Алгоритм симплекс-метода

1. Особенности симплексного метода
2. Методика решения задач симплексным методом
3. Экономическое содержание коэффициентов пропорциональности
4. Корректировка оптимальных решений задач линейного программирования

Если задача линейного программирования содержит более двух переменных, то ее решение требует применения некоторого алгебраического метода. Одним из известных и классических методов является симплексный метод, основанный на принципе последовательного улучшения решения.

Впервые данный метод был разработан Джоном Данцигом в 1949 г. Название метод получил от термина «симплекс» – это выпуклый многоугольник в n-мерном пространстве с n+1 вершинами, не лежащими в одной гиперплоскости. Симплекс выделен в отдельный класс потому, что в n-мерном пространстве n точек всегда лежат в одной гиперплоскости, другими словами он представляет собой простейший многоугольник, содержащий некоторый объем n-мерного пространства.

Идея метода состоит в отыскании какой-либо вершины многогранника допустимых решений, проверки ее координат на оптимальность. Если решение не оптимально, то осуществляют переход к другой вершине многогранника и вновь проверяют решение на оптимальность. При этом при переходе от одной вершины к другой значение целевой функции убывает (при решении задачи на минимум) или возрастает (при решении задачи на максимум). Так как выпуклый многогранник имеет конечное число вершин (вследствие конечности число ограничений задачи), то за конечное число «шагов» точка оптимума будет найдена.

Методика решения задач симплексным методом

Алгоритм решения задач симплексным методом предполагает несколько этапов:

1. Подготовка информации (введение переменных и формирование ограничений).
2. Преобразование ограничений и занесение информации в симплексную таблицу.
3. Поиск опорного решения.
4. Поиск оптимального решения.

Имеем следующую ЭМЗ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \le A_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \le A_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n \ge A_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = A_m \end{cases}$$

$$F_{\max} = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n .$$

Для решения задачи лучше всего ограничения привести к виду $\leq$.

Примечание. Если имеется ограничение типа $\geq$, то необходимо умножить на –1 левые и правые части ограничений, заменить знак ограничения на противоположный.

Затем осуществляется приведение задачи к каноническому виду (т.е. превращение неравенств в уравнение за счет использования новых дополнительных переменных y_i, вводимых в ограничение и целевую функцию.

С экономической точки зрения в ограничениях типа $\leq$ дополнительные переменные обозначают величину недоиспользования ресурсов, в ограничениях типа $\geq$ – величину превышения сверх минимума. Дополнительные переменные y_i образуют базис и называются базисными, а основные переменные x_j являются небазисными.

Исходное решение задачи осуществляется из допущения, что x_j=0. Тогда подставив эти значения в ограничения задачи получим, что дополненные переменные (y_i)=СЧ.

$$y_1 = A_1$$

$$y_2 = A_2$$

$$y_3 = -A_3$$

$$y_m = A_m$$

$$F = 0$$

С экономической точки зрения такое решение означает, что для ограничений типа ≤ ресурсы не используются вовсе, а для ограничений типа ≥ требования этих ограничений не выполняется.

Далее осуществляем проверку исходного решения на допустимость, т.е. является ли решение опорным.

Опорным называется решение, полученное при таких значениях переменных, при которых требования ограничений выполняются, а целевая функция приобретает какое-то значение (может быть и 0).

Признаком опорного решения является:

1) отсутствие в столбце СЧ отрицательных коэффициентов;

2) отсутствие нулей среди базисных переменных.

Решение симплексным методом производится в таблицах, содержащих m+2 строк (где m – число строк ограничений) и n+2 столбцов (где n – число небазисных переменных. В таблицу заносим матрицу коэффициентов при переменных, при этом коэффициенты целевой строки заносим с противоположным знаком.

Таблица 1

Базисные переменные (БП)	Свободные члены (СЧ)	Небазисные переменные (НБП)				
		X_1	X_2	X_3	…	X_n
$У_1$	A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1n}
$У_2$	A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2n}
$У_3$	$-A_3$	$-a_{31}$	$-a_{32}$	$-a_{33}$	…	$-a_{3n}$
…	…	…	…	…	…	…
0	A_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	…	a_{mn}
F	0	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$	…	$-c_n$

Поиск опорного решения начинают с перемещения нуля со столбца БП в столбец НБП. Чтобы это осуществить, необходимо найти разрешающую строку и разрешающий столбец. В качестве разрешающей строки берут любую 0-строку, а в качестве разрешающего столбца выбирают тот, где получают наименьшее положительное частное, полученное от деления коэффициентов столбца СЧ на соответствующие коэффициенты столбцов $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

В 0-строке берем первый коэффициент – делим столбец СЧ на соответствующие коэффициенты 1-го столбца. Получаем следующие частные: $A_1 / a_{11}, A_2 / a_{21}, -A_3 / -a_{31}, \ldots, A_m / a_{m1}$. Если получится, что $\dfrac{A_m}{a_{m1}} < \dfrac{A_1}{a_{11}} : \dfrac{A_2}{a_{21}} ; \dfrac{-A_3}{-a_{31}}$, то коэффициент a_{m1} можно взять за разрешающий. Если же $\dfrac{A_m}{a_{m1}}$ больше одного и других

a_{m1}

частных, тогда проверяем коэффициент a_{m2} и т.д.

Допустим a_{mn} – разрешающий элемент, который показывает, что базисное значение 0 и небазисное x_n должны поменяться местами. Замена переменных предполагает поиск нового базиса и требует проведения вычислений. Чтобы записать правила, по которым осуществляют преобразования, введем обозначения: a_{ij} – коэффициент, стоящий в строке i и столбце j. Тогда a_{rk} –разрешающий коэффициент, где $r \in i, k \in j$.

1. Новый коэффициент вместо разрешающего равен обратному от него:

пара с 1-5
19.05.2021

$$a'_{rk} = \frac{1}{a_{rk}} (a_{rk} \neq 0)$$

(в нашем примере $a'_{mn} = \frac{1}{a_{mn}} (a_{mn} \neq 0)$).

2. Новые коэффициенты разрешающей строки равны старым коэффициентам, деленным на разрешающий элемент:

$$a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}} (k \neq j) \text{ или } (\frac{a_{mj}}{a_{mn}}, j \neq n).$$

3. Новые коэффициенты разрешающего столбца равны старым коэффициентам, деленным на разрешающий элемент, взятый с противоположным знаком:

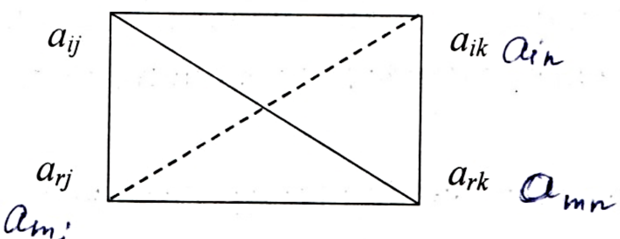
$$a'_{ik} = -\frac{a_{ik}}{a_{rk}} (i \neq r) \ (-\frac{a_{in}}{a_{mn}}, i \neq m).$$

4. Остальные коэффициенты, не стоящие в разрешающем столбце и разрешающей строке определяются по правилу прямоугольника: от произведения коэффициентов главной диагонали вычитают произведение коэффициентов побочной диагонали и делят на разрешающий элемент:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rk} - a_{rj} \cdot a_{ik}}{a_{rk}} (r \neq i, k \neq j).$$

Примечание.1. Главная диагональ это та, где находится разрешающий элемент.

2. Если в побочный диагонали присутствует 0, элемент остается без изменений.



Результаты заносим во вторую симплексную таблицу.

Таблица 2

БП	СЧ	НБП				
		X_1	X_2	X_3	…	0
$У_1$	A'_1	a'_{11}	a'_{12}	a'_{13}	…	$-a'_{1n}$
$У_2$	A'_2	a'_{21}	a'_{22}	a'_{23}	…	$-a'_{2n}$
$У_3$	$-A'_3$	$-a'_{31}$	$-a'_{32}$	$-a'_{33}$	…	a'_{3n}
…	…	…	…	…	…	…
X_n	A'_m	a'_{m1}	a'_{m2}	a'_{m3}	…	$-a'_{mn}$
F	F_1	$-c'_1$	$-c'_2$	$-c'_3$	…	c'_n

После этого вычеркиваем нулевой столбец и в дальнейших расчетах он участия не принимает. Опорного решения нет (имеется отрицательный СЧ). Превращение отрицательного СЧ в положительный связано с нахождением разрешающего элемента, т.е. перемещением дополнительной переменной в небазисные. Разрешающая строка обязательно должна находиться там, где отрицательный СЧ. Для нахождения разрешающего столбца делим свободный член на отрицательный коэффициент в этой же строке. Если полученное положительное частное будет наименьшим по сравнению со всеми остальными положительными частными, полученными от деления остальных СЧ на элементы этого же столбца, это говорит о том, что мы нашли разрешающий столбец. Если это условие не выполняется, то необходимо проверить остальные отрицательные коэффициенты этой же строки. После нахождения разрешающий строки и разрешающего столбца мы имеем разрешающий элемент. По вышеприведенным правилам определяют значения следующей симплексной таблицы.

Примечание.

1. Если в симплексной таблице всем без исключения отрицательным СЧ соответствуют отрицательные коэффициенты столбца, то в качестве разрешающего элемента выбирают наибольшее положительное частное. В этом случае за один шаг удается получить опорное решение.

2. Если в строке с отрицательным СЧ нет ни одного отрицательного коэффициента, система ограничений несовместна, а задача решение не имеет. Преобразования продолжаем до тех пор, пока не будет найдено опорное решение.

После нахождения опорного решения необходимо проверить является ли оно оптимальным. **Признаком оптимального решения** является наличие всех отрицательных (один или несколько нулей) коэффициентов целевой строки при решении задачи на минимум; и положительных (один или несколько нулей) – при решении на максимум.

Если оптимальное решение отсутствует, то его поиск начинаем с определения разрешающего столбца. Разрешающим столбцом при поиске минимальной функции будет являться тот, в целевой функции которого находится наибольший положительный коэффициент, а при поиске максимальной функции – наибольший по абсолютной величине отрицательный коэффициент.

Чтобы найти разрешающий элемент, делим коэффициенты столбца СЧ на соответствующие коэффициенты разрешающего столбца. Разрешающим будет тот элемент, от деления на который получим меньшее положительное частное.

Затем по вышеизложенным правилам определим коэффициенты новой симплексной таблицы.

Примечание.

Если при решении задачи на максимум в строке целевой функции имеется отрицательный коэффициент, а в разрешающем столбце нет ни одного положительного коэффициента, то это говорит о неограниченности функции. Если при решении задачи на минимум в строке целевой функции имеется положительный коэффициент, а в разрешающем столбце все коэффициенты отрицательные, то это приводит к подобному результату.

Расчеты продолжают до тех пор, пока не получим оптимальное решение.

Экономическое содержание коэффициентов пропорциональности

Выполнение расчетов по симплексному методу предполагает нахождение параметров переменной в какой-то новой крайней угловой точке многогранника решений.

Процесс поиска требует расчетов по таблице с использованием определенных правил. Эти расчеты отличаются строго определенным экономическим содержанием.

Чтобы это выяснить, проследим изменение коэффициентов первой ко второй симплексной таблице.

Рассмотрим конкретную ЭМЗ:

Ассоциация фермерских хозяйств возделывает зерновые культуры, однолетние травы, картофель и содержит поголовье коров высокопродуктивной породы. В наличии имеется 1000 га пашни, 20000 чел.-дн. трудовых ресурсов, корма природных кормовых угодий (сенокосов и пастбищ) 5000 ц к.ед. Экономические показатели расхода ресурсов и выход продукции даны в табл.

Т а б л и ц а. **Параметры ассоциации хозяйств**

Показатели	Приходится на 1 га (гол.)				Прибыль, у.д.е.
	Пашня, га	Трудовые ресурсы, чел.-дн.	Выход кормов, ц к.ед.	Расход кормов, ц к.ед.	
Зерновые	1	9	15	–	30
Картофель	1	22	20	–	60
Однолетние травы	1	8	30	–	–
Коровы	–	20	–	50	100

Цель: рассчитать размеры отраслей с целью получения максимум прибыли.

Решение.

1. Введем неизвестные величины:

x_1 – площадь зерновых культур, га;

x_2 – площадь картофеля, га;

x_3 – площадь однолетних трав, га;

x_4 – поголовье коров, гол.

2. Составим условия задачи:

1) по использованию пашни

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 1000$$

2) по использованию трудовых ресурсов

$$9x_1 + 22x_2 + 8x_3 + 20x_4 \le 20000$$

3) по балансу кормовых единиц

$$50x_4 \le 15x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 5000$$

Целевая функция $F_{\max} = 30x_1 + 60x_2 + 100x_4$.

Используя определенные приемы преобразований составим симплексную табл. №1.

$$x_1 + x_2 + x_3 + y_1 = 1000$$

$$9x_1 + 22x_2 + 8x_3 + 20x_4 + y_2 = 20000$$

$$50x_4 - 15x_1 - 20x_2 - 30x_3 + y_3 = 5000$$

$$F_{\max} = 30x_1 + 60x_2 + 100x_4.$$

Таблица 1

БП	СЧ	НБП			
		X_1	X_2	X_3	X_4
$У_1$	1000	1	1	1	0
$У_2$	20000	9	22	8	20
$У_3$	5000	–15	–20	–30	50
F_{max}	0	–30	–60	0	–100

Таблица 2

БП	СЧ	НБП			
		X_1	X_2	X_3	$У_3$
$У_1$	1000	1	1	1	0
$У_2$	18000	15	30	20	–0,4
X_4	100	–0,3	–0,4	–0,6	0,02
F_{max}	10000	–60	–100	–60	2

Коэффициенты, полученные во II симплексной таблице, называют коэффициентами пропорциональности и они устанавливают соотношения между вошедшими в базис и не вошедшими в базис переменными.

Их **экономический смысл**:

1. Новый коэффициент вместо старого разрешающего (0,02) показывает, сколько единиц вошедший в базис переменной (т.е. x_4) можем иметь за счет единицы наиболее лимитированного ресурса (y_3) (т.е. можем содержать 0,02 коров за счет 1 ц к.ед.). Тот факт, что разрешающий элемент определяется наименьшим положительным частным, свидетельствует о том, что это частное получено по наиболее лимитированному ресурсу.

2. Новые коэффициенты разрешающей строки показывают на сколько единиц возрастет (при знаке «–») или уменьшится (при знаке «+») введенная в базис переменная (x_4) если в базисные переменные ввести небазисную в размере единица.

Например. Если в базис ввести переменную x_1 (площадь посева зерновых культур) в размере 1 га, то x_4 (поголовье коров) возрастет на 0,3 головы.

3. Новые коэффициенты разрешающего столбца показывают, сколько единиц ресурсов требуется (при знаке «+») или сколько их получим (при знаке «–»), если в план или в базис

введем небазисные переменные в размере, равном значению нового коэффициента вместо разрешающего (0,02).

Например. Если введем в базис поголовье коров x_4=0,02, то затраты труда увеличатся на 0,4 чел.-дн., а прибыль уменьшится на 2 у.д.е.

4. Новые коэффициенты, не стоящие в разрешающем столбце и в разрешающей строке показывают, сколько ресурсов расходуется при знаке «+» или поступает при знаке «–», если в план введем небазисные переменные в размере единица и при этом произойдет изменение размера ранее введенных в план переменных.

Например. Если введем в план переменную x_1 в размере единица, то целевая функция задачи возрастет на 60 ед. за счет того, что переменная x_4 тоже возрастет на 0,3 ед.

Корректировка оптимальных решений задач линейного программирования

Необходимость корректировки полученного ранее решения задачи вызывается несколькими причинами.

1. Появляются дополнительные источники ограниченных ресурсов (земли, труда, кормов и т.д.) или, наоборот, ресурсная база уменьшается. Подобные изменения могут стать следствием преобразований экономики, реформирования производства или же возможное выделение в рамках существующего предприятия кооперативов, фермерских хозяйств, что приводит к изменению ресурсов.

2. Вследствие изменения конъюнктуры рынка окупаемость отдельных видов продукции может изменяться. Доходность, вошедших в план отраслей может уменьшаться, а доходность не вошедших отраслей может увеличиваться. Чтобы оперативно отреагировать на изменившуюся конъюнктуру предприятию требуется изменить размеры отраслей.

3. Необходимость корректировки может быть вызвана также нехваткой каких-либо ресурсов (семена, трактора и т.д.). И как следствие необходимостью изменения размеров отраслей в хозяйстве.

Корректировка оптимального решения проводится на основе коэффициентов пропорциональности последней симплексной таблицы по общей формуле:

$$x_j^k(y_i^k) = x_j(y_i) - \sum_{j \in J_0} a_{ij} - \Delta x_j(\Delta y_i),$$

где $x_j^k(y_i^k)$ – соответственно значение основной и дополнительной переменных после корректировки;

$x_j(y_i)$ – соответственно значение основной и дополнительной переменных до корректировки;

j – номер столбца переменной, участвующей в корректировке;

J_0 – множество столбцов переменных, участвующих в корректировке;

a_{ij} – коэффициенты пропорциональности i-ых строк j-ых столбцов, участвующих в корректировке;

$\Delta x_j(\Delta y_i)$ – соответственно величина корректировки по основной и дополнительной переменных ($\Delta x_j > 0, \Delta y_i > 0$).

Рассмотрим последнюю симплексную таблицу предыдущей задачи:

БП	СЧ	НБП			
		Y_1	Y_2	X_3	Y_3
X_1	800	2	–0,066	0,66	0,026
X_2	200	–1	0,066	0,34	–0,026
X_4	420	0,56	–0,017	–0,85	0,032
F_{max}	78000	20	2,67	13,6	0,93