

## «Основные характеристики магнитного поля. Закон Ампера»

### 1. Магнитное поле. Вектор индукции и напряженности магнитного поля.

В 19 веке опытным путем были исследованы законы взаимодействия постоянных магнитов и проводников, по которым пропускаться электрический ток. опыты показали, что подобно тому, как в пространстве, окружающем электрические заряды, возникает электростатическое поле, так и в пространстве, окружающем токи и постоянные магниты, возникает силовое поле, которое называется **магнитным**.

Были установлены два экспериментальных факта:

- 1) магнитное поле действует на движущиеся заряды;
- 2) движущиеся заряды создают магнитное поле.

При исследовании магнитного поля используется замкнутый плоский контур с током (**рамка с током**), линейные размеры которого малы по сравнению с расстоянием до токов, образующих магнитное поле.

Ориентация контура в пространстве характеризуется направлением нормали  $\vec{n}$  к контуру. В качестве положительного направления нормали принимается направление, связанное с током **правилом правого винта (правилом буравчика)**: *За положительное направление нормали принимается направление поступательного движения правого винта, головка которого вращается в направлении тока, текущего в рамке* (рис. 20.1).

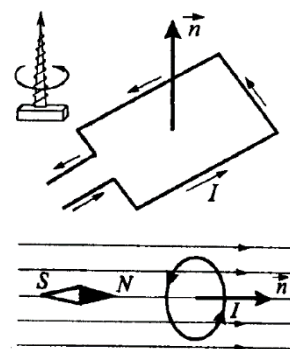


Рис. 20.1

Магнитное поле оказывает на рамку с током **ориентирующее действие**, поворачивая ее определенным образом. Это свойство используется для выбора направления магнитного поля.

За **направление магнитного поля** в данной точке принимается направление, вдоль которого располагается положительная нормаль к свободно подвешенной рамке с током, или направление, совпадающее с направлением силы, действующей на северный полюс (N) магнитной стрелки, помещенный в данную точку поля.

Аналогично тому, как силовая векторная характеристика электростатического поля — напряженность — определялась как сила, действующая на пробный заряд, **силовая характеристика магнитного поля** — **магнитная индукция**  $\vec{B}$  — определяется максимальным вращающим моментом, действующим на рамку с магнитным моментом, равным единице, когда нормаль к рамке перпендикулярна направлению поля.

$$|\vec{B}| = \frac{M_{max}}{p_m},$$

где  $\vec{p}_m = IS\vec{n}$  — вектор магнитного момента

Графически магнитное поле, так же как электрическое, изображают с помощью **линий магнитной индукции** — линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора  $\vec{B}$

Линии магнитной индукции **всегда замкнуты** и охватывают проводники с током, в то время, как линии электростатического поля — разомкнуты (они начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах).

Различают **макроскопические токи**, т.е. электрические токи, протекающие по проводникам в электрических цепях и **микроскопические токи**, обусловленных движением электронов в атомах и молекулах.

Намагниченность постоянных магнитов является следствием существованием в них микротоков.

Вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  характеризует результирующее магнитное поле, создаваемое всеми макро- и микротоками. Поэтому, при одном и том же макротоке, вектор  $\vec{B}$  в различных средах будет иметь разные значения. Магнитное поле макротока описывается **вектором напряженности магнитного поля**  $\vec{H}$ . В среде магнитное поле макротоков усиливается за счет поля микротоков среды.

Для однородной изотропной среды вектор магнитной индукции:  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ , где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м — магнитная постоянная,  $\mu$  — магнитная проницаемость среды.

## 2. Принцип суперпозиции магнитных полей. Закон Био–Савара–Лапласа.

Вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  — аналог вектора напряженности электростатического поля  $\vec{E}$ . Эти величины определяют силовые действия этих полей и зависят от свойств среды.

Аналогом вектора электрического смещения  $\vec{D}$  является вектор напряженности  $\vec{H}$  магнитного поля.

Для магнитного поля, как и для электрического, справедлив **принцип суперпозиции**: *магнитная индукция результирующего поля, создаваемого несколькими токами или движущимися зарядами, равна векторной сумме магнитных индукций полей, создаваемых каждым током или движущимся зарядом.*

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i$$

Например для двух векторов  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$

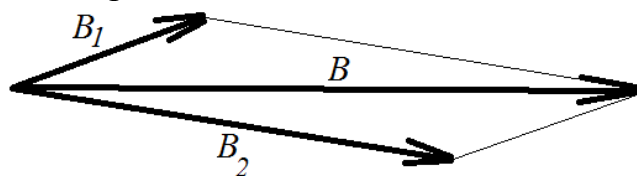
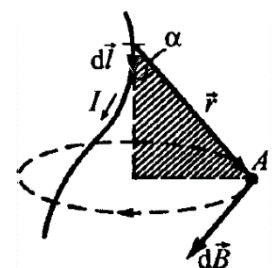


Рис. 20.2

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

**Закон Био-Савара-Лапласа:** Элемент проводника  $d\vec{l}$ , с током  $I$  создает в некоторой точке  $A$  индукцию поля:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu I [d\vec{l}, \vec{r}]}{4\pi r^3}$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный из элемента  $d\vec{l}$  проводника в точку  $A$  (рис. 20.3).

Направление  $d\vec{B}$  перпендикулярно  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ , и совпадает с касательной к линии магнитной индукции. Модуль вектора  $d\vec{B}$  определяется выражением

$$dB = \frac{\mu_0 \mu I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}$$

где  $\alpha$  угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ .

Рис. 20.3

### 3. Магнитное поле прямолинейного проводника с током, в центре кругового тока.

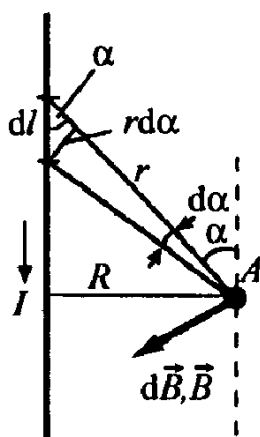


Рис. 20.4

Пусть ток течет по прямолинейному проводнику бесконечной длины (рис. 20.4). В качестве постоянной интегрирования выберем угол  $\alpha$

Из рисунка  $r = \frac{R}{\sin \alpha}$ ,  $dl = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha}$ . Следовательно  $dB = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi r} \sin \alpha d\alpha$ . Угол  $\alpha$  для всех элементов прямого провода изменяется от 0 до  $\pi$ . По принципу суперпозиции:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 \mu 2I}{4\pi R}$$

Или, индукция магнитного поля бесконечно длинного прямолинейного проводника с током:

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi R}$$

Если ток течет по отрезку провода (рис. 20.5), то

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

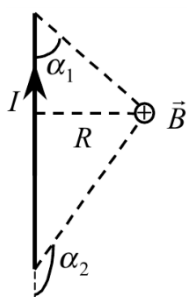


Рис. 20.5 витка.

Пусть ток протекает по круговому контуру радиуса  $R$  (рис. 20.6). Найдем индукцию магнитного поля в центре данного

В данном случае сложение векторов можно заменить сложением их модулей, учитывая  $\sin \alpha = 1$ ,  $r = R$ :

$$dB = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R^2} dl \text{ откуда}$$

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R^2} \int dl = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R^2} 2\pi R = \mu_0 \mu \frac{I}{2R}$$

Можно показать, что на расстоянии  $r$  от центра витка вдоль оси витка магнитное поле будет:

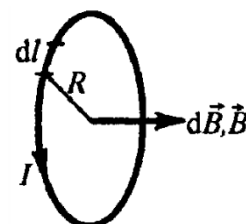


Рис. 20.6

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2} \frac{IR^2}{(\sqrt{R^2 + r^2})^3}$$

#### 4. Сила Ампера. Правило левой руки.

Действие магнитного поля на рамку с током — это пример воздействия магнитного поля на проводник с током. Ампер установил, что сила, с которой магнитное поле действует на элемент проводника  $dl$  с током, находящегося в магнитном поле, равна:

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]$$

где  $d\vec{l}$  — вектор по модулю равный  $dl$  и совпадающий по направлению с током,  $\vec{B}$  — вектор магнитной индукции

Для прямолинейного отрезка проводника, формулу силы Ампера в скалярном виде можно записать как

$$F = IB \sin \alpha$$

где  $\alpha$  — угол между направлением тока в проводнике и вектором индукции.

Наглядно направление силы Ампера принято определять по **правилу левой руки**: если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входил вектор  $\vec{B}$ , а четыре вытянутых пальца расположить по направлению тока в проводнике, то отогнутый большой палец покажет направление силы Ампера.

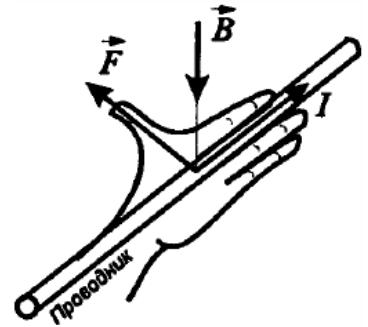


Рис. 20.7

Закон Ампера применяется для определения силы взаимодействия двух токов.

Два параллельных проводника с токами  $I_1$  и  $I_2$  находятся на расстоянии  $R$  друг от друга (рис. 20.8). Направление сил  $d\vec{F}_1$  и  $d\vec{F}_2$ , с которыми поля  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  действуют на проводники с токами  $I_2$  и  $I_1$ , определяются по правилу левой руки.

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu I_1}{2\pi R}, \quad dF_1 = I_2 B_1 dl.$$

Отсюда  $dF_1 = I_2 \frac{\mu_0 \mu I_1}{2\pi R} dl$ . Аналогично  $B_2 = \frac{\mu_0 \mu I_2}{2\pi R}$ ,  $dF_2 = I_1 B_2 dl$ ,

$$dF_1 = I_1 \frac{\mu_0 \mu I_2}{2\pi R} dl.$$

$$\text{Таким образом, } dF_1 = dF_2 = dF = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2}{2\pi R} dl.$$

Проводники с токами одинакового направления **притягиваются**, с токами разного направления — **отталкиваются**.

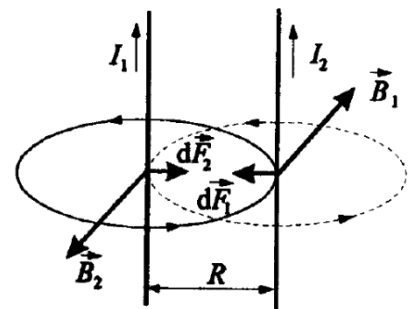


Рис. 20.8

## «Закон полного тока. Движение заряженной частицы в магнитном поле»

### 1. Закон полного тока для магнитного поля в вакууме. Магнитное поле тороида и длинного соленоида

Циркуляцией вектора  $\vec{B}$  по заданному замкнутому контуру  $L$  называется следующий интеграл по этому контуру:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl$$

где  $d\vec{l}$  — элемент длины контура, направленный вдоль обхода контура;  $B_l = B \cos \alpha$  — составляющая вектора  $\vec{B}$  в направлении касательной к контуру, с учетом выбранного направления обхода;  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$ .

**Теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$  (закон полного магнитного поля в вакууме):** циркуляция вектора  $\vec{B}$  по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной  $\mu_0$  на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k$$

где  $n$  — число проводников с токами, охватываемых контуром  $L$  произвольной формы.

Эта теорема справедлива только для поля в вакууме, поскольку для поля в веществе надо учитывать молекулярные токи. Каждый ток учитывается столько раз, сколько он охватывается контуром.

Положительным считается ток, направление которого связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта.

С помощью теоремы о циркуляции вектора  $\vec{B}$  легко определить индукцию магнитного поля внутри **соленоида и тороида**.

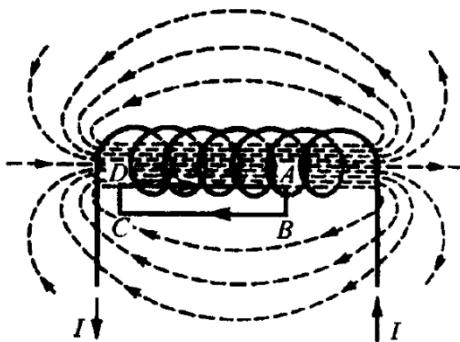


Рис. 21.1

**Соленоидом** называется свернутый в спираль изолированный проводник по которому течет электрический ток. Рассмотрим соленоид длиной  $l$ , имеющий  $N$  витков (рис. 21.1). Циркуляция вектора  $\vec{B}$  по замкнутому контуру  $ABCD$ , охватывающему все  $N$  витков, равна

$$\oint_{ABCD} B_l dl = \mu_0 NI$$

На участках  $AB$  и  $CD$  контур перпендикулярен линиям магнитной индукции, следовательно  $B_l = 0$ .

На участке  $DA$  контур совпадает с линией магнитной индукции, внутри соленоида поле однородно ( $B_l = B$ ), поэтому

$$\int_{DA} B_l dl = Bl = \mu_0 NI$$

Магнитная индукция (бесконечного) соленоида в вакууме

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}$$

**Тороидом** — называется кольцевая катушка с витками, намотанными на сердечник, имеющий форму тора, по которой течет ток. Магнитное поле отсутствует вне тороида, а внутри его оно является однородным.

Линии магнитной индукции, как следует из соображений симметрии, есть окружности, центры которых расположены на оси тороида.

В качестве контура выберем одну такую окружность радиуса  $r$ . По теореме о циркуляции  $B2\pi r = \mu_0 NI$ , где  $N$  — число витков тороида. Отсюда

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

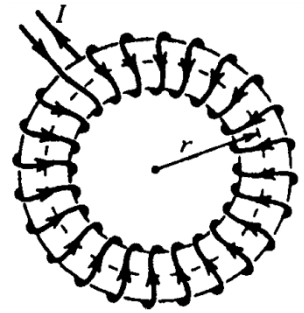


Рис. 21.2

## 2. Поток вектора магнитной индукции.

### Теорема Гаусса для магнитного поля.

Потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком) через площадку  $dS$  называется скалярная физическая величина, равная

$$d\Phi = \vec{B}d\vec{S} = B_n dS,$$

где  $B_n = B \cos \alpha$  — проекция вектора  $\vec{B}$  на направление нормали  $\vec{n}$  к площадке  $dS$ ,  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{n}$  и  $\vec{B}$ ,  $d\vec{S}$  — вектор, модуль которого равен  $dS$ , а направление совпадает с направлением нормали  $\vec{n}$  к площадке.

Поток вектора  $B$  связывают с контуром по которому течет ток. Положительное направление нормали к контуру связано с направлением тока по правилу правого винта. Поэтому магнитный поток, создаваемый контуром с током **через поверхность, ограниченную им самим**, всегда положителен.

Поток вектора магнитной индукции через произвольную поверхность  $S$ :

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}d\vec{S} = \int_S B_n dS$$

Если поле однородно и перпендикулярно ему расположена плоская поверхность с площадью  $S$ , то  $\Phi = \vec{B}d\vec{S} = BS$

Единица магнитного потока — **вебер (Вб)**

**Теорема Гаусса для магнитного поля в вакууме:** Поток вектора магнитной индукции сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0$$

Эта теорема отражает факт отсутствия магнитных зарядов, вследствие чего линии магнитной индукции не имеют ни начала ни конца и являются замкнутыми.

Магнитный поток через поверхность, ограниченную замкнутым контуром, называется **потокосцеплением**  $\Psi$  этого контура.

Потокосцепление контура, обусловленное магнитным полем тока в самом этом контуре, называется **потокосцеплением самоиндукции**.

Например, найдем потокосцепление самоиндукции соленоида с сердечником с магнитной проницаемостью  $\mu$ . Магнитный поток сквозь один виток соленоида площадью  $S$  равен  $\Phi_1 = BS$ . Полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида равен:

$$\Psi = \Phi_1 N = BSN = \frac{\mu_0 \mu NI}{l} SN = \mu_0 \mu \frac{IN^2}{l} S$$

Потокосцепление контура, обусловленное магнитным полем тока, идущего в другом контуре, называется **потокосцеплением взаимной индукции** этих двух контуров.

### 3. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле.

Проводник длиной  $l$  (он может свободно перемещаться) с током  $I$  находится в однородном магнитном поле (рис. 21.3). Поле направлено перпендикулярно плоскости рисунка. Сила Ампера  $F = IlB$ .

Под ее действием проводник переместился из положения 1 в положение 2.

Работа, совершаемая магнитным полем:

$$dA = \vec{F} d\vec{x} = Id\vec{x}[\vec{l}, \vec{B}] = IBldx = IBdS = Id\Phi$$

где  $dS = ldx$  — площадь, пересекаемая проводником при его перемещении в магнитном поле;  $BdS = d\Phi$  — поток вектора магнитной индукции, пронизывающий эту площадь. Таким образом,

$$dA = Id\Phi$$

*Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле равна произведению силы тока на магнитный поток, пересеченный движущимся проводником.*

Если в магнитном поле перемещается **контур с током**  $ABCD$ , то работа сил Ампера будет равна сумме работ по перемещению проводников  $ABC$  ( $dA_1$ ) и  $CDA$  ( $dA_2$ ), т.е.  $dA = dA_1 + dA_2$

При перемещении участка  $CDA$  силы Ампера направлены в сторону перемещения (образуют с направлением перемещения острые углы), поэтому  $dA_2 > 0$

$$dA_2 = I(d\Phi_0 + d\Phi_2)$$

Силы, действующие на участок  $ABC$  контура, направлены против перемещения (образуют с направлением перемещения тупые углы), поэтому

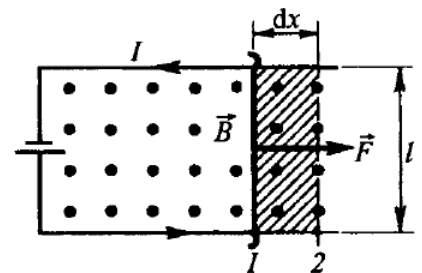


Рис. 21.3

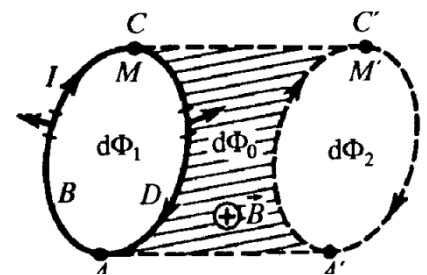


Рис. 21.4

$$dA_1 < 0$$

$$dA_1 = -I(d\Phi_0 + d\Phi_1)$$

В сумме  $dA = I(d\Phi_2 + d\Phi_1)$ , или  $A = I\Delta\Phi$ , или  $A = I(\Psi_2 - \Psi_1)$

Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на изменение магнитного потока, сцепленного с контуром (или на его потокосцепление).

#### 4. Сила Лоренца. Движение заряженной частицы в магнитном поле.

Так же как и на проводник с током, магнитное поле действует и на отдельный заряд, движущийся в магнитном поле.

Сила, действующая на электрический заряд  $q$ , движущийся в магнитном поле  $\vec{B}$  со скоростью  $\vec{v}$ , называется **силой Лоренца**:

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}],$$

или в скалярном виде  $F = qvB\sin\alpha$ , где  $\alpha$  - угол между  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

Направление силы Лоренца, так же как и силы Ампера, определяется по **правилу левой руки**. Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости движения заряженной частицы. Поэтому она изменяет только направление этой скорости, не изменяя ее модуля. Следовательно, сила Лоренца работы не совершает. Постоянное магнитное поле не совершает работы над движущейся в нем заряженной частицей и кинетическая энергия этой частицы при движении в магнитном поле не изменяется.

Движение заряда, на который кроме магнитного поля с индукцией  $B$  действует и электрическое поле с напряженностью  $E$  описывается формулой Лоренца:  $\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$

**Движение заряженных частиц в магнитном поле:** будем считать, что магнитное поле однородно и на частицу не действуют электрические поля. Рассмотрим три возможных случая:

1. Заряженная частица движется в магнитном поле **вдоль линий магнитной индукции** (угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$  равен 0 или  $\pi$ ). Сила Лоренца равна нулю. Магнитное поле на частицу не действует, и она движется равномерно и прямолинейно.

2. Заряженная частица движется в магнитном поле перпендикулярно линиям магнитной индукции (угол  $\alpha = \pi/2$ ). Сила Лоренца  $F = qvB$  постоянна по модулю и нормальна к траектории частицы. Частица будет двигаться по окружности радиуса  $R$  с центростремительным ускорением  $a_{\text{ц}} = \frac{v^2}{R}$ .

Из второго закона Ньютона  $qvB = m\frac{v^2}{R}$  получаем радиус окружности  $R = \frac{mv}{qB}$  и период вращения

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

3. Заряженная частица движется под углом  $\alpha$  к линиям магнитной индукции. Движение частицы можно представить в виде суммы двух движений:

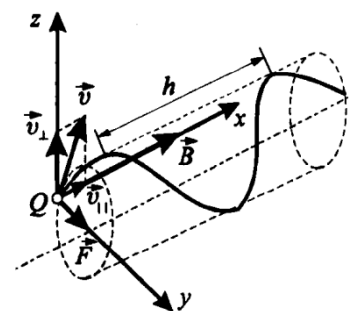


Рис. 21.5

а) равномерного прямолинейного движения вдоль поля со скоростью  $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ ;

б) равномерного движения по окружности в плоскости, перпендикулярной полю. Суммарное движение будет движением по спирали, ось которой параллельна магнитному полю. Шаг винтовой линии  $h = v_{\parallel} T = v T \cos \alpha$  или:

$$h = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{qB}$$

Если магнитное поле неоднородно и заряженная частица движется под углом к линиям магнитного поля в направлении возрастания поля, то величины  $R$  и  $h$  уменьшаются с ростом  $\vec{B}$ . На этом основана **фокусировка заряженных частиц** магнитным полем.

## «Магнитное поле в веществе. Электромагнитная индукция»

### 1. Магнитные моменты атомов. Диамагнетики и парамагнетики

Все вещества, помещенные в магнитное поле, **намагничиваются**, поскольку в любом теле существуют микроскопические токи (микротоки), обусловленные движением электронов в атомах и молекулах.

Для многих целей, в том числе и для объяснения многих магнитных явлений, можно использовать квазиклассическую модель, в которой предполагается, что атом состоит из положительно заряженного ядра, вокруг которого обращаются электроны по круговым или эллиптическим орбитам, подобно планетам солнечной системы (планетарная модель атома).

Такие электроны, обращающиеся по орбитам, представляют собой **замкнутые электрические токи**, и поэтому естественно предположить, что именно они являются микротоками (существование которых предполагал еще Ампер), ответственными за намагничивание вещества.

Магнитный момент электрона, обусловленный вращением его по орбите, получил название **орбитального**. Вместе с тем электрон обладает еще и собственным магнитным моментом, не зависящим от орбитального и называемым **спиновым**.

**Полный магнитный момент** атома складывается из векторов орбитальных и спиновых моментов входящих в его состав электронов.

$$\vec{p}_a = \sum \vec{p}_m + \sum \vec{p}_{ms}$$

Всякое вещество является **магнетиком**, т.е. способно под действием магнитного поля приобретать магнитный момент (намагничиваться).

Действие магнитного поля на электронную орбиту приводит к **прецессии** этой орбиты, что эквивалентно круговому микротоку.

Так как этот микроток индуцирован внешним магнитным полем, то, согласно правилу Ленца, у атома появляется магнитный момент, направленный **против внешнего поля**. Наведенные составляющие

магнитных полей атомов складываются и образуют собственное магнитное поле вещества, ослабляющее внешнее магнитное поле. Этот эффект получил название **диамагнитного эффекта**, а вещества, намагничивающиеся во внешнем магнитном поле против направления поля, называются **диамагнетиками** (например, Ag, Au, Cu...).

Так как диамагнитный эффект обусловлен действием внешнего магнитного поля на электроны атомов вещества, то диамагнетизм свойствен всем веществам.

Наряду с диамагнитными веществами существуют и **парамагнитные** — вещества, намагничивающиеся во внешнем магнитном поле по направлению поля (пример: редкоземельные металлы, Pt, Al...).

У парамагнитных веществ при отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты электронов не компенсируют друг друга, и молекулы парамагнетиков всегда обладают магнитным моментом (такие молекулы называются **полярными**).

Вследствие теплового движения молекул их магнитные моменты ориентированы беспорядочно, поэтому, в отсутствие магнитного поля, парамагнитные вещества магнитными свойствами не обладают.

При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле устанавливается преимущественная ориентация магнитных моментов атомов (молекул) по полю (полной ориентации препятствует тепловое движение атомов).

Таким образом, парамагнетик намагничивается, создавая собственное магнитное поле, совпадающее по направлению с внешним полем и усиливающим его. Этот эффект называется **парамагнитным**. Если магнитный момент атомов (молекул) велик, то парамагнитные свойства преобладают над диамагнитными и вещество является **парамагнетиком**.

## 2. Намагниченность. Магнитная проницаемость веществ

Для количественного описания намагничения магнетиков вводят векторную величину — намагниченность, определяемую магнитным моментом единицы объема магнетика:

$$\vec{J} = \frac{\vec{P}_m}{V} = \frac{\sum \vec{p}_a}{V},$$

где  $\vec{P}_m = \sum \vec{p}_a$  — магнитный момент магнетика, равный векторной сумме магнитных моментов отдельных молекул.

В несильных полях намагниченность пропорциональна напряженности  $H$  поля, вызывающего намагничение. Поэтому, аналогично диэлектрической восприимчивости, можно ввести понятие магнитной восприимчивости вещества  $\chi$ .

$$\vec{J} = \chi \vec{H}$$

$\chi$  — безразмерная величина.

Для диамагнетиков  $\chi$  отрицательна ( $\chi < 0$  поле молекулярных токов противоположно внешнему полю), для парамагнетиков — положительна ( $\chi > 0$  поле молекулярных токов совпадает с внешним).

Абсолютное значение магнитной восприимчивости для диа- и парамагнетиков очень мало — порядка  $10^{-4} - 10^{-6}$ .

Магнитное поле  $\vec{B}$  в веществе складывается из двух полей: внешнего поля  $\vec{B}_0$ , создаваемого намагничивающим током в вакууме, и поля  $\vec{B}'$  намагниченного вещества:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}',$$

где  $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$

Для описания поля, создаваемого молекулярными токами, рассмотрим магнетик в виде кругового цилиндра сечения  $S$  и длины  $l$ , внесенного в однородное внешнее магнитное поле с индукцией  $\vec{B}_0$  параллельное оси цилиндра. Если рассмотреть любое сечение цилиндра, перпендикулярное его оси, то во внутренних участках сечения магнетика молекулярные токи соседних атомов направлены навстречу друг другу и взаимно компенсируются. Не скомпенсированными будут лишь молекулярные токи, выходящие на поверхность цилиндра.

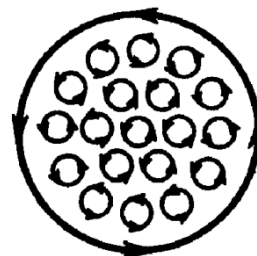


Рис. 22.1

Магнитную индукцию тока  $I'$ , текущего по боковой поверхности цилиндра, вычислим (считая для простоты  $\mu = 1$ ) по формуле для соленоида с  $N = 1$  (соленоид из одного витка):

$$\vec{B}' = \frac{\mu_0 I'}{l}$$

Магнитный момент этого суммарного тока микротоков внутри магнетика  $P = I' S = I' \frac{Sl}{l} = I' \frac{V}{l}$ , где  $V$  – объем магнетика.

Намагниченность магнетика  $J = \frac{P}{V} = I' \frac{V}{lV} = \frac{I'}{l}$ , следовательно  $\vec{B}' = \mu_0 \vec{J}$ .

Отсюда  $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H}$

Безразмерная величина  $\mu = 1 + \chi = \frac{B}{B_0}$  называется **магнитной**

**проницаемостью вещества.**

Для диамагнетиков  $\mu < 1$ , для парамагнетиков  $\mu > 1$ .

### 3. Ферромагнетики. Магнитный гистерезис

Помимо слабомагнитных веществ — диа- и парамагнетиков, существуют сильномагнитные вещества — **ферромагнетики** — *вещества, обладающие спонтанной намагниченностью*, т.е. они сохраняют намагниченность при отсутствии внешнего магнитного поля

Ответственными за магнитные свойства ферромагнетиков являются нескомпенсированные магнитные моменты атомов ферромагнетика. При определенных условиях в кристаллах могут возникать силы, выстраивающие магнитные моменты электронов строго параллельно друг другу, что приводит к возникновению намагниченных отдельных областей вещества, называемых **доменами**. Размер доменов порядка  $10^{-3} - 10^{-2}$  см. В пределах каждого домена ферромагнетик спонтанно намагничен до насыщения и

обладает некоторым значением магнитного момента. Для различных доменов направление магнитных моментов разное, вследствие чего суммарный момент в отсутствие внешнего магнитного поля равен нулю, т.е. ферромагнетик в целом не намагничен.

При внесении ферромагнетика в магнитное поле происходит ориентация магнитных моментов не отдельных атомов, а целых доменов. Поэтому уже в небольших полях намагниченность достигает больших значений.

При некотором значении напряженности поля все домены будут ориентированы по полю и намагниченность достигнет **насыщения**.

Если в ферромагнетике, намагниченном, например, до состояния насыщения  $B_m$ , начнет уменьшаться напряженность поля  $H$ , то индукция  $B$  тоже будет уменьшаться; однако ее уменьшение происходит не по линии 1-0, а по линии 1-2 графика намагничивания.

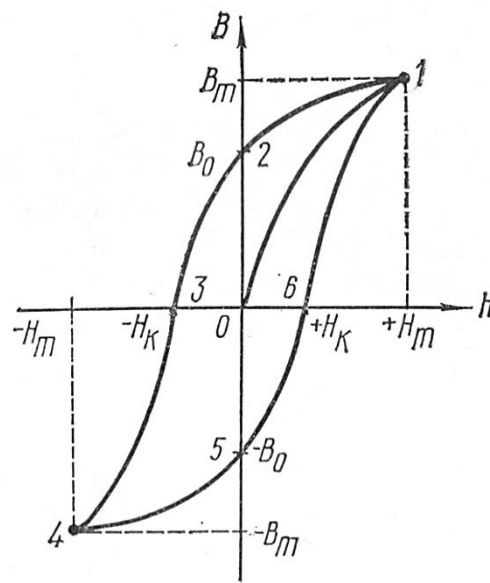


Рис. 22.2

При  $H = 0$  ферромагнетик не размагничивается полностью: в нем сохраняется **остаточная магнитная индукция**  $B_0$ . Для его полного размагничивания необходимо создать противоположное внешнее поле напряженностью  $H = H_k$  эта напряженность называется **коэрцитивной силой**. При дальнейшем увеличении противоположного поля ферромагнетик начнет перемагничиваться (линия 3-4) и при  $H = -H_k$  намагнитится до насыщения в противоположном направлении ( $B = -B_m$ ). Затем ферромагнетик можно опять размагнитить (линия 4-5-6) и вновь перемагнитить до насыщения  $B_m$  (линия 6-1). Рассмотренное явление отставания изменений магнитной индукции от изменений напряженности намагничивающего поля называется **магнитным гистерезисом**, а замкнутая кривая 1-2-4-5-1 — **петлей гистерезиса**.

Для каждого ферромагнетика имеется определенная температура, называемая **точкой Кюри**, при которой он теряет свои магнитные свойства.

При нагревании выше точки Кюри ферромагнетик превращается в обычный парамагнетик.

#### 4. Явление электромагнитной индукции. Причины возникновения ЭДС индукции в движущихся и неподвижных проводниках

Фарадей опытным путем открыл **явление электромагнитной индукции**: в замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции, охватываемого этим контуром, возникает электрический ток, называемый **индукционным**.

Возникновение индукционного тока указывает на наличие в цепи электродвижущей силы.

Эта ЭДС называется **электродвижущей силой электромагнитной индукции**.

**Закон Фарадея:** ЭДС электромагнитной индукции в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром:

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Направление индукционного тока определяется по **правилу Ленца:** индукционный ток имеет такое направление, что его собственное магнитное поле компенсирует изменение потока магнитной индукции, вызывающее этот ток.

В случаях движения контура в магнитном поле э. д. с. индукции обусловлена действием лоренцевой силы на заряды, находящиеся в контуре.

Например, участок металлического контура движется со скоростью  $V$ , пересекая магнитное поле (силовые линии которого, изображенные точками, перпендикулярны плоскости рисунка) (рис. 22.3). Вместе с этим участком движутся находящиеся в нем электроны. Поэтому, на каждый электрон  $e$  будет действовать лоренцева сила  $F$ , направленная вверх (учитывая, что электрон заряжен отрицательно). В результате на участке  $l$  произойдет **разделение зарядов**: свободные электроны переместятся кверху и между концами участка возникнет разность потенциалов, равная **электродвижущей силе индукции**.

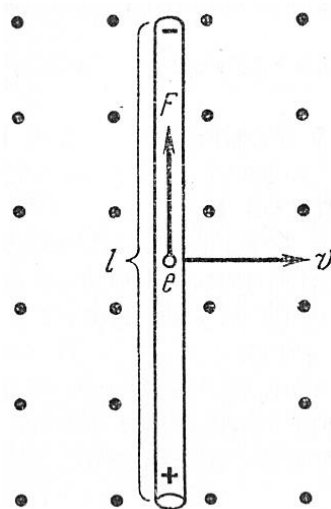


Рис. 22.3

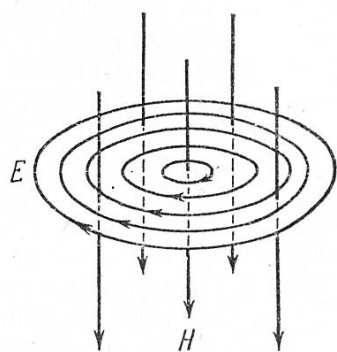


Рис. 22.4

В случаях неподвижного контура, находящегося в переменном (нестационарном) магнитном поле, возникновение э. д. с. индукции нельзя объяснить лоренцевой силой, так как она не действует на неподвижные заряды. Для объяснения природы электродвижущей силы индукции в этих случаях необходимо предположить, как это сделал Максвелл, что переменное магнитное поле  $\vec{H}$  создает в пространстве переменное электрическое поле  $\vec{E}$  и что силовые линии магнитного поля concentrically охвачены силовыми линиями электрического поля (рис. 22.4). Такое электрическое поле — с замкнутыми силовыми линиями—называется **вихревым полем**. Силы вихревого электрического поля производят разделение зарядов в проводящем контуре, создавая в нем переменную разность потенциалов, равную **электродвижущей силе индукции**.

## «Индуктивность. Энергия магнитного поля»

### 1. Явление самоиндукции. Индуктивность. Индуктивность соленоида.

Электрический ток, текущий в замкнутом контуре, создает вокруг себя магнитное поле, индукция которого, по закону Био-Савара-Лапласа **пропорциональна току**. Поэтому сцепленный с контуром магнитный поток пропорционален току в контуре:

$$\Phi = LI,$$

где коэффициент пропорциональности  $L$  называется **индуктивностью контура**.

**Единица измерения** индуктивности – **Генри (Гн)**

Легко получить формулу индуктивности длинного соленоида:

Полный магнитный поток сквозь соленоид

$$\Phi = BSN = \mu\mu_0 \frac{IN}{l} SN = \mu\mu_0 \frac{IN^2}{l} S, \text{ откуда } L = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l}$$

где  $N$  – число витков соленоида,  $l$  – его длина,  $S$  – площадь,  $\mu$  – магнитная проницаемость сердечника.

Индуктивность контура в общем случае зависит только от геометрической формы контура, его размеров и магнитной проницаемости той среды, в которой он находится.

При изменении силы тока в контуре будет изменяться и сцепленный с ним магнитный поток, а это, в свою очередь будет индуцировать ЭДС в этом контуре. *Возникновение ЭДС индукции в проводящем контуре при изменении в нем силы тока называется самоиндукцией.*

Из закона Фарадея ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_{si} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L \frac{dI}{dt},$$

где знак минус, обусловленный правилом Ленца, показывает, что наличие индуктивности в контуре приводит к замедлению изменения тока в нем.

Если ток со временем возрастает, то  $\varepsilon_{si} < 0$ , т.е. ток самоиндукции направлен навстречу току, обусловленному внешним источником, и замедляет его возрастание.

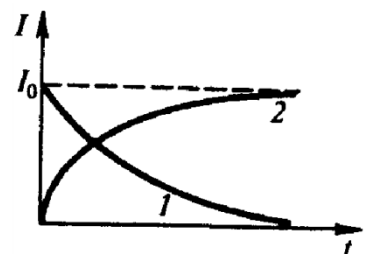
Если ток со временем убывает, то  $\varepsilon_{si} > 0$ , т.е. ток самоиндукции имеет такое же направление, как и убывающий ток в контуре, и замедляет его убывание.

Таким образом, контур, обладая определенной индуктивностью, приобретает электрическую "инертность".

### 2. Ток при замыкании цепи и при ее размыкании

При всяком изменении силы тока в проводящем контуре возникает ЭДС самоиндукции, в результате чего в контуре появляются дополнительные токи, называемые **экстратоками самоиндукции**.

Пусть в цепи сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$  под действием внешней ЭДС  $\mathcal{E}$  течет постоянный ток  $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$ . В момент времени  $t = 0$  **выключим** источник тока.



Возникает ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_{si} = -L \frac{dI}{dt}$ , препятствующая уменьшению тока.

Ток в цепи определяется законом Ома  $IR = \varepsilon_{si}$ , или  $IR = -L \frac{dI}{dt}$ .

Разделяем переменные:  $\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt$ , и интегрируем по  $I$  (от  $I_0$  до  $I$ ) и по  $t$  (от 0 до  $t$ ):

Рис. 23.1

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L} t, \text{ или } I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ (кривая 1, рис. 23.1)}$$

где  $\tau = \frac{L}{R}$  – постоянная, называемая **временем релаксации** — *время, в течение которого сила тока уменьшается в е раз.*

Таким образом, при выключении источника тока сила тока **убывает по экспоненциальному закону** (а не мгновенно).

При **замыкании цепи** помимо внешней ЭДС  $\varepsilon$  возникает ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_{si} = -L \frac{dI}{dt}$ , препятствующая возрастанию тока. По закону Ома,  $IR = \varepsilon + \varepsilon_{si}$ , или  $IR = \varepsilon - L \frac{dI}{dt}$  Можно показать, что решение этого уравнения имеет вид:

$$I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad \text{(кривая 2, рис. 23.1)}$$

где  $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$  – установившийся ток при  $t \rightarrow \infty$ .

Таким образом, при включении источника тока сила тока **возрастает по экспоненциальному закону** (а не мгновенно).

### 3. Энергия магнитного поля. Плотность энергии магнитного поля.

Проводник, по которому протекает электрический ток, всегда окружен магнитным полем. Магнитное поле появляется и исчезает вместе с появлением и исчезновением тока. Магнитное поле, подобно электрическому, является носителем энергии. Энергия магнитного поля равна работе, которую затрачивает ток на создание этого поля.

Рассмотрим контур индуктивностью  $L$ , по которому течет ток  $I$ .

С данным контуром сцеплен магнитный поток  $\Phi = LI$ .

При изменении тока на  $dI$  магнитный поток изменяется на  $d\Phi = LdI$ .

Для такого изменения магнитного потока необходимо совершить работу  $dA = Id\Phi = LIdI$ .

Тогда работа по созданию магнитного потока  $\Phi$  будет равна:

$$A = \int_0^I LIdI = \frac{LI^2}{2}.$$

**Энергия магнитного поля**, связанного с контуром,

$$W = \frac{LI^2}{2}$$

На примере однородного магнитного поля внутри длинного соленоида выразим энергию магнитного поля через величины, характеризующие это поле в окружающем пространстве:

Индуктивность соленоида:  $L = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l}$ . Отсюда  $W = \frac{1}{2} \mu\mu_0 \frac{N^2 S I^2}{l}$ .

Магнитная индукция поля соленоида:  $B = \mu\mu_0 \frac{NI}{l}$ . Отсюда  $I = \frac{Bl}{\mu\mu_0 N}$ .

По определению вектора напряжённости магнитного поля  $B = \mu\mu_0 H$ .

Используя эти соотношения  $W = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} V = \frac{BH}{2} V$ , где  $V$  — объем соленоида.

Магнитное поле длинного соленоида однородно и сосредоточено внутри него, поэтому энергия заключена в объеме соленоида и распределена в нем с **объемной плотностью**

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

Эти соотношения носят общий характер и справедливы и для неоднородных полей, но только для сред, для которых связь между  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  линейная (т.е. для пара- и диамагнетиков).

#### 4. Электромагнитное поле. Ток смещения. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в интегральной форме.

Для объяснения возникновения индукционного тока в неподвижных проводниках (второй опыт Фарадея) Максвелл предположил, что всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле, которое и является причиной возникновения индукционного тока в контуре (**первое основное положение теории Максвелла**).

Электрическое поле  $\vec{E}_B$ , возбуждаемое переменным магнитным полем, как и само магнитное поле, является **вихревым**.

Суммарное электрическое поле складывается из электрического поля, создаваемого зарядами  $E_q$  и вихревого электрического поля  $E_B$ . Поскольку циркуляция  $E_q$  равна нулю, то циркуляция суммарного поля:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Это — **первое уравнение** системы уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

Максвелл предположил, что аналогично магнитному полю и всякое изменение электрического поля вызывает в окружающем пространстве вихревое магнитное поле (**второе основное положение теории Максвелла**).

Поскольку магнитное поле есть основной, обязательный признак всякого тока, то Максвелл назвал переменное электрическое поле **током смещения**, в отличие от тока проводимости, обусловленного движением заряженных частиц.

Плотность тока смещения:  $\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ .

Максвелл ввел понятие полного тока, равного сумме токов проводимости и смещения. Плотность полного тока  $\vec{j}_{полн} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Максвелл обобщил теорему о циркуляции вектора  $\vec{H}$ , используя полный ток:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

Обобщенная теорема о циркуляции вектора  $\vec{H}$  представляет собой **второе уравнение** системы уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

**Третье уравнение** системы уравнений Максвелла для электромагнитного поля это теорема Гаусса для поля  $\vec{D}$ . Для заряда, непрерывно распределенного внутри замкнутой поверхности с объемной плотностью  $\rho$ , это уравнение имеет вид:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

**Четвертое уравнение** Максвелла — это теорема Гаусса для поля  $\vec{B}$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Таким образом, **система уравнений Максвелла в интегральной форме:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}; \\ \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV \\ \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}; \\ \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \end{array} \right.$$

Из уравнений Максвелла следует, что:

- **источниками** электрического поля являются либо электрические заряды, либо изменяющиеся во времени магнитные поля;
- магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями;
- переменное магнитное поле всегда связано с порождаемым им электрическим полем, а переменное электрическое поле всегда связано с порождаемым им магнитным, т.е. электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом — они образуют единое электромагнитное поле.

**«Колебательные процессы. Энергия гармонических колебаний»**

## 1. Понятие о колебательных процессах. Амплитуда, круговая (циклическая) частота, фаза гармонических колебаний.

**Колебаниями** называются движения или процессы, которые обладают определенной повторяемостью во времени.

Колебания сопровождаются попеременным превращением энергии одного вида в энергию другого вида.

Колебания называются **свободными** (или **собственными**), если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии, без дальнейшего внешнего воздействия на колебательную систему (систему, совершающую колебания). Колебания называются **вынужденными**, если они происходят под действием периодически изменяющейся внешней силы.

**Гармоническими колебаниями** называются колебания, при которых колеблющаяся физическая величина изменяется по закону синуса (или косинуса).

Гармоническое колебание величины  $s$  описывается уравнением типа:

$$s = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где:  $A$  – **амплитуда колебания** - максимальное значение колеблющейся величины;

$\omega$  – **круговая (циклическая) частота**;

$\varphi_0$  – **начальная фаза колебания** в момент времени  $t = 0$ ;

$(\omega t + \varphi_0)$  **фаза колебания** в момент времени  $t$ .

**Периодом колебаний**  $T$  называется наименьший промежуток времени, по истечении которого повторяются состояния колеблющейся системы (совершается одно полное колебание) и фаза колебания получает приращение  $2\pi$ :

$$\omega(t + T) + \varphi = (\omega t + \varphi) + 2\pi.$$

Откуда  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

**Частотой колебаний**  $\nu$  называется величина обратная периоду колебаний — число полных колебаний, совершаемых в единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

**Единица частоты** — герц (Гц)

## 2. Скорость и ускорение колеблющейся точки. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний и его решение. Энергия гармонических колебаний.

Первая (скорость) и вторая (ускорение) производные по времени от гармонически колеблющейся величины  $s$  также совершают гармонические колебания с той же циклической частотой:

$$\begin{aligned}\dot{s} &= \frac{ds}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) \\ \ddot{s} &= \frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)\end{aligned}$$

Из последнего уравнения видно, что  $s$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0.$$

Это уравнение называется дифференциальным уравнением гармонических колебаний. Его решение:

$$s = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Если материальная точка совершает прямолинейные гармонические колебания вдоль оси  $x$  около положения равновесия принятого, за начало координат то для колеблющейся точки:

$$\text{Смещение: } x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{Скорость: } v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{Ускорение } a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Сила, действующая на колеблющуюся материальную точку массой  $m$  равна  $F = ma = -mA\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -m\omega^2 x$ .

Таким образом, сила пропорциональна смещению материальной точки и направлена в сторону, противоположную смещению (к положению равновесия).

Такая зависимость от смещения характерна для упругих сил и поэтому силы, которые аналогичным образом зависят от смещения, называются **квазиупругими**.

**Кинетическая энергия** материальной точки:

$$E_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

**Потенциальная энергия** материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием квазиупругой силы:

$$E_{\Pi} = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi_0).$$

**Полная энергия:**

$$E = E_K + E_{\Pi} = \frac{mA^2\omega^2}{2}.$$

Полная энергия остается постоянной, с течением времени происходит только превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно.

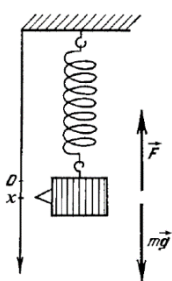
### 3. Уравнения движения пружинного, физического и математического маятников

**Гармоническим осциллятором** называется система, совершающая колебания, описываемые дифференциальным уравнением  $\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0$

Примерами гармонического осциллятора являются пружинный, математический и физический маятники и электрический колебательный контур.

**Пружинный маятник** — это груз массой  $m$ , подвешенный на абсолютно упругой пружине жесткостью  $k$  и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы  $F = -kx$  (рис. 24.1).

Уравнение движения маятника



$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \text{ или } \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением движения гармонического осциллятора  $\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2s = 0$  видим, что пружинный маятник совершает колебания по закону  $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$  с циклической частотой и периодом:

Рис. 24.1

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

**Математическим маятником** называется идеализированная система, состоящая из материальной точки массой  $m$ , подвешенной на невесомой нерастяжимой нити длиной  $l$ , и колеблющейся под действием силы тяжести без трения.

Хорошим приближением математического маятника является небольшой тяжелый шарик, подвешенный на тонкой длинной нити.

При малых углах отклонения  $\alpha$  можно считать:  $x \approx l\alpha$ .

Возвращающая сила:  $F = P\sin\alpha \approx mg\alpha = mg\frac{x}{l}$ .

Уравнение движения:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -F = -mg\frac{x}{l} \text{ или } \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0.$$

Следовательно, движение математического маятника описывается дифференциальным уравнением гармонических колебаний, то есть происходит по закону  $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$  с частотой и периодом, соответственно:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

**Физическим маятником** называется твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс тела (рис. 24.3).

Если физический маятник отклонен из положения равновесия на некоторый угол  $\alpha$ , то момент возвращающей силы  $M = I\varepsilon = I\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ .

Можно показать, что уравнением движения физического маятника будет иметь вид:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\alpha = 0,$$

где  $I$  – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса  $O$ ;  $l$  – расстояние между точкой подвеса и центром масс  $C$  маятника.

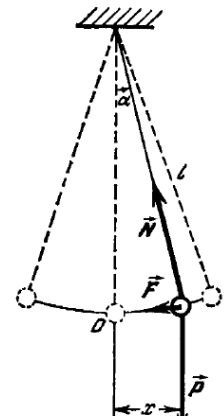


Рис. 24.2

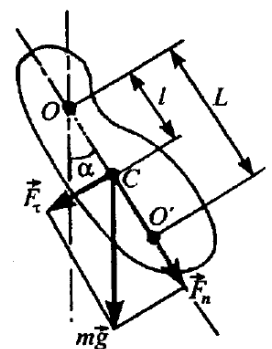


Рис. 24.3

Таким образом, при малых колебаниях физический маятник совершает гармонические колебания  $\alpha = A \cos(\omega t + \varphi_0)$  с циклической частотой и периодом:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}} T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$

где  $L = \frac{I}{ml}$  - **приведенная длина** физического маятника.

**Приведенная длина физического маятника** — это длина такого математического маятника, который имеет такой же период колебаний, что и данный физический маятник.

#### 4. Электрический колебательный контур. Формула Томсона (вывод)

**Электрическим колебательным контуром** называется электрическая цепь состоящая из включенных последовательно катушки индуктивностью  $L$ , конденсатора емкостью  $C$  и резистора сопротивлением  $R$  (рис. 24.4).

По закону Ома для участка цепи  $IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{si}$  или  $IR = -\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt}$ , где  $q$  и  $(\varphi_1 - \varphi_2) = -\frac{q}{C}$  заряд конденсатора и разность потенциалов его обкладок в произвольный момент времени  $t$ ;  $R$  — электрическое сопротивление колебательного контура;  $\varepsilon_{si}$  — ЭДС самоиндукции в катушке.

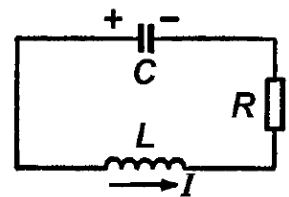


Рис. 24.4

Сила тока  $I = \frac{dq}{dt}$  поэтому дифференциальное уравнение колебаний заряда в колебательном контуре

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

**Идеализированный колебательный контур** — колебательный контур, у которого  $R = 0$ .

Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний заряда в идеализированном контуре:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

Заряд  $q$  совершает гармонические колебания по закону:

$q = q_{max} \cos(\omega t + \varphi_0)$ , где  $q_{max}$  - амплитуда колебаний заряда с циклической частотой  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  и периодом  $T = 2\pi\sqrt{LC}$ .

Последнюю формулу называют **формулой Томсона**.

## «Сложение колебаний. Затухающие колебания»

### 1. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Метод векторных диаграмм.

Если система одновременно участвует в нескольких колебательных процессах, то под сложением колебаний понимают нахождение закона, описывающего результирующий колебательный процесс.

Для сложения колебаний  $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$  и  $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$  используем метод вращающегося вектора амплитуды (метод векторных диаграмм). Так как векторы  $A_1$  и  $A_2$  вращаются с одинаковой угловой скоростью  $\omega$ , то разность фаз  $(\varphi_2 - \varphi_1)$  между ними остается постоянной (рис. 25.1).

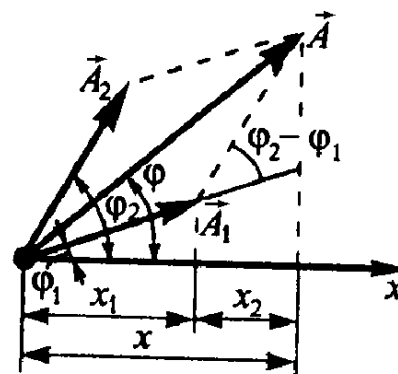


Рис. 25.1

Уравнение результирующего колебания будет

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi),$$

где амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\varphi$  задаются соотношениями:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

Сумма двух гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты есть гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания.

Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз складываемых колебаний:

1)  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$ , где  $(m = 0, 1, 2, \dots)$ , тогда  $A = A_1 + A_2$ ;

2)  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m + 1)\pi$ , где  $(m = 0, 1, 2, \dots)$ , тогда  $A = |A_1 - A_2|$ .

### 2. Сложение взаимно-перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу и их применение

Пусть два гармонических колебания одинаковой частоты  $\omega$ , происходят во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей  $x$  и  $y$ . Для простоты выберем начало отсчета так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю:

$$x = A \cos(\omega t), y = B \cos(\omega t + \alpha),$$

где  $\alpha$  – разность фаз колебаний, а  $A$  и  $B$  – их амплитуды. Уравнение траектории результирующего колебания (исключая  $t$  из уравнений) есть уравнение эллипса, произвольно расположенного относительно координатных осей:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \alpha$$

и такие колебания называются эллиптически поляризованными.

Если разность фаз  $\alpha = m\pi$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ), то эллипс вырождается в отрезок прямой:  $y = \pm \frac{B}{A}x$ , где знак плюс соответствует нулю и четным значениям  $m$ , а знак минус – нечетным значениям  $m$ .

Результирующее колебание является гармоническим колебанием с частотой  $\omega$  и амплитудой  $\sqrt{A^2 + B^2}$  и совершается вдоль прямой, составляющей с осью  $x$  угол  $\varphi = \arctg(\frac{B}{A} \cos(m\pi))$ . Такие колебания называются **линейно поляризованными** колебаниями.

Если разность фаз  $\alpha = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ), то в данном случае уравнение траектории принимает вид:  $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ .

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, а его полуоси равны соответствующим амплитудам  $A$  и  $B$ . Если  $A = B$ , то эллипс вырождается в окружность, и такие колебания называются **циркулярно поляризованными** или колебаниями, **поляризованными по кругу**.

Если взаимно перпендикулярные колебания происходят с циклическими частотам  $p\omega$  и  $q\omega$ , где  $q$  и  $p$  – целые числа:  $x = A \cos(p\omega t)$ ,  $y = B \cos(q\omega t + \alpha)$  то значения координат  $x$  и  $y$  одновременно повторяются через одинаковые промежутки времени  $T_0$  равные наименьшему общему кратному периодов  $T_1 = \frac{2\pi}{p\omega}$  и  $T_2 = \frac{2\pi}{q\omega}$  колебаний вдоль осей  $x$  и  $y$ . Траектории замкнутых кривых, которые получаются в этих случаях, называются **фигурами Лиссажу**. Вид этих кривых зависит от соотношения амплитуд, частот и разности фаз складываемых колебаний (рис. 25.2).

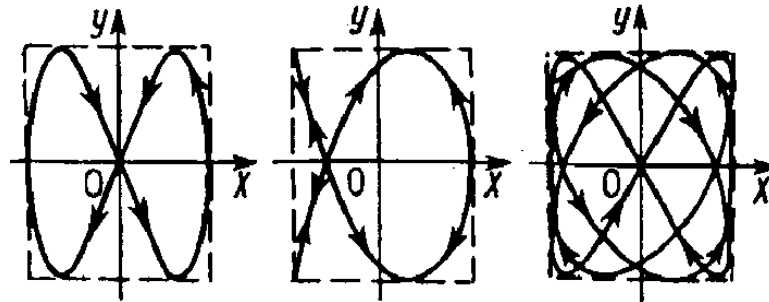


Рис. 25.2

На рисунке показан вид фигур Лиссажу при трех различных значениях отношения (2:1, 3:2, 4:3) и разности фаз  $\alpha = \pi/2$ .

### 3. Затухающие колебания

**Затуханием колебаний** называется постепенное ослабление колебаний с течением времени, обусловленное потерей энергии колебательной системой. Затухание механических колебаний вызывается главным образом трением. Затухание в электрических колебательных системах вызывается тепловыми потерями и потерями на излучение электромагнитных волн, а также

тепловыми потерями в диэлектриках и ферромагнетиках вследствие электрического и магнитного гистерезиса.

Закон затухания колебаний определяется свойствами колебательных систем.

**Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний** имеет вид:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 = 0,$$

Где  $s$  – колеблющаяся величина,

$\delta = const$  — коэффициент затухания,

$\omega_0$  – циклическая частота свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы (при  $\delta = 0$ )

В случае малых затуханий ( $\delta^2 \ll \omega_0^2$ ) решение этого уравнения:

$$s = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где:  $A = A_0 e^{-\delta t}$  — **амплитуда затухающих колебаний**;

$A_0$  – **начальная амплитуда**,

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  — **циклическая частота затухающих колебаний**.

Промежуток времени  $\tau = \frac{1}{\delta}$ , в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в  $e$  раз называется **временем релаксации**.

Если  $A(t)$  и  $A(t + T)$  — амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающихся на период, то отношение  $\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T}$  называется **декрементом затухания**, а его логарифм

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}$$

называется **логарифмическим декрементом затухания**.

Здесь  $N$  — число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в  $e$  раз.

**Добротностью колебательной системы** называется безразмерная величина  $Q$ , равная произведению  $2\pi$  на отношение энергии  $W(t)$  колебаний системы в произвольный момент времени  $t$  к убыли этой энергии за промежуток времени от  $t$  до  $t + T$  (за один условный период затухающих колебаний):

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}$$

Энергия  $W(t)$  пропорциональна квадрату амплитуды  $A(t)$ , поэтому:

$$Q = 2\pi \frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\theta}}$$

При малых значениях логарифмического декремента затухания ( $\theta \ll 1$ )  $1 - e^{-2\theta} \approx 2\theta$ , поэтому (принимая  $T \approx T_0$ )  $Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\omega_0}{2\delta}$ .

#### 4. Вынужденные колебания. Амплитуда и фаза при вынужденных колебаниях. Резонанс.

Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие колебания, надо компенсировать потери энергии. Такая компенсация возможна с помощью какого-либо периодически действующего фактора  $X(t)$ , изменяющегося по гармоническому закону:  $X(t) = X_0 \cos \omega t$ .

В случае механических колебаний таким фактором является вынуждающая сила  $F = F_0 \cos \omega t$ .

В общем виде дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид:  $\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 = X_0 \cos \omega t$

Это уравнение — линейное неоднородное дифференциальное уравнение.

Его решение равно сумме общего решения  $s = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$  однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Можно показать, что частное решение имеет вид  $s = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ , где  $A$  и  $\varphi_0$  задаются формулами:

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

**Резонансом** называется явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы (или, в случае электрических колебаний, частоты вынуждающего переменного напряжения) к частоте, равной или близкой собственной частоте колебательной системы.

Амплитуда вынужденных колебаний имеет максимум при частоте  $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ , которая называется **резонансной частотой**.

$$A_{\text{рез}} = \frac{x_0}{2\delta \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

В случае малого затухания, когда  $\delta^2 \ll \omega_0^2$ , резонансная амплитуда  $A_{\text{рез}} = \frac{x_0}{2\delta\omega_0} = \frac{\omega_0 x_0}{2\delta \omega_0^2} = Q \frac{x_0}{\omega_0^2}$ , где  $Q$  — добротность колебательной системы.

Таким образом, добротность характеризует резонансные свойства колебательной системы: чем больше  $Q$ , тем больше  $A_{\text{рез}}$ .

## «Волновые процессы»

### 1. Волна и ее характеристики. Виды волн.

**Волновым процессом** или **волной** — называется процесс распространения колебаний в сплошной среде.

При распространении волны частицы колеблются около своих положений равновесия, а не перемещаются вслед за волной.

Вместе с волной от частицы к частице передается только состояние колебательного движения и его энергия.

Основным свойством всех волн является **перенос энергии** без переноса вещества.

**Продольная волна** — волна, в которой частицы среды колеблются в направлении распространения волны.

**Поперечная волна** — волна, в которой частицы среды колеблются в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны.

**Длиной волны**  $\lambda$  называется расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе.

Длина волны равна расстоянию, на которое распространяется гармоническая волна за время, равное периоду колебаний  $T$  :

$$\lambda = vT \quad \text{или} \quad v = \lambda\nu$$

где  $\nu$  — частота колебаний,  $v$  — скорость распространения волны.

**Волновым фронтом** называется геометрическое место точек, до которых доходят колебания к определенному моменту времени  $t$  .

Волновой поверхностью называется геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе.

Бегущими волнами называются волны, которые переносят в пространстве энергию.

Важными примерами бегущих волн являются плоская и сферическая волны.

Волна называется **плоской**, если ее волновые поверхности представляют совокупность плоскостей, параллельных друг другу.

Волна называется **сферической**, если ее волновые поверхности имеют вид концентрических сфер. Центры этих сфер называются центром волны.

## 2. Уравнение бегущей волны. Уравнение стоячей волны и его анализ

Рассмотрим поперечную волны, распространяющейся от точки  $O$  — начала координат, так что показанные смещения отвечают реальным отклонениям колеблющихся точек от оси  $X$ . Будем считать, что источник колебаний, помещенный в точке  $O$ , в момент времени  $t = 0$  начал совершать гармоническое колебательное движение вдоль оси  $y$  по закону  $y = A \sin \omega t$ .

Для точки  $M$  находящейся на расстоянии  $x$  от источника, начало колебаний отстает от начала колебаний точки  $O$  на промежуток времени  $\tau = \frac{x}{v}$  где  $v$  — скорость распространения волны в рассматриваемой упругой среде.

Если волна распространяется слева на право, то  $y_M = A \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$ .

Смещение  $y$  произвольной точки  $M$  в бегущей волне зависит от двух переменных: времени наблюдения  $t$  и расстояния до источника.

Учитывая, что  $\lambda = vT$  **уравнение бегущей волны** можно представить в виде

$$y = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

**Стоячие волны** — это волны, образующиеся при наложении двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами.

Пусть две плоские бегущие волны с одинаковыми амплитудами и частотами распространяются навстречу друг другу вдоль оси  $x$  :

$$y_1 = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right);$$

$$y_2 = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right).$$

### Уравнение стоячей волны

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin \omega t$$

Уравнение показывает, что в точках среды совершаются колебания с частотой  $\omega$  и амплитудой  $2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$ , зависящей от координаты этих точек. Причем в точках, для которых  $x$  удовлетворяет условию  $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0$  амплитуда колебаний равна нулю. Т.е. в точках с координатами  $x = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) колебания отсутствуют. Такие точки называют **узлами волны**. Точки расположенные в середине между узлами, колеблются с наибольшей интенсивностью. Эти точки называются **пучностями волны**. Будучи неподвижной, стоячая волна не переносит энергии.

### 3. Скорость распространения электромагнитных волн. Плотность потока энергии (вектор Умова–Пойнтинга).

**Электромагнитные волны** — это переменное электромагнитное поле, распространяющееся в пространстве с конечной скоростью.

Фазовая скорость электромагнитной волны:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}},$$

где  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  — скорость света в вакууме.

Поскольку  $\epsilon \mu > 1$ , то  $v < c$  — скорость распространения электромагнитных волн в веществе всегда меньше, чем в вакууме.

Электромагнитные волны являются **поперечными**: векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  напряженностей электрического и магнитного полей волны взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{v}$  скорости распространения

**Объемная плотность энергии**  $w$  электромагнитной волны складывается из объемных плотностей  $w_e$  и  $w_m$  электрического и магнитного полей:

$$w = w_e + w_m = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$$

**Плотность потока энергии**  $S = w = EH$

Вектор  $\vec{S}$  плотности потока энергии электромагнитной волны называется **вектором Умова-Пойнтинга**.

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$$

Вектор  $S$  направлен в сторону распространения электромагнитной волны, а его модуль равен энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны. Скалярная величина  $I$ , равная модулю

среднего значения вектора Умова-Пойтинга, называется интенсивностью волны:

$$I = |\langle \vec{S} \rangle|$$

**Интенсивность волны** численно равна энергии, переносимой волной за единицу времени сквозь единицу площади поверхности, нормальной к направлению распространения волны. Интенсивность синусоидальной волны пропорциональна квадрату ее амплитуды.