## Раздел 3. Системы эконометрических уравнений

При использовании в экономических расчётах отдельных уравнений регрессии, в большинстве случаев предполагается, что факторы можно изменять независимо друг от друга. На самом деле изменение одного фактора, как правило, не может происходить при абсолютной неизменности других факторов. Следовательно, отдельно взятое уравнение множественной регрессии не может характеризовать истинные влияния отдельных признаков на вариацию результирующей переменной. Именно поэтому, в экономических исследованиях важное место заняла проблема описания структуры связей между переменными системой, так называемых одновременных уравнений или структурных уравнений. Структурная форма модели описывает реальное экономическое явление или процесс. Простейшая структурная форма модели имеет вид:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{b}_{12} \cdot \boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{a}_{11} \cdot \boldsymbol{x}_1 + \varepsilon_1 \\ \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{b}_{21} \cdot \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{a}_{22} \cdot \boldsymbol{x}_2 + \varepsilon_2 \end{cases},$$

где $\boldsymbol{y}$ – эндогенные переменные, $\boldsymbol{x}$ – экзогенные переменные

Использование МНК для оценивания структурных коэффициентов модели даёт смещённые и несостоятельные оценки. Поэтому обычно структурная форма модели преобразуется в приведённую форму.

Приведённая форма уравнений – система независимых уравнений, в которой все текущие эндогенные переменные модели выражены через предопределённые переменные модели.

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_1 = \delta_{11} \cdot \boldsymbol{x}_1 + \delta_{12} \cdot \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \delta_{1m} \cdot \boldsymbol{x}_m + \varepsilon_1 \\ \boldsymbol{y}_2 = \delta_{21} \cdot \boldsymbol{x}_1 + \delta_{22} \cdot \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \delta_{2m} \cdot \boldsymbol{x}_m + \varepsilon_2 \\ \ldots. \\ \boldsymbol{y}_k = \delta_{k1} \cdot \boldsymbol{x}_1 + \delta_{k2} \cdot \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \delta_{km} \cdot \boldsymbol{x}_m + \varepsilon_k \end{cases}$$

Параметры $\delta_{ij}$ называются приведёнными коэффициентами. Приведённая форма строится для того, чтобы по МНК – оценкам её параметров определить оценки структурных коэффициентов. Зная оценки приведённых коэффициентов, можно определить параметры структурной формы модели, но только тогда, когда модель является идентифицированной.

### 1. *Правила идентификации модели*

Пусть ***M*** – число предопределённых переменных в модели

***m*** - число предопределённых переменных в уравнении

***K*** – число эндогенных переменных в модели

***k***- число эндогенных переменных в данном уравнении

***A*** – матрица коэффициентов при переменных, не входящих в данное уравнение.

Необходимое и достаточное условия идентификации уравнения модели

1- Если ***M-m>k+1*** и ранг матрицы ***A*** равен ***K-1***, то уравнение сверхидентифицировано.

2- Если ***M-m=k-1*** и ранг матрицы ***A*** равен ***K-1***, то уравнение точно идентифицировано.

3- Если $\boldsymbol{M}$-$\boldsymbol{m}$ $\geq$ $\boldsymbol{k}$-$\boldsymbol{1}$ и ранг матрицы $\boldsymbol{A}$ меньше $\boldsymbol{K}$-$\boldsymbol{1}$, то уравнение неидентифицировано.

4- Если $\boldsymbol{M}$-$\boldsymbol{m}$<$\boldsymbol{k}$-$\boldsymbol{1}$ , то уравнение неидентифицировано.

Для определения параметров такой системы применяется косвенный метод наименьших квадратов. Рассмотрим КМНК для простейшей идентифицируемой эконометрической модели с двумя эндогенными и двумя экзогенными переменными.

$$\begin{cases} y_1 = b_{12} \cdot y_2 + a_{11} \cdot x_1 + \varepsilon_1 \\ y_2 = b_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot x_2 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

Структурная форма модели преобразуется в приведённую форму, в которой коэффициенты при $x$ определяются методом наименьших квадратов

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2 \\ y_2 = \delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2 \end{cases}$$

Для нахождения значений $\delta_{11}$ и $\delta_{12}$ система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \sum y_1 x_1 = \delta_{11} \cdot \sum x_1^2 + \delta_{12} \cdot \sum x_1 x_2 \\ \sum y_1 x_2 = \delta_{11} \cdot \sum x_1 x_2 + \delta_{12} \cdot \sum x_2^2 \end{cases}$$

***Пример***

Имеются данные за 5 лет

| **Номер года** | **Годовое потребление продукта,y1** | **Оптовая цена за кг, y2** | **Доход на душу населения, x1** | **Расходы по обработке продукта, x2** |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 60 | 5 | 1300 | 60 |
| 2 | 62 | 4 | 1300 | 56 |
| 3 | 65 | 4,2 | 1500 | 56 |
| 4 | 62 | 5 | 1600 | 63 |
| 5 | 66 | 3,8 | 1800 | 50 |

По имеющимся данным построить систему эконометрических уравнений вида

$$\begin{cases} y_1 = f(y_2, x_1) \\ y_2 = f(y_1, x_2) \end{cases}$$

- провести идентификацию модели,
- рассчитать соответствующие структурные коэффициенты.

Система одновременных уравнений с двумя эндогенными и двумя экзогенными переменными имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = b_{12} \cdot y_2 + a_{11} \cdot x_1 + e_1 \\ y_2 = b_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot x_2 + e_2 \end{cases}$$

## *2. Идентификация модели.*

Модель имеет две эндогенные ($y_1$, $y_2$) и две экзогенные ($x_1$, $x_2$) переменные.

Проверим каждое уравнение системы на необходимое (**Н**) и достаточное (**Д**) условие идентификации.

<u>Первое уравнение</u>:

**Н:** эндогенных переменных – 2 ($y_1, y_2$)

отсутствующих экзогенных – 1 ($x_2$)

Выполняется необходимое равенство 2=1+1, следовательно, Первое уравнение полностью идентифицировано.

**Д:** в первом уравнении отсутствует $x_2$ . ***M=2, m=1, K=2, k= 2.*** Проверяем : ***M-m=1***,

***k-1=1***, т.е. выполняется правило 2. Ранг матрицы $A=a_{22}$, определитель матрицы не равен нулю, ранг матрицы равен ***К-1=1***, следовательно Первое уравнение точно идентифицировано.

<u>Второе уравнение</u>.

**Н**: эндогенных переменных – 2 ($y_1, y_2$)

отсутствующих экзогенных – 1 ($x_1$)

Выполняется необходимое равенство 2=1+1, следовательно, Второе уравнение полностью идентифицировано.

**Д:** во втором уравнении отсутствует $x_1$ . ***M=2, m=1, K=2, k= 2***. Проверяем : ***M-m=1***,

***k-1=1***, т.е. выполняется правило 2. Ранг матрицы $A= a_{11}$, определитель матрицы не равен нулю, ранг матрицы равен ***К-1=1***, следовательно Второе уравнение точно идентифицировано.

### *3. Оценка параметров системы*

При решении системы

$$\begin{cases} \sum y_1 x_1 = \delta_{11} \cdot \sum x_1^2 + \delta_{12} \cdot \sum x_1 x_2 \\ \sum y_1 x_2 = \delta_{11} \cdot \sum x_1 x_2 + \delta_{12} \cdot \sum x_2^2 \end{cases}$$

выразим ***x и y*** через отклонения от средних уровней, и тогда матрица исходных данных будет иметь вид:

| | y1 | y2 | x1 | x2 |
|---|---|---|---|---|
| Среднее | 63 | 4,4 | 1500 | 57 |
| | -3 | 0,6 | -200 | 3 |
| | -1 | -0,4 | -200 | -1 |
| | 2 | -0,2 | 0 | -1 |
| | -1 | 0,6 | 100 | 6 |
| | 3 | -0,6 | 300 | -7 |

Соответственно, значения сумм

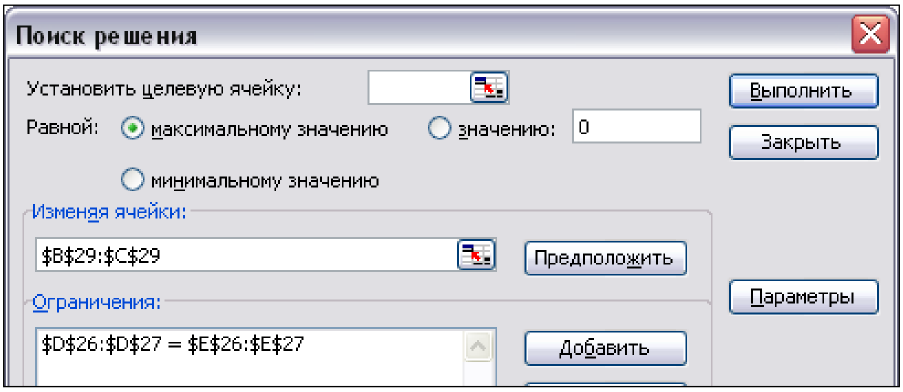
| | y1*x1 | y1*x2 | x1^2 | x2^2 | x1*x2 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 600 | -9 | 40000 | 9 | -600 |
| | 200 | 1 | 40000 | 1 | 200 |
| | 0 | -2 | 0 | 1 | 0 |
| | -100 | -6 | 10000 | 36 | 600 |
| | 900 | -21 | 90000 | 49 | -2100 |
| Суммы | 1600 | -37 | 180000 | 96 | -1900 |

Тогда система нормальных уравнений составит

$$\begin{cases} 1600 = 180000 \cdot \delta_{11} - 1900 \cdot \delta_{12} \\ -37 = -1900 \cdot \delta_{11} + 96 \cdot \delta_{12} \end{cases}$$

Решаем систему в EXCEL с помощью инструмента *Поиск решения*

| | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 19 | | | | |
| 24 | | | | |
| 25 | | | | |
| 26 | 180000 | -1900 | =СУММПРОИЗВ(B26:C26;$B$29:$C$29) | 1600 |
| 27 | -1900 | 96 | =СУММПРОИЗВ(B27:C27;$B$29:$C$29) | -37 |
| 28 | Неизвестные | | | |
| 29 | 0 | 0 | | |




Получаем

$$\delta_{11} = 0{,}00609$$

$$\delta_{12} = -0{,}26481$$

Тогда $$\boxed{y_1 = 0{,}00609 \cdot x_1 - 0{,}26481 \cdot x_2}$$

Аналогично строим систему нормальных уравнений для определения коэффициентов $\boldsymbol{\delta_{21}}$ ***и*** $\boldsymbol{\delta_{22}}$

$$\begin{cases} \sum y_2 x_1 = \delta_{21} \cdot \sum x_1^2 + \delta_{22} \cdot \sum x_1 x_2 \\ \sum y_2 x_2 = \delta_{21} \cdot \sum x_1 x_2 + \delta_{22} \cdot \sum x_2^2 \end{cases}$$

Получаем

$$\begin{cases} -160 = 180000 \cdot \delta_{21} - 1900 \cdot \delta_{22} \\ 10{,}2 = -1900 \cdot \delta_{21} + 96 \cdot \delta_{22} \end{cases}$$

Аналогично решаем систему уравнений

Следовательно, $\boldsymbol{\delta_{21}}$ = 0,00029 и $\boldsymbol{\delta_{22}}$ =0,11207. Тогда второе уравнение примет вид:

$$\boxed{y_2 = 0{,}00029 \cdot x_1 + 0{,}11207 \cdot x_2}$$

Приведённая форма модели примет вид:

$$\begin{cases} y_1 = 0{,}00609 \cdot x_1 - 0{,}26481 \cdot x_2 \\ y_2 = 0{,}00029 \cdot x_1 + 0{,}11207 \cdot x_2 \end{cases}$$

Из чего определяем коэффициенты структурной модели

$$\begin{cases} y_1 = 0{,}00609 \cdot x_1 - 0{,}26481 \cdot x_2 \\ x_2 = \dfrac{y_2 - 0{,}00029 x_1}{0{,}11207} \end{cases}$$

$$y_1 = 0{,}00609 \cdot x_1 - 0{,}26481 \cdot \frac{y_2 - 0{,}00029\ x_1}{0{,}11207} =$$
$$-2{,}36290 \cdot y_2 + 0{,}00678 \cdot x_1$$

Аналогично

$$\begin{cases} y_2 = 0{,}00029 \cdot x_1 + 0{,}11207 \cdot x_2 \\ x_1 = \dfrac{y_1 + 0{,}26481 \cdot x_2}{0{,}00609} \end{cases}$$

Тогда

$$y_2 = 0{,}00029 \cdot \frac{y_1 + 0{,}26481 \cdot x_2}{0{,}00609} + 0{,}11207 \cdot x_2 =$$
$$0{,}04762 \cdot y_1 + 0{,}12468 \cdot x_2$$

## 4. Структурная форма модели

Итак, структурная форма модели имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = -2{,}36290 \cdot y_2 + 0{,}00678 \cdot x_1 + \varepsilon_1 \\ y_2 = 0{,}04762 \cdot y_1 + 0{,}12468 \cdot x_2 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

В этой системе уравнений применены следующие обозначения;

$y_1$ – годовое потребление продукта,

$y_2$ - оптовая цена за кг.,

$x_1$ – доход на душу населения,

$x_2$ – расходы по обработке продукта.

***Вывод;*** На годовое потребление продукта, причем уменьшение, большее влияние оказывает оптовая цена, чем доход на душу населения.

На оптовую цену, причем увеличение, большее влияние оказывают расходы по обработке продукта.