Раздел 2. Моделирование временных рядов

Процесс построения модели включает в себя следующие шаги.

Шаг 1. Выравнивание исходного ряда методом скользящей средней.

Шаг 2. Расчет значений сезонной компоненты S.

Шаг 3. Устранение сезонной компоненты из исходных уровней ряда и получение выравненных данных (T + E) в аддитивной или (T·E) в мультипликативной модели.

Шаг 4. Аналитическое выравнивание уровней (T + E) или (T·E) и расчет значений T с использованием полученного уравнения тренда.

Шаг 5. Расчет полученных по модели значений (T + S) или (T·S).

Шаг 6. Расчет абсолютных и/или относительных ошибок.

В качестве ***примера*** построения системы уравнений рассмотрим данные таблицы: построим аддитивную и мультипликативную модели временного ряда

Годы	2021				2022				2023			
Квартал, t	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Выручка от реализации (экспорт товаров), тыс. у.д.е. y_t	31,1	31,7	34,9	38,2	37,3	43,2	48,5	54,3	50,2	59,6	64,8	69,0

Итак, как было сказано выше, построение аддитивной и мультипликативной моделей временного ряда предполагает нахождение трендовой (T), сезонной (S) и случайной (E) компонент. Аддитивная модель: Y=T+S+E, мультипликативная модель: Y=T·S·E. По исходным табличным данным построим график ряда, чтобы определить наличие компонент T, S, E.

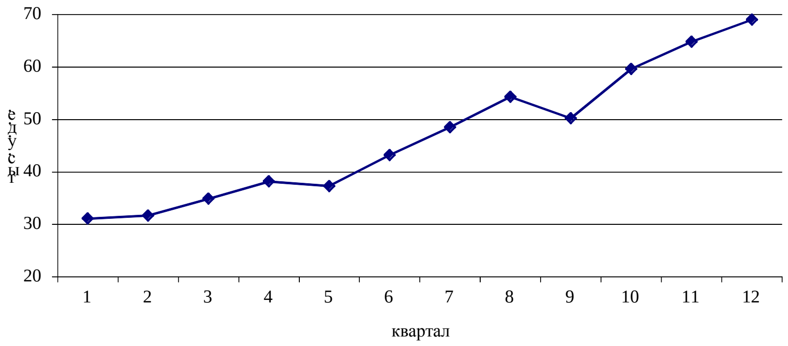

Рисунок 1 Временной ряд

График фактических значений временного ряда показывает, что ряд содержит сезонные колебания периодичностью 4. Уровни ряда в 4-й квартал каждого года больше, чем в остальные.

Построим **аддитивную модель** ряда:

Шаг 1. Проведем выравнивание исходных уровней ряда методом скользящей средней. Для этого составим вспомогательную таблицу 2.

Таблица 2 Расчет оценок сезонной компоненты в аддитивной модели

Номер квартала, t	Уровни ряда, y_t	Итого за четыре квартала	Скользящая средняя за 4 квартала	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной компоненты
1	2	3	4	5	6
1	31,1	-	-	-	-
2	31,7	135,9	33,975	-	-
3	34,9	142,1	35,525	34,750	0,150
4	38,2	153,6	38,400	36,963	1,237
5	37,3	167,2	41,800	40,100	-2,800
6	43,2	183,3	45,825	43,813	-0,613
7	48,5	196,2	49,050	47,438	1,062
8	54,3	212,6	53,150	51,100	3,200
9	50,2	228,9	57,225	55,188	-4,988
10	59,6	243,6	60,900	59,063	0,537
11	64,8	-	-	-	-
12	69,0			-	-

1. просуммируем уровни ряда последовательно за каждые четыре квартала со сдвигом на один момент времени (графа 3);
2. разделим полученные суммы на 4 и найдем скользящие средние (графа 4). Полученные таким образом выравненные значения уже не содержат сезонной компоненты (их количество будет меньше количества уровней исходного временного ряда на 3 единицы);
3. приведем эти значения в соответствие с фактическими моментами времени, для этого найдем средние значения их двух последовательных скользящих средних – центрированные скользящие средние (графа 5) (их количество будет меньше количества уровней исходного временного ряда на 4 единицы).

Шаг 2. Найдем оценки сезонной компоненты как разность между фактическими уровнями ряда и центрированными скользящими средними (графа 6 таблицы 2). Используем эти оценки для расчета значений сезонной компоненты S (таблица 3).

Таблица 3– Расчет значений сезонной компоненты в аддитивной модели

Показатель	Год	Номер квартала			
		1	2	3	4
	1	-	-	0,150	1,237
	2	-2,800	-0,613	1,062	3,200
	3	-4,988	0,537	-	-
Итого за i-й квартал (за все годы)	x	-7,788	-0,076	1,212	4,437
Средняя оценка сезонной компоненты для i-ого квартала, $\bar{S}_i$	x	-3,894	-0,038	0,606	2,219
Скорректированная сезонная компонента, S_i	x	-3,618	0,239	0,883	2,496

Найдем средние за каждый квартал (по все годам) оценки сезонной компоненты S_i. В моделях с сезонной компонентой обычно предполагается, что сезонные воздействия за период взаимопогашаются. В аддитивной модели это выражается в том, что сумма значений сезонной компоненты по все кварталам должна быть равна нулю.

Имеем для данной модели: -3,894 – 0,038 + 0,606 + 2,219 = -1,107.

Определим корректирующий коэффициент:

$$k = \frac{-1{,}107}{4} = -0{,}27675.$$

Рассчитаем скорректированные значения сезонной компоненты как разность между ее средней оценкой и корректирующим коэффициентом k:

$S_i = \bar{S}_i - k$, где $i = 1:4.$

Проверим условие равенства нулю суммы значений сезонной компоненты:
-3,618 + 0,239 + 0,883 + 2,496 = 0.

Таким образом, получены следующие значения сезонной компоненты:

1 квартал: $S_1 = -3{,}618$;

2 квартал: $S_2 = 0{,}239$;

3 квартал: $S_3 = 0{,}883$;

4 квартал: $S_4 = 2{,}496$.

Занесем полученные значения в таблицу 4 для соответствующих кварталов каждого года (графа 3).

Шаг 3. Вычтем значение сезонной компоненты из каждого уровня исходного временного ряда, чтобы устранить ее влияние. Получим: T + E = Y – S (графа 4 таблицы 4). Эти значения рассчитываются для каждого момента времени и содержат только тенденцию и случайную компоненту.

Таблица 4 Расчет выравненных значений Т и ошибок Е в аддитивной модели

t	y_t	S_i	T + E = $y_t - S_i$	T	T + S	E = y_t - (T + S)	E^2	$(y_t - \bar{y})^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	31,1	-3,618	34,718	28,690	25,072	6,028	36,334	249,64
2	31,7	0,239	31,461	32,001	32,240	-0,540	0,292	231,04
3	34,9	0,883	34,017	35,312	36,195	-1,295	1,677	144,00
4	38,2	2,496	35,704	38,623	41,119	-2,919	8,521	75,69
5	37,3	-3,618	40,918	41,934	38,316	-1,016	1,032	92,16
6	43,2	0,239	42,961	45,245	45,484	-2,284	5,217	13,69
7	48,5	0,883	47,617	48,556	49,439	-0,939	0,882	2,56
8	54,3	2,496	51,804	51,867	54,363	-0,063	0,004	54,76
9	50,2	-3,618	53,818	55,178	51,560	-1,360	1,850	10,89
10	59,6	0,239	59,361	58,489	58,728	0,872	0,760	161,29
11	64,8	0,883	63,917	61,800	62,683	2,117	4,482	320,41
12	69,0	2,496	66,504	65,111	67,607	1,393	1,940	488,41

Шаг 4. Определим компоненту T данной модели. Для этого проведем выравнивание ряда (T + E) с помощью линейного тренда.

Таблица 5 Расчет линейного тренда уровней временного ряда

№ п/п	t	$(T+E)$	$(T+E)\cdot t$	t^2	T
1	1	34,718	34,718	1	28,690
2	2	31,461	62,922	4	32,001
3	3	34,017	102,051	9	35,312
4	4	35,704	142,816	16	38,623
5	5	40,918	204,590	25	41,934
6	6	42,961	257,766	36	45,245
7	7	47,617	333,319	49	48,556
8	8	51,804	414,432	64	51,867
9	9	53,818	484,362	81	55,178
10	10	59,361	593,610	100	58,489
11	11	63,917	703,087	121	61,800
12	12	66,504	798,048	144	65,111
Итого	**78**	**562,800**	**4131,721**	**650**	**562,806**

Для оценки параметров a и b необходимо составить систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum y = n\cdot a + b\cdot t, \\ \sum y\cdot t = a\cdot\sum t + b\cdot\sum t^2 \end{cases}.$$

Система нормальных уравнений составит:

$$\begin{cases} 12\cdot a + 78\cdot b = 562{,}800, \\ 78\cdot a + 650\cdot b = 4131{,}721. \end{cases}$$

Решаем ее:

$$a = \frac{562{,}8 - 78\cdot b}{12} \Rightarrow$$

$$78\cdot\frac{562{,}8 - 78\cdot b}{12} + 650\cdot b = 4131{,}721 \Rightarrow$$

$$43898{,}4 - 6084\cdot b + 7800\cdot b = 49580{,}652 \Rightarrow$$

$$1716\cdot b = 5682{,}252 \Rightarrow b = 3{,}311 \Rightarrow$$

$$a = \frac{562{,}8 - 78\cdot 3{,}311}{12} = 25{,}379.$$

Итак, линейный тренд имеет вид: $T = 25{,}379 + 3{,}311\cdot t$.

Найдем уровни T для каждого момента времени (графа 5 таблицы 4).

Шаг 5. Найдем значения уровней ряда, полученные по аддитивной модели. Для этого прибавим к уровням T значения сезонной компоненты для соответствующих кварталов (графа 6 таблицы 4).

Шаг 6. Рассчитаем ошибку (случайную компоненту E) модели. Численные значения абсолютных ошибок приведены в таблице 4 (графа 7).

Таким образом, мы рассчитали количественные значения трендовой, сезонной и случайной компонент уровней временного ряда за каждый квартал за три года по аддитивной модели. Так, например, расчеты за четвертый квартал 2023 г. (12-й уровень ряда) показывают, что если бы ряд содержал только трендовую составляющую (тенденцию уровней – ежеквартальное увеличение на 3,311 у.д.е.), то выручка составила бы 65,111 тыс. у.д.е. Прибавляя сезонную компоненту, равную за четвертый квартал 2,496 тыс. у.д.е, мы получаем уровень ряда 65,111 + 2,496 = 67,607 тыс. у.д.е. Однако из-за воздействия случайной составляющей (о причинах которой мы можем предполагать), равной 1,393, фактический экспорт товаров в четвертом квартале составил 67,607 + 1,393 = 69,0 тыс. у.д.е.

Для оценки качества построения модели можно использовать сумму квадратов абсолютных ошибок. Для данной построенной аддитивной модели сумма квадратов абсолютных ошибок равна $\sum E^2 =$ 62,991. По отношению к общей сумме квадратов отклонений уровней ряда от его среднего уровня, равной $(y_t - \bar{y})^2 = 1844{,}540$, эта величина составляет: $R^2_{y_t} = 1 - \frac{62{,}991}{1844{,}540} = 0{,}966$ или 96,6% - аддитивная модель объясняет 96,6% общей вариации уровней временного ряда экспорта товаров. На основе построенной модели сделаем точечный прогноз ожидаемого экспорта товаров в течение первого квартала 2024 года. Прогнозное значение уровня временного ряда F_t в аддитивной модели есть сумма трендового значения T_t и соответствующего значения сезонной компоненты S_t.

Для расчета трендовых значений воспользуемся уравнением тренда, рассчитанным нами на шаге 4:

$T = 25{,}379 + 3{,}311 \cdot t$: рассчитываем (первый квартал четвертого в ряду года будет стоять под номером 13 – продолжение ряда)

$T_{13} = 25{,}379 + 3{,}311 \cdot 13 = 68{,}422$.

Значение сезонной компоненты за первый квартал равно $S_1 = -3{,}618$.

Прогнозное значение составит: $F_{13} = T_{13} + S_1 = 68{,}422 - 3{,}618 = 64{,}804$.

Экспорт товаров в первом квартале 2024 года составит 64,804 тыс. у.д.е.

Построим **мультипликативную модель** ряда:

Шаг 1. Проведем выравнивание исходных уровней ряда методом скользящей средней (таблица 6 – та же методика расчета, что и для аддитивной модели табл. 2).

Таблица 6 Расчет оценок сезонной компоненты в мультипликативной модели

Номер квартала, t	Уровни ряда, y_t	Итого за четыре квартала	Скользящая средняя за 4 квартала	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной компоненты
1	2	3	4	5	6
1	31,1	-	-	-	-
2	31,7	135,9	33,975	-	-
3	34,9	142,1	35,525	34,750	1,004
4	38,2	153,6	38,400	36,963	1,033
5	37,3	167,2	41,800	40,100	0,930
6	43,2	183,3	45,825	43,813	0,986
7	48,5	196,2	49,050	47,438	1,022
8	54,3	212,6	53,150	51,100	1,063
9	50,2	228,9	57,225	55,188	0,910
10	59,6	243,6	60,900	59,063	1,009
11	64,8	-	-	-	-
12	69,0			-	-

Шаг 2. Найдем оценки сезонной компоненты как частное от деления фактических уровней ряда на центрированные скользящие средние (графа 6 таблица 6). Используем эти оценки для расчета значений сезонной компоненты S (таблица 6). Для этого найдем средние за каждый квартал оценки сезонной компоненты S_i. Взаимопогашаемость сезонных воздействий в мультипликативной модели выражается в том, что сумма значений сезонной компоненты по все кварталам должна быть равна числе периодов в цикле, т.е. 4 (4 квартала в цикле – в году)

Таблица 7 Расчет сезонной компоненты в мультипликативной модели

Показатель	Год	Номер квартала			
		1	2	3	4
	1	-	-	1,004	1,033
	2	0,930	0,986	1,022	1,063
	3	0,910	1,009	-	-
Итого за i-й квартал (за все годы)	x	1,840	1,995	2,026	2,096
Средняя оценка сезонной компоненты для i-ого квартала, $\bar{S}_i$	x	0,920	0,998	1,013	1,048
Скорректированная сезонная компонента, S_i	x	0,925	1,003	1,018	1,054

Имеем: 0,920 + 0,998 + 1,013 + 1,048 = 3,979.

Рассчитаем корректирующий коэффициент:

$$k = \frac{4}{3,979} = 1,0052777.$$

Определим скорректированные значения сезонной компоненты, умножив ее средние оценки на корректирующий коэффициент k : $S_i = \bar{S}_i \cdot k$, где $i = 1:4$.

Проверим условие равенства четырем суммы значений сезонной компоненты:

0,925 + 1,003 + 1,018 + 1,054 = 4.

Получим следующие значения сезонной компоненты:

1 квартал: $S_1 = 0{,}925$;

2 квартал: $S_2 = 1{,}003$;

3 квартал: $S_3 = 1{,}018$;

4 квартал: $S_4 = 1{,}054$.

Занесем полученные значения в таблицу 8 для соответствующих кварталов каждого года (графа 3).

Шаг 3. Разделим каждый уровень исходного ряда на соответствующие значения сезонной компоненты. Получим T · E = Y / S (графа 4 таблицы 8). Эти значения рассчитываются для каждого момента времени и содержат только тенденцию и случайную компоненту.

Таблица 8 Расчет выравненных значений T и ошибок E в мультипликативной модели

t	y_t	S_i	T · E = y_t / S_i	T	T · S	E = y_t : (T·S)	E = y_t - (T·S)	E^2	$(y_t - \bar{y})^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	31,1	0,925	33,622	28,626	26,479	1,175	4,621	21,354	249,64
2	31,7	1,003	31,605	31,923	32,019	0,990	-0,319	0,102	231,04
3	34,9	1,018	34,283	35,220	35,854	0,973	-0,954	0,910	144,00
4	38,2	1,054	36,243	38,517	40,597	0,941	-2,397	5,746	75,69
5	37,3	0,925	40,324	41,814	38,678	0,964	-1,378	1,899	92,16
6	43,2	1,003	43,071	45,111	45,246	0,955	-2,046	4,186	13,69
7	48,5	1,018	47,642	48,408	49,279	0,984	-0,779	0,607	2,56
8	54,3	1,054	51,518	51,705	54,497	0,996	-0,197	0,039	54,76
9	50,2	0,925	54,270	55,002	50,877	0,987	-0,677	0,458	10,89
10	59,6	1,003	59,422	58,299	58,474	1,019	1,126	1,268	161,29
11	64,8	1,018	63,654	61,596	62,705	1,033	2,095	4,389	320,41
12	69,0	1,054	65,465	64,893	68,397	1,009	0,603	0,364	488,41

Шаг 4. Определим компоненту T в мультипликативной модели. Для этого проведем выравнивание ряда (T · E) с помощью линейного тренда.

Таблица 9 Расчет линейного тренда уровней временного ряда

№ п/п	t	$(T \cdot E)$	$(T \cdot E) \cdot t$	t^2	T
1	1	33,622	33,622	1	28,626
2	2	31,605	63,210	4	31,923
3	3	34,283	102,849	9	35,220
4	4	36,243	144,972	16	38,517
5	5	40,324	201,620	25	41,814
6	6	43,071	258,426	36	45,111
7	7	47,642	333,494	49	48,408
8	8	51,518	412,144	64	51,705
9	9	54,270	488,430	81	55,002
10	10	59,422	594,220	100	58,299
11	11	63,654	700,194	121	61,596
12	12	65,465	785,580	144	64,893
Итого	**78**	**561,119**	**4118,761**	**650**	**561,114**

Для оценки параметров a и b необходимо составить систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum y = n \cdot a + b \cdot t, \\ \sum y \cdot t = a \cdot \sum t + b \cdot \sum t^2 \end{cases}.$$

Система нормальных уравнений составит:

$$\begin{cases} 12 \cdot a + 78 \cdot b = 561{,}119, \\ 78 \cdot a + 650 \cdot b = 4118{,}761. \end{cases}$$

Решаем ее:

$$a = \frac{561{,}119 - 78 \cdot b}{12} \Rightarrow$$

$$78 \cdot \frac{561{,}119 - 78 \cdot b}{12} + 650 \cdot b = 4118{,}761 \Rightarrow$$

$$43767{,}282 - 6084 \cdot b + 7800 \cdot b = 49425{,}132 \Rightarrow$$

$$1716 \cdot b = 5657{,}85 \Rightarrow b = 3{,}297 \Rightarrow$$

$$a = \frac{561{,}119 - 78 \cdot 3{,}297}{12} = 25{,}329.$$

Итак, линейный тренд имеет вид: $T = 25{,}329 + 3{,}297 \cdot t$.

Найдем уровни Т для каждого момента времени (графа 5 таблицы 8).

Шаг 5. Найдем уровни ряда по мультипликативной модели, умножив уровни Т на значения сезонной компоненты для соответствующих кварталов (графа 6 таблицы 8).

Шаг 6. Расчет ошибки в мультипликативной модели проводится по формуле Е = y_t : (Т · S). Численные значения ошибки приведем в графе 7 таблицы 8.

Итак, мы рассчитали количественные значения трендовой, сезонной и случайной компонент уровней временного ряда за каждый квартал за три года по мультипликативной модели. Выводы можно сделать аналогично построенной ранее аддитивной модели.

Чтобы сравнить мультипликативную модель ряда с построенной ранее аддитивной моделью, используем сумму квадратов абсолютных ошибок. Абсолютные ошибки в мультипликативной модели определяются по формуле: Е = y_t - (Т·S). В данной модели сумма квадратов абсолютных ошибок составляет 41,322. Общая сумма квадратов отклонений фактических уровней ряда от среднего значения $(y_t - \bar{y})^2 = 1844{,}540$. Доля объясненной дисперсии уровней ряда динамики равна: $R^2_{y_t} = 1 - \frac{41{,}322}{1844{,}540} = 0{,}978$ или 97,8% - мультипликативная модель объясняет 97,8% общей вариации уровней временного ряда экспорта товаров за 2006 – 2008 гг.

Таким образом, мультипликативная модель лучше описывает данный временной ряд, чем аддитивная.

Чтобы на основе построенной мультипликативной модели дать прогноз экспорта товаров, сделаем точечный прогноз ожидаемого экспорта товаров в течение первого квартала 2009 года. Прогнозное значение уровня временного ряда F_t в мультипликативной модели есть произведение трендового значения T_t и соответствующего значения сезонной компоненты S_t.

Для расчета трендовых значений воспользуемся уравнением тренда, рассчитанным нами на шаге 4: $T = 25{,}329 + 3{,}297 \cdot t$, первый квартал 2009 г. будет стоять под номером 13 в ряду, поэтому $T_{13} = 25{,}329 + 3{,}297 \cdot 13 = 68{,}190.$

Значение сезонной компоненты за первый квартал равно $S_1 = 0{,}925.$

Прогнозное значение составит: $F_{13} = T_{13} \cdot S_1 = 68{,}190 \cdot 0{,}925 = 63{,}076.$

Экспорт товаров в первом квартале 2009 года составит 63,076 тыс. у.д.е (меньше, чем рассчитанный по аддитивной модели).