

Тема 3: Симплекс-метод и метод потенциалов

1. Алгоритм симплекс-метода
2. Алгоритм метода потенциалов

- Универсальный метод решения задач ЛП называется симплекс-методом. Применение этого метода и его наиболее часто встречающейся модификации - двухфазного симплекс-метода.
- При графическом методе решения задач ЛП мы фактически из множества вершин, принадлежащих границе множества решений системы неравенств, выбрали такую вершину, в которой значение целевой функции достигало максимума (минимума). В случае двух переменных этот метод совершенно нагляден и позволяет быстро находить решение задачи.
- Если в задаче три и более переменных, а в реальных экономических задачах как раз такая ситуация, трудно представить наглядно область решений системы ограничений. Такие задачи решаются с помощью симплекс-метода или методом последовательных улучшений. Идея метода проста и заключается в следующем.

- По определенному правилу находится первоначальный опорный план (некоторая вершина области ограничений). Проверяется, является ли план оптимальным. Если да, то задача решена. Если нет, то переходим к другому улучшенному плану - к другой вершине. значение целевой функции на этом плане (в этой вершине) заведомо лучше, чем в предыдущей.
- Алгоритм перехода осуществляется с помощью некоторого вычислительного шага, который удобно записывать в виде таблиц, называемых симплекс-таблицами.
- Так как вершин конечное число, то за конечное число шагов мы приходим к оптимальному решению.
- Рассмотрим симплексный метод на конкретном примере задачи о составлении плана.

- Еще раз заметим, что симплекс-метод применим для решения канонических задач ЛП, приведенных к специальному виду, т. е. имеющих базис, положительные правые части и целевую функцию, выраженную через небазисные переменные. Если задача не приведена к специальному виду, то нужны дополнительные шаги, о которых мы поговорим позже.
- Рассмотрим задачу о плане производства, предварительно построив модель и приведя ее к специальному виду.
- Для изготовления изделий А и В склад может отпустить сырья не более 80 единиц. Причем на изготовление изделия А расходуется две единицы, а изделия В - одна единица сырья. Требуется спланировать производство так, чтобы была обеспечена наибольшая прибыль, если изделий А требуется изготовить не более 50 шт., а изделий В - не более 40 шт. Причем, прибыль от реализации одного изделия А - 5 руб., а от В - 3 руб.

Построим математическую модель, обозначив за x_1 количество изделий А в плане, за x_2 - количество изделий В. тогда система ограничений будет выглядеть следующим образом:

$$x_1 \leq 50$$

$$x_2 \leq 40$$

$$2x_1 + x_2 \leq 80$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Приведем задачу к каноническому виду, введя дополнительные переменные:

$$x_1 + x_3 = 50$$

$$x_2 + x_4 = 40$$

$$2x_1 + x_2 + x_5 = 80$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$-F = -5x_1 - 3x_2 \rightarrow \min.$$

Эта задача имеет специальный вид (с базисом, правые части неотрицательны). Ее можно решить симплекс-методом.

I этап. Запись задачи в симплекс-таблицу. Между системой ограничений задачи и симплекс-таблицей взаимно-однозначное соответствие. Строчек в таблице столько, сколько равенств в системе ограничений, а столбцов - столько, сколько свободных переменных.

Базисные переменные заполняют первый столбец, свободные - верхнюю строку таблицы. Нижняя строка называется индексной, в ней записываются коэффициенты при переменных в целевой функции. В правом нижнем углу первоначально записывается 0, если в функции нет свободного члена; если есть, то записываем его с противоположным знаком. На этом месте (в правом нижнем углу) будет значение целевой функции, которое при переходе от одной таблицы к другой должно увеличиваться по модулю. Итак, можно переходить ко II этапу решения.

II этап. Проверка опорного плана на оптимальность. Данной таблице соответствует следующий опорный план: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 50, 40, 80)$. Свободные переменные x_1, x_2 равны 0; $x_1 = 0, x_2 = 0$. А базисные переменные x_3, x_4, x_5 принимают значения $x_3 = 50, x_4 = 40, x_5 = 80$ - из столбца свободных членов. Значение целевой функции: $-F = -5x_1 - 3x_2 = -5 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$.

Наша задача - проверить, является ли данный опорный план оптимальным. для этого необходимо просмотреть индексную строку - строку целевой функции F . Возможны различные ситуации.

1. В индексной F -строке нет отрицательных элементов. Значит, план оптимален, можно выписать решение задачи. Целевая функция достигла своего оптимального значения, равного числу, стоящему в правом нижнем углу, взятому с противоположным знаком. Переходим к IV этапу.

2. В индексной строке есть хотя бы один отрицательный элемент, в столбце которого нет положительных. Тогда делаем вывод о том, что целевая функция $F \rightarrow \infty$ неограниченно убывает.

3. В индексной строке есть отрицательный элемент, в столбце которого есть хотя бы один положительный. Тогда переходим к следующему III этапу. пересчитываем таблицу, улучшая опорный план.

III этап. Улучшение опорного плана. Из отрицательных элементов индексной F-строки выберем наибольший по модулю, назовем соответствующий ему столбец разрешающим и пометим " \uparrow ". Чтобы выбрать разрешающую строку, необходимо вычислить отношения элементов столбца свободных членов только к положительным элементам разрешающего столбца. Выбрать из полученных отношений минимальное.

Соответствующий элемент, на котором достигается минимум, называется разрешающим. Будем выделять его квадратом. В нашем примере элемент 2 - разрешающий. Строка, соответствующая этому элементу, тоже называется разрешающей. Выбрав разрешающий элемент, делаем перечет таблицы по правилам:

1. В новой таблице таких же размеров, что и ранее, переменные разрешающей строки и столбца меняются местами, что соответствует переходу к новому базису. В нашем примере: x_1 входит в базис, вместо x_5 , которая выходит из базиса и теперь свободная.
2. На месте разрешающего элемента 2 записываем обратное ему число $\frac{1}{2}$.
3. Элементы разрешающей строки делим на разрешающий элемент.
4. Элементы разрешающего столбца делим на разрешающий элемент и записываем с противоположным знаком.
5. Чтобы заполнить оставшиеся элементы таблицы 3.6, осуществляем пересчет по правилу прямоугольника. Пусть мы хотим посчитать элемент, стоящий на месте 50. Соединяем этот элемент мысленно с разрешающим, находим произведение, вычитаем произведение элементов, находящихся на другой диагонали получившегося прямоугольника. Разность делим на разрешающий элемент.

2. Алгоритм метода потенциалов

Транспортная задача линейного программирования получила в настоящее время широкое распространение в теоретических обработках и практическом применении на транспорте и в АПК.

Особенно большое значение она имеет в деле рационализации экспортных и импортных поставок важнейших видов промышленной и сельскохозяйственной продукции, а также оптимального планирования грузопотоков и работы различных видов транспорта.

Кроме того, к задачам транспортного типа сводятся многие другие задачи линейного программирования - задачи о назначениях, сетевые, календарного планирования.

планирования. Однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах a_1, a_2, \dots, a_m . Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах b_1, b_2, \dots, b_n . Известны c_{ij} , $i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$ - стоимости перевозки единицы груза от каждого i -го поставщика каждому j -му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех потребителей полностью удовлетворены и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны. Исходные данные транспортной задачи обычно записываются в таблице 1.

b_j	b_1	b_2	...	b_n
a_i				
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

В транспортных задачах под поставщиками и потребителями понимаются различные промышленные и сельскохозяйственные предприятия, заводы, фабрики, склады, магазины и т.д. Однородными считаются грузы, которые могут быть перевезены одним видом транспорта. Под стоимостью перевозок понимаются тарифы, расстояния, время, расход топлива и т.п.

В транспортной задаче предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j .$$

Такая задача называется *задачей с правильным балансом*, а ее модель – *закрытой*. Если же это равенство не выполняется, то задача называется *задачей с неправильным балансом*, а ее модель – *открытой* .

Опорным решением транспортной задачи называется любое допустимое решение, для которого вектор-условия, соответствующие положительным координатам, линейно независимы.

Ввиду того, что ранг системы векторов-условий транспортной задачи равен $m+n-1$, опорное решение не может иметь отличных от нуля координат более $m+n-1$. Число отличных от нуля координат невырожденного опорного решения равно $m+n-1$, а для вырожденного опорного решения меньше $m+n-1$.

Любое допустимое решение транспортной задачи можно записать в ту же таблицу, что и исходные данные. Клетки таблицы транспортной задачи, в которых находится отличное от нуля или базисные нулевые перевозки, называются *занятыми*, остальные – *незанятыми* или *свободными*. Клетки таблицы нумеруются так, что клетка, содержащая перевозку x_{ij} , т.е. стоящая в i -й строке и j -м столбце, имеет номер (i,j) . Каждой клетке с номером (i,j) соответствует переменная x_{ij} , которой соответствует вектор-условие A_{ij} .

Для того чтобы избежать трудоемких вычислений при проверке линейной независимости вектор-условий, соответствующих положительным координатам допустимого решения, вводят понятие цикла. Циклы также используются для перехода от одного опорного решения к другому.

Циклом называется такая последовательность клеток таблицы транспортной задачи $(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_1)$, в которой две и только две соседние клетки расположены в одной строке или столбце, причем первая и последняя клетки также находятся в одной строке или столбце.

Цикл изображают в таблице транспортной задачи в виде замкнутой ломаной линии. В любой клетке цикла происходит поворот звена ломаной линии на 90° . Простейшие циклы изображены на рисунке 1, где звездочкой отмечены клетки таблицы, включенные в состав цикла.

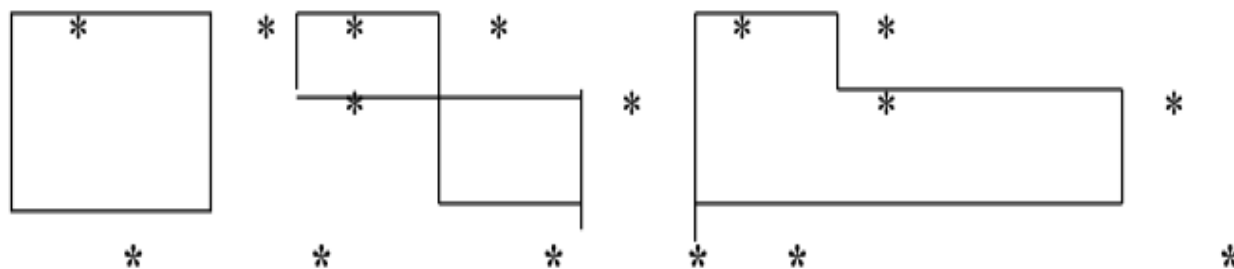


Рис 1.

Методы построения начального опорного решения.

Метод северо-западного угла

Существует ряд методов построения начального опорного решения, наиболее простым из которых является метод северо-западного угла. В данном методе запасы очередного поставщика используются для обеспечения запросов очередных потребителей до тех пор, пока не будут исчерпаны полностью, после чего используются запасы следующего по номеру поставщика.

Заполнение таблицы транспортной задачи начинается с левого верхнего угла и состоит из ряда однотипных шагов. На каждом шаге, исходя из запасов очередного поставщика и запросов очередного потребителя, заполняется только одна клетка и соответственно исключается из рассмотрения один поставщик или потребитель. Осуществляется это таким образом:

1. если $a_i < b_j$, то $x_{ij} = a_i$ и исключается поставщик с номером i , $x_{ik} = 0$, $k=1, 2, \dots, n, k \neq j$, $b'_j = b_j - a_i$;
2. если $a_i > b_j$, то $x_{ij} = b_j$ и исключается потребитель с номером j , $x_{kj} = 0$, $k=1, 2, \dots, m, k \neq i$, $a'_i = a_i - b_j$;
3. если $a_i = b_j$, то $x_{ij} = a_i = b_j$ и исключается либо i -й поставщик, $x_{ik} = 0$, $k=1, 2, \dots, n, k \neq j$, $b'_j = 0$, либо j -й потребитель, $x_{kj} = 0$, $k=1, 2, \dots, m, k \neq i$, $a'_i = 0$

Нулевые перевозки принято заносить в таблицу только тогда, когда они попадают в клетку (i,j) , подлежащую заполнению. Если в очередную клетку таблицы (i,j) требуется поставить перевозку, а i -й поставщик или j -й потребитель имеет нулевые запасы или запросы, то в клетку ставится

перевозка, равная нулю (базисный нуль), и после этого, как обычно, исключается из рассмотрения соответствующий поставщик или потребитель. Таким образом, в таблицу заносят только базисные нули, остальные клетки с нулевыми перевозками остаются пустыми.

Во избежание ошибок после построения начального опорного решения необходимо проверить, что число занятых клеток равно $m+n-1$ и векторы-условия, соответствующие этим клеткам, линейно независимы.

Решение транспортной задачи, построенное методом северо-западного угла, является опорным.

Метод минимальной стоимости

Метод минимальной стоимости прост, он позволяет построить опорное решение, достаточно близкое к оптимальному, так как использует матрицу стоимостей транспортной задачи $C=(c_{ij})$, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$. Как и метод северо-западного угла, он состоит из ряда однотипных шагов, на каждом из которых заполняется только одна клетка таблицы, соответствующая минимальной стоимости $\min \{c_{ij}\}$, и исключается из рассмотрения только одна строка (поставщик) или один столбец (потребитель). Очередную клетку, соответствующую, заполняют по тем же правилам, что и в методе северо-западного угла. Поставщик исключается из рассмотрения, если его запасы использованы полностью. Потребитель исключается из рассмотрения, если его запросы удовлетворены полностью. На каждом шаге исключается либо один поставщик, либо один потребитель. При этом если поставщик еще не исключен, но его запасы равны нулю, то на том шаге, когда от данного поставщика требуется поставить груз, в соответствующую клетку таблицы заносится базисный нуль и лишь, затем поставщик исключается из рассмотрения. Аналогично с потребителем.

Решение транспортной задачи, построенное методом минимальной стоимости, является опорным.

Метод потенциалов

Широко распространенным методом решения транспортных задач является метод потенциалов. Этот метод позволяет упростить наиболее трудоемкую часть вычислений – нахождение оценок свободных клеток.

Признак оптимальности опорного решения. Если допустимое решение $X=(x_{ij})$, $i=1,2,,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$ транспортной задачи является оптимальным, то существует потенциалы (числа) поставщиков u_i , $i=1,2,,\dots,m$ и потребителей v_j , $j=1,2,\dots,n$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0,$$
$$u_i + v_j \leq c_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0.$$

Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов

Порядок решения транспортной задачи методом потенциалов следующий.

1. Проверяют выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости задачи. Если задача имеет неправильный баланс, то вводят фиктивного поставщика или потребителя с недостающими запасами или запросами и нулевыми стоимостями перевозок.

2. Строят начальное опорное решение (методом минимальной стоимости или каким-либо другим методом) и проверяют правильность его построения, для чего подсчитывают количество занятых клеток (их должно

3. Строят систему потенциалов, соответствующих опорному решению. Для этого решают систему уравнений $u_i + v_j = c_{ij}$ при $x_{ij} > 0$. Для того чтобы найти частное решение системы, одному из потенциалов (обычно тому, которому соответствует большее число занятых клеток) задают произвольно некоторое значение (чаще нуль). Остальные потенциалы однозначно определяются по формулам $u_i = c_{ij} - v_j$ при $x_{ij} > 0$,

если известен потенциал v_j , и

$v_j = c_{ij} - u_i$ при $x_{ij} > 0$,

если известен потенциал u_i .

4. Проверяют, выполняется ли условие оптимальности для свободных клеток таблицы. Для этого вычисляют оценки для всех свободных клеток по формулам $\Delta_{ik} = u_i + v_j - c_{ij}$ и те оценки, которые больше нуля, записывают в левые нижние углы клеток. Если для всех свободных клеток $\Delta_{ij} \leq 0$, то вычисляют значение целевой функции, и решение задачи заканчивается, так как полученное решение является оптимальным. Если же имеется хотя бы одна клетка с положительной оценкой, то опорное решение не является оптимальным.

5. Переходят к новому опорному решению, на котором значение целевой функции будет меньше. Для этого находят клетку таблицы задачи, которой соответствует наибольшая положительная оценка $\max\{\Delta_{ij}\}=\Delta_{lk}$. Строят цикл, включающий в свой состав данную клетку и часть клеток, занятых опорным решением. В клетках цикла расставляют поочередно знаки «+» и «-», начиная с «+» в клетке с наибольшей положительной оценкой. Осуществляют сдвиг (перераспределение груза) по циклу на величину $\theta = \min_{\langle\langle-\rangle\rangle} \{x_{ij}\}$. Клетка со знаком «-», в которой достигается $\min_{\langle\langle-\rangle\rangle} \{x_{ij}\}$, остается пустой. Если минимум достигается в нескольких клетках, то одна из них остается пустой, а в остальных проставляют базисные нули, чтобы число занятых клеток оставалось равным $m+n-1$. Далее возвращаемся к пункту 3 алгоритма.