),$$

где c_i, s_i – соответственно цена реализации и себестоимость единицы реализуемой продукции;

$\tilde{x}_i$ – объем реализации продукции;

i, I_1 – номер и множество видов реализованной продукции.

Вид целевой функции определяется конкретной задачей оптимизации, т. е. задача сводится к нахождению экстремума (минимума или максимума) целевой функции.

Решение задачи (план) называется допустимым (опорным), если выполняются все ограничения задачи.

Допустимый план **будет оптимальным**, если достигается экстремальное значение целевой функции.

Классическим методом решения задачи линейного программирования стал симплексный метод, получивший также в литературе название метода последовательного улучшения плана.

Симплексный метод – это вычислительная процедура, основанная на принципе улучшения решений, т. е. переход от одного опорного решения к другому, для которого значение целевой функции экстремально (стремится к минимуму или максимуму). Эти операции (итерации) фиксируют в симплексных таблицах.

Само название метод получил от термина «симплекс» – это выпуклый многоугольник в n-мерном пространстве с $n + 1$ вершинами, не лежащими в одной гиперплоскости. Симплекс выделен в отдельный класс потому, что в n-мерном пространстве n точек всегда лежит в одной гиперплоскости. В конечном итоге он представляет собой простейший многоугольник, содержащий некоторый объем n-мерного пространства.

Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то оно соответствует хотя бы одной угловой точке многогранника решений и совпадает по крайней мере с одним из допустимых базисных решений системы ограничений. Суть решения любой задачи линейного программирования: перебрать конечное число допустимых базисных решений системы ограничений и выбрать среди них то, на котором целевая функция принимает оптимальное решение. Геометрически это соответствует перебору всех угловых точек многогранника решений. Такой перебор в конце концов приведет к оптимальному решению.

Число перебираемых допустимых базисных решений можно сократить, если проводить перебор не беспорядочно, а с учетом изменений линейной функции, т. е. добиваясь того, чтобы каждое следующее решение было «лучше» (или по крайней мере «не хуже»), чем предыдущее, по значениям линейной функции (увеличение ее при отыскании максимума $F \to \max$, уменьшение – при отыскании минимума $F \to \min$).

Такой перебор позволяет сократить число шагов при отыскании оптимума. Поясним это на графическом примере.

Пусть область допустимых решений изображается многоугольником *ABCDEGH* (рис. 1).

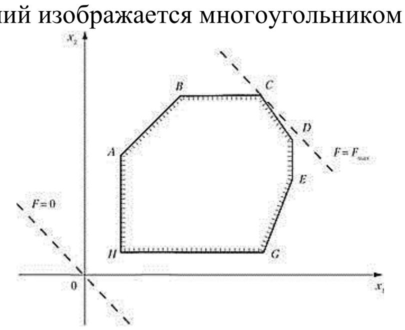


Рис. 1. Многоугольник (симплекс)

Предположим, что его угловая точка *A* соответствует исходному допустимому базисному решению. При беспорядочном переборе пришлось бы испытать семь допустимых базисных решений, соответствующих семи угловым точкам многоугольника. Однако из чертежа видно, что после вершины *A* выгодно перейти к соседней вершине *B*, а затем к оптимальной точке *C*.

Вместо семи перебрали только три вершины, последовательно улучшая линейную функцию.

Идея последовательного улучшения решения легла в основу симплексного метода.

Итак, геометрический смысл симплексного метода состоит в последовательном переходе от одной вершины многогранника ограничений (называемой первоначальной) к соседней, в которой линейная функция принимает лучшее (по крайней мере не худшее) значение (по отношению к цели задачи), до тех пор пока не будет найдено оптимальное решение – вершина, где достигается оптимальное значение функции цели (если задача имеет конечный оптимум).

Впервые симплексный метод был предложен американским ученым Дж. Данцигом в 1949 г., однако еще в 1939 г. идеи метода были разработаны российским ученым Л. В. Канторовичем.

Симплексный метод, позволяющий решить любую задачу линейного программирования, универсален. В настоящее время он используется для компьютерных расчетов, однако несложные примеры с применением симплексного метода можно решить и вручную.

Для использования симплексного метода задача линейного программирования должна быть приведена к каноническому виду, т. е. система ограничений должна быть представлена в виде уравнений. Алгоритм конкретной вычислительной реализации симплексного метода рассмотрим на примере.

Этапы решения задач симплексным методом:

1. Составление начального плана (исходного решения).

1.1. Вводим переменные и составляем ограничения задачи.

1.2. Переносим все неизвестные величины в левую часть ограничений, известные – в правую. Выполняем действия с подобными. Приводим все ограничения к виду «≤». Для этого ограничения типа «≥» умножаем на –1.

1.3. Превращаем неравенства в уравнения. Для этого вводим дополнительные переменные y_i, где i –

номер ограничения. Дополнительных переменных вводим столько, сколько ограничений. С экономической точки зрения дополнительные переменные обозначают величину недоиспользования ресурсов, если исходные ограничения имеют вид «$\leq$», или обозначают величину превышения сверх минимума, если исходные ограничения имеют вид «$\geq$».

1.4. Заносим информацию в первую симплексную таблицу, при этом коэффициенты целевой строки записываем с противоположным знаком.

Исходное решение симплексной задачи – допущение, что все переменные x_j = 0 и их первоначально относим к небазисным. Получим, что $y_1 = b_1$, $y_2 = -b_2$, $y_m = b_m$, $0 = b_3$, $F = 0$.

Чертим симплексную таблицу № 1, в которой число столбцов и строк на две единицы больше количества небазисных переменных x (n) и ограничений m (табл. 1).

Т а б л и ц а 1. **Симплексная таблица № 1**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		x_1	x_2	…	x_n
y_1	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
y_2	$-b_2$	$-a_{21}$	$-a_{22}$	…	$-a_{2n}$
0	b_3	a_{31}	a_{32}	…	a_{3n}
…	…	…	…	…	…
y_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}
F	0	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$

2. Поиск опорного (допустимого) плана (решения).

Поиск опорного решения начинаем с допущения, что искомые переменные равны нулю, т. е. x_j = 0. Тогда, подставив эти значения в уравнения системы, получим значение дополнительных переменных y_i, равное свободным членам задачи. Признаком наличия опорного (допустимого) решения будут положительные свободные члены. При наличии хотя бы одного отрицательного свободного члена опорное решение будет отсутствовать.

Итак, в табл. 1 опорного решения нет, так как есть отрицательный свободный член и число 0 приравнено к действительному числу.

Решение начинаем с переброса нуля из базисных переменных в небазисные. В нулевой строке ищем коэффициент, который покажет, какая из небазисных переменных поменяется местами с базисной переменной. Для этого делим столбец свободных членов на соответствующие коэффициенты вектор-столбца небазисной переменной. Если от деления на коэффициент, стоящий в 0-строке, получим наименьшее положительное частное, то этот коэффициент разрешающий.

Допустим $\dfrac{b_3}{a_{31}} > \dfrac{b_1}{a_{11}}$; продолжаем $\dfrac{b_3}{a_{32}} > \dfrac{b_m}{a_{m2}}; \dfrac{b_3}{a_{3n}} < \dfrac{b_1}{a_{1n}}, \dfrac{b_2}{a_{2n}}, \dfrac{b_m}{a_{mn}}$. Значит a_{3n} – разрешающий элемент, который показывает, что базисное значение 0 и небазисная переменная x_n должны поменяться местами. Замена переменных предполагает поиск нового базиса и требует проведения вычислений. Чтобы записать правило, введем обозначение: a_{ij} – коэффициент, стоящий в строке i и столбце j. Тогда a_{rk} – разрешающий коэффициент, где $r \in i, k \in j$.

Новый коэффициент вместо разрешающего равен:

$$a'_{rk} = \frac{1}{a_{rk}}.$$

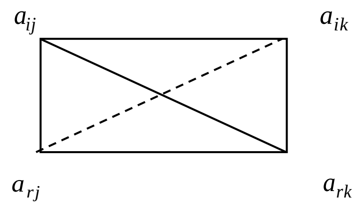
Новые коэффициенты разрешающей строки:

$$a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}}, (k \neq j).$$

Новые коэффициенты разрешающего столбца:

$$a'_{ik} = -\frac{a_{ik}}{a_{rk}}, (i \neq r).$$

Новые коэффициенты, не стоящие в строке и столбце разрешающего элемента, определяем по правилу прямоугольника: от произведения коэффициентов главной диагонали (образуют искомый элемент и разрешающий элемент) вычитаем произведение коэффициентов побочной диагонали и делим на разрешающий элемент:



$$a'_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rk} - a_{rj} \cdot a_{ik}}{a_{rk}}; (r \neq i, k \neq j).$$

Результаты заносим в симплексную таблицу № 2 (табл. 2).

Т а б л и ц а 2. **Симплексная таблица № 2**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		x_1	x_2	…	0
y_1	b'_1	a'_{11}	a'_{12}	…	$-a'_{1n}$
y_2	$-b'_2$	$-a'_{21}$	$-a'_{22}$	…	a'_{2n}
x_n	b'_3	a'_{31}	a'_{32}	…	a'_{3n}
…	…	…	…	…	…
y_m	b'_m	a'_{m1}	a'_{m2}	…	$-a'_{mn}$
F	F_1	$-c'_1$	$-c'_2$	…	c'_n

После этого вычеркиваем нулевой столбец. Это означает, что при дальнейшем решении экстремум функции будем искать на ребре или плоскости многогранника решений, которое определено третьим уравнением.

Опорного решения нет (имеется отрицательный свободный член).

Берем за основу любую строку с отрицательным свободным членом. В ней находим отрицательные коэффициенты. Делим столбец свободных членов на соответствующие коэффициенты столбца небазисной переменной. Если от деления на выбранный нами отрицательный элемент получили наименьшее положительное частное, то он будет разрешающим коэффициентом.

Допустим $\frac{-b'_2}{-a'_{21}} > \frac{b'_1}{a'_{11}}; \frac{-b'_2}{-a'_{22}} < \frac{b'_1}{a'_{12}}, \frac{b'_3}{a'_{32}}, \frac{b'_m}{a'_{m2}}$.

Значит $-a'_{22}$ – разрешающий коэффициент. Далее строим новую симплексную таблицу № 3 (табл. 3), в которой после выполнения всех расчетов имеется опорное решение.

3. Поиск оптимального решения. Его признаком являются положительные коэффициенты целевой функции (c_j) при решении на максимум и отрицательные при решении на минимум. Если в F строке при решении на максимум имеется несколько отрицательных коэффициентов, то в качестве разрешающего берем столбец с наибольшим по модулю отрицательным значением, а при решении на минимум берем столбец с наибольшим положительным значением F строки.

Допустим, $\left|-\bar{c}_2\right| > \left|-\bar{c}_1\right|$, значит y_2 – разрешающий столбец. Разрешающий элемент получим от деления столбца свободных членов на коэффициенты разрешающего столбца и поиска наименьшего положительного частного.

Т а б л и ц а 3. **Симплексная таблица № 3**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		x_1	y_2
y_1	$\bar{b}_1$	$\bar{a}_{11}$	$\bar{a}_{12}$
x_2	$\bar{b}_2$	$\bar{a}_{21}$	$\bar{a}_{22}$
x_n	$\bar{b}_3$	$\bar{a}_{31}$	$\bar{a}_{32}$
…	…	…	…
y_m	$\bar{b}_m$	$\bar{a}_{m1}$	$\bar{a}_{m2}$
F	F_1	$-\bar{c}_1$	$-\bar{c}_2$

Допустим $\bar{a}_{32}$ – разрешающий коэффициент. Проводим вычисления. Если в следующей таблице коэффициенты целевой строки положительные, решение является оптимальным.

Примечание.

1. Если в F-строке имеется хотя бы один 0, то это означает, что возможно бесчисленное число решений, т. е. экстремум достигнут на ребре или полупространстве.

2. При поиске опорного решения может получиться, что столбцу отрицательных свободных членов соответствуют в каком-либо столбце небазисных переменных отрицательные коэффициенты. В этом случае в качестве разрешающего можно взять коэффициент, от деления на который получим наибольшее положительное частное. В результате за один шаг получим опорное решение.

Пример. Агрокомбинат планирует выпуск трех новых видов сыров. Предприятие располагает следующими ресурсами: 1560 чел.-ч, 1700 кВт/ч и 1580 у. д. е. Установлены минимальные объемы производства: сыр № 1 – 45 ц, № 2 – 35 ц и № 3 – 120 ц за период. Расход ресурсов и эффективность производства различных видов сыров по ассортименту в расчете на 1 ц даны в табл. 4.

Т а б л и ц а 4. **Экономические параметры производства сыров**

Показатели	Номенклатура сыров		
	№ 1	№ 2	№ 3
Расход трудовых ресурсов, чел.-ч	2	3	4
Расход электроэнергии, кВт/ч	1	4	5
Привлечение денежных кредитов, у. д. е.	3	4	2
Прибыль от реализации, у. д. е.	8	7	4

Найти оптимальное решение задачи, проанализировав полученную программу выпуска новых видов сыров с целью получения максимальной прибыли.

Решение.

1-й этап. ***Составление начального плана (исходного решения).***

1.1. Вводим неизвестные и составляем ограничения:

Неизвестные:

x_1 – объем производства сыра № 1, ц;

x_2 – объем производства сыра № 2, ц;

x_3 – объем производства сыра № 3, ц.

Ограничения экономико-математической задачи:

1) по минимальному объему производства сыра № 1, ц:

$$x_1 \geq 45;$$

2) по минимальному объему производства сыра № 2, ц:

$$x_2 \geq 35;$$

3) по минимальному объему производства сыра № 3, ц:

$$x_3 \geq 120;$$

4) по использованию трудовых ресурсов, чел.-ч:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 1560;$$

5) по использованию электроэнергии, кВт/ч:

$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 1700;$$

6) по освоению кредитных средств, у. д. е.:

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1580.$$

Целевая функция – максимум прибыли:

$$F_{max} = 8x_1 + 7x_2 + 4x_3.$$

1.2. Переносим все неизвестные величины в левую часть ограничений, известные – в правую. Выполняем действия с подобными. (В данном примере этого делать не нужно).

Приводим все ограничения к виду «$\leq$».

1–3 ограничения умножаем на (–1) и меняем знак ограничения на противоположный. Все остальные ограничения оставляем без изменений.

1) $-x_1 \leq -45$;
2) $-x_2 \leq -35$;
3) $-x_3 \leq -120$;
4) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 1560$;
5) $x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 1700$;
6) $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1580$.
$F_{max} = 8x_1 + 7x_2 + 4x_3$.

1.3. Превращаем неравенства в уравнения. Для этого вводим дополнительные переменные y_i, где i – номер ограничения.

Напоминаем, что с экономической точки зрения дополнительные переменные обозначают величину недоиспользования ресурсов, если исходные ограничения имеют вид «≤», или обозначают величину превышения сверх минимума, если исходные ограничения имеют вид «≥»).

1) $-x_1 + y_1 = -45$;
2) $-x_2 + y_2 = -35$;
3) $-x_3 + y_3 = -120$;
4) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + y_4 = 1560$;
5) $x_1 + 4x_2 + 5x_3 + y_5 = 1700$;
6) $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + y_6 = 1580$.
$F_{max} = 8x_1 + 7x_2 + 4x_3$.

1.4. Информацию заносим в первую симплексную таблицу (табл. 5).

Т а б л и ц а 5. **Первая симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	x_3
y_1	–45	–1	0	0
y_2	–35	0	–1	0
y_3	–120	0	0	–1
y_4	1560	2	3	4
y_5	1700	1	4	5
y_6	1580	3	4	2
F_{max}	0	–8	–7	–4

П р и м е ч а н и е. Коэффициенты целевой строки в первую симплексную таблицу заносим с противоположным знаком.

2-й этап. *Поиск опорного (допустимого) решения.*

Напоминаем, что решение будет опорным (допустимым), если среди базисных переменных будут отсутствовать нули и все значения свободных членов будут положительными.

Так как в первой симплексной таблице (табл. 5) среди свободных членов есть отрицательные, следовательно, опорного решения нет.

Для поиска опорного решения применяем следующую методику:

1) в столбце свободных членов находим отрицательный (если их несколько, берем любой). Например: –45;

2) в строке выбранного отрицательного свободного члена находим отрицательный коэффициент (если их несколько, берем любой). Здесь он равен –1;

3) путем деления коэффициентов столбца свободных членов на коэффициенты столбца с выбранным отрицательным элементом находим положительные значения, среди которых выбираем наименьшее. Оно и покажет, где будет разрешающий коэффициент:

$$\min\left(\frac{-45}{-1};\ \frac{1560}{2};\ \frac{1700}{1};\ \frac{1580}{3}\right) = = \min(45;\ 780;\ 1700;\ 527) = 45.$$

Разрешающий коэффициент –1 показывает, какая из небазисных переменных заменит базисную, т. е. x_1 и y_1 меняются местами.

Далее находим значения новых элементов для второй симплексной таблицы (табл. 6).

Новый элемент вместо разрешающего равен единице, деленной на разрешающий элемент. В нашем случае единицу делим на –1.

Новые элементы разрешающей строки находим делением старых на разрешающий элемент:

$$\frac{-45}{-1} = 45;\ \frac{0}{-1} = 0;\ \frac{0}{-1} = 0.$$

Новые элементы разрешающего столбца находим делением старых на разрешающий элемент, но с противоположным знаком:

$$\frac{0}{-(-1)} = 0;\ \frac{2}{-(-1)} = 2;\ \frac{1}{-(-1)} = 1;\ \frac{1}{-(-1)} = 1;\ \frac{3}{-(-1)} = 3;\ \frac{-8}{-(-1)} = -8.$$

Все остальные элементы находим по правилу прямоугольника: от произведения элементов главной диагонали (содержит разрешающий) отнимаем произведение элементов побочной диагонали и полученный результат делим на разрешающий элемент:

$$\frac{(-1)\cdot(-35)-(-45)\cdot 0}{-1} = -35;\ \frac{(-1)\cdot(-120)-(-45)\cdot 0}{-1} = -120;$$

$$\frac{(-1)\cdot 1560-(-45)\cdot 2}{-1}=1470;\ \frac{(-1)\cdot 1700-(-45)\cdot 1}{-1}=1655;$$
$$\frac{(-1)\cdot 1580-(-45)\cdot 3}{-1}=1445;\ \frac{(-1)\cdot 0-(-45)\cdot(-8)}{-1}=360;$$
$$\frac{(-1)\cdot(-1)-0\cdot 0}{-1}=-1;\ \frac{(-1)\cdot 0-0\cdot 0}{-1}=0;\ \frac{(-1)\cdot 3-2\cdot 0}{-1}=3.$$

Примечание. Если произведение элементов побочной диагонали равно нулю, значение искомого элемента остается без изменений.

Все остальные элементы также находим по правилу прямоугольника.

Результаты расчетов записываем во вторую симплексную таблицу (табл. 6).

Таблица 6. **Вторая симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_1	x_2	x_3
x_1	45	–1	0	0
y_2	–35	0	–1	0
y_3	–120	0	0	–1
y_4	1470	2	3	4
y_5	1655	1	4	5
y_6	1445	3	4	2
F_{max}	360	-8	–7	–4

Во второй симплексной таблице (табл. 6) опорное решение не найдено, так как среди свободных членов есть отрицательные значения. Следовательно, среди отрицательных свободных членов выбираем любой. Например (−35), в этой строке берем отрицательный элемент (−1). Находим наименьшее частное от деления свободных членов на коэффициенты столбца с выбранным отрицательным элементом:

$$\min\left(\frac{-35}{-1};\ \frac{1470}{3};\ \frac{1655}{4};\ \frac{1445}{4}\right)=\min(35;\ 490;\ 414;\ 361)\ =35.$$

Итак, разрешающий коэффициент –1 показывает, какая из небазисных переменных (x_2) заменит базисную (y_2).

Далее находим значения новых элементов для третьей симплексной таблицы (табл. 7) по ранее рассмотренным правилам.

Таблица 7. **Третья симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_1	y_2	x_3
x_1	45	–1	0	0
x_2	35	0	–1	0
y_3	–120	0	0	–1
y_4	1365	2	3	4
y_5	1515	1	4	5
y_6	1305	3	4	2
F_{max}	605	–8	–7	–4

В третьей симплексной таблице (табл. 7) нет опорного решения, следовательно снова определяем разрешающий элемент и рассчитываем элементы четвертой симплексной таблицы (табл. 8).

Таблица 8. **Четвертая симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_1	y_2	y_3
x_1	45	–1	0	0
x_2	35	0	–1	0
x_3	120	0	0	–1
y_4	885	2	3	4
y_5	915	1	4	5
y_6	1065	3	4	2
F_{max}	1085	–8	–7	–4

В четвертой симплексной таблице (табл. 8) все свободные члены положительные, следовательно, опорное решение найдено.

3-й этап. *Поиск оптимального решения*.

При решении на максимум оптимальным будет решение, если все коэффициенты целевой функции являются положительными, или при решении на минимум − отрицательными.

Итак, в четвертой симплексной таблице (табл. 8) нет оптимального решения, так как при решении на максимум все коэффициенты целевой строки должны быть положительными, а в таблице присутствуют отрицательные.

В качестве разрешающего берем столбец с наибольшим по модулю отрицательным значением (при решении на минимум берем столбец с наибольшим положительным значением F-строки):

$$\max \left| -8; -7; -4 \right| = -8.$$

После этого делим столбец свободных членов на элементы разрешающего столбца и там, где наименьшее положительное значение, будет разрешающий элемент:

$$\min\left(\frac{885}{2}; \frac{915}{1}; \frac{1065}{3}\right) = \min\,(442; 915; 355) = 355.$$

Значит, разрешающий элемент равен 3, следовательно, в пятой симплексной таблице меняем местами небазисную переменную y_1 на базисную y_6 (табл. 1.9).

Согласно ранее приведенным правилам находим элементы новой таблицы.

Т а б л и ц а 9. **Пятая симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_6	y_2	y_3
x_1	400	0,3	1,3	0,7
x_2	35	0	–1	0
x_3	120	0	0	–1
y_4	175	–0,7	–0,7	2,7
y_5	560	–0,3	2,7	4,3
y_1	355	0,3	1,3	0,7
F_{max}	3925	2,7	3,7	1,3

В пятой симплексной таблице (табл. 9) все коэффициенты целевой строки положительные (F_{max}), следовательно, оптимальное решение получено.

Значения базисных переменных равны свободным членам, а небазисных – нулю:

$$x_1 = 400;\ x_2 = 35;\ x_3 = 120;\ y_1 = 355;$$

$$y_2 = 0;\ y_3 = 0;\ y_4 = 175;\ y_5 = 560;\ y_6 = 0.$$

Чтобы исключить вероятность ошибок при расчетах, необходимо провести проверку, для этого значения переменных необходимо подставить в равенства:

1) $-x_1 + y_1 = -45;\ -400 + 355 = -45;$

2) $-x_2 + y_2 = -35;\ -35 + 0 = -35;$

3) $-x_3 + y_3 = -120;\ -20 + 0 = -120;$

4) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + y_4 = 1560;\ 2 \cdot 400 + 3 \cdot 35 + 4 \cdot 120 + 175 = 1560;$

5) $x_1 + 4x_2 + 5x_3 + y_5 = 1700;\ 400 + 4 \cdot 35 + 5 \cdot 120 + 560 = 1700;$

6) $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + y_6 = 1580;\ 3 \cdot 400 + 4 \cdot 35 + 2 \cdot 120 + 0 = 1580.$

$F_{max} = 8x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 8 \cdot 400 + 7 \cdot 35 + 4 \cdot 120 = 3925.$

Полученное оптимальное решение предусматривает производство сыров: № 1 – 400 ц, № 2 – 35 ц, № 3 – 120 ц ($x_1 = 400$; $x_2 = 35$; $x_3 = 120$). Производство сыров № 2 и № 3 запланировано на минимальном уровне ($y_2 = 0$; $y_3 = 0$), а превышение минимального объема производства по сыру № 1 составит 355 ц ($y_1 = 355$).

Полностью будут освоены кредитные средства ($y_6 = 0$), но будут недоиспользованы трудовые ресурсы на 175 чел.-ч и электроэнергия на 560 кВт/ч ($y_4 = 175$; $y_5 = 560$). Реализация предлагаемой программы обеспечит получение максимальной прибыли на сумму 3925 у. д. е. ($F_{max} = 3925$).

КОРРЕКТИРОВКА ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вследствие того, что экономические объекты отличаются динамичностью, их информация изменяется: изменяются ресурсы, технология, а, значит, и окупаемость ресурсов. В связи с этим полученное ранее оптимальное решение может потребовать корректировки, т.е. увеличить или уменьшить размеры отрасли, ввести новые или исключить ранее выгодные отрасли, которые становятся убыточными. Чтобы не решать задачи вновь можно произвести корректировку оптимального решения. Для этого используем информацию последней симплексной таблицы. В ней на основе коэффициентов пропорциональности можем произвести все необходимые изменения. При этом коэффициентами пропорциональности называют коэффициенты симплекс-таблицы начиная со второй, которая количественно выражает взаимосвязи переменных между собой и с ресурсами.

Т а б л и ц а 10 **Последняя симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены, B_i	Небазисные			
		y_1	y_2	x_3	y_4
x_1	800	2	–0,066	0,66	0,026
x_2	200	–1	0,066	0,34	–0,026
y_3	2000	–300	–50	–100	–4,4
x_4	420	0,56	–0,017	–0,85	0,032
F	780000	200	26,7	136	9,3

Корректировку оптимального решения осуществляем по формуле:

$$x_j^k(y_i^k) = x_j(y_i) - \sum_{j \in J_1} a_{ij} \Delta x_j (\Delta y_i),$$

где $x_j^k(y_i^k)$ – значения основных (дополнительных) переменных после корректировки;

$x_j(y_i)$ – значения основных (дополнительных) переменных до корректировки;

j – номер столбца, участвующего в корректировке;

J_1 – множество столбцов, участвующих в корректировке, т.е. по которым производится данная корректировка;

a_{ij} – коэффициенты пропорциональности (вектор-столбца, участвующего в корректировке);

$\Delta x_j(\Delta y_i)$ – величина корректировки по основной или дополнительной переменной.

Корректировка может производиться по небазисным и базисным переменным, а среди них – по основным и дополнительным переменным.

I. Корректировка по небазисным основным переменным.

Корректировка по основным небазисным переменным (т.е. переменные, не вошедшие в план, в нашем случае это – x_3). При изменении цен или технологий не вошедшие в план (т.е. невыгодные) отрасли могут стать выгодными и их следует ввести в базис. Введение предполагает изменение размеров других отраслей, использования ресурсов и экономических резервов.

Методика корректировки оптимального решения следующая.

1. Из числа небазисных основных переменных берем те, по которым наметилось наибольшее возрастание эффекта или наиболее существенное изменение в технологии.

2. Находим максимальную величину корректировки

$$\max \Delta x_j = \min \frac{A_i}{a_{ij}},$$

где $\max \Delta x_j$ – минимальное положительное частное от деления свободных членов на коэффициенты пропорциональности столбца, по которому делаем корректировку.

3. Придаем значению Δx_j величину, не превышающую максимальную допустимую.

4. По общей формуле находим новое решение.

В нашем примере среди небазисных одна основная переменная x_3 (площадь посева картофеля).

$$\max \Delta x_3 = \min \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{800}{0,66} = 1200 \\ \dfrac{200}{0,34} = 600 \end{array} \right\} = 600 \cdot$$

Допустим, что наши возможности, исходя из наличия семян или потребности рынка, или новых договорных поставок, составляют, что Δx_3 должно быть равно 100.

Тогда новое решение составит

$$\Delta x_3 = x_3 = 100,$$

$$x_1^k = 800 - 0,66 \cdot 100 = 734,$$

$$x_2^k = 200 - 0,34 \cdot 100 = 166,$$

$$y_3^k = 2000 - (-100) \cdot 100 = 12000,$$

$$x_4^k = 420 - (-0,86) \cdot 100 = 506$$

$$F^k = 780000 - 136 \cdot 100 = 766400.$$

Если проверить по ограничениям, то получится, что объем ресурсов используется полностью, но введение в план площади картофеля 100 га приводит к уменьшению целевой функции (прибыли, что не выгодно с экономической точки зрения).

II. Корректировка по небазисным дополнительным переменным.

А) Ресурсы уменьшаются, если $\Delta y_i = y_i > 0$.

Например, имеем ограничение по использованию пашни

$$x_1 + x_2 + x_3 + y_1 = 1000.$$

$\sum x_1, x_2, x_3$ была максимальной и равно 1000, при этом $y_1 = 0$.

Если y_1 возрастал, то величина справа и слева уменьшилась, т.е. ресурс уменьшился.

Методика корректировки следующая.

1. Выбираем дополнительную переменную, которая стоит в ограничении по использованию того ресурса, который уменьшился или должен уменьшиться.
2. Максимальная величина определяется так же, как и в предыдущем случае.
3. Δy_i придаем значение в рамках возможного, которое определяет величину уменьшения ресурса.
4. Новое решение определяют по основной формуле корректировки.

Допустим, например, что создается фермерское хозяйство, площадью 150 га, т.е. $\Delta y_1 = y_1 = 150$. Тогда в кооперативе, с площадью пашни 1000 га происходит уменьшение ресурса.

Б) Ресурсы увеличиваются, если $\Delta y_i = y_i \le 0$.

Методика корректировки следующая.

1. Находим ресурс по которому возможно увеличение.
2. Находим максимальную величину корректировки

$$\max \Delta y_i = \min \left| -\frac{A_i}{a_{ij}} \right| .$$

Она равна минимальному по модулю отрицательному частному от деления свободных членов на коэффициенты пропорциональности столбца, по которому делаем корректировку.

3. Придаем значению Δy_i величину корректировки со знаком «–» меньшую по модулю, чем максимально возможная.
4. На основе основной формулы корректировки осуществляем корректировку.

Допустим, что в предприятии может возрасти площадь пашни, т.е. $y_1 < 0$:

$$\frac{200}{-1} = -200;\ \frac{2000}{-300} = -6{,}6;\ \max \Delta y_i = -6{,}6 .$$

Допустим, что фермерское хозяйство взяло у предприятия в аренду 5 га пашни: тогда $\Delta y_1 = -5$.

Значения остальных переменных получаем по изложенной выше методике.

III. Корректировка по базисным переменным.

Необходимость корректировки по базисным переменным может диктоваться тем, что ранее отработанные технологии изменяются, или изменяются подходы к развитию отдельных отраслей.

Например, ранее Республика Беларусь ориентировалась на то, чтобы площадь зерновых не превышала 50% и часть зерна при этом закупали.

Потребность в валюте вынуждает увеличить долю кормов от сенокосов и пастбищ для увеличения производства кормов, а освободившуюся часть пашни (до 10%) использовать для производства зерна. Случай другой – экологическая безопасность. Технология очистки отходов животноводческих комплексов несовершенна. Поэтому актуальна проблема строительства не крупных, а средних животноводческих комплексов. Этому способствует и то обстоятельство, что животноводство надо развивать на собственных кормах.

Изложенное подчеркивает, что после получения решения может потребоваться увеличение площади зерновых или уменьшение поголовья животных.

1. Выбираем небазисные переменные, которые будут участвовать в корректировке. Выбираем основные переменные в случае, если корректировка не должна предположить уменьшение какого-то ресурса.
2. По данным общей формулы корректировки находим какой должна быть величина $\Delta x_j(\Delta y_i)$ с тем, чтобы базисная переменная $x_j^k(y_i^k)$ приняла новое значение

$$x_j^k(y_i^k) = x_j(y_i) - a_{ij}\Delta x_j(\Delta y_i),\ j = 1.$$

Задаем значение $x_j^k(y_i^k)$ и определяем величину $\Delta x_j(\Delta y_i)$

$$\Delta x_j(\Delta y_i) = \frac{x_j(y_i) - x_j^k(y_i^k)}{a_{ij}}.$$

3. Находим максимальную величину корректировки по небазисной переменной, взятой для корректировки:

$$\max \Delta x'_j(\Delta y'_i) = \min \frac{A_i}{a_{ij}};$$

а) если получится, что $\Delta x'_j(\Delta y'_i) > \Delta x_j(\Delta y_i)$, т.е. максимально возможная величина превышает требуемую, то в этом случае корректировку осуществляем, используя только один столбец;

б) если это требование не соблюдается, т.е. $\Delta x'_j(\Delta y'_i) < \Delta x_j(\Delta y_i)$, т.е. максимально возможное значение меньше требуемой величины, то в корректировке участвует не менее двух вектор-столбцов дополнительных переменных.

При этом на первом этапе $\Delta x_j(\Delta y_i)$ принимаем в размере

$$\Delta x'_j(\Delta y'_i)\text{, т.е. } \Delta x_j(\Delta y_i) = \Delta x'_j(\Delta y'_i).$$

Например, корректировку необходимо провести, чтобы $x_j^k = x_j = 700$. Используя небазисную переменную x_k, можем осуществлять корректировку, после которой x_j может принять значение 650, x_j = 650.