Тема 4. Системы эконометрических уравнений

Общее понятие о системах уравнений

Объектом статистического изучения в социальных науках являются сложные системы. Измерение тесноты связей между переменными, построение изолированных уравнений регрессии недостаточны для описания таких систем и объяснения механизма их функционирования. При использовании отдельных уравнений регрессии, например, для экономических расчетов в большинстве случаев предполагается, что аргументы (факторы) можно изменять независимо друг от друга. Однако это предположение является очень грубым: практически изменение одной переменной, как правило, не может происходить при абсолютной неизменности других. Ее изменение повлечет за собой изменения во всей системе взаимосвязанных признаков.

Следовательно, отдельно взятое уравнение множественной регрессии не может характеризовать истинные влияния отдельных признаков на вариацию результирующей переменной. Именно поэтому в экономических, биометрических и социологических исследованиях важное место заняла проблема описания структуры связей между переменными системой так называемых одновременных уравнений или структурных уравнений. Например, если изучается модель спроса как соотношение цен и количества потребляемых товаров, то одновременно для прогнозирования спроса необходима модель предложения товаров, в которой рассматривается также взаимосвязь между количеством и ценой предлагаемых благ. Это позволяет достичь равновесия между спросом и предложением.

В еще большей степени возрастает потребность в использовании системы взаимосвязанных уравнений, если мы переходим от исследований на микроуровне к макроэкономическим расчетам. Модель национальной экономики включает в себя следующую систему уравнений: функции потребления, инвестиций заработной платы, тождество доходов и т.д. Это связано с тем, что макроэкономические показатели, являясь обобщающими показателями состояния экономики, чаще всего взаимозависимы. Так, расходы на конечное потребление в экономике зависят от валового национального дохода. Вместе с тем величина валового национального дохода рассматривается как функция инвестиций.

Система уравнений в эконометрических исследованиях может быть построена по-разному.

Возможна система независимых уравнений, когда каждая зависимая переменная y рассматривается как функция одного и того же набора факторов

x:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m + \varepsilon_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m + \varepsilon_2 \\ \quad .... \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_n + \varepsilon_n \end{cases}$$

Набор факторов x_i в каждом уравнении может варьировать. Например, модель вида

$$y_1 = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5);$$
$$y_2 = f(x_1, x_3, x_4, x_5);$$
$$y_3 = f(x_2, x_3, x_5);$$
$$y_4 = f(x_3, x_4, x_5);$$

также является системой независимых уравнений с тем лишь отличием, что набор факторов в ней видоизменяется в уравнениях, входящих в систему. Отсутствие того или иного фактора в уравнении системы может быть следствием как экономической нецелесообразности его включения в модель, так и несущественности его воздействия на результативный признак (незначимо значение F-критерия или частного F-критерия для данного фактора).

Примером такой модели может служить модель экономической эффективности сельскохозяйственного производства, где в качестве зависимых переменных выступают показатели, характеризующие эффективность сельскохозяйственного производства, — продуктивность коров, себестоимость 1 ц молока, а в качестве факторов — специализация хозяйства, количество голов на 100 га пашни, затраты труда и т. п.

Каждое уравнение системы независимых уравнений может рассматриваться самостоятельно. Для нахождения его параметров используется метод наименьших квадратов. По существу, каждое уравнение этой системы является уравнением регрессии. Поскольку никогда нет уверенности, что факторы полностью объясняют зависимые переменные, в уравнениях присутствует свободный член a_0. Так как фактические значения зависимой переменной отличаются от теоретических на величину случайной ошибки, в каждом уравнении присутствует величина случайной ошибки.

В итоге система независимых уравнений при трех зависимых переменных и четырех факторах примет вид:

$$\begin{cases} y_1 = a_{01} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \varepsilon_1 \\ y_2 = a_{02} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \varepsilon_2 \\ y_3 = a_{03} + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \varepsilon_4 \end{cases}$$

Однако если зависимая переменная y одного уравнения выступает в виде фактора x в другом уравнении, то исследователь может строить модель в виде ***системы рекурсивных уравнений***:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m + \varepsilon_1 \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m + \varepsilon_2 \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3m}x_m + \varepsilon_3 \\ .... \\ y_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + ... + b_{nn-1}y_{n-1} + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m + \varepsilon_n \end{cases}$$

В данной системе зависимая переменная y включает в каждое последующее уравнение в качестве факторов все зависимые переменные предшествующих уравнений наряду с набором собственно факторов x. Примером такой системы может служить *модель производительности труда и фондоотдачи* вида:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \varepsilon_2, \end{cases}$$

где y_1 —производительность труда;

y_2 — фондоотдача;

x_1 — фондовооруженность труда;

x_2 — энерговооруженность труда;

x_3 — квалификация рабочих.

Как и в предыдущей системе, каждое уравнение может рассматриваться самостоятельно, и его параметры определяются методом наименьших квадратов.

Наибольшее распространение в эконометрических исследованиях получила ***система взаимозависимых уравнений***. В ней одни и те же зависимые переменные в одних уравнениях входят в левую часть, а в других уравнениях — в правую часть системы:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + ... + b_{1n}y_n + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m + \varepsilon_1 \\ y_2 = b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + ... + b_{2n}y_n + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m + \varepsilon_2 \\ .... \\ y_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + ... + b_{nn-1}y_{n-1} + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m + \varepsilon_m \end{cases}$$

Система взаимозависимых уравнений получила название ***система***

совместных, одновременных уравнений. Тем самым подчеркивается, что в системе одни и те же переменные y одновременно рассматриваются как зависимые в одних уравнениях и как независимые в других. В эконометрике эта система уравнений также называется ***структурной формой модели.*** В отличие от предыдущих систем каждое уравнение системы одновременных уравнений не может рассматриваться самостоятельно, и для нахождения его параметров традиционный МНК неприменим. С этой целью используются специальные приемы оценивания.

Примером системы одновременных уравнений может служить *модель динамики цены и заработной платы* вида:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1 \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

где y_1 — темп изменения месячной заработной платы;
y_2 — темп изменения цен;
x_1 — процент безработных;
x_2 — темп изменения постоянного капитала;
x_3 — темп изменения цен на импорт сырья.

Структурная и приведенная формы модели

Система совместных, одновременных уравнений (или структурная форма модели) обычно содержит эндогенные и экзогенные переменные.

Эндогенные переменные обозначены в приведенной ранее системе одновременных уравнений как y. Это зависимые переменные, число которых равно числу уравнений в системе.

Экзогенные переменные обозначаются обычно как x. Это предопределенные переменные, влияющие на эндогенные переменные, но не зависящие от них.

Простейшая структурная форма модели имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1 \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

Классификация переменных на эндогенные и экзогенные зависит от теоретической концепции принятой модели. Экономические переменные могут выступать в одних моделях как эндогенные, а в других — как экзогенные переменные. Внеэкономические переменные (например, климатические условия) входят в систему как экзогенные переменные. В качестве экзогенных переменных могут рассматриваться значения эндогенных переменных за предшествующий период времени (лаговые переменные). Так, потребление текущего года (y_t) может зависеть не только от ряда экономических факторов, но и от уровня потребления в предыдущем году (y_{t-1}).

Структурная форма модели позволяет увидеть влияние изменений любой экзогенной переменной на значения эндогенной переменной. Целесообразно в качестве экзогенных переменных выбирать такие переменные, которые могут быть объектом регулирования. Меняя их и управляя ими, можно заранее иметь целевые значения эндогенных переменных.

Структурная форма модели в правой части содержит при эндогенных и экзогенных переменных коэффициенты b_i и a_j (b_i - коэффициент при эндогенной переменной, a_j - коэффициент при экзогенной переменной), которые называются ***структурные коэффициенты модели***. Все переменные в модели выражены в отклонениях от среднего уровня, т. е. под x подразумевается $x-\bar{x}$, а под y — соответственно $y-\bar{y}$. Поэтому свободный член в каждом уравнении системы отсутствует.

Использование МНК для оценивания структурных коэффициентов модели дает, как принято считать в теории, смещенные и несостоятельные оценки. Поэтому обычно для определения структурных коэффициентов модели структурная форма модели преобразуется в приведенную форму модели.

Приведенная форма модели представляет собой систему линейных функций эндогенных переменных от экзогенных:

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \ldots + \delta_{1m}x_m \\ y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \ldots + \delta_{2m}x_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + \ldots + \delta_{nm}x_m \end{cases}$$

где δ_i - коэффициенты приведенной формы модели.

По виду приведенная форма модели ничем не отличается от системы независимых уравнений, параметры которой оцениваются традиционным методом наименьших квадратов. Применяя МНК, можно оценить δ, а затем оценить значения эндогенных переменных через экзогенные.

Коэффициенты приведенной формы модели представляют собой ***нелинейные функции коэффициентов структурной формы модели***. Рассмотрим это положение на примере простейшей структурной модели, выразив коэффициенты приведенной формы модели (δ_{ij}) через коэффициенты структурной модели (b_i и a_j). Для упрощения в модель не введены случайные переменные.

Для структурной модели вида

$$\begin{cases} y_1 = b_{12} y_2 + a_{11} x_1 \\ y_2 = b_{21} y_1 + a_{22} x_2 \end{cases}$$

приведенная форма модели имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2 \\ y_2 = \delta_{21} x_1 + \delta_{22} x_2 \end{cases}$$

в которой y_2 из первого уравнения структурной модели можно выразить следующим образом:

$$y_2 = \frac{y_1 - a_{11} x_1}{b_{12}}$$

Тогда система одновременных уравнений будет представлена как

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{y_1 - a_{11} x_1}{b_{12}} \\ y_2 = b_{21} y_1 + a_{22} x_2 \end{cases}$$

Отсюда имеем равенство:

$$\frac{y_1 - a_{11} x_1}{b_{12}} = b_{21} y_1 + a_{22} x_2$$

или

$$y_1 - a_{11} x_1 = b_{12} b_{21} y_1 + b_{12} a_{22} x_2 .$$

Тогда:

$$y_1 - b_{12} b_{21} y_1 = a_{11} x_1 + b_{12} a_{22} x_2$$

или

$$y_1 = \frac{a_{11}}{1 - b_{12} b_{21}} x_1 + \frac{a_{22} b_{12}}{1 - b_{12} b_{21}} x_2 .$$

Таким образом, мы представили первое уравнение структурной формы модели в виде уравнения приведенной формы модели:

$$y_1 = \delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2$$

Из уравнения следует, что коэффициенты приведенной формы модели представляют собой нелинейные соотношения коэффициентов структурной формы модели, т. е.

$$\delta_{11} = \frac{a_{11}}{1 - b_{12} b_{21}} \text{ и } \delta_{12} = \frac{a_{22} b_{12}}{1 - b_{12} b_{21}} .$$

Аналогично можно показать, что коэффициенты приведенной формы модели второго уравнения системы (δ_{11} и δ_{12}) также нелинейно связаны с коэффициентами структурной модели. Для этого выразим переменную y_1 из второго структурного уравнения модели как

$$y_1 = \frac{y_2 - a_{22}x_2}{b_{21}}$$

Запишем это выражение y_1 в левой части первого уравнения структурной формы модели:

$$\frac{y_2 - a_{22}x_2}{b_{21}} = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 .$$

Отсюда:

$$y_2 = \frac{a_{11}b_{21}}{1 - b_{12}b_{21}}x_1 + \frac{a_{22}}{1 - b_{12}b_{21}}x_2$$

что соответствует уравнению приведенной формы модели:

$$y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 ,$$

т. е.

$$\delta_{21} = \frac{a_{11}b_{21}}{1 - b_{12}b_{21}} \text{ и } \delta_{22} = \frac{a_{22}}{1 - b_{12}b_{21}} .$$

Эконометрические модели обычно включают в систему не только уравнения, отражающие взаимосвязи между отдельными переменными, но и выражения тенденции развития явления, а также разного рода тождества. Например, Т. Хаавелмо в 1947 г., исследуя линейную зависимость потребления (c) от дохода (y), предложил одновременно учитывать тождество дохода. В этом случае модель имеет вид:

$$\begin{cases} c = a + by, \\ y = c + x, \end{cases}$$

где a и b — параметры линейной зависимости c от y;

x — инвестиции в основной капитал и в запасы экспорта и импорта.

Проблема идентификации

При переходе от приведенной формы модели к структурной исследователь сталкивается с проблемой идентификации. Идентификация — это единственность соответствия между приведенной и структурной формами модели.

Рассмотрим проблему идентификации для случая с двумя эндогенными переменными. Пусть структурная модель имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m \end{cases}$$

где y_1 и y_2 — совместные зависимые переменные.

Из второго уравнения можно выразить y_1 следующей формулой:

$$y_1 = \frac{y_2}{b_{21}} - \frac{a_{21}}{b_{21}}x_1 - \frac{a_{22}}{b_{21}}x_2 - ... - \frac{a_{2m}}{b_{21}}x_m .$$

Тогда в системе имеем два уравнения для эндогенной переменной y_1 с одним и тем же набором экзогенных переменных, но с разными коэффициентами при них:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m, \\ \hat{y}_1 = \dfrac{y_2}{b_{21}} - \dfrac{a_{21}}{b_{21}}x_1 - \dfrac{a_{22}}{b_{21}}x_2 - \ldots - \dfrac{a_{2m}}{b_{21}}x_m. \end{cases}$$

Наличие двух вариантов для расчета структурных коэффициентов в одной и той же модели связано с неполной ее идентификацией. Структурная модель в полном виде, состоящая в каждом уравнении системы из n эндогенных и m экзогенных переменных, содержит $n(n - 1 + m)$ параметров. Так, при $n = 2$ и $m = 3$ полный вид структурной модели составит:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \hat{y}_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3. \end{cases}$$

Как видим, модель содержит восемь структурных коэффициентов, что соответствует выражению $n(n - 1 + m)$.

Приведенная форма модели в полном виде содержит nm параметров. Для нашего примера это означает наличие шести коэффициентов приведенной формы модели. В этом можно убедиться, обратившись к приведенной форме модели, которая будет иметь вид:

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3 \\ y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 \end{cases}$$

Действительно, она включает в себя шесть коэффициентов δ_{ij}.

На основе шести коэффициентов приведенной формы модели требуется определить восемь структурных коэффициентов рассматриваемой структурной модели, что, естественно, не может привести к единственности решения. В полном виде структурная модель содержит большее число параметров, чем приведенная форма модели. Соответственно $n(n - 1 + m)$ параметров структурной модели не могут быть однозначно определены из nm параметров приведенной формы модели.

Для того чтобы получить единственно возможное решение для структурной модели, необходимо предположить, что некоторые из структурных коэффициентов модели ввиду слабой взаимосвязи признаков с эндогенной переменной из левой части системы равны нулю. Тем самым уменьшится число структурных коэффициентов модели. Так, если предположить, что в нашей модели $a_{13} = 0$ и $a_{21} = 0$, то структурная модель примет вид:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \hat{y}_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases}$$

В такой модели число структурных коэффициентов не превышает число коэффициентов приведенной модели, которое равно шести. Уменьшение числа структурных коэффициентов модели возможно и другим путем: например, приравниванием некоторых коэффициентов друг к другу, т. е. путем предположений, что их воздействие на формируемую эндогенную переменную одинаково. На структурные коэффициенты могут накладываться, например, ограничения вида $b_{ij} + a_{ij} = 0$.

С позиции идентифицируемости структурные модели можно подразделить на три вида:

- идентифицируемые;
- неидентифицируемые;
- сверхидентифицируемые.

Модель идентифицируема, если все структурные ее коэффициенты определяются однозначно, единственным образом по коэффициентам приведенной формы модели, т. е. если число параметров структурной модели равно числу параметров приведенной формы модели. В этом случае структурные коэффициенты модели оцениваются через параметры приведенной формы модели и модель идентифицируема. Рассмотренная выше структурная модель

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \hat{y}_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases}$$

с двумя эндогенными и тремя экзогенными (предопределенными) переменными, содержащая шесть структурных коэффициентов, представляет собой идентифицируемую модель.

Модель неидентифицируема, если число приведенных коэффициентов меньше числа структурных коэффициентов, и в результате структурные коэффициенты не могут быть оценены через коэффициенты приведенной формы модели. Структурная модель в полном виде

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \hat{y}_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3. \end{cases}$$

содержащая n эндогенных и m предопределенных переменных в каждом уравнении системы, всегда неидентифицируема.

Модель сверхидентифицируема, если число приведенных коэффициентов больше числа структурных коэффициентов. В этом случае на основе коэффициентов приведенной формы можно получить два или более значений одного структурного коэффициента. В этой модели число структурных коэффициентов меньше числа коэффициентов приведенной формы. Так, если в структурной модели полного вида

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \hat{y}_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3. \end{cases}$$

предположить нулевые значения не только коэффициентов a_{13} и a_{21}, но и $a_{22} = 0$, то система уравнений станет сверхидентифицируемой:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \hat{y}_2 = b_{21}y_1 + a_{23}x_3. \end{cases}$$

В ней пять структурных коэффициентов не могут быть однозначно определены из шести коэффициентов приведенной формы модели. Сверхидентифицируемая модель в отличие от неидентифицируемой модели практически решаема, но требует для этого специальных методов исчисления параметров.

Структурная модель всегда представляет собой систему совместных уравнений, каждое из которых необходимо проверять на идентификацию. Модель считается идентифицируемой, если каждое уравнение системы идентифицируемо. Если хотя бы одно из уравнений системы неидентифицируемо, то и вся модель считается неидентифицируемой. Сверхидентифицируемая модель содержит хотя бы одно сверхидентифицируемое уравнение.

Выполнение условия идентифицируемости модели проверяется для каждого уравнения системы. Для того чтобы уравнение было идентифицируемо, нужно, чтобы число предопределенных переменных, отсутствующих в данном уравнении, но присутствующих в системе, было равно числу эндогенных переменных в данном уравнении без одного.

Если обозначить число эндогенных переменных в *j-м* уравнении системы через H, а число экзогенных (предопределенных) переменных, которые содержатся в системе, но не входят в данное уравнение, — через D, то условие идентифицируемости модели может быть записано в виде следующего счетного правила:

D + 1 = H — уравнение идентифицируемо;

D + 1 < H — уравнение неидентифицируемо;

D + 1 > H — уравнение сверхидентифицируемо.

Предположим, рассматривается следующая система одновременных уравнений:

$$\begin{cases} \acute{o}_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + \grave{a}_{11}\tilde{o}_1 + \grave{a}_{12}\tilde{o}_2, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \acute{o}_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4. \end{cases}$$

Первое уравнение точно идентифицируемо, ибо в нем присутствуют три эндогенные переменные - y_1, y_2, y_3, т. е. $H = 3$, и две экзогенные переменные – x_1

и x_2, число отсутствующих экзогенных переменных равно двум — x_3 и x_4, $D = 2$. Тогда имеем равенство: $D + 1 = H$, т. е. $2 + 1 = 3$, что означает наличие идентифицируемого уравнения.

Во втором уравнении системы $H = 2$ (y_1 *и* y_2) и $D = 1$ (x_4). Равенство $D + 1 = H$, т.е. $1 + 1 = 2$. Уравнение идентифицируемо.

В третьем уравнении системы $H = 3$ (y_1, y_2, y_3), а $D = 2$ (x_1 *и* x_2). Следовательно, по счетному правилу $D + 1 = H$, и это уравнение идентифицируемо. Таким образом, рассмотренная система в целом идентифицируема.

Предположим, что в рассматриваемой модели $a_{21} = 0$ и $a_{33} = 0$. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \hat{y}_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \hat{y}_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{34}x_4. \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы не изменилось. Система по-прежнему содержит три эндогенные и четыре экзогенные переменные, поэтому для него $D = 2$ при $H = 3$, и оно, как и в предыдущей системе, идентифицируемо. Второе уравнение имеет $H = 2$ и $D = 2$ (x_1 и x_4), так как $2 + 1 > 2$. Данное уравнение сверхидентифицируемо. Также сверхидентифицируемым оказывается и третье уравнение системы, где $H = 3$ (y_1, y_2, y_3) и $D = 3$ (x_1, x_2, x_3), т.е. счетное правило составляет неравенство: $3 + 1 > 3$ или $D + 1 >$ Н. Модель в целом является сверхидентифицируемой.

Для оценки параметров структурной модели система должна быть идентифицируема или сверхидентифицируема, если же хотя бы одно из уравнений неидентифицировано, то модель в целом признается неидентифицируемой.

Рассмотренное счетное правило отражает необходимое, но недостаточное условие идентификации. Более точно условия идентификации определяются, если накладывать ограничения на коэффициенты матриц параметров структурной модели. Уравнение идентифицируемо, если по отсутствующим в нем переменным (эндогенным и экзогенным) можно из коэффициентов при них в других уравнениях системы получить матрицу, определитель которой не равен нулю, а ранг матрицы не меньше, чем число эндогенных переменных в системе без одного.

Целесообразность проверки условия идентификации модели через определитель матрицы коэффициентов, отсутствующих в данном уравнении, но присутствующих в других уравнениях, объясняется тем, что возможна ситуация, когда для каждого уравнения системы выполнено счетное правило, а определитель матрицы названных коэффициентов равен нулю. В этом случае соблюдается лишь необходимое, но недостаточное условие идентификации.

Обратимся к следующей структурной модели:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \hat{y}_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4, \\ \hat{y}_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2. \end{cases}$$

Проверим каждое уравнение системы на необходимое и достаточное условия идентификации. Для первого уравнения Н=3 (y_1, y_2, y_3) и D = 2 (x_3 и x_4 отсутствуют), т. е. D + 1 = H, необходима условие идентификации выдержано, поэтому уравнение точно идентифицируемо. Для проверки на достаточное условие идентификации заполним следующую таблицу коэффициентов при отсутствующих в первом уравнении переменных, в которой определитель матрицы коэффициентов равен нулю.

Матрица коэффициентов (1)

Уравнение	**Переменные**	
	x_3	x_4
2	a_{23}	a_{24}
3	*0*	*0*

Следовательно, достаточное условие идентификации не выполняется и первое уравнение нельзя считать идентифицируемым.

Для второго уравнения H = 2 (y_1, y_2), D = 1 (отсутствует x_1) счетное правило дает утвердительный ответ: уравнение идентифицируемо D + 1 = Н.

Достаточное условие идентификации выполняется. Коэффициенты при отсутствующих во втором уравнении переменных составят.

Матрица коэффициентов (2)

Уравнение	**Переменные**	
	y_3	x_1
1	b_{23}	a_{11}
3	*-1*	a_{31}

Согласно таблице определитель матрицы равен 0, а ранг матрицы равен 2, что соответствует следующему критерию: ранг матрицы коэффициентов должен быть не меньше числа эндогенных переменных в системе без одной. Итак, второе уравнение точно идентифицируемо.

Третье уравнение системы содержит H = 3 и D = 2, т. е. по необходимому условию идентификации оно точно идентифицируемо (D + 1 = Н). Противоположный вывод имеем, проверив уравнение на достаточное условие идентификации. Составим таблицу коэффициентов при переменных, отсутствующих в третьем уравнении, в которой определитель матрицы равен нулю.

Матрица коэффициентов (3)

Уравнение	Переменные	
	x_3	x_4
1	0	0
2	a_{23}	a_{24}

Из таблицы видно, что достаточное условие идентификации не выполняется. Уравнение неидентифицируемо. Следовательно, рассматриваемая в целом структурная модель, идентифицируемая по счетному правилу, не может считаться идентифицируемой исходя из достаточного условия идентификации.

Оценивание параметров структурной модели

Коэффициенты структурной модели могут быть оценены разными способами в зависимости от вида системы одновременных уравнений. Наибольшее распространение в литературе получили следующие методы оценивания коэффициентов структурной модели:

- косвенный метод наименьших квадратов (КМНК);
- двухшаговый метод наименьших квадратов (ДМНК);
- трехшаговый метод наименьших квадратов (ТМНК);
- метод максимального правдоподобия с полной информацией (ММП*f*);
- метод максимального правдоподобия при ограниченной информации (ММП*s*).

Косвенный и двухшаговый методы наименьших квадратов подробно описаны в литературе и рассматриваются как традиционные методы оценки коэффициентов структурной модели. Эти методы достаточно легкореализуемы. Косвенный метод наименьших квадратов применяется для идентифицируемой системы одновременных уравнений, а двухшаговый метод наименьших квадратов — для оценки коэффициентов сверхидентифиииуниемой модели.

Метод максимального правдоподобия рассматривается как наиболее общий метод оценивания, результаты которого при нормальном распределении признаков совпадают с МНК. Однако при большом числе уравнений системы этот метод приводит к достаточно сложным вычислительным процедурам. Поэтому в качестве модификации используется метод максимального правдоподобия при ограниченной информации (метод наименьшего дисперсионного отношения), разработанный в 1949 г. Т. Андерсоном и Н. Рубиным.

В отличие от метода максимального правдоподобия в данном методе сняты ограничения на параметры, связанные с функционированием системы в целом. Это делает решение более простым, но трудоемкость вычислений остается достаточно высокой. Несмотря на его популярность, к середине 1960-х годов он был практически вытеснен двухшаговым методом наименьших квадратов в связи с гораздо большей простотой последнего.

Дальнейшим развитием двухшагового метода наименьших квадратов является трехшаговый МНК (ТМНК), предложенный в 1962 г. А. Зельнером и Г. Тейлом. Этот метод оценивания пригоден для всех видов уравнений структурной модели. Однако при некоторых ограничениях на параметры более эффективным оказывается ДМНК.

Как уже отмечалось, косвенный метод наименьших квадратов используется в случае точно идентифицируемой структурной модели. Процедура применения КМНК предполагает выполнение следующих этапов работы:

- структурная модель преобразовывается в приведенную форму модели;
- для каждого уравнения приведенной формы модели обычным МНК оцениваются приведенные коэффициенты (δ_{ij});
- коэффициенты приведенной формы модели трансформируются в параметры структурной модели.

Если система сверхидентифицируема, то КМНК не используется, ибо он не дает однозначных оценок для параметров структурной модели. В этом случае могут применяться разные методы оценивания, среди которых наиболее распространенным и простым является двухшаговый метод наименьших квадратов.

Основная идея ДМНК — на основе приведенной формы модели получить для сверхидентифицируемого уравнения теоретические значения эндогенных переменных, содержащихся в правой части уравнения. Далее, подставив их вместо фактических значений, можно применить обычный МНК к структурной форме сверхидентифицируемого уравнения. Метод получил название «двухшаговый метод наименьших квадратов», ибо МНК используется дважды: на первом шаге при определении приведенной формы модели и нахождении на ее основе оценок теоретических значений эндогенной переменной $\hat{y}_i = \delta_{i1}x_1 + \delta_{i2}x_2 + ... + \delta_{ij}x_j$ и на втором шаге применительно к структурному сверхидентифицируемому уравнению при определении структурных коэффициентов модели по данным теоретических (расчетных) значений эндогенных переменных.

Сверхидентифицируемая структурная модель может быть двух типов:

- все уравнения системы сверхидентифицируемы;
- система содержит наряду со сверхидентифицируемыми точно идентифицируемые уравнения.

Если все уравнения системы сверхидентифицируемые, то для оценки структурных коэффициентов каждого уравнения используется ДМНК. Если в системе есть точно идентифицируемые уравнения, то структурные коэффициенты по ним находятся из системы приведенных уравнений.

Таким образом можно сказать, несмотря на важность системы эконометрических уравнений, на практике часто не принимают во внимание некоторые взаимосвязи. Ее использование сопряжено с рядом сложностей, которые связаны с ошибками спецификации модели. Ввиду большого числа факторов, влияющих на экономические переменные, исследователь, как правило, не уверен в точности предлагаемой модели для описания экономических процессов. Набор эндогенных и экзогенных переменных модели соответствует теоретическому представлению исследователя о моделируемой объекте, которое сложилось в конкретный момент времени и может позднее изменится.