

Алгоритм симплекс-метода

1. Особенности симплексного метода
2. Методика решения задач симплексным методом
3. Экономическое содержание коэффициентов пропорциональности
4. Корректировка оптимальных решений задач линейного программирования

Если задача линейного программирования содержит более двух переменных, то ее решение требует применения некоторого алгебраического метода. Одним из известных и классических методов является симплексный метод, основанный на принципе последовательного улучшения решения.

Впервые данный метод был разработан Джоном Данцигом в 1949 г. Название метод получил от термина «симплекс» – это выпуклый многоугольник в n -мерном пространстве с $n+1$ вершинами, не лежащими в одной гиперплоскости. Симплекс выделен в отдельный класс потому, что в n -мерном пространстве n точек всегда лежат в одной гиперплоскости, другими словами он представляет собой простейший многоугольник, содержащий некоторый объем n -мерного пространства.

Идея метода состоит в отыскании какой-либо вершины многогранника допустимых решений, проверки ее координат на оптимальность. Если решение не оптимально, то осуществляют переход к другой вершине многогранника и вновь проверяют решение на оптимальность. При этом при переходе от одной вершины к другой значение целевой функции убывает (при решении задачи на минимум) или возрастает (при решении задачи на максимум). Так как выпуклый многогранник имеет конечное число вершин (вследствие конечности число ограничений задачи), то за конечное число «шагов» точка оптимума будет найдена.

Методика решения задач симплексным методом

Алгоритм решения задач симплексным методом предполагает несколько этапов:

1. Подготовка информации (введение переменных и формирование ограничений).
2. Преобразование ограничений и занесение информации в симплексную таблицу.
3. Поиск опорного решения.
4. Поиск оптимального решения.

Имеем следующую ЭМЗ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \leq A_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \leq A_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n \geq A_3 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = A_m \end{cases}$$
$$F_{\max} = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n.$$

Для решения задачи лучше всего ограничения привести к виду \leq .

Примечание. Если имеется ограничение типа \geq , то необходимо умножить на -1 левые и правые части ограничений, заменить знак ограничения на противоположный.

Затем осуществляется приведение задачи к каноническому виду (т.е. превращение неравенств в уравнение за счет использования новых дополнительных переменных u_i , вводимых в ограничение и целевую функцию).

С экономической точки зрения в ограничениях типа \leq дополнительные переменные обозначают величину недоиспользования ресурсов, в ограничениях типа \geq – величину превышения сверх минимума. Дополнительные переменные u_i образуют базис и называются базисными, а основные переменные x_j являются небазисными.

Исходное решение задачи осуществляется из допущения, что $x_j=0$. Тогда подставив эти значения в ограничения задачи получим, что дополненные переменные $(y_i)=СЧ$.

$$y_1 = A_1$$

$$y_2 = A_2$$

$$y_3 = -A_3$$

$$y_m = A_m$$

$$F = 0$$

С экономической точки зрения такое решение означает, что для ограничений типа \leq ресурсы не используются вовсе, а для ограничений типа \geq требования этих ограничений не выполняются.

Далее осуществляем проверку исходного решения на допустимость, т.е. является ли решение опорным.

Опорным называется решение, полученное при таких значениях переменных, при которых требования ограничений выполняются, а целевая функция приобретает какое-то значение (может быть и 0).

Признаком опорного решения является:

- 1) отсутствие в столбце СЧ отрицательных коэффициентов;
- 2) отсутствие нулей среди базисных переменных.

Решение симплексным методом производится в таблицах, содержащих $m+2$ строк (где m – число строк ограничений) и $n+2$ столбцов (где n – число небазисных переменных). В таблицу

заносим матрицу коэффициентов при переменных, при этом коэффициенты целевой строки заносим с противоположным знаком.

Таблица 1

Базисные переменные (БП)	Свободные члены (СЧ)	Небазисные переменные (НБП)				
		X_1	X_2	X_3	...	X_n
Y_1	A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}
Y_2	A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}
Y_3	$-A_3$	$-a_{31}$	$-a_{32}$	$-a_{33}$...	$-a_{3n}$
...
0	A_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}
F	0	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$...	$-c_n$

Поиск опорного решения начинают с перемещения нуля со столбца БП в столбец НБП. Чтобы это осуществить, необходимо найти разрешающую строку и разрешающий столбец. В качестве разрешающей строки берут любую 0-строку, а в качестве разрешающего столбца выбирают тот, где получают наименьшее положительное частное, полученное от деления коэффициентов столбца СЧ на соответствующие коэффициенты столбцов $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

В 0-строке берем первый коэффициент – делим столбец СЧ на соответствующие коэффициенты 1-го столбца. Получаем следующие частные:

$A_1 / a_{11}, A_2 / a_{21}, -A_3 / -a_{31}, \dots, A_m / a_{m1}$. Если получится, что $\frac{A_m}{a_{m1}} < \frac{A_1}{a_{11}}; \frac{A_2}{a_{21}}; \frac{-A_3}{-a_{31}}$, то

коэффициент a_{m1} можно взять за разрешающий. Если же $\frac{A_m}{a_{m1}}$ больше одного и других

частных, тогда проверяем коэффициент a_{m2} и т.д.

Допустим a_{mn} – разрешающий элемент, который показывает, что базисное значение 0 и небазисное x_n должны поменяться местами. Замена переменных предполагает поиск нового базиса и требует проведения вычислений. Чтобы записать правила, по которым осуществляют преобразования, введем обозначения: a_{ij} – коэффициент, стоящий в строке i и столбце j . Тогда a_{rk} – разрешающий коэффициент, где $r \in i, k \in j$.

1. Новый коэффициент вместо разрешающего равен обратному от него:

$$a'_{rk} = \frac{1}{a_{rk}} (a_{rk} \neq 0)$$

номер 01-5
19.05.2021

(в нашем примере $a'_{mn} = \frac{1}{a_{mn}} (a_{mn} \neq 0)$).

2. Новые коэффициенты разрешающей строки равны старым коэффициентам, деленным на разрешающий элемент:

$$a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}} (k \neq j) \text{ или } \left(\frac{a_{mj}}{a_{mn}}, j \neq n \right).$$

3. Новые коэффициенты разрешающего столбца равны старым коэффициентам, деленным на разрешающий элемент, взятый с противоположным знаком:

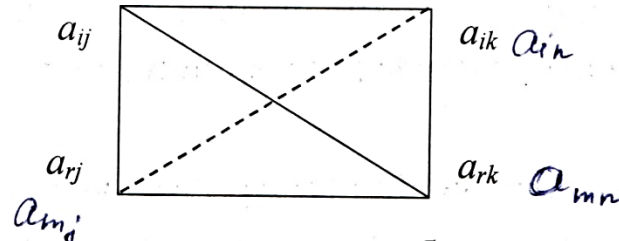
$$a'_{ik} = -\frac{a_{ik}}{a_{rk}} (i \neq r) \quad \left(-\frac{a_{in}}{a_{mn}}, i \neq m \right).$$

4. Остальные коэффициенты, не стоящие в разрешающем столбце и разрешающей строке определяются по правилу прямоугольника: от произведения коэффициентов главной диагонали вычитают произведение коэффициентов побочной диагонали и делят на разрешающий элемент:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rk} - a_{rj} \cdot a_{ik}}{a_{rk}} \quad (r \neq i, k \neq j).$$

Примечание.1. Главная диагональ это та, где находится разрешающий элемент.

2. Если в побочной диагонали присутствует 0, элемент остается без изменений.



Результаты заносим во вторую симплексную таблицу.

Таблица 2

БП	СЧ	НБП				
		X_1	X_2	X_3	...	0
Y_1	A'_1	a'_{11}	a'_{12}	a'_{13}	...	$-a'_{1n}$
Y_2	A'_2	a'_{21}	a'_{22}	a'_{23}	...	$-a'_{2n}$
Y_3	$-A'_3$	$-a'_{31}$	$-a'_{32}$	$-a'_{33}$...	a'_{3n}
...
X_n	A'_m	a'_{m1}	a'_{m2}	a'_{m3}	...	$-a'_{mn}$
F	F_1	$-c'_1$	$-c'_2$	$-c'_3$...	c'_n

После этого вычеркиваем нулевой столбец и в дальнейших расчетах он участия не принимает. Опорного решения нет (имеется отрицательный СЧ). Превращение отрицательного СЧ в положительный связано с нахождением разрешающего элемента, т.е. перемещением дополнительной переменной в небазисные. Разрешающая строка обязательно должна находиться там, где отрицательный СЧ. Для нахождения разрешающего столбца делим свободный член на отрицательный коэффициент в этой же строке. Если полученное положительное частное будет наименьшим по сравнению со всеми остальными положительными частными, полученными от деления остальных СЧ на элементы этого же столбца, это говорит о том, что мы нашли разрешающий столбец. Если это условие не выполняется, то необходимо проверить остальные отрицательные коэффициенты этой же строки. После нахождения разрешающей строки и разрешающего столбца мы имеем разрешающий элемент. По вышеприведенным правилам определяют значения следующей симплексной таблицы.

Примечание.

1. Если в симплексной таблице всем без исключения отрицательным СЧ соответствуют отрицательные коэффициенты столбца, то в качестве разрешающего элемента выбирают наибольшее положительное частное. В этом случае за один шаг удастся получить опорное решение.

2. Если в строке с отрицательным СЧ нет ни одного отрицательного коэффициента, система ограничений несовместна, а задача решение не имеет. Преобразования продолжаем до тех пор, пока не будет найдено опорное решение.

После нахождения опорного решения необходимо проверить является ли оно оптимальным. **Признаком оптимального решения** является наличие всех отрицательных

(один или несколько нулей) коэффициентов целевой строки при решении задачи на минимум; и положительных (один или несколько нулей) – при решении на максимум.

Если оптимальное решение отсутствует, то его поиск начинаем с определения разрешающего столбца. Разрешающим столбцом при поиске минимальной функции будет являться тот, в целевой функции которого находится наибольший положительный коэффициент, а при поиске максимальной функции – наибольший по абсолютной величине отрицательный коэффициент.

Чтобы найти разрешающий элемент, делим коэффициенты столбца СЧ на соответствующие коэффициенты разрешающего столбца. Разрешающим будет тот элемент, от деления на который получим меньшее положительное частное.

Затем по вышеизложенным правилам определим коэффициенты новой симплексной таблицы.

Примечание.

Если при решении задачи на максимум в строке целевой функции имеется отрицательный коэффициент, а в разрешающем столбце нет ни одного положительного коэффициента, то это говорит о неограниченности функции. Если при решении задачи на минимум в строке целевой функции имеется положительный коэффициент, а в разрешающем столбце все коэффициенты отрицательные, то это приводит к подобному результату.

Расчеты продолжают до тех пор, пока не получим оптимальное решение.

Экономическое содержание коэффициентов пропорциональности

Выполнение расчетов по симплексному методу предполагает нахождение параметров переменной в какой-то новой крайней угловой точке многогранника решений.

Процесс поиска требует расчетов по таблице с использованием определенных правил. Эти расчеты отличаются строго определенным экономическим содержанием.

Чтобы это выяснить, проследим изменение коэффициентов первой ко второй симплексной таблице.

Рассмотрим конкретную ЭМЗ:

Ассоциация фермерских хозяйств возделывает зерновые культуры, однолетние травы, картофель и содержит поголовье коров высокопродуктивной породы. В наличии имеется 1000 га пашни, 20000 чел.-дн. трудовых ресурсов, корма природных кормовых угодий (сенокосов и пастбищ) 5000 ц к.ед. Экономические показатели расхода ресурсов и выход продукции даны в табл.

Т а б л и ц а. Параметры ассоциации хозяйств

Показатели	Приходится на 1 га (гол.)				Прибыль, у.д.е.
	Пашня, га	Трудовые ресурсы, чел.- дн.	Выход кормов, ц к.ед.	Расход кормов, ц к.ед.	
Зерновые	1	9	15	–	30
Картофель	1	22	20	–	60
Однолетние травы	1	8	30	–	–
Коровы	–	20	–	50	100

Цель: рассчитать размеры отраслей с целью получения максимум прибыли.

Решение.

1. Введем неизвестные величины:

x_1 – площадь зерновых культур, га;

x_2 – площадь картофеля, га;

x_3 – площадь однолетних трав, га;

x_4 – поголовье коров, гол.

2. Составим условия задачи:

1) по использованию пашни

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1000$$

2) по использованию трудовых ресурсов

$$9x_1 + 22x_2 + 8x_3 + 20x_4 \leq 20000$$

3) по балансу кормовых единиц

$$50x_4 \leq 15x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 5000$$

Целевая функция $F_{\max} = 30x_1 + 60x_2 + 100x_4$.

Используя определенные приемы преобразований составим симплексную табл. №1.

$$x_1 + x_2 + x_3 + y_1 = 1000$$

$$9x_1 + 22x_2 + 8x_3 + 20x_4 + y_2 = 20000$$

$$50x_4 - 15x_1 - 20x_2 - 30x_3 + y_3 = 5000$$

$$F_{\max} = 30x_1 + 60x_2 + 100x_4.$$

Таблица 1

БП	СЧ	НБП			
		X_1	X_2	X_3	X_4
Y_1	1000	1	1	1	0
Y_2	20000	9	22	8	20
Y_3	5000	-15	-20	-30	50
F_{\max}	0	-30	-60	0	-100



И.И. Решетников

Таблица 2

БП	СЧ	НБП			
		X_1	X_2	X_3	Y_3
Y_1	1000	1	1	1	0
Y_2	18000	15	30	20	-0,4
X_4	100	-0,3	-0,4	-0,6	0,02
F_{max}	10000	-60	-100	-60	2

можно ввести

Коэффициенты, полученные во II симплексной таблице, называют коэффициентами пропорциональности и они устанавливают соотношения между вошедшими в базис и не вошедшими в базис переменными.

Их экономический смысл:

1. Новый коэффициент вместо старого разрешающего (0,02) показывает, сколько единиц вошедший в базис переменной (т.е. x_4) можем иметь за счет единицы наиболее лимитированного ресурса (y_3) (т.е. можем содержать 0,02 коров за счет 1 ц к.ед.). Тот факт, что разрешающий элемент определяется наименьшим положительным частным, свидетельствует о том, что это частное получено по наиболее лимитированному ресурсу.

2. Новые коэффициенты разрешающей строки показывают на сколько единиц возрастет (при знаке «-») или уменьшится (при знаке «+») введенная в базис переменная (x_4) если в базисные переменные ввести небазисную в размере единица.

Например. Если в базис ввести переменную x_1 (площадь посева зерновых культур) в размере 1 га, то x_4 (поголовье коров) возрастет на 0,3 головы.

3. Новые коэффициенты разрешающего столбца показывают, сколько единиц ресурсов требуется (при знаке «+») или сколько их получим (при знаке «-»), если в план или в базис

введем небазисные переменные в размере, равном значению нового коэффициента вместо разрешающего (0,02).

Например. Если введем в базис поголовье коров $x_4=0,02$, то затраты труда увеличатся на 0,4 чел.-дн., а прибыль уменьшится на 2 у.д.е.

4. Новые коэффициенты, не стоящие в разрешающем столбце и в разрешающей строке показывают, сколько ресурсов расходуется при знаке «+» или поступает при знаке «-», если в план введем небазисные переменные в размере единица и при этом произойдет изменение размера ранее введенных в план переменных.

Например. Если введем в план переменную x_1 в размере единица, то целевая функция задачи возрастет на 60 ед. за счет того, что переменная x_4 тоже возрастет на 0,3 ед.

Корректировка оптимальных решений задач линейного программирования

Необходимость корректировки полученного ранее решения задачи вызывается несколькими причинами.

1. Появляются дополнительные источники ограниченных ресурсов (земли, труда, кормов и т.д.) или, наоборот, ресурсная база уменьшается. Подобные изменения могут стать следствием преобразований экономики, реформирования производства или же возможное выделение в рамках существующего предприятия кооперативов, фермерских хозяйств, что приводит к изменению ресурсов.

2. Вследствие изменения конъюнктуры рынка окупаемость отдельных видов продукции может изменяться. Доходность, вошедших в план отраслей может уменьшаться, а доходность не вошедших отраслей может увеличиваться. Чтобы оперативно отреагировать на изменившуюся конъюнктуру предприятию требуется изменить размеры отраслей.

3. Необходимость корректировки может быть вызвана также нехваткой каких-либо ресурсов (семена, трактора и т.д.). И как следствие необходимо изменения размеров отраслей в хозяйстве.

Корректировка оптимального решения проводится на основе коэффициентов пропорциональности последней симплексной таблицы по общей формуле:

$$x_j^k(y_i^k) = x_j(y_i) - \sum_{j \in J_0} a_{ij} - \Delta x_j(\Delta y_i),$$

где $x_j^k(y_i^k)$ – соответственно значение основной и дополнительной переменных после корректировки;

$x_j(y_i)$ – соответственно значение основной и дополнительной переменных до корректировки;

j – номер столбца переменной, участвующей в корректировке;

J_0 – множество столбцов переменных, участвующих в корректировке;

a_{ij} – коэффициенты пропорциональности i -ых строк j -ых столбцов, участвующих в корректировке;

$\Delta x_j(\Delta y_i)$ – соответственно величина корректировки по основной и дополнительной переменных ($\Delta x_j > 0, \Delta y_i > 0$).

Рассмотрим последнюю симплексную таблицу предыдущей задачи:

БП	СЧ	НБП			
		Y_1	Y_2	X_3	Y_3
X_1	800	2	-0,066	0,66	0,026
X_2	200	-1	0,066	0,34	-0,026
X_4	420	0,56	-0,017	-0,85	0,032
F_{max}	78000	20	2,67	13,6	0,93

Сущность метода потенциалов, требования к информации и основные условия достижения экстремума. Программа вычислений

Транспортная задача линейного программирования получила в настоящее время широкое распространение в теоретических обработках и практическом применении на транспорте и в АПК. Особенно большое значение она имеет в деле рационализации постановок важнейших видов промышленной и сельскохозяйственной продукции, а также оптимального планирования грузопотоков и работы различных видов транспорта. Кроме того, к задачам транспортного типа сводятся многие другие задачи линейного программирования - задачи о назначениях, сетевые, календарного планирования. Однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах a_1, a_2, \dots, a_m . Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах b_1, b_2, \dots, b_n . Известны c_{ij} , $i=1, 2, \dots, m$, $j=1, 2, \dots, n$ - стоимости перевозки единицы груза от каждого i -го поставщика каждому j -му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех потребителей полностью удовлетворены и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны. Исходные данные транспортной задачи обычно записываются в таблице 1.

$a_i \backslash b_j$	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	$c_{11} \dots c_{12} \dots$	c_{1m}

Исходные данные задачи могут быть представлены также в виде вектора запасов поставщиков $A=(a_1, a_2, \dots, a_m)$, вектора запросов потребителей $B=(b_1, b_2, \dots, b_n)$ и матрицы стоимостей

$$\begin{pmatrix} c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

В транспортных задачах под поставщиками и потребителями понимаются различные промышленные и сельскохозяйственные предприятия, заводы, фабрики, склады, магазины и т.д. Однородными считаются грузы, которые могут быть перевезены одним видом транспорта. Под стоимостью перевозок понимаются тарифы, расстояния, время, расход топлива и т.п.

В транспортной задаче предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Такая задача называется *задачей с правильным балансом*, а ее модель – *закрытой*. Если же это равенство не выполняется, то задача называется *задачей с неправильным балансом*, а ее модель – *открытой*.

Опорным решением транспортной задачи называется любое допустимое решение, для которого вектор-условия, соответствующие положительным координатам, линейно независимы.

Ввиду того, что ранг системы векторов-условий транспортной задачи равен $m+n-1$, опорное решение не может иметь отличных от нуля координат более $m+n-1$. Число отличных от нуля координат невырожденного опорного решения равно $m+n-1$, а для вырожденного опорного решения меньше $m+n-1$.

Любое допустимое решение транспортной задачи можно записать в ту же таблицу, что и исходные данные. Клетки таблицы транспортной задачи, в которых находится отличные от нуля или базисные нулевые перевозки, называются *занятыми*, остальные – *незанятыми* или *свободными*. Клетки таблицы нумеруются так, что клетка, содержащая перевозку x_{ij} , т.е. стоящая в i -й строке и j -м столбце, имеет номер (i,j) . Каждой клетке с номером (i,j) соответствует переменная x_{ij} , которой соответствует вектор-условие A_{ij} .

Для того чтобы избежать трудоемких вычислений при проверке линейной независимости вектор-условий, соответствующих положительным координатам допустимого решения, вводят понятие цикла. Циклы также используются для перехода от одного опорного решения к другому.

Циклом называется такая последовательность клеток таблицы транспортной задачи $(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_1)$, в которой две и только две соседние клетки расположены в одной строке или столбце, причем первая и последняя клетки также находятся в одной строке или столбце.

Цикл изображают в таблице транспортной задачи в виде замкнутой ломаной линии. В любой клетке цикла происходит поворот звена ломаной линии на 90° . Простейшие циклы изображены на рисунке 1, где звездочкой отмечены клетки таблицы, включенные в состав цикла.

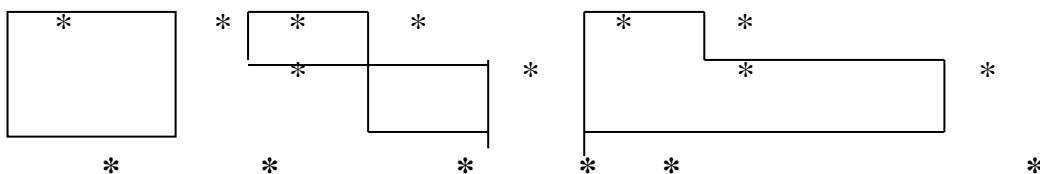


Рис 1.

Методы построения начального опорного решения.

Метод северо-западного угла

Существует ряд методов построения начального опорного решения, наиболее простым из которых является метод северо-западного угла. В данном методе запасы очередного поставщика используются для обеспечения запросов очередных потребителей до тех пор, пока не будут исчерпаны полностью, после чего используются запасы следующего по номеру поставщика.

Заполнение таблицы транспортной задачи начинается с левого верхнего угла и состоит из ряда однотипных шагов. На каждом шаге, исходя из запасов очередного поставщика и запросов очередного потребителя, заполняется только одна клетка и соответственно исключается из рассмотрения один поставщик или потребитель. Осуществляется это таким образом:

1. если $a_i < b_j$, то $x_{ij} = a_i$ и исключается поставщик с номером i , $x_{ik} = 0$, $k=1, 2, \dots, n, k \neq j$, $b_j = b_j - a_i$;
2. если $a_i > b_j$, то $x_{ij} = b_j$ и исключается потребитель с номером j , $x_{kj} = 0$, $k=1, 2, \dots, m, k \neq i$, $a_i = a_i - b_j$;
3. если $a_i = b_j$, то $x_{ij} = a_i = b_j$ и исключается либо i -й поставщик, $x_{ik} = 0$, $k=1, 2, \dots, n, k \neq j$, $b_j = 0$, либо j -й потребитель, $x_{kj} = 0$, $k=1, 2, \dots, m, k \neq i$, $a_i = 0$

Нулевые перевозки принято заносить в таблицу только тогда, когда они попадают в клетку (i,j) , подлежащую заполнению. Если в очередную клетку таблицы (i,j) требуется поставить перевозку, а i -й поставщик или j -й потребитель имеет нулевые запасы или запросы, то в клетку ставится перевозка, равная нулю (базисный нуль), и после этого, как обычно, исключается из рассмотрения соответствующий поставщик или потребитель. Таким образом, в таблицу заносят только базисные нули, остальные клетки с нулевыми перевозками остаются пустыми.

Во избежание ошибок после построения начального опорного решения необходимо проверить, что число занятых клеток равно $m+n-1$ и векторы-условия, соответствующие этим клеткам, линейно независимы.

Решение транспортной задачи, построенное методом северо-западного угла, является опорным.

Метод минимальной стоимости

Метод минимальной стоимости прост, он позволяет построить опорное решение, достаточно близкое к оптимальному, так как использует матрицу стоимостей транспортной задачи $C=(c_{ij})$, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$. Как и метод северо-западного угла, он состоит из ряда однотипных шагов, на каждом из которых заполняется только одна клетка таблицы, соответствующая минимальной стоимости $\min \{c_{ij}\}$, и исключается из рассмотрения только одна строка (поставщик) или один столбец (потребитель). Очередную клетку,

соответствующую, заполняют по тем же правилам, что и в методе северо-западного угла. Поставщик исключается из рассмотрения, если его запасы использованы полностью. Потребитель исключается из рассмотрения, если его запросы удовлетворены полностью. На каждом шаге исключается либо один поставщик, либо один потребитель. При этом если поставщик еще не исключен, но его запасы равны нулю, то на том шаге, когда от данного поставщика требуется поставить груз, в соответствующую клетку таблицы заносится базисный нуль и лишь, затем поставщик исключается из рассмотрения. Аналогично с потребителем.

Решение транспортной задачи, построенное методом минимальной стоимости, является опорным.

Переход от одного опорного решения к другому

В транспортной задаче переход от одного опорного решения к другому осуществляется с помощью цикла. Для некоторой свободной клетки таблицы строится цикл, содержащий часть клеток, занятых опорным решением. По этому циклу перераспределяются объемы перевозок. Перевозка загружается в выбранную свободную клетку и освобождается одна из занятых клеток, получается новое опорное решение.

Если таблица транспортной задачи содержит опорное решение, то для любой свободной клетки таблицы существует единственный цикл, содержащий эту клетку и часть клеток, занятых опорным решением.

Означенный цикл

Цикл называется *означенным*, если его угловые клетки пронумерованы по порядку и нечетным клеткам приписан знак «+», а четным – знак «-» (рис 2.)

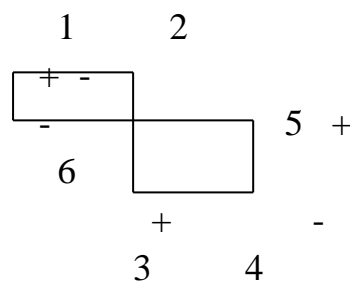


Рис 2.

Сдвигом по циклу на величину θ называется увеличение объемов перевозок во всех нечетных клетках цикла, отмеченных знаком «+», на θ и уменьшение объемов перевозок во всех четных клетках, отмеченных знаком «-», на θ .

Если таблица транспортной задачи содержит опорное решение, то при сдвиге по любому циклу, содержащему одну свободную клетку, на величину $\theta = \min_{x_{ij}} \{x_{ij}\}$ получится опорное решение.

Метод потенциалов

Широко распространенным методом решения транспортных задач является метод потенциалов. Этот метод позволяет упростить наиболее трудоемкую часть вычислений – нахождение оценок свободных клеток.

Признак оптимальности опорного решения. Если допустимое решение $X=(x_{ij})$, $i=1,2,,...,m$, $j=1,2,,...,n$ транспортной задачи является оптимальным, то существует потенциалы (числа) поставщиков u_i , $i=1,2,,...,m$ и потребителей v_j , $j=1,2,,...,n$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0,$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0.$$

Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов

Порядок решения транспортной задачи методом потенциалов следующий.

1. Проверяют выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости задачи. Если задача имеет неправильный баланс, то вводят фиктивного поставщика или потребителя с недостающими запасами или запросами и нулевыми стоимостями перевозок.

2. Строят начальное опорное решение (методом минимальной стоимости или каким-либо другим методом) и проверяют правильность его построения, для чего подсчитывают количество занятых клеток (их должно быть $m+n-1$) и убеждаются в линейной независимости векторов-условий (методом вычеркивания).

3. Строят систему потенциалов, соответствующих опорному решению. Для этого решают систему уравнений $u_i + v_j = c_{ij}$ при $x_{ij} > 0$. Для того чтобы найти частное решение системы, одному из потенциалов (обычно тому, которому соответствует большее число занятых клеток) задают произвольно некоторое значение (чаще нуль). Остальные потенциалы однозначно определяются по формулам $u_i = c_{ij} - v_j$ при $x_{ij} > 0$,

$$\text{если известен потенциал } v_j, \text{ и}$$

$$v_j = c_{ij} - u_i \text{ при } x_{ij} > 0,$$

$$\text{если известен потенциал } u_i.$$

4. Проверяют, выполняется ли условие оптимальности для свободных клеток таблицы. Для этого вычисляют оценки для всех свободных клеток по формулам $\Delta_{ik} = u_i + v_j - c_{ij}$ и те оценки, которые больше нуля, записывают в левые нижние углы клеток. Если для всех свободных клеток $\Delta_{ij} \leq 0$, то вычисляют значение целевой функции, и решение задачи заканчивается, так как полученное решение является оптимальным. Если же имеется хотя бы одна клетка с положительной оценкой, то опорное решение не является оптимальным.

5. Переходят к новому опорному решению, на котором значение целевой функции будет меньше. Для этого находят клетку таблицы задачи, которой соответствует наибольшая положительная оценка $\max\{\Delta_{ij}\} = \Delta_{ik}$. Строят цикл, включающий в свой состав данную клетку и часть клеток, занятых опорным решением. В клетках цикла расставляют поочередно знаки «+» и «-», начиная с «+» в клетке с наибольшей положительной оценкой. Осуществляют сдвиг (перераспределение груза) по циклу на величину $\theta = \min_{\langle\langle-\rangle\rangle} \{x_{ij}\}$. Клетка со знаком «-», в которой достигается $\min_{\langle\langle-\rangle\rangle} \{x_{ij}\}$, остается пустой. Если минимум достигается в нескольких клетках, то одна из них остается пустой, а в остальных проставляют базисные нули, чтобы число занятых клеток оставалось равным $m+n-1$. Далее возвращаемся к пункту 3 алгоритма.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ №3

Составление оптимизационной задачи по сельхозорганизации

Пример 1.

1. Предприятие собирается возделывать озимые и яровые зерновые, зернобобовые, корнеплоды, многолетние и однолетние травы, имеет пастбища и сенокосы. В животноводстве хозяйство специализируется на производстве свинины. Для выполнения внутрихозяйственных работ будут использованы лошади. Наличие земельных угодий (га): пашня – 1255, сенокосы – 118, пастбища – 89. Объем трудовых ресурсов составит 400550 чел.-ч. Имеется возможность дополнительно привлечь сезонных работников в количестве до 10275 чел.-ч, неся затраты 0,5 у.д.е. за 1 чел.-ч.

2. Информация о развитии растениеводства дана в табл. 1.

Т а б л и ц а 1. Показатели растениеводческой отрасли

Культуры (угодья)	Урожайность, ц/га	В том числе		Затраты труда на 1 га, чел.-ч
		на корм скоту	товарная продукция	
Озимые продовольственные	26,0	2,0	20,95	26,60
Яровые фуражные	29,4	26,4	–	25,25
Зернобобовые:				
продовольственные	17,9	1,5	13,35	27,90
фуражные	17,9	14,9	–	27,90
Корнеплоды	333	333	–	346,50
Многолетние травы на:				
травяную муку	25,1	25,1	–	25,25
сено	37,2	37,2	–	20,10
сенаж	62,8	62,8	–	18,75
зеленый корм	135,5	135,5	–	18,20
Однолетние травы на зеленый корм	111	111	–	20,75
Сенокосы на сено	22,8	22,8	–	18,20
Пастбища на зеленый корм	86,5	86,5	–	15,05

3. Данные о состоянии отрасли животноводства характеризует табл. 2.

Т а б л и ц а 2. Информация по животноводству

Животные	Продуктивность, ц	Расход на 1 гол.		Затраты труда на 1 гол., чел.-ч
		ц к.ед.	ц п.п.	
Свиньи	1,97	6,83	0,7	27,26
Лошади	-	31,5	3,6	68,3

4. С учетом требований севооборотов и мощности животноводческих помещений установлены технологические ограничения на размеры отраслей:

а) площадь посева зерновых и зернобобовых должна составить не менее 40% и не более 57,3% от пашни; б) площадь посева озимых должна быть не более 555 га, зернобобовых – не менее 51 га; в) поголовье свиней должно составлять от 855 до 1000 голов; г) поголовье лошадей равно 47 голов.

5. Расход кормов на внутрихозяйственные нужды для развития личного подсобного хозяйства населения, ц: концентраты – 1455, сено – 2207ц.

6. Нормы кормления для поголовья животных в расчете на 1 среднегодовую голову отражены в табл. 3.

Т а б л и ц а 3. Питательность кормов и нормы скармливания, ц

Корма	Свиньи		Лошади	Содержание в 1 ц корма	
	не менее	не более		ц к.ед.	ц п.п.
Концентраты	4,3	8,1	9,5	1,0	0,125
Травяная мука	0,5	7,55	-	0,68	0,091
Корнеплоды	0,4	2,25	4	0,13	0,01
Зеленый корм	0,2	3,1	40	0,19	0,022
Сено	-	-	23,5	0,45	0,049
Сенаж	-	-	11,9	0,28	0,029
ЗЦМ	0,1	0,38	-	2,02	0,221
Обрат	0,5	1,75	-	0,13	0,035
Мясокостная мука	0,05	1,9	-	1,04	0,341

7. Коммерческий отдел предусматривает покупку кормов для предприятия:

концентратов из комбикормового завода – до 244 ц; заменителя цельного молока (ЗЦМ) и обрата из молочного комбината соответственно до 474 и до 580 ц; мясокостной муки из мяскокомбината – до 193 ц. Цена единицы покупных кормов (у.д.е. за 1 ц): концентраты – 150; ЗЦМ – 170; обрат – 8; мясокостная мука – 110.

8. Сельхозорганизация будет реализовывать зерно и свинину в счет договорных поставок не менее 2044 ц и 1078 ц соответственно. Кроме того, служба маркетинга районного управления сельского хозяйства и продовольствия предлагает для сельхозорганизации сбыт зерна и свинины по рыночным каналам – соответственно до 344 и до 282 ц.

9. Планируемая прибыль от реализации каждого вида продукции (у.д.е. за 1 ц):

зерно в счет договорных поставок – 4; зерно по рыночным каналам – 4,5; свинина в счет договорных поставок – 10; свинина по рыночным каналам – 14.

Введем неизвестные величины задачи, которые можно сгруппировать следующим образом.

1. Оптимальные размеры в растениеводстве и животноводстве: x_1 – площадь озимых продовольственных, га; x_2 – площадь яровых фуражных, га; x_3 – площадь зернобобовых продовольственных, га; x_4 – площадь зернобобовых фуражных, га; x_5 – площадь корнеплодов, га; x_6 – площадь многолетних трав на травяную муку, га; x_7 – площадь многолетних трав на сено, га; x_8 – площадь многолетних трав на сенаж, га; x_9 – площадь многолетних трав на зеленый корм, га; x_{10} – площадь однолетних трав на зеленый корм, га; x_{11} – площадь сенокосов для получения сена, га; x_{12} – площадь пастбищ на зеленый корм, га; x_{13} – поголовье свиней, гол.; x_{14} – поголовье лошадей, гол.

2. Оптимальное количество покупных ресурсов (кормов, труда): x_{15} – объем сезонных работников, чел.-ч; x_{16} – поставка концентратов из комбикормового завода, ц; x_{17} – поставка ЗЦМ, ц; x_{18} – поставка обрата, ц; x_{19} – поставка мясокостной муки из мяскокомбината, ц.

3. Скользящая переменная по кормам на всё поголовье свиней, за счет которой (добавки) норма скармливания корма животному может быть увеличена в пределах от минимума до максимума и составит оптимальную величину (ц): x_{20} – скользящая переменная или добавка концентратов для поголовья свиней; x_{21} – добавка травяной муки для свиней; x_{22} – добавка корнеплодов для свиней; x_{23} – добавка зеленого корма для свиней; x_{24} – добавка ЗЦМ для свиней; x_{25} – добавка обрата для свиней; x_{26} – добавка мясокостной муки для свиней.

4. Оптимальные объемы сбыта продукции потребителям с учетом предполагаемых каналов (ц): x_{27} – сбыт зерна в счет договорных поставок; x_{28} – сбыт зерна на рынке; x_{29} – сбыт свинины в счет договорных поставок; x_{30} – сбыт свинины на рынке.

Далее записываются ограничения экономико-математической задачи, первая группа которых описывает использование сельхозугодий.

I. Сумма площадей сельскохозяйственных культур, возделываемых на данном виде сельхозугодий, не должна превышать площади этих угодий. По пашне:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \leq 1255.$$

Аналогично нужно записать условия 2 и 3 (по сенокосам и пастбищам).

II. Вторая группа ограничений включает использование трудовых ресурсов. Затраты труда на развитие отраслей растениеводства и животноводства не должны превышать наличие труда в организации с учетом его привлечения.

4. По труду: $26,6x_1 + 25,25x_2 + 27,9x_3 + 27,9x_4 + 346,5x_5 + 25,25x_6 + 20,1x_7 + 18,75x_8 + 18,2x_9 + 20,75x_{10} + 18,2x_{11} + 15,05x_{12} + 25,26x_{13} + 68,3x_{14} \leq 400550 + x_{15}$.

5. Привлеченный труд должен быть ограниченным. Условие на привлеченный труд: $x_{15} \leq 10275$.

III. Третья группа ограничений включает баланс кормов. Нормы расхода (минимальная или фиксированная) отдельного вида корма, умноженные на поголовье соответствующих групп животных по всем видам и половозрастным группам животных, с учетом скользящих переменных (добавок корма), не должны превышать объема собственного производства корма, с учетом возможной покупки и расхода его для нужд населения.

6. По балансу концентратов

$$4,3x_{13} + x_{20} + 9,5x_{14} \leq 2x_1 + 26,4x_2 + 1,5x_3 + 14,85x_4 + x_{16} - 1455.$$

Далее аналогично записывают условия 7 – 11 по балансу травяной муки, корнеплодов, зеленого корма, сена и сенажа. Баланс кормов животного происхождения, являющихся покупными ресурсами, записывается со знаком равно.

12. По балансу ЗЦМ $0,1x_{13} + x_{24} = x_{17}$.

Таким образом, записываются условия 13 и 14 по балансу обраты и мясокостной муки.

IV. Группа ограничений на объем покупки кормов.

15. Ограничение по максимальному количеству покупки концентратов

$$x_{16} \leq 244.$$

Аналогично ограничиваем количество покупки других кормов, записывая условия 16 – 18.

V. Пятую группу составляют ограничения на скользящие переменные, т.е. добавка корма для животных не должна превышать разности между максимальной и минимальной нормами кормления на голову, умноженной на поголовье.

19. Ограничение на добавку концентратов для поголовья свиней

$$x_{20} \leq (8,1 - 4,3) \cdot x_{13}.$$

Такие же условия нужно записать по каждой добавке других кормов (20 – 25).

VI. В шестую группу входят ограничения по балансу питательных веществ, где в левой части находится расход питательных веществ для всего поголовья каждого вида скота, а в правой – наличие питательных веществ в кормах предприятия.

26. По балансу кормовых единиц

$$6,83 \cdot x_{13} + 31,5x_{14} \leq (2x_1 + 26,4x_2 + 1,5x_3 + 14,85x_4 + x_{16} - 1455) \cdot 1,0 + 25,1x_6 \cdot 0,68 + 333x_5 \cdot 0,13 + (135,5x_9 + 111x_{10} + 86,5x_{12}) \cdot 0,19 + (37,2x_7 + 22,75x_{11} - 2208) \cdot 0,45 + 62,75x_8 \cdot 0,28 + 2,02x_{17} + 0,13x_{18} + 1,04x_{19}.$$

Ограничение 27 (по балансу переваримого протеина) нужно записать аналогичным образом.

VII. Седьмая группа включает ограничения по содержанию питательных веществ в добавках кормов для отдельных видов животных. В левой части – разность между потребностью в питательном веществе на 1 голову животного и содержанием этого вещества в рационе по минимальной норме, умноженная на поголовье животного, в правой – содержание питательного вещества в добавках кормов для данного вида животного.

28. По содержанию кормовых единиц в добавках кормов для поголовья свиней

$$[6,83 - (4,3 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0,68 + 0,4 \cdot 0,13 + 0,2 \cdot 0,19 + 0,1 \cdot 2,02 + 0,5 \cdot 0,13 + 0,05 \cdot 1,04)] \cdot x_{13} \leq x_{20} \cdot 1,0 + x_{21} \cdot 0,68 + x_{22} \cdot 0,13 + x_{23} \cdot 0,19 + x_{24} \cdot 2,02 + x_{25} \cdot 0,13 + x_{26} \cdot 1,04.$$

Таким образом, записывают ограничение 29 – по содержанию переваримого протеина в добавках кормов для поголовья свиней.

VIII. Восьмая группа включает ограничения на размеры отраслей растениеводства и животноводства.

30. По площади посева зерновых и зернобобовых (нижняя граница)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0,4 \cdot 1255.$$

Далее нужно записать условия 31 – 36, где учитываются минимальные и максимальные размеры площадей и поголовья (зерновых и зернобобовых, озимых зерновых, зернобобовых, свиней, лошадей).

IX. В девятую группу входят ограничения по сбыту продукции, где производство товарной продукции распределяется по различным каналам реализации.

37. По сбыту зерна

$$20,95x_1 + 13,35x_3 = x_{27} + x_{28}.$$

Аналогичным образом нужно записать ограничения по сбыту свинины (38).

X. По предельным объемам сбыта продукции по различным каналам реализации.

39. По количеству сбываемого зерна в счет возможных договорных поставок

$$x_{27} \geq 2044.$$

Следующие ограничения (40-42) описывают предельные объемы сбыта зерна на рынке и свинины в счет договорных поставок и рыночных продаж.

Цель решения задачи – получение максимума прибыли за вычетом издержек на приобретение ресурсов:

$$F_{\max} = 4,55x_{27} + 7,1x_{28} + 21x_{29} + 23,5x_{30} - 0,5x_{15} - 144,5x_{16} - 164,5x_{17} - 13,5x_{18} - 204,5x_{19}..$$

После этого производим вычисления в ограничениях задачи, переносим переменные в левую часть уравнений или неравенств, заносим информацию в матрицу. Данная экономическая задача с 30 переменными и 42 ограничениями решается на персональном компьютере с использованием стандартных пакетов прикладных программ.

Анализ оптимального решения показал, что площади пашни, сенокосов и пастбищ будут использоваться полностью, а собственных трудовых ресурсов достаточно для эффективного функционирования.

Информация по оптимальной структуре посевов представлена в табл. 4. Оптимальное поголовье животных составит: свиней – 855 голов; лошадей – 47 голов. В процессе решения сформированы оптимальные рационы в отрасли свиноводства, определен рациональный объем закупаемых кормов.

Т а б л и ц а 4. Размер и структура площадей

Культуры, угодья	Площадь, га	Структура, %
Озимые зерновые	497	39,6
Яровые зерновые	171	13,6
Зернобобовые	51	4,1
Корнеплоды	2	0,1
Многолетние травы на:		
сено	17	1,4
сенаж	9	0,7
травяную муку	508	40,5

Предприятие реализует 11087 ц зерна, в том числе 3,1 % в счет рыночных продаж, а также 1684 ц свинины, в том числе 16,7 % на рынке. Максимальная прибыль по проекту составит 58760 у.д.е. Нужно иметь в виду, что полученная программа легко поддается корректировке. Например, изменяя в матрице значения отдельных ресурсов (земля, работники, корма и др.), а также ценовые параметры, можно получить новые варианты задачи.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ № 4

Моделирование программы развития производственно-сбытовой и внешнеторговой деятельности агропромышленного предприятия

Пример 1.

Колбасно-кулинарный цех агропромышленной организации планирует выпускать 7 видов колбасных изделий: вареная русская высшего сорта; вареная отдельная первого сорта; вареная прима высшего сорта; колбаски полукопченые охотничьи высшего сорта; варено-копченая деликатесная высшего сорта; сырокопченая брауншвейгская высшего сорта; сырокопченая кавказская первого сорта. Для производства предполагаемых видов колбас будет использовано следующее сырье несоленое: говядина (жилованная высшего и первого сорта), свинина (жилованная полужирная и нежирная), шпик хребтовый. В качестве дополнительных компонентов в колбасах применяются: соль поваренная пищевая, натрий нитрит, сахар-песок, перец молотый, чеснок свежий. Рецептура каждого вида колбас, запасы сырья и прибыль от сбыта приведены в табл. 1.

В технологическом процессе производства важно знать мощность термического участка, общая производительность которого составляет 20000 кг колбас. Общий запас полезного времени работы такого оборудования, как шприц, равен 650 ч. Норматив использования данного механизма в расчете на 100 кг продукта следующий (ч): для вареных колбас – 1, для варено-копченых и полукопченых – 1,2, для сырокопченых колбас – 1,1.

Исходя из маркетингового исследования емкости рынка по данному продукту и анкетного опроса населения, спрос на вареную русскую колбасу высшего сорта будет не ниже 30 + 2К ц, вареную колбасу первого сорта – не ниже 14 ц, колбаски полукопченые – не ниже 18 ц.

Т а б л и ц а 1. Экономические показатели ассортиментной задачи по мясоперерабатывающему цеху

Ресурсы	Расход сырья на 1 ц конечного продукта (колбас), кг							Количество сырья, кг
	Вареные			полукопченые	варено-копченые высшего сорта	Сырокопченые		
	высшего сорта	первого сорта	прима			высшего сорта	первого сорта	
Говядина высшего сорта	45	–	25	–	65	75	–	4000
Говядина первого сорта	–	50	–	45	–	–	57	5500
Свинина полужирная	22	21	–	52	57	–	65	6000
Свинина нежирная	–	–	38	15	–	41	–	5000
Шпик	22	12	21	37	40	50	41	6500
Соль поваренная пищевая	2,2	2,1	2,1	4,5	4,9	5,8	5,7	900
Натрия нитрит	0,005	0,006	0,005	0,011	0,016	0,017	0,016	3
Сахар-песок	0,115	0,125	0,084	0,201	0,324	0,332	0,326	40
Перец молотый	0,116	0,083	0,126	0,149	0,162	0,166	0,245	35
Чеснок свежий	0,107	0,101	0,042	0,298	–	–	–	20
Прибыль от 1 ц колбасы, у.д.е.	8,1	6,6	7,7	11,2	10,8	16,1	14,2	

Максимальный заказ торговых организаций на сырокопченую колбасу первого сорта – не более 50 ц, на варено-копченую колбасу – не менее 6 ц. Требуется определить оптимальную программу ассортиментного выпуска колбасных изделий с целью получения максимальной прибыли мясоперерабатывающего цеха.

Решение экономико-математической задачи показывает, что оптимальное количество производимых продуктов будет следующим (ц): вареная русская высшего сорта – 30; вареная отдельная первого сорта – 14; вареная прима высшего сорта – 62,8; колбаски полукопченые охотничьи высшего сорта – 28; варено-копченая деликатесная высшего сорта – 6; сырокопченая брауншвейгская высшего сорта – 9,2; сырокопченая кавказская первого сорта – 50. При таком ассортименте выпускаемых продуктов прибыль цеха колбасных изделий составит 2055,18 у.д.е.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ № 4

Составление оптимизационной задачи по фермерскому хозяйству

1. Фермерское хозяйство имеет во владении 70 га пашни, 20 сенокосов и 10 га пастбищ. Кроме того, имеется возможность аренды пашни в размере до 25 га и получение в использование пастбищ из резерва в количестве до 5 га. Планируется возделывать зерновые, картофель, корнеплоды и многолетние травы. Для производства продукции растениеводства и животноводства (коровы, свиньи и лошади) будет использоваться 6000 чел.-ч механизированного труда и 12500 – ручного. В период уборочных работ возможно привлечение труда механизаторов в количестве до 1100 чел.-ч по цене 1,1 у.д.е. за 1 чел.-ч.

2. Для осуществления процесса производства фермер планирует закупать такие основные материальные ресурсы, как комбикорм (25 у.д.е. за 1 ц), дизельное топливо (108 у.д.е. за 1 ц), минеральные удобрения и при необходимости – органические (15 у.д.е. за 1 т).

3. Среднегодовой удой коровы запланирован на уровне 35 ц молока, продуктивность 1 головы свиней – 1,2 ц. Расход питательных веществ, труда, дизельного топлива, выход навоза и издержки (без учета стоимости кормов) даны в табл. 1.

Т а б л и ц а 1. Экономические показатели животноводства

Поголовье	Расход кормов на 1 гол.		Затраты труда, чел.-ч/гол.		Расход дизтоплива, ц/гол.	Выход органики, т/гол.	Издержки, у.д.е. за 1 ц
	ц к. ед.	пер. прот.	ручной	механизированный			
Коровы	38,0	3,9	145	25	1,75	8,0	10
Свиньи	7,5	0,8	17	3	2,13	1,5	52
Лошади	30,0	0,3	60	4	1,26	6,0	–

4. Фермер использует следующую технологию возделывания сельскохозяйственных культур: для сохранения плодородия почвы заранее предполагается внесение минимального, т.е. гарантированного количества органических и минеральных удобрений (отдельно азотных, фосфорных и калийных).

Т а б л и ц а 2. Нормы внесения минеральных удобрений

Сельскохозяйственные культуры	Минимальная доза внесения удобрений, ц д.в./га			Максимальная добавка минеральных удобрений (по N), ц д.в./га	Рекомендуемые коэффициенты соотношения между питательными веществами (NPK)		
	N	P	K		N	P	K
Зерновые	0,4	0,6	0,7	0,5	1	1,25	1,20
Картофель	0,5	0,5	0,6	0,3	1	1,14	1,33
Корнеплоды	0,4	0,6	0,4	0,7	1	1,12	1,36
Многолетние травы на сено	0,3	0,4	0,5	0,20	1	1,00	1,67
Многолетние травы на зеленый корм	0,3	0,2	0,2	0,30	1	0,75	1,25
Сенокосы на сено	0,2	0,3	0,1	0,35	1	1,22	1,33
Пастбища на зеленый корм	0,2	0,3	0,2	0,25	1	1,08	1,08

Кроме того, для выполнения определенных договоров по сбыту продукции растениеводства и заготовки кормов для животноводства необходимо дополнительное рациональное внесение минеральных и органических удобрений под посевы сельхозкультур. Добавки к минимальной норме (для минеральных удобрений) будут вноситься комплексно при установлении определенного соотношения между питательными веществами (NPK), которое зависит от типа почв (дерново-подзолистые и т. д.), а также от содержания в них подвижных частиц P_2O_5 и K_2O (мг/кг). Информация по внесению минеральных удобрений дана в таблице 2.

5. Планируется закупать три вида сложных удобрений: нитрофоску (стоимость 1 т – 85

у.д.е.), нитроаммофос (стоимость 1 т – 70 у.д.е.) и АФК (гранулированные), стоимость 1 т которых составляет 77 у.д.е.

В минеральных удобрениях содержится следующее количество действующего вещества: в нитрофоске – по 16 % NPK, в нитроаммофосе – по 23 % NPK, в гранулированном АФК – 16 % N, 12 % P₂O₅ и 20% K₂O.

6. Фермерское хозяйство планирует: а) площадь зерновых – от 30 до 65% площади пашни; б) площадь картофеля – не более 12% площади пашни; в) поголовье лошадей составит от 3 до 5 гол., коров – не менее 15 гол., свиней – не менее 20 гол.; г) выход телят составит 97 голов на 100 коров. На выпойку 1 теленка необходимо затратить 1,5 ц молока. Их реализация предполагается в возрасте 21 дня по цене 50 у.д.е. за 1 голову.

7. На корм скоту предполагается использовать отходы зерновых культур, которые составят 10 % от урожайности зерновых на товарные цели (2,8 ц с 1 га). На производство 1 ц комбикорма на передвижной установке (на базе автомобиля) необходимо использовать 0,8 ц зернофуража. Часть картофеля на товарные цели (20 % от урожайности) будет скормлено животным, что составит 22 ц с 1 га.

8. Для личного потребления фермер планирует использовать 0,1 ц молока от коровы, после чего выполнить поставки в счет заключенных договоров с государством объемом 600 ц по цене 34 у.д.е. за 1 ц. Оставшуюся часть молока он может продать на колхозном рынке по цене, превышающей государственную на 20%. Так как 15% производимой свинины фермер планирует оставить для семейных нужд, то вес реализации одной головы свиней составит 1,02 ц. Имеется возможность заключить контракт на поставку мяса свиней мясокомбинату в пределах от 10 до 15 ц по цене 140 у.д.е. за 1 ц, потребительской кооперации – в количестве от 6 до 10 ц по цене 132 у.д.е. за 1 ц. Зерно планируется реализовать по следующим каналам: государству – от 150 до 200 ц по цене 12,5 у.д.е. за 1 ц, на ярмарке – от 60 до 80 ц по цене 13,4 у.д.е. за 1 ц, соседнему свиноводческому комплексу – от 290 до 350 ц по цене, превышающей государственную на 10%. Продукцию отрасли картофелеводства предполагается сбывать следующим образом: заготовительным государственным организациям в счет договорных поставок – от 140 до 310 ц по цене 16 у.д.е. за 1 ц, районному спиртзаводу – от 200 до 240 ц по цене 16,2 у.д.е. за 1 ц, всю оставшуюся продукцию заложить в собственное картофелехранилище с последующей реализацией в наиболее приемлемые, с точки зрения рыночных исследований, сроки (цена реализации при этом будет в 1,5 раза выше ранее установленной).

9. Планируемые экономические показатели растениеводства представлены в табл. 3.

10. Доля кормов в себестоимости 1 ц продукции составит: по молоку – 50 %, по свинине – 70 %.

11. Затраты на 1 га, связанные с арендой пашни, составят 40 у.д.е., а с использованием пастбищ из резерва – 15 у.д.е. в расчете на 1 га.

Т а б л и ц а 3. **Параметры по растениеводству фермерского хозяйства**

Культуры и угодья	Урожайность при минимуме внесения удобрений, ц/га	Расход органики, т/га		Прирост продукции от дополнительного внесения		Издержки, у.д.е. за 1 ц	Расход дизтоплива, ц/га	Затраты труда, чел.-ч/га	
		min	max	1 ц д.в. NPK, ц	1 т органики, ц			ручной	механизованный
Зерновые товарные	28	10	20	5,3	0,12	9,2	2,94	7	42
Картофель товарный	110	20	60	20	1,06	11,6	11,41	109	163
Корнеплоды	160	30	80	45	1,68	9,6	9,82	260	140
Многолетние травы на: - сено	20	10	15	12	0,35	3,1	2,03	3	29
- зеленый корм	100	5	10	40	1,11	1,4	1,54	3	22
Сенокосы на сено	12	-	-	10	-	2,7	2,19	5	30
Пастбища на зеленый корм	70	-	-	41	-	1,2	0,98	2	14

12. Установлены предельные нормы скармливания (табл.4).

Т а б л и ц а 4. Нормы кормления животных, ц

Корма	На 1 корову		На 1 гол. свиней		На 1 гол. лошадей	
	не менее	не более	не менее	не более	не менее	не более
Комбикорм	10	19	4	8	6	10
Корнеплоды	10	16	1	3	1	6
Картофель	0	8	0	4	0	5
Сено	5	15	-	-	15	25
Зеленый корм	70	90	2	4	40	70
Молоко	-	-	-	0,6	-	-

Для получения оптимального проекта фермерского хозяйства, необходимо:

- 1) ввести неизвестные переменные, обозначающие:
 - размеры отраслей животноводства и растениеводства;
 - количество покупных ресурсов (комбикорм, минеральные и органические удобрения, дизельное топливо, труд механизаторов);
 - корма животного происхождения;
 - добавки кормов, минеральных удобрений и органики;
 - объемы сбыта продукции по различным договорам, контрактам, потребителям;
- 2) составить ограничения экономико-математической задачи;
- 3) записать целевую функцию – максимум доходов фермерского хозяйства;
- 4) решить экономико-математическую задачу и сделать анализ.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ № 6

Моделирование программы развития перерабатывающего предприятия АПК с учетом внешнеэкономических связей

Пример 1.

Коммерческий и технологический отделы мясокомбината разрабатывают оптимальную рецептуру для выпуска колбасы вареной с учетом минимизации ее стоимости (табл.1).

Т а б л и ц а 1. Характеристика и стоимость видов сырья для составления смеси колбасного изделия

Сырье	Содержание химических ингредиентов, %		Стоимость 1 кг сырья, у.д.е.
	белки	жиры	
Говядина	19	16	28,9
Свинина мясная	14	33	26,9
Свинина жирная	12	49	25,6
Молоко обезжиренное	38	1	13,2
Соль	–	–	1,2
Крахмал	–	–	1,3
Натрия нитрит	–	–	6,9
Чеснок	–	–	34,3

Колбаса должна состоять из следующих основных видов сырья: говядина, свинина мясная и жирная, молоко сухое обезжиренное. В состав рецепта входят также добавки (компоненты): соль, крахмал, натрия нитрит, чеснок. В соответствии с техническими условиями производства колбасного изделия содержание белка в 100 кг смеси предусмотрено в пределах от 9,7 до 16%, а жира – от 25 до 32,3%. Количество отдельного сырья в колбасе не должно выходить за пределы, допустимые нормами производства продукции данного качества. Поэтому в расчете на 100 кг смеси колбасного изделия необходимо иметь не более 36 кг говядины, от 38 до 46 кг свинины жирной, не более 4,5 кг сухого обезжиренного молока. Кроме того, нужно использовать 2,7 кг соли, 2,3 кг крахмала, а также 0,007 кг натрия нитрита и 0,3 кг чеснока.

Необходимо: а) рассчитать оптимальную рецептуру колбасного изделия и себестоимость смеси; б) зная, что выход данного продукта (колбасы вареной) составляет 106% от массы сырья, рассчитать затраты в расчете на 100 кг (1 ц) конечной продукции.

Решение задачи показывает, что в состав колбасы необходимо включить (в расчете на 100 кг смеси): говядины – 21,1 кг; свинины мясной – 31,1 кг; свинины жирной – 38 кг; молока сухого обезжиренного – 4,5 кг, а также оговоренное заранее точное количество определенных добавок. При такой рецептуре себестоимость смеси производимого продукта окажется минимальной и составит 2495 у.д.е. Так как выход данного продукта (колбасы вареной) составляет 106% от массы сырья, то затраты (в расчете на 100 кг конечной продукции) – 2354 у.д.е.

Пример 2.

Фабрика мороженого планирует выпускать новый вид продукта. Мороженое должно состоять из следующего сырья: молоко (цельное, цельное сгущенное с сахаром, сухое цельное, сухое обезжиренное), масло крестьянское, сироп крем-брюле, сахар-песок, желатин, мука пшеничная, вода питьевая. В соответствии с особенностями производства мороженого в 100 кг смеси содержание жира предусмотрено в пределах от 4 до 9 %, сухого обезжиренного молочного остатка – от 7 до 11%, сахара – не более 13 %. Данные каждого компонента для состава смеси приведены в табл. 2.

Количество отдельного сырья в смеси мороженого не должно выходить за пределы, допустимые нормами применения некоторых молочных продуктов. Поэтому необходимо иметь не более 41 кг молока цельного, не более 1,2 кг масла крестьянского, не более 6 кг молока цельного сгущенного с сахаром, не более 5 кг молока сухого цельного, а также не менее 3 кг молока сухого обезжиренного и не менее 8 кг сиропа крем-брюле. Кроме того, нужно использовать независимо от структуры смеси (в расчете на 100 кг мороженого) 0,2 кг желатина и 1,5 кг муки пшеничной. Необходимо найти оптимальную рецептуру смеси мороженого «Молочное крем-брюле» при минимальной себестоимости.

Т а б л и ц а 2. Характеристика и стоимость видов сырья для составления смеси мороженого

Сырье	Содержание, %			Стоимость 1 кг сырья, у.д.е.
	жира	сома	сахара	
Молоко: цельное				
сухое цельное	3,2	8,1	–	0,2
сгущенное с сахаром	25	68	–	1,4
сухое обезжиренное	8,5	20	43,5	1,1
	–	93	–	0,1
Масло крестьянское	72,5	2,5	–	3,3
Сироп крем-брюле	2,1	6	49,3	2
Сахар-песок	–	–	100	0,7
Желатин	–	–	–	3
Мука пшеничная	–	–	–	0,5
Вода питьевая	–	–	–	0,01

Оптимальное решение показывает, что в состав мороженого нужно включить (кг): молоко цельное – 41; молоко цельное сгущенное с сахаром – 4,7; молоко сухое цельное – 5; молоко сухое обезжиренное – 3; масло крестьянское – 1,2; сироп крем-брюле – 8; сахарпесок – 6,3; желатин – 0,2; мука пшеничная – 1,5; вода питьевая – 29,1. Данная смесь будет содержать 4,03 % жира, 10,96 % сомо, 12,29 % сахара. При такой рецептуре себестоимость производимого мороженого (в расчете на 100 кг) окажется минимальной и составит 46,69 у.д.е.

Пример 3.

Для снижения себестоимости выпускаемой продукции на заводе плавленых сыров стоит задача расчета рецептуры нового продукта с учетом всех технологических условий. В состав плавленого сыра должно входить следующее сырье: сыр сычужный крупный, сыр сычужный мелкий, сыр свежий несоленый, молоко сухое обезжиренное, сливки, масло крестьянское, поваренная соль, соль-плавитель, вода. Согласно нормативно-технической документации регламентированы массовые доли отдельных элементов в готовом продукте: содержание жира – от 25 до 32%, содержание влаги – не более 52 %, содержание хлорида натрия – не менее 1,7 и не более 1,9 %, содержание соли-плавителя (20%-ный раствор) – не менее 2,1 %. Перечень и химический состав компонентов для составления смеси приведены в табл. 3. Технологические особенности предусматривают, что в составе смеси должно быть не менее 8 и не более 13 кг сухого обезжиренного молока, не более 39 кг масла крестьянского, а также не менее 5 % сыров сычужных крупных (5 % от 102 кг составит 5,1 кг) и не менее 6 % сыров сычужных мелких (6 % от 102 кг составит 6,1 кг). Необходимо найти оптимальную рецептуру смеси плавленого сыра при минимальной себестоимости.

Т а б л и ц а 3. Характеристика и стоимость видов сырьё для составления смеси плавленого сыра

Сырьё	Массовая доля, %				Стоимость 1 кг сырьё, у.д.е.
	жира	влаги	хлорида натрия	солиплавителя	
Сыр крупный сычужный	29	42	2	–	2,7 + 0,2К
Сыр мелкий сычужный	25,2	44	3	–	2,4
Сыр свежий несоленый	24,8	45	–	–	2,1 + 0,1К
Молоко обезжиренное	–	4	–	–	1,8
Сливки	35	58,9	–	–	2,2
Масло крестьянское	72,5	25	–	–	3,2
Поваренная соль	–	–	100	–	1,2
Соль-плавитель	–	80	–	20	4,0
Вода	–	100	–	–	0,01

Решение задачи по нахождению оптимального состава смеси для производства 100 кг плавленого сыра (при минимальной себестоимости) показало следующие параметры (кг): сыр крупный сычужный – 5,1; сыр мелкий сычужный – 6,1; сыр свежий несоленый – 16; молоко сухое обезжиренное – 13; масло крестьянское – 24,9; поваренная соль – 1,6; сольплавитель – 10,5; вода – 24,8. При такой рецептуре себестоимость производимого продукта (в расчете на 100 кг) окажется минимальной и составит 209,1 у.д.е.

Пример 4.

Маслосырдельный завод разрабатывает рецептуру мягкого свежего сыра (без созревания), вырабатываемого при участии молочнокислых бактерий. Массовая доля сухих веществ в смеси должна быть в пределах от 40 до 49 %, жира – от 20 до 25 %, соли – от 1,5 до 2%. Особенность технологии сыра, изготавливаемого поточно-механизированным способом, заключается в подготовке обезжиренной белковой массы, количество которой в смеси не должно превышать 40 кг. Количество сливок с содержанием жира 35% и сухих веществ 60% предполагается иметь не менее 21 кг, сухого молока – не менее 8 кг, сливок сухих с содержанием жира 42% и сухих веществ 93% – не менее 5 кг. Сыра советского в смеси должно содержаться от 25 до 30 кг. Кроме того, обязательно наличие ванилина (0,015 кг) и воды питьевой (3 кг). Перечень, химический состав компонентов для составления смеси приведены в табл.

4.

Т а б л и ц а 4. Характеристика и стоимость видов сырьё для составления рецептуры мягкого свежего сыра

Сырьё	Содержание, %			Стоимость 1 кг сырьё, у.д.е.
	сухих веществ	жира	соли	
Обезжиренная белковая масса	20	– 55	–	0,4 + 0,1К
Сливки (жир – 55%)	60	35	–	2,3
Сливки (жир – 35%)	41	25	–	2,0
Сухое молоко	93		–	1,2
Сливки сухие	93	42	–	2,8
Сыр советский	62	34,1	2	3,8 + 0,2К
Ванилин	–	–	–	0,6
Соль поваренная	–	–	100	1,2
Вода питьевая	–	–	–	0,01

П р и м е ч а н и е. В данной задаче нормативный коэффициент $P = 1,03$ (норма расхода смеси на 100 кг мягкого свежего сыра составляет 103 кг), то есть, масса смеси равна 103.

Необходимо найти оптимальную рецептуру смеси мягкого свежего сыра при минимальной себестоимости.

Решение задачи по нахождению оптимального состава смеси для производства 100 кг сыра (при минимальной себестоимости) показало следующие параметры (кг): обезжиренная белковая масса – 39,985; сливки жирностью 55% – 21; сухое молоко – 8; сливки сухие – 5; сыр советский – 25; соль поваренная – 1. Количество ванилина и воды питьевой установлено фиксированной величиной. При такой рецептуре себестоимость производимого сыра (в расчете на 100 кг) окажется минимальной и составит 184,1 у.д.е.

Пример 5.

Гормолзавод имеет цех по производству плавящихся сыров (ломтевые, колбасные, пастообразные, сладкие, консервные, к обеду). По оперативному плану завод выпускает сыр плавленый особый (30% жира в сухом веществе), имея шесть различных наименований данной продукции.

Для производства используется следующее сырьё: сыр сычужный натуральный с содержанием сухого вещества 56%, жира в сухом веществе 45%; сыр-брынза с содержанием сухого вещества 47%, жира в сухом веществе 40%; сыр нежирный с содержанием сухого вещества 40%; творог полужирный с содержанием сухого вещества 27%, жира 9%; сметана с содержанием сухого вещества 36%, жира 30%; молоко коровье цельное сухое с содержанием сухого вещества 93%, жира 25%; молоко коровье сухое обезжиренное с содержанием сухого вещества 93%; маргарин столовый с содержанием сухого вещества 63,5%, жира 82%; смесь триполифосфата натрия и натрия пирофосфорнокислого трехзамещенного (пищевое) с содержанием сухого вещества 20%; соль поваренная; коптильный препарат; вода питьевая.

В производственно-финансовой программе участка перерабатывающего предприятия просчитаны рецептура каждого вида плавящихся сыров, запасы сырья и прибыль от выпускаемых продуктов, которые приведены в табл. 5.

Минимальное количество производимого сыра по рецептуре №1 составляет 15 т, согласно портфелю заказов производство сыра по рецептуре №4 не должно превышать 90 т. Производственные мощности позволяют выпускать не более 120 т продуктов.

Т а б л и ц а 5. Экономические показатели ассортиментной задачи по участку плавящихся сыров

Сырьё	Расход сырья, кг на 1 т						
	№1	№2	№3	№4	№5	№6	Ресурсы, кг
Сыр-брынза	51	–	–	–	100	–	2000
Молоко сухое обезжиренное	–	60	–	60	60	60	4500
Сметана	–	–	51	–	–	–	150
Творог полужирный	–	51	–	100	100	51	7500
Сыр сычужный натуральный	51	102	153	53	106	102	6000
Маргарин	120,9	131	89,1	149	107	132,7	15000
Сыр нежирный (40% сухого вещества)	570,9	494	486,4	561	457	501,5	68000
Молоко цельное сухое	60	–	60	–	–	–	2700
Смесь пищевая	102	102	102	102	102	102	12000
Соль поваренная	–	5	10	–	–	5	30
Коптильный препарат	–	–	–	–	–	5	40
Вода питьевая	64,2	75	68,5	70	63	70,8	8100
Прибыль от 1 т продукции, у.д.е.	5,66	5,71	5,54	5,84	5,76	5,82	

Требуется определить оптимальную программу ассортиментного выпуска плавленых сыров с целью получения максимальной прибыли.

Решение экономико-математической задачи показывает, что оптимальное количество производимых продуктов будет следующим (т): сыр особый по рецептуре №1 – 39,22; сыр особый по рецептуре №3 – 2,89; сыр особый по рецептуре №4 – 67,12. При таком ассортименте выпускаемых продуктов прибыль составит 629,98 у.д.е.