**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И КАДРОВ

**Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»**

**Кафедра математического моделирования экономических систем
агропромышленного комплекса**

И. В. Шафранска, Е. В. Гончарова

ЭКОНОМЕТРИКА И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

***Методические указания
к практическим и лабораторным занятиям
для студентов, обучающихся по специальностям
1-26 02 03Маркетинг, 1-25 01 10 Коммерческая деятельность***

**Горки
БГСХА
2019**

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И КАДРОВ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

Кафедра математического моделирования экономических систем агропромышленного комплекса

И. В. Шафранска, Е. В. Гончарова

ЭКОНОМЕТРИКА И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Методические указания
к практическим и лабораторным занятиям
для студентов, обучающихся по специальностям
1-*26 02 03Маркетинг, 1-25 01 10 Коммерческая деятельность*

Горки
БГСХА
2019

УДК 330.4:[658+338.01](072)
ББК 65.23я7
Г65

Рекомендовано методической комиссией
факультета бизнеса и права.
Протокол № 1 от 29 апреля 2019 г.

Авторы:
кандидат экономических наук, доцент *И. В. Шафранская*
старший преподаватель *Е. В. Гончарова*

Рецензент:
кандидат экономических наук, доцент *О. П. Кольчевская*;

И. В. Шафранская, Гончарова, Е. В.
Г65 Эконометрика и экономико-математические методы и модели: методические указания к практическим и лабораторным занятиям / И. В. Шафранская, Е. В. Гончарова. – Горки : БГСХА, 2019. – 65 с.

Приведены информация и методики по изучению и выполнению основных разделов курса, в которых на основе эконометрических и экономико-математических методов и моделей, которые помогают обосновать и принять оптимальные управленческие решения по вопросам в сфере снабжения, производства и сбыта.

Для студентов, обучающихся по специальностям 1-25 01 10 Коммерческая деятельность и 1-26 02 03Маркетинг.

УДК 330.4:[658+338.01](072)
ББК 65.23я7

ВВЕДЕНИЕ

Многообразие и возрастающий объем стоящих перед специалистами экономического профиля задач требуют использования экономико-математических методов и моделей, которые помогают обосновать и принять оптимальные управленческие решения по вопросам в сфере снабжения, производства и сбыта.

В этих условиях важное значение имеет обучение студентов основам эконометрического и экономико-математического моделирования и использованию полученных знаний в практической деятельности для анализа сложившейся экономической ситуации и обработки поступающей информации, отыскания оптимальных решений задач, связанных с планированием использования земельных, материальных, трудовых и денежных ресурсов; определение нормативных экономических показателей; обоснование ассортимента, объемов и каналов товародвижения продукции сельскохозяйственных, перерабатывающих, торговых предприятий с целью наиболее полного удовлетворения потребностей покупателей, а также для приобретения навыков самостоятельного моделирования экономических процессов, протекающих на предприятиях АПК.

Задания ориентированы на учет реальных производственных ситуаций, предполагают широкое использование персональных компьютеров и учитывают современные достижения в развитии экономико-математических методов и моделей.

Порядок размещения материала предполагает переход от простых к более сложным темам.

Порядок выполнения заданий предусматривает индивидуальную работу каждого студента. Содержание индивидуального задания формирует студент. Чтобы получить исходные данные заданий, необходимо в формулы, имеющиеся в задании, подставить значение N (равное последней цифре шифра зачетной книжки) и K (равное 1, если фамилия студента начинается с букв А, Б, В, Г; 2 – Д, Е, Ж, З, И, Н; 3 – К, Л, М, П; 4 – С, Т, О, Р; 5 – Ш, Щ, Э, У, Ф, Ц, Ч, Х, Ю, Я).

Т е м а 1. РЕГРЕССИОННЫЕ МОДЕЛИ

Задача 1. Построить уравнение множественной линейной регрессии формирования сбыта товара в зависимости от затрат на рекламу и цены единицы товара (табл. 1.1).

Т а б л и ц а 1.1. **Исходные данные для построения уравнения регрессии**

№ п.п.	Объем сбыта товара, у. д. е. (y)	Цена единицы товара, у. д. е. (x_1)	Затраты на рекламу товара, у. д. е. (x^2)	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	x_1y	x_2y
1	115	4	12	16	144	48	115	1380
2	130	2	13	4	169	26	130	1690
3	100	7	6	49	36	42	100	600
4	90	9	4	81	16	36	90	360
5	115	4	13	16	169	52	115	1495
6	125	4	12	16	144	48	125	1500
7	125	3	14	9	196	42	125	1750
8	85	9	4	81	16	36	85	340
9	115	3	14	9	196	42	115	1610
10	110	5	8	25	64	40	110	880
11	120	3	14	9	196	42	120	1680
12	100	6	7	36	49	42	100	700
13	90	8	5	64	25	40	90	450
14	115	4	12	16	144	48	115	1380
15	120	5	15	25	225	75	120	1800
16	125	4	15	16	225	60	125	1875
17	115	3	10	9	100	30	115	1150
18	110	5	10	25	100	50	110	1100
19	105	5	8	25	64	40	105	840
20	95	7	6	49	36	42	95	570
21	105	4	8	16	64	32	105	840
22	105	17	9	289	81	153	105	945
Сумма	2415	121	219	885	2459	1066	2415	24935
Среднее	109,8	5,5	10,0	40,2	111,8	48,5	110	1133

На основе проведенной информации необходимо:

1)дать количественную характеристику качественного признака, если он присутствует в КМ.

Если качественный признак присутствует в опыте, определяем его количественно – ставим единицу, если отсутствует – нуль. В КМ вводим столько дискретных величин, сколько качественных признаков;

2) используя формулы асимметрии (А) и (Э), проверить данные на соответствие их требованиям закона нормального распределения:

$$A^* = \frac{\sum_{i \in I_0} (x_i - \bar{x})^3}{n\sigma_{x^3}}; \quad Э^* = \frac{\sum_{i \in I_0} (x_i - \bar{x})^4}{n\sigma_{x^4}} - 3,$$

где i – номер варианта опыта (хозяйства);

I_0 – множество вариантов опытов (хозяйств);

x_i – фактическое значение факторного показателя;

$\bar{x}$ – среднее значение факторного показателя;

n – число вариантов опыта;

σ_x – среднее квадратическое отклонение;

* – формулы распространяются и на результативный показатель y .

Среднее квадратическое отклонение определяем по одной из формул:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i \in I_0} (x_i - \bar{x})^2}{n}}; \quad \sigma_x = \sqrt{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2}.$$

Информация не противоречит требованиям закона нормального распределения, если фактические значения А и Э равны нулю или не противоречат условию:

$$|А| \le |3\sigma_a|, \quad |Э| \le |5\sigma_э|,$$

где $\sigma_a, \sigma_э$ – средние квадратические отклонения, или стандартные ошибки асимметрии и эксцесса.

Стандартные ошибки асимметрии и эксцесса определяются по следующим формулам:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{6n(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)}},$$

$$\sigma_э = \sqrt{\frac{24n(n-1)^2}{(n-3)(n-2)(n+3)(n+5)}}.$$

Если А и Э выходят за допустимые границы, проверяем, нет ли среди данных резко выделяющихся вариантов. Данные принадлежат выборке, если $|x_i - \bar{x}| \le 3\sigma_x$.

В случае невыполнения условия для какого-то варианта (вариантов) информацию их исключаем из выборки и вновь проверяем оставшиеся данные на соответствие их требованиям закона нормального распределения;

3) определить вид корреляционной модели одним из известных способов: аналитическим, графическим, логическим;

4) используя метод наименьших квадратов, рассчитать параметры корреляционной модели;

5) определить коэффициенты парной корреляции по формуле

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y};$$

6) определить коэффициент множественной корреляции, используя одну из следующих формул:

$$R = \sqrt{\frac{r_{yx_1}^2 + r_{yx_2}^2 - 2r_{yx_1} \cdot r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}};$$

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum\limits_{i \in I_0} (y_x - y_i)^2}{\sum\limits_{i \in I_0} (y_i - \bar{y})^2}},$$

где y_x – расчетное значение результативного показателя;

y_i – фактическое значение результативного показателя;

$\bar{y}$ – среднее значение результативного показателя;

7) определить коэффициент существенности коэффициента множественной (парной) корреляции:

$$t_R = \frac{R}{\mu_R}, t_r = \frac{r}{\mu_r},$$

где $\mu_R, (\mu_r)$ – ошибка коэффициента парной (множественной) корреляции.

Ошибка коэффициента парной (множественной) корреляции определяется по формулам

$$\mu_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n-1}}, \mu_R = \frac{1-R^2}{\sqrt{n-k-1}},$$

где k – количество факторов;

8) определить существенность коэффициентов регрессии:

$$t_{a_j} = \frac{a_j}{\mu_{a_j}},$$

где a_j – значение коэффициента регрессии для j-го фактора;

μ_{a_j} – ошибка коэффициента регрессии.

Ошибка коэффициента регрессии определяется по формуле

$$\mu_{a_j} = \frac{\sigma_{y_x y_i}}{\sigma_x \sqrt{n}},$$

где $\sigma_{y_x y_i}$ – среднее квадратическое отклонение по данным корреляционной модели.

Среднее квадратическое отклонение по данным модели определяется по формуле

$$\sigma_{y_x y_i} = \sqrt{\frac{\sum_{i \in I_0} (y_x - y_i)^2}{n}}.$$

Сравнить табличное значение коэффициента существенности коэффициента регрессии t_T с расчетным значением.

В случае, если $t_{aj} < t_T$, то несущественный фактор исключить из КМ и её параметры рассчитать вновь, но без фактора, который исключен;

9) дать экономическую интерпретацию коэффициентам регрессии. Определить коэффициенты эластичности $(Э_j)$ и β_j-коэффициенты и сравнить влияние факторных показателей на формирование результативного показателя:

$$Э_j = a_j \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}_i}, \qquad \beta_j = a_j \frac{\sigma_{x_j}}{\sigma_y};$$

10) сравнить фактические и расчетные значения результативного показателя и сделать выводы об особенностях использования ресурсов в каждом предприятии;

11) рассчитать параметры и характеристики КМ на персональном

компьютере (ПК).

Задача 2. Проверить данные столбца X на соответствие их требованиям закона нормального распределения, если n=30, $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 35+N$ $\sum (x_i - \bar{x})^3 = 90+N$; $\sum (x_i - \bar{x})^4 = 350+N$, $\sigma_А = 0,43$ $\sigma_Э = 0,83$

Задача 3. Рассчитать коэффициент парной корреляции, если n=40, $\sum x_1 = 25+N$, $\sum y = 30$, $\sum xy = 24$, $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 31+N$ $\sum (y - \bar{y})^2 = 29$. Пояснить полученное значение.

Задача 4. Рассчитать коэффициент множественной корреляции и сделать вывод, если $\sum (y_i - y_x)^2 = 20$, $\sum (y_i - \bar{y})^2 = 140+N$. Определить на сколько процентов, включенные в регрессионную модель факторы объясняют изменение результативного показателя.

Задача 5. Рассчитать критерий Фишера и сделать вывод, если $\sum (y_i - y_x)^2 = 100$, $\sum (y_i - \bar{y})^2 = 360+N$.

Задача 6. Рассчитать критерий существенности коэффициента регрессии $a_1 = 1{,}03$, если известно, что n=20, $\sigma_x = 2{,}5$; $\sum (y_i - y_x)^2 = 24+0{,}1N$. Сделать вывод.

Задача 7. Рассчитать коэффициенты эластичности и β-коэффициенты и сделать вывод, если известно: $\bar{x}_1 = 48+0{,}1N$; $\bar{x}_2 = 4{,}6+0{,}1+N$; $\bar{y} = 76$, σ_{x1}= 24,3.σ_{x2}= 22,6, σ_y=70,4, а модель имеет вид: $y = 153 + 1{,}8x_1 + 2{,}8x_2$

Задача 8. Найти коэффициент множественной корреляции и сделать вывод, если критерий Фишера(F)=5,9+0,3N.

Задача 9. Определить расчетное значение себестоимости картофеля (д.ед./ц) в хозяйстве, если урожайность культуры равна 300+10+N ц/га, расход удобрений - 3,3 ц д.в./га, а регрессионная модель формирования себестоимости картофеля имеет вид:

$$y = 1458 - 1{,}2x_1 + 2{,}5x_2,$$

где у – себестоимость картофеля, д. ед./ц; x_1 - урожайность картофеля, ц/га.; x_2 - расход удобрений, ц д.в./га.

Задача 10. По информации сельскохозяйственных организаций рассчитана регрессионная модель:

$$У = 190{,}6 + 4{,}82x_1 + 1{,}42x_2 + 7{,}38\,x_3;$$

$$R = 0{,}92,\ D = 0{,}83\ F = 34,\ t_{a1}=2{,}35, t_{a2}=-5{,}98,\ t_{a3}=0{,}12$$
$$\beta_1=0{,}25,\ \beta2=0{,}16,\ \beta3=0{,}31$$

где У – стоимость валовой продукции, у. д. е.; x_1 – численность работников, чел.; x_2 – стоимость основных производственных фондов, у. д. е.; x_3 – наличие энергетических мощностей, л. с.

Необходимо: дать экономическую интерпретацию коэффициента регрессии при факторах, пояснить значение всех характеристик модели.

Задача 11. Проверить данные столбца X на соответствие их требованиям закона нормального распределения, если n=20++N, $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 40+N$, $\sum (x_i - \bar{x})^3 = 75$, $\sum (x_i - \bar{x})^4 = 210$, $\sigma_А = 0{,}51$, $\sigma_Э = 0{,}99$

Задача 12. Рассчитать коэффициент парной корреляции, если n=50, $\sum x_1 = 30 + N$, $\sum y = 35$, $\sum xy = 25+N$, $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 28+N$ $\sum (y - \bar{y})^2 = 18$. Пояснить полученное значение.

Задача 13. Рассчитать коэффициент множественной корреляции и сделать вывод, если $\sum (y_i - y_x)^2 = 180+10N$, $\sum (y_i - \bar{y})^2 = 230+10N$. Определить на сколько процентов, включенные в регрессионную модель факторы объясняют изменение результативного показателя.

Задача 14. Рассчитать критерий Фишера и сделать вывод, если $\sum (y_i - y_x)^2 = 120+N$, $\sum (y_i - \bar{y})^2 = 140+N$.

Задача 15. Рассчитать критерий существенности коэффициента регрессии $a_1 = 1{,}85$, если известно, что n = 20, $\sigma_x =$ 0,2; $\sum (y_i - y_x)^2 = 50+N$. Сделать вывод.

Задача 16. Рассчитать коэффициенты эластичности и β-коэффициенты и сделать вывод, если известно: $\bar{x}_1 = 24$; $\bar{x}_2 = 2{,}3$; $\bar{y} = 38$, $\sigma_{x1} = 12{,}3$, $\sigma_{x2} = 11{,}6$, $\sigma_y = 35{,}3$, а модель имеет вид: $y = 153 + 1{,}8x_1 + 2{,}8x_2$

Задача 17. . Найти коэффициент множественной корреляции и сделать вывод, если критерий Фишера(F)=1,6 + 0,2N.

Задача 18. Определить расчетное значение себестоимости зерновых в хозяйстве(д.ед./ц), если урожайность равна 50 ц/гол, расход удобрений – 2,1 ц д.в./га., а корреляционная модель формирования себестоимости имеет вид:

$$y = 283 - 0{,}18x_1 + 1{,}2x_2 ,$$

где у- себестоимость зерновых, д.ед./ц; x_1 - урожайность зерновых, ц/га.; x_2 - расход удобрений, ц д.в./га.

Задача 19. Дать экономическую интерпретацию параметрами характеристикам регрессионной модели формирования стоимости товарной продукции (у, тыс. руб.):

$$y = 1259.3 + 366.3.x_1 + 150{,}4.x_2 + 120{,}9x_3,$$
$$R = 0.9\ D=0{,}91\ F=23{,}8\ t_{a1}=1.99, t_{a2}=-0{,}98,\ t_{a3}=2{,}1$$
$$\beta_1=0{,}24,\ \beta2=0{,}31\ \beta3=0{,}45$$

где x_1 –стоимость ОПФ, тыс. руб.,

x_2 –численность работников, чел,

x_3 –наличие оборотных фондов, тыс. руб.

Т е м а 2. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД

Задача 1. Определить оптимальные размеры отраслей фермерского хозяйства с целью получения максимума прибыли.

Исходная информация.

1. В хозяйстве целесообразно возделывать зерновые культуры, картофель, многолетние травы, содержать коров.

2. Производственные ресурсы фермерского хозяйства: пашня – 40 + N га, трудовые ресурсы – 1450 + 10 N чел.-дн., корма природных кормовых угодий (сенокосов и пастбищ) – 1500 ц к.ед.

3. Согласно требованиям севооборотов площадь картофеля не должна превышать 20 + 0,1K га, площадь зерновых культур не может быть менее 10 га. Скотоводческое помещение позволяет содержать не более 30 коров.

4. Расход ресурсов в расчете на единицу измерения отраслей, выход продукции с 1 га посева сельскохозяйственных культур и отраслей приведены в табл. 2.1.

На основе приведенной информации необходимо:

1) ввести переменные, обозначающие неизвестные размеры отраслей;

2) составить условия экономико-математической задачи по использованию производственных ресурсов и размерам отраслей, записать

целевую функцию, используя следующую структурную модель.

Т а б л и ц а 2.1. **Производственно-экономические показатели фермерского хозяйства**

Показатели	Сельхозкультуры и отрасли			
	Зерно-вые, га	Картофель, га	Многолетние травы, га	Коровы, гол.
Расход пашни, га	1	1	1	-
Расход труда, чел.-дн./га(гол.	10	30	5	20
Расход кормов, ц к. ед./гол.	-	-	-	50
Выход кормов, ц к. ед./га	10	20	15	-
Прибыль, у. д. е.	200 + К	1000	-	1300 - К

Требуется найти максимум прибыли:

$$F_{\max} = \sum_{j \in J_0} p_j x_j \ .$$

При условиях:

1. По использованию земельных угодий –

$$\sum_{j \in J_1} a_{ij} x_j \le A_i, i \in I_1 \ ;$$

2. По использованию труда –

$$\sum_{j \in J_0} b_{ij} x_j \le B_i, i \in I_2 \ ;$$

3. По балансу питательных веществ –

$$\sum_{j \in J_2} w_{ij} x_j \le \sum_{j \in J_1} d_{ij} x_j + W_i, i \in I_3 \ ;$$

4. Технологические ограничения на площади посева отдельных сельскохозяйственных культур и размеры отраслей –

$$\widetilde{D}_j \le x_j \le D_j, j \in J_0 \ ;$$

5. Неотрицательность переменных –

$$x_j \ge 0.$$

Индексация:

j – номер сельскохозяйственных культур и отраслей;

J_0 – множество отраслей и сельскохозяйственных культур;

J_1 – множество отраслей растениеводства, $J_1 \in J_0$;

J_2 – множество отраслей животноводства, $J_2 \in J_0$;

i – номер ограничений – видов земельных угодий, труда, питательных веществ;

I_1 – множество видов земельных угодий;

I_2 – множество видов труда;

I_3 – множество видов питательных веществ.

Неизвестные величины:

x_j – размер отрасли вида j.

Известные величины:

A_i – ресурсы земельного угодья вида i;

B_i – ресурсы труда вида i;

a_{ij} – расход земельного угодья вида i на единицу отрасли растениеводства вида j;

b_{ij} – расход труда вида i на единицу отрасли вида j;

w_{ij} – расход питательного вещества вида i на единицу отрасли животноводства вида j;

d_{ij} – выход корма в пересчете на питательное вещество вида i с единицы отрасли растениеводства вида j;

w_i – выход корма в пересчете на питательное вещество вида i с природных кормовых угодий;

$\tilde{D}_j, D_j$ – соответственно минимальный и максимальный размеры отрасли вида j;

p_j – прибыль в расчете на единицу отрасли вида j.

Задача 2. Определить ассортимент выпечки кондитерских изделий, максимизирующий прибыль.

Исходная информация.

1. В кондитерском цеху столовой сельскохозяйственного предприятия для приготовления 8 видов пирожных используют следующее сырье и полуфабрикаты (табл. 2.3).

Т а б л и ц а 2.3. **Расход сырья и полуфабрикатов для приготовления пирожных**

Сырье и полуфабрикаты	Расход сырья и полуфабрикатов на 1 т готовой продукции, кг				
	«Дачное» с помадкой	«Дачное» с сахарной пудрой	«Дачное» с желе	«Ленинградское» фруктовое	«Ленинградское» с сахарной пудрой
1	2	3	4	5	6
Полуфабрикаты: песочный	660	663	660	527	640

бисквитный заварной	- -	- 220	- 221	174 220	230 -
Фруктовая начинка	165	207	165	117	154

П р о д о л ж е н и е т а б л. 2.3

1	2	3	4	5	6
Помадка	550	-	-	-	-
Сахарная пудра	-	14	-	-	51
Фрукты – цукаты	-	-	-	140	-
Крем сливочный	-	-	-	-	-
Желе	-	-	55	117	-
Прибыль, у.д.е.	280 - N	238 - K	250 + 0,5N	219 - ,6K	240 + K

П р о д о л ж е н и е т а б л. 2.3

Сырье и полуфаб-рикаты	«Ленинградское» желейное	«Ленинградское» желейное с кре-мом	«Песочное» с бисквитом	Наличие сырья и полуфабри-катов, т
1	7	8	9	10
Полуфабрикаты: песочный бисквитный заварной	 584 233 -	 539 179 -	 568 299 -	 28 + 0,5N 5 – 0,1K 5 – 0,5K
Фруктовая начинка	118	119	178	12 + 0,2K
Помадка	-	-	-	6 – 0,1N
Сахарная пудра	-	-	30	0,6 + 0,1K
Фрукты – цукаты	-	-	-	1 + 0,1N
Крем сливочный	-	119	-	0,5 + 0,2K
Желе	118	119	-	2 + 0,2N
Прибыль, у.д.е.	230 + 0,8N	221 + 0,7K	226 - 2K	

2. Предельные объемы производства пирожных приведены в табл. 2.4.

Т а б л и ц а 2.4. **Предельные объемы производства пирожных, т**

Пирожные	Минимум	Максимум
«Дачное» с помадкой	8	12
«Дачное» с сахарной пудрой	4	6
«Дачное» с желе	6	10
«Ленинградское» фруктовое	4	8
«Ленинградское» с сахарной пудрой	6	9
«Ленинградское» желейное	1	4
«Ленинградское» желейное с кремом	2	4

«Песочное» с бисквитом	2	6

На основе приведенной информации необходимо:

1) ввести переменные, обозначающие неизвестные объемы кондитерских изделий;

2) составить условия экономико-математической задачи по обоснованию ассортимента выпуска продукции, записать целевую функцию, используя следующую структурную модель.

Требуется найти максимум прибыли:

$$F_{\max} = \sum_{j \in J_0} p_j x_j .$$

При условиях:

1. По использованию ресурсов –

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j \le A_i, \quad i \in I_0;$$

2. По объемам производства продуктов –

$$\tilde{D}_j \le x_j \le D_j, \quad j \in J_0;$$

3. Неотрицательность переменных – $x_j \ge 0$.

Индексация:

j – номер вида продукта;

J_0 – множество видов продуктов;

i – номер вида сырья;

I_0 – множество видов сырья.

Неизвестные величины:

x_j – производство продукции вида j.

Известные величины:

a_{ij} – расход ресурса (сырья и полуфабрикатов) вида i на производство единицы продукции вида j;

$\tilde{D}_j, D_j$ – соответственно минимальный и максимальный объемы производства продукции вида j;

p_j – прибыль от производства единицы продукции вида j;

3) записать условие задачи в первую симплексную таблицу (табл. 9). Привести все ограничения к типу меньше-равно ($\le$). Для этого ограничения типа $\ge$ умножаем на –1. В соответствии с требованиями алгоритма симплекс-метода превращаем неравенства в уравнения. Для этого вводим дополнительные переменные y_i, где i – номер ограничения. Дополнительных переменных вводим столько, сколько ограниче-

ний типа $\le$.

С экономической точки зрения дополнительные переменные обозначают величину недоиспользования ресурсов, если исходные ограничения (1) имеют вид меньше-равно ($\le$) или обозначают величину превышения сверх минимума, если исходные ограничения типа больше-равно ($\ge$). Решение включает два этапа – поиск опорного (допустимого) и оптимального решений.

Опорное решение получаем при значениях переменных, которые, будучи поставленными в условия (ограничения) задачи, обеспечивают выполнение всех условий задач. Поиск опорного решения начинаем с допущения, что искомые переменные равны нулю, т.е. $x_j = 0$. Тогда, подставив эти значения в уравнения системы, получим значение дополнительных переменных y_i, равное свободным членам задачи. Признаком наличия опорного решения, т. е. выполнения условий при $x_j = 0$, будут положительные свободные члены. При наличии хотя бы одного отрицательного свободного члена опорное решение будет отсутствовать. В нашем случае опорное решение отсутствует. Для его поиска сведем информацию в табл. 2.5.

Т а б л и ц а 2.5. **Исходная симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y_1	A_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_n
y_2	$-A_2$	$-a_{21}$	$-a_{22}$	$\cdots$	$-a_{2n}$
…	…	…	…	…	…
y_m	A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}
$F_{\max(\min)}$	0	$-p_1$	$-p_2$	$\cdots$	$-p_n$

Переменные столбца 1, исходя из значений которых начинаем поиск оптимального решения, будут базисными. Базисные переменные в случае, когда искомые переменные равны нулю, будут равны свободным членам. Их значения заносим в столбец 2. Остальные переменные (в нашем случае) небазисные, равные нулю.

На пересечении базисных и небазисных переменных записываем коэффициенты системы уравнений. При записи коэффициентов *F*-строки (целевой функции) их знаки меняем на противоположные;

4) найти опорное решение.

Для этого необходимо, чтобы в процессе преобразований отрицательные свободные члены стали положительными.

Среди отрицательных свободных членов выбираем любой. Затем в строке взятого отрицательного свободного члена находим первый отрицательный коэффициент. Делим свободные члены на соответствующие коэффициенты столбца, в котором мы взяли отрицательный элемент, т.е. делим значения столбца свободных членов на соответствующие коэффициенты выбранного столбца.

Коэффициенты F-строки в расчетах по поиску разрешающего элемента не участвуют.

В случае, если частное от деления на выбранный нами отрицательный элемент получится наименьшим по сравнению с другими частными, то этот отрицательный коэффициент станет разрешающим элементом.

Разрешающий элемент показывает, какая из небазисных переменных заменит базисную. С экономической точки зрения введение x в число базисных переменных обозначает, что переменная вошла в план, т. е. получила не нулевое значение.

Может получиться, что частное от деления на отрицательный элемент не будет самым меньшим. Тогда поступаем следующим образом.

В строке отрицательного свободного члена, если это возможно, находим следующий отрицательный элемент и делим свободные члены на соответствующие коэффициенты этого столбца, т. е. столбца с новым отрицательным элементом. Если частное от деления на новый отрицательный коэффициент будет меньшим положительным по сравнению с другими, то этот коэффициент возьмем за разрешающий (разрешающий элемент в симплексной таблице обводим рамкой). Если частное не является наименьшим положительным, то ищем третий отрицательный коэффициент в строке отрицательного свободного члена или производим те же вычисления в строке другого отрицательного свободного члена до тех пор, пока не найдем разрешающий элемент.

После нахождения разрешающего элемента производим преобразования, т.е. приступаем к заполнению следующей симплексной таблицы (шаг 2). Преобразования выполняем по следующим правилам:

1. Новый коэффициент вместо разрешающего равен единице, деленной на разрешающий. При этом новыми будем называть коэффициенты следующей симплексной таблицы по отношению к предыдущей:

$$a'_{rk} = \frac{1}{a_{rk}},$$

где a_{rk} – разрешающий элемент, стоящий в строке r и столбце k, при $r \in i, k \in j$;

i – номер строки, $i = 1...m$;

j – номер столбца, $j = 1...n$;

a'_{rk} – новый коэффициент вместо разрешающего.

2. Новые коэффициенты строки разрешающего элемента (a'_{rj}) равны предыдущим (a_{rj}), деленным на разрешающий:

$$a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}}.$$

При $j \neq k$ это правило не распространяется на разрешающий элемент.

3. Новые коэффициенты столбца разрешающего элемента (a'_{ik}) равны предыдущим, деленным на разрешающий элемент, взятый с противоположным знаком:

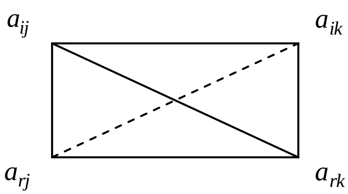
$$a'_{ik} = \frac{a_{ik}}{-a_{rk}}.$$

При $i \neq r$ это правило не распространяется на разрешающий элемент.

4. Новые коэффициенты, не стоящие в строке и столбце разрешающего элемента (a_{ij}), равны частному от деления разности произведения коэффициентов главной и побочной диагоналей на разрешающий элемент:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rk} - a_{ik} \cdot a_{rj}}{a_{rk}}.$$

При $i \neq r,\ j \neq k$ это правило не распространяется на коэффициенты строки и столбца разрешающего элемента. При этом коэффициенты прямоугольника с учетом разрешающего элемента относятся к главной диагонали.



Используя вышеизложенные правила, определяем остальные коэффициенты следующей симплексной таблицы (шаг 2).

Если в рассматриваемой симплексной таблице опорное решение отсутствует, т.е. в столбце свободных членов есть отрицательный элемент, то по изложенным выше правилам ищем разрешающий элемент в строке отрицательного свободного члена.

По правилам 1 – 4 делаем преобразование, т.е. находим новые коэффициенты симплексной таблицы (шаг 3). При этом базисную переменную меняем местами с небазисной. Преобразования продолжаем до тех пор, пока не будет найдено опорное решение;

5) найти оптимальное решение. Опорное решение будет оптимальным, если коэффициенты целевой функции (*F*-строки) будут отрицательными или нулевыми при решении задачи на минимум и положительными или нулевыми – при решении на максимум. Если оптимальное решение отсутствует, то его поиск начинаем с определения разрешающего столбца. Разрешающим столбцом при поиске минимума функции будет являться тот, в целевой функции которого находится наибольший положительный коэффициент, а при поиске максимума функции – наибольший по абсолютной величине отрицательный коэффициент.

Чтобы найти разрешающий элемент, делим коэффициенты столбца свободных членов на соответствующие коэффициенты разрешающего столбца. Разрешающим будет тот элемент, от деления на который получим меньшее положительное частное. Меняем местами базисные и небазисные переменные, соответствующие разрешающему элементу. По вышеизложенным правилам определяем коэффициенты новой симплексной таблицы. Расчеты из пункта 5 выполняем до тех пор, пока не получим оптимальное решение.

6) дать экономическую интерпретацию оптимального решения;

7) решить экономико-математическую задачу, используя пакеты прикладных программ на персональном компьютере;

8) проанализировать оптимальное решение.

Задача 3. Решить экономико-математическую задачу симплексным методом.

1) $x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$

2) $10x_1 + 13x_2 + 12x_3 \leq 300$

3) $400x_1 \geq 2500$

$F_{max} = 0{,}1x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}35x_3$

Задача 4. Получить оптимальное решение симплексным методом

1) $-2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 5x_4 \leq 4$

2) $x_3 \leq 20$

3) $x_1 + x_2 \leq 50$

4) $-x_1 - 3x_2 + x_4 \geq 20$

$F_{\min} = 20x_1 + 10x_2 - x_3 + 2x_4$

Т е м а 3. КОРРЕКТИРОВКА ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1. В связи с изменившимися производственными условиями внести корректировку в оптимальное решение экономической задачи.

Исходная информация.

Используя алгоритм симплексного метода, получили оптимальное решение задачи – сочетание отраслей фермерского хозяйства при максимуме прибыли. Значения последней симплексной таблицы следующие (табл. 3.1).

Т а б л и ц а 3.1. **Коэффициенты пропорциональности последней симплексной таблицы**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		y_5	y_6	x_3	y_1
y_4	10	-1	0	1	1
y_2	50	-20	-20	-5	-10
x_4	30	0	1	0	0
y_3	600	10	-50	-5	10
x_1	20	-1	0	1	1
x_2	20	0	1	0	0
$F_{\max}$	63000	800	1300	200	200

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) перечислить базисные и небазисные переменные, по которым необходима корректировка оптимального решения;

2) определить желаемую величину корректировки.

При корректировке по базисным переменным она равна:

$$\Delta x_j(\Delta y_i) = \frac{x_j(y_i) - x_j^k(y_i^k)}{a_{ij}},$$

где $\Delta x_j(\Delta y_i)$ – соответственно величина корректировки основной и дополнительной переменных, $\Delta x_j > 0$, $\Delta y_i > 0$, $\Delta y_i < 0$;

a_{ij} – коэффициент пропорциональности, стоящий в строке i в столбце j;

$x_j(y_i)$ – соответственно значение основной и дополнительной переменных до корректировки;

$x_j^k\,(y_i^k)$ – соответственно значение основной и дополнительной переменных после корректировки.

3) рассчитать предельную величину корректировки по каждой из базисных и небазисных переменных:

а) $\max \Delta x_j = \min(+)\dfrac{A_i}{a_{ij}}$, где A_i – коэффициент свободных членов;

б) $\max \Delta y_i = \min(+)\dfrac{A_i}{a_{ij}}$, где $\Delta y_i > 0$;

в) $\max \Delta y_i = \min\left|(-)\dfrac{A_i}{a_{ij}}\right|$, где $\Delta y_i < 0$;

4) если желаемая величина корректировки по модулю не превышает предельную величину корректировки, то провести корректировку решения по формуле

$$x_j^k\,(y_i^k) = x_j\,(y_i) - \sum_{j \in J_0} a_{ij}\,\Delta x_j\,(\Delta y_i),$$

где j – номер столбца небазисной переменной, участвующей в корректировке;

J_0 – множество столбцов небазисных переменных, участвующих в корректировке;

5) найти скорректированное решение при условии, что в фермерском хозяйстве планируется посев многолетних трав; ресурсы пашни, кормовых единиц увеличиваются или уменьшаются;

6) найти новое решение при условии, что произойдут изменения в размерах отраслей (площадей посева зерновых, картофеля, поголовья коров), трудовые ресурсы будут полностью использоваться.

Задача 2. Провести корректировку оптимального решения (табл 3.2):

− по основой небазисной переменной: Δx_3=450; Δx_3=180;

−по дополнительным небазисным переменным: Δy_1=-3; $\Delta\ y_1$=50;

− по базисным переменным: $x_4^к$=350, $y_3^к$=*2000.*

Т а б л и ц а 3.2. **Коэффициенты пропорциональности последней симплексной таблицы**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные			
		y_1	y_2	x_3	y_4
x_1	850	2	–0,06	0,7	0,06
x_2	300	–1	0,07	0,43	–0,02
y_3	2200	–190	–40	–100	–4
x_4	720	0,7	–0,01	–0,9	0,03

F	975 000	150	270	108	105

Задача 3. Провести корректировку оптимального решения (табл 3.3):

– по основой небазисной переменной: $\Delta x_{1=}5$; $\Delta x_2=2000$;

–по дополнительным небазисным переменным: $\Delta y_2=-10$; $\Delta\ y_3=15$;

– по базисным переменным: $x_4^к=600$; $y_1^к=700$.

Т а б л и ц а 3.3. **Коэффициенты пропорциональности последней симплексной таблицы**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		y_3	y_2	x_1	x_2
x_3	240	1	1	1	0
y_4	800	-0,5	-0,2	100	2
y_1	1500	-1	250	10	50
x_4	650	10	-12	3	-3
Fmin	540 000	-25	-2	-36	-8

Т е м а 4. ДВОЙСТВЕННЫЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

Задача 1. Используя информацию, приведенную в теме 3, составить условия двойственной экономико-математической задачи и решить ее симплексным методом.

Необходимо:

1) записать условия прямой экономико-математической задачи (тема 3), предварительно все неизвестные величины перенести в левую часть ограничения, известные в правую, сделать приведение подобных. Все ограничения прямой задачи привести к одному знаку (обычно к преобладающему);

2) ввести двойственные экономико-математические оценки;

3) составить двойственную экономико-математическую задачу, используя следующие правила:

а) коэффициенты столбцов прямой задачи становятся коэффициентами строк двойственной задачи;

б) знаки ограничений прямой задачи противоположны знакам ограничений двойственной задачи;

в) коэффициенты целевой функции прямой задачи становятся свободными членами двойственной задачи;

г) смысловое содержание целевых функций прямой и двойственной задач противоположно;

д) свободные члены прямой задачи становятся коэффициентами целевой функции двойственной задачи;

4) решить двойственную экономико-математическую задачу симплексным методом;

5) дать экономическую интерпретацию двойственным экономико-математическим оценкам;

6) используя коэффициенты пропорциональности последней симплексной таблицы двойственной задачи, найти оптимальное решение прямой задачи;

7) сравнить результаты решения двойственной и прямой экономико-математических задач;

8) решить двойственную экономико-математическую задачу на персональном компьютере.

Задача 2. На основании условий прямой задачи составить условия двойственной экономико-математической задачи

1) $x_1+x_2+x_3+x_4\leq1900$

2) $4x_1+18x_2+14x_3+18x_4\leq80000$

3) $x_3\geq150$

4) $-20x_1-30x_2-15x_3+45x_4\leq12500$

$F_{max}=50x_2+200x_3+100x_4$

Задача 3. На основании условий прямой задачи составить двойственную задачу

1) $2{,}5\ x_1 + 3{,}8x_2 + 1{,}9x_4 – 6{,}9x_5 + 4{,}7x_6 \geq 158\ 000$

2) $3{,}6x_1 + 2{,}9x_3 + 2x_4 + 5{,}8x_5 + 9{,}3x_6 + 10{,}5x_7 + 12{,}5x_8 \leq 250\ 840$

3) $2{,}6x_7 +1{,}9x_8 \geq150\ 000$

4) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3\ 000$

5) $x_7 + x_8 \leq 1\ 500$

6) $35x_1+33x_2+40x_4 \geq18\ 500$

$F_{min}=210x_1+213x_2+125x_3+114x_4+118x_5+184x_6+240x_7+350x_8$

Задача 4 На основании последней симплексной таблицы прямой задачи (табл. 4.1) составить последнюю симплексную таблицу двойственной задачи.

Таблица 4.1. **Коэффициенты пропорциональности последней симплексной таблицы**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		x_1	x_2	y_1	y_3
x_3	20050	1	1	1	1
y_2	35800	-3	0	-8	5
x_4	1480	0	0	0	-1
y_4	12000	0	-10	8	50
F_{max}	48100	300	250	300	150

Задача 4. По информации последней симплексной таблицы прямой задачи составить последнюю симплексную таблицу двойственной задачи и записать ее решение.

Т а б л и ц а 4.2. **Коэффициенты пропорциональности последней симплексной таблицы**

Базисные переменные	Свободный член	Небазисные переменные			
		x_4	y_1	y_4	x_2
x_3	354	0.5	0.8	0.9	1
x_1	1270	2.5	5.4	6.7	1.2
y_5	8	1	0.5	0.5	-1
y_2	9154	0	-1	0	0
y_3	1000	0	1	0	0
F_{min}	368 000	-25	-50	-23	-50

Т е м а 5. СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ

Оптимизация проекта по ресурсам.

Задача 1. Необходимо распределить трудовые ресурсы во времени, т.е. определить сроки начала и окончания работ так, чтобы с имеющимися трудовыми ресурсами выполнить комплекс проектных работ в минимальный срок.

Исходная информация.

1. В распоряжении руководителя проектных работ имеется 30 + 0,2К человек.

2. На перерабатывающем комбинате необходимо выполнить комплекс проектных работ, последовательность которых изображена на сетевом графике (рис. 1).

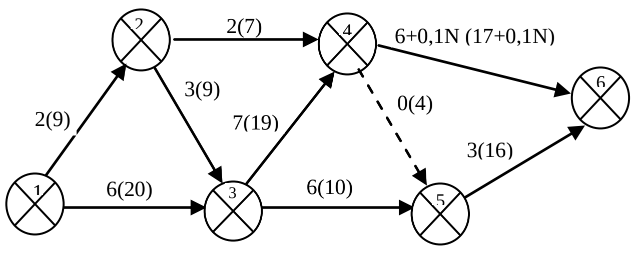


Рис. 1. Сетевой график выполнения комплекса проектных работ.

3. Над дугами графика приведены продолжительность выполнения работ (t_{ij}) и в скобках – интенсивность потребления ресурса, т.е. необ-

ходимое для выполнения работы (i, j) число исполнителей в единице времени (ν_{ij}).

На основе приведенной информации необходимо:

1) на сетевом графике рассчитать ранний срок свершения событий:

а) $t_{p(1)} = 0$;

б) $t_{p(j)} = t_{p(i)} + t_{ij}$,

где $t_{p(j)}$ – ранний срок свершения события j (последующего события) (рис. 2).

t_{ij} – продолжительность работы (i, j);

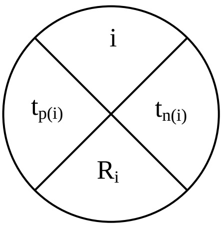


Рис. 2. Временные параметры событий:

i – номер события;
$t_{p(i)}$ – ранний срок свершения события i;
$t_{n(i)}$ – поздний срок свершения события i;
R_i – резерв времени события i.

в) если какому-то событию j предшествует свершение нескольких событий i, то ранний срок свершения события j определяется как максимальная сумма ранних сроков свершения событий i и продолжительность работ, входящих в событие j (рис. 3):

$$t_{p(j)} = \max_{(i,j)\in u_j^+} \{t_{p(i)} + t_{ij}\}, (j = \overline{2, n}).$$

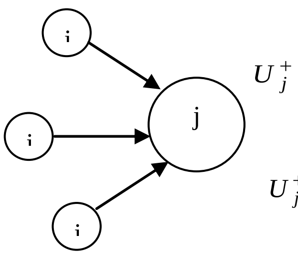


Рис. 3. Фрагмент сетевого графика:

U_j^+ – множество всех работ, входящих в событие j.

2) определить продолжительность критического пути (t_{kp}): $t_{kp} = t_{n(n)}$;

3) на сетевом графике рассчитать поздний срок свершения событий:

а) $t_{n(n)} = t_{kp}$, где t_{kp} – продолжительность критического пути;

б) $t_{n(i)} = t_{n(j)} - t_{ij}$, где $t_{n(j)}$ – поздний срок свершения события j (предшествующего события);

в) если нескольким событиям j предшествует свершение одного события i, то поздний срок свершения события i определяется как минимальная разность поздних сроков свершения событий j и продолжительности работ, выходящих из события i (рис. 4):

$$t_{n(i)} = \min_{(i,j)\in u_i^-} \{t_{n(j)} - t_{ij}\}, (i = \overline{1, n-1});$$

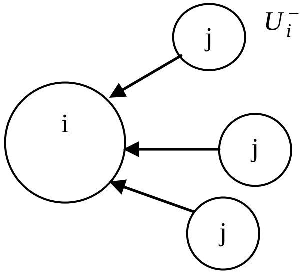


Рис. 4. Фрагмент сетевого графика:
U_i^- – множество всех работ, выходящих из события i.

4) на сетевом графике рассчитать резерв времени событий:

$$R_i = t_{n(i)} - t_{p(i)};$$

5) рассчитать временные параметры работ (табл. 5.1).

Таблица 5.1. **Временные параметры работ**

Условные обозначения работ (i, j)	Продолжительность работы, t_{ij}	Ранние сроки		Поздние сроки		Резерв времени работы		
		начало работы, $t_{р.н.(i,j)}$	окончание работы, $t_{р.о.(i,j)}$	начало работы, $t_{п.н.(i,j)}$	окончание работы, $t_{п.о.(i,j)}$	полный $R_{п(i,j)}$	свободный $R_{С(i,j)}$	независимый $R_{Н(i,j)}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…

а) ранний срок начала работы (i, j): $t_{р.н.(i,j)} = t_{p(i)}$;

б) ранний срок окончания работы (i, j): $t_{р.о.(i,j)} = t_{р.н.(i,j)} + t_{ij}$;

в) поздний срок окончания работы (i, j): $t_{п.о.(i,j)} = t_{п.(j)}$;

г) поздний срок начала работы (i, j): $t_{п.н.(i,j)} = t_{п.о.(i,j)} - t_{ij}$;

д) полный резерв времени работы (i, j):

$$1.\ R_{n(i,j)} = t_{n.o.(i,j)} - t_{p.н.(ij)} - t_{i,j};$$

$$2.\ R_{n(i,j)} = t_{n.(j)} - t_{p.(i)} - t_{i,j};$$

$$3.\ R_{n(i,j)} = t_{n.o.(i,j)} - t_{p.o.(ij)};$$

е) свободный резерв времени работы (i, j):

$$1.\ R_{c.(i,j)} = t_{p.(j)} - t_{p.(i)} - t_{ij};$$

$$2.\ R_{c.(i,j)} = R_{n.(i,j)} - R_{(j)};$$

ж) независимый резерв времени работы (i, j):

$$1.\ R_{н.(i,j)} = t_{p.(j)} - t_{n(i)} - t_{ij};$$

$$2.\ R_{н.(i,j)} = R_{n(i,j)} - R_{(i)} - R_{(j)};$$

6) построить сетевой график в календарной шкале времени по ранним срокам начала и окончания работ (т.е. график Ганта), спроецировать на оси времени (ot) начало и окончание каждой работы, выделив промежутки;

7) построить эпюру интенсивности потребления ресурса (без учета ограничения), просуммировать в промежутках оси времени интенсивность потребления ресурсов.

Если для каждого промежутка суммарная интенсивность потребления ресурсов не превышает наличного количества ресурса, то распределение ресурсов считается удовлетворительным.

8) в противном случае оптимизировать использование ресурсов:

а) все работы, сумма интенсивности использования ресурсов которых не превышает запасов ресурса, оставляем в первоначальном положении;

б) если после прибавления интенсивности использования ресурса какой-нибудь работы окажется, что суммарное потребление ресурсов больше их запасов, то эту работу сдвигают вправо на величину рассматриваемого промежутка;

в) если суммарное потребление ресурсов больше их запасов, а необходимо выполнить несколько работ, то устанавливают очередность их выполнения:

1. В первую очередь выполняются работы, начатые в предыдущем промежутке;

2. Затем те работы, которые имеют наименьший полный резерв времени $R_{n(i,j)}$;

3. Если полные резервы времени для некоторых работ равны, то выполняют сначала ту работу, для которой характерна наименьшая интенсивность использования ресурсов;

4. Если интенсивность использования ресурсов равна, то работы из промежутка выбирают в произвольном порядке;

5. Включение новых работ для выполнения в конкретный промежуток происходит тогда, когда для этого имеются ресурсы, в противном случае работу или работы сдвигают вправо на промежуток;

9) с учетом вышеизложенных корректировок построить новый график Ганта и эпюру интенсивности потребления ресурса. Если интенсивность потребления ресурсов не превышает наличного количества ресурса, то задача решена. В противном случае оптимизацию графика повторяем с п. 8;

10) найти оптимальное решение задачи, проанализировать его.

Оптимизация проекта по времени (вариант 1).

Задача 2. Необходимо минимизировать величину дополнительных вложений в отдельные работы проекта, с тем чтобы общий срок его выполнения не превышал 20 + 0,5К дней.

Исходная информация.

1. На предприятии необходимо выполнить комплекс работ, последовательность которых изображена на сетевом графике (рис. 5).

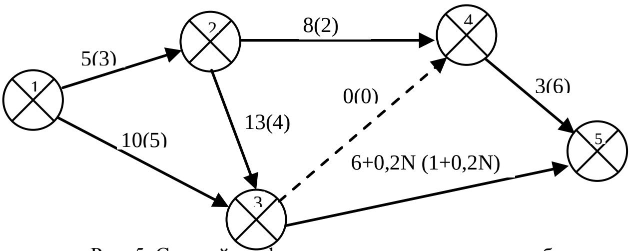


Рис. 5. Сетевой график выполнения комплекса работ.

2. Для каждой работы над дугами приведены продолжительность работ (t_{ij}) и в скобках минимально возможное время выполнения работы (d_{ij}).

3. Для каждой работы известны технологические коэффициенты использования дополнительных средств: $K_{12} = 0{,}4$; $K_{13} = 0{,}6$; $K_{23} = 0{,}2$; $K_{24} = 0{,}3$; $K_{35} = 0{,}1$; $K_{45} = 0{,}5$.

На основе приведенной информации необходимо:

1) на сетевом графике рассчитать временные характеристики событий согласно п. 1а, 2а, 3а;

2) ввести переменные задачи, обозначающие величину дополнительных вложений в работы, время начала и окончания работ;

3) составить развернутую экономико-математическую задачу, используя следующую структурную модель.

Требуется найти минимум суммарных затрат дополнительных вложений:

$$F_{\min} = \sum_{(i,j)\in\vec{e}} x_{ij}.$$

При условиях:

1. По времени начала работ проекта –

$$t_{1,j}^{H} = 0, (1, j) \in \vec{e};$$

2. По времени завершения проекта –

$$t_{n-1,n}^{0} \le t_0, (i, n) \in \vec{e};$$

3. По продолжительности работ –

$$t_{ij}^{0} - t_{ij}^{H} \ge d_{ij}, (i, j) \in \vec{e};$$

4. По сокращению времени продолжительности работ –

$$t_{ij}^{0} - t_{ij}^{H} = t_{ij} - k_{ij} x_{ij}, (i, j) \in \vec{e};$$

5. По последовательности выполнения работ –

$$t_{jr}^{H} \ge t_{ij}^{0}, i, j, r \in E;$$

6. Неотрицательность переменных –

$$t_{ij}^{H}, t_{ij}^{0}, x_{ij} \ge 0, (i, j) \in \vec{e}.$$

Индексация:

i – номер предыдущего события (начального события работы ij);

j – номер последующего события (конечного события работы ij);

r – номер промежуточного события работы;

n – номер завершающего события работы;

E – множество вершин орграфа;

$\vec{e}$ – множество дуг орграфа.

Неизвестные величины:

x_{ij} – величина дополнительных вложений в работу ij, позволяющая сократить время ее выполнения;

t_{ij}^{H} – время начала работы ij;

t_{ij}^{0} – время окончания работы ij.

Известные величины:

t_0 – срок выполнения проекта;

d_{ij} – минимально возможное время выполнения работы ij;

k_{ij} – технологический коэффициент использования дополнительных вложений в работу ij;

t_{ij} – продолжительность выполнения работы ij .

4) решить экономико-математическую задачу, используя пакеты прикладных программ на персональном компьютере;

5) найти оптимальное решение задачи, проанализировать его;

6) рассчитать временные характеристики оптимизированного сетевого графика;

7) определить эффект от оптимизации сетевого графика.

Оптимизация проекта по времени (вариант 2).

Задача 3. Необходимо минимизировать срок выполнения проекта за счет дополнительных вложений.

Исходная информация.

1. Сетевой график выполнения плановых работ на новый календарный год имеет следующий вид (рис. 6).

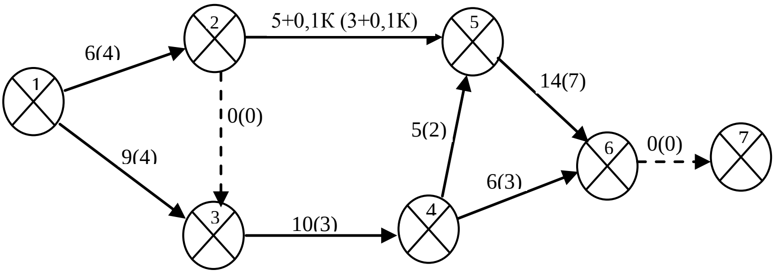


Рис. 6. Сетевой график выполнения плановых работ.

2. Для каждой работы над дугами приведены продолжительность работ (t_{ij}) и в скобках минимально возможное время выполнения работы (d_{ij}) .

3. Для каждой работы известны технологические коэффициенты использования дополнительных средств: $K_{12} = 0{,}3$; $K_{13} = 0{,}9$; $K_{25} = 0{,}1$; $K_{34} = 0{,}4$; $K_{45} = 0{,}2$; $K_{46} = 0{,}7$; $K_{56} = 0{,}8$.

4. Для сокращения продолжительности работ выделены дополнительные средства в размере 35 + 0,2N у.д.е.

На основе приведенной информации необходимо:

1) на сетевом графике рассчитать временные характеристики событий согласно п. 1а, 2а, 3а;

2) ввести переменные, обозначающие неизвестные величины задачи, согласно условным обозначениям вышеизложенной задачи 2;

3) составить развернутую экономико-математическую задачу, используя следующую структурную модель.

Требуется найти минимальный срок выполнения проекта:

$$F_{\min} = \underset{(i,n)\in\vec{e}}{t^{0}_{n-1,n}}.$$

При условиях:

1. По использованию дополнительных вложений – $\sum\limits_{(i,j)\in\vec{e}} x_{ij} \le B$;

2. По времени начала работ проекта – $t^{H}_{1,j} = 0, (1, j) \in \vec{e}$;

3. По продолжительности работ – $t^{0}_{ij} - t^{H}_{ij} \ge d_{ij}, (i, j) \in \vec{e}$;

4. По сокращению времени продолжительности работ –
$$t^{0}_{ij} - t^{H}_{ij} = t_{ij} - k_{ij} x_{ij}, (i, j) \in \vec{e};$$

5. По последовательности выполнения работ – $t^{H}_{jr} \ge t^{0}_{ij}, i, j, r \in E$;

6. Неотрицательность переменных –
$$t^{H}_{ij}, t^{0}_{ij}, x_{ij} \ge 0, (i, j) \in \vec{e}.$$

Условные обозначения те же, как и для вышеизложенной модели задачи 2.

В известные величины добавляют: B – количество дополнительных вложений, выделяемых для сокращения продолжительности работ;

4) решить экономико-математическую задачу на персональном компьютере;

5) найти оптимальное решение задачи, проанализировать его;

6) рассчитать временные характеристики оптимизированного сетевого графика;

7) определить эффект от оптимизации сетевого графика.

Оптимизация проекта по стоимости.

Задача 4. Необходимо минимизировать стоимость проектных работ при условии выполнения проекта не более чем за 25 + 0,2N дней.

Исходная информация.

1. Сетевой график выполнения работ проекта имеет следующий вид (рис. 7).

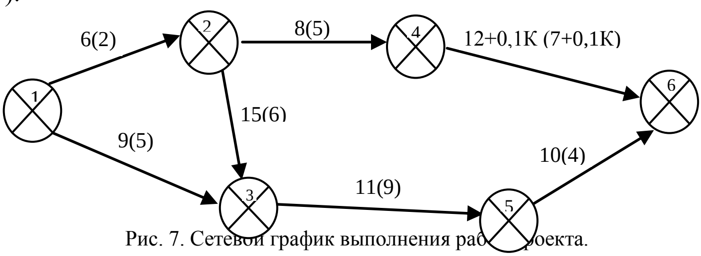


Рис. 7. Сетевой график выполнения работ проекта.

2. Для каждой работы над дугами приведены нормальная (t_{ij}) (или

наибольшая) продолжительность работ D_{ij} и в скобках минимальная продолжительность работ d_{ij} (т.е. срочный режим выполнения работ).

3. Затраты на выполнение отдельных работ находятся в обратной зависимости от продолжительности их выполнения. Так, срочному режиму выполнения работ (d_{ij}) соответствуют наибольшие затраты средств C_{ij}, а наибольшей продолжительности работ (D_{ij}) – наименьшие затраты средств c_{ij} (табл. 5.2).

Т а б л и ц а 5.2. **Параметры сетевого графика**

Параметры	Работы						
	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 5)	(4, 6)	(5, 6)
d_{ij} – срочный режим выполнения работы ij	2	5	6	5	9	7+0,1K	4
C_{ij} – наибольшие затраты средств на выполнение работы ij	60	40	90	60	40	80 + 0,2N	70
D_{ij} – наибольшая продолжительность выполнения работы ij	6	9	15	8	11	12 + 0,1K	10
c_{ij} – наименьшие затраты средств на выполнение работы ij	20	15	30	35	25	50 + 0,2N	40
h_{ij} – коэффициент дополнительных затрат							

На основе приведенной информации необходимо:

1) на сетевом графике рассчитать временные характеристики событий согласно п. 1а, 2а, 3а;

2) рассчитать коэффициент дополнительных затрат для каждой работы, который показывает, на сколько увеличится стоимость работы (i, j) при уменьшении ее продолжительности на единицу времени:

$$h_{ij} = \frac{C_{ij} - c_{ij}}{D_{ij} - d_{ij}};$$

3) рассчитать минимальную и максимальную стоимость проекта:

$$F_{\min} = \sum_{(i,j)\in\vec{e}} c_{ij},$$

$$F_{\max} = \sum_{(i,j)\in\vec{e}} C_{ij};$$

4) ввести переменные, обозначающие неизвестные величины задачи;

5) составить развернутую экономико-математическую задачу, используя следующую структурную модель.

Требуется найти минимальную стоимость проекта:

$$F_{\min} = \sum_{(i,j)\in\vec{e}} [C_{ij} - h_{ij}(t_{ij}^{0} - t_{ij}^{H} - d_{ij})].$$

При условиях:

1. По времени начала работ проекта – $t_{1,j}^{H} = 0, (1, j) \in \vec{e}$;

2. По времени завершения проекта – $t_{n-1,n}^{0} \le t_0, (i, n) \in \vec{e}$;

3. По предельной продолжительности работ – $d_{ij} \le t_{ij}^{0} - t_{ij}^{H} \le D_{ij}, (i, j) \in \vec{e}$;

4. По последовательности выполнения работ – $t_{jr}^{H} \ge t_{ij}^{0}, i, j, r \in E$;

5. Неотрицательность переменных – $t_{ij}^{H}, t_{ij}^{0} \ge 0, (i, j) \in \vec{e}$.

Индексация:

i – номер предыдущего события (начального события работы ij);

j – номер последующего события (конечного события работы ij);

r – номер промежуточного события работы;

n – номер завершающего события работы;

E – множество вершин орграфа;

$\vec{e}$ – множество дуг орграфа.

Неизвестные величины:

t_{ij}^{H} – время начала работы ij;

t_{ij}^{0} – время окончания работы ij.

Известные величины:

t_0 – срок выполнения проекта;

d_{ij} – минимально возможное время выполнения работы ij;

C_{ij} – наибольшие затраты средств на выполнение работы ij;

h_{ij} – коэффициент дополнительных затрат, показывающий увеличение стоимости работы ij при уменьшении ее продолжительности на единицу времени;

D_{ij} – наибольшая продолжительность выполнения работы ij.

6) решить экономико-математическую задачу, используя пакеты прикладных программ на персональном компьютере;

7) найти оптимальное решение задачи, проанализировать его;

8) рассчитать временные характеристики оптимизированного сетевого графика;

9) определить эффект от оптимизации сетевого графика.

Т е м а 6. ИГРОВЫЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Статистическая игра.

Задача 1. Требуется обосновать оптимальную политику продаж предприятия, т.е. стратегию продаж изделий (C_1, C_2, C_3, H_1, H_2, H_3).

Исходная информация.

Предприятие планирует продажу старых товаров (C_1, C_2, C_3) при наличии новых (H_1, H_2, H_3). Выигрыш от продажи товаров (a_{ij}) и условные вероятности продажи (p_{ij}) приведены в табл. 6.1.

Т а б л и ц а 6.1. **Прибыль предприятия в расчете на единицу товара, у.д.е.**

Старые товары	Новые товары		
	H_1(p)	H_2(p)	H_3(p)
C_1	7 (0,6)	4 (0,3)	2 (0,1)
C_2	6 (0,3)	1 + 0,1N (0,1)	5 (0,6)
C_3	3 (0,2)	3 + 0,1K (0,3)	6 (0,5)

Задача 2. Требуется определить наиболее целесообразные варианты технологической переработки сырья овощеконсервного завода.

Исходная информация.

Коммерческая служба предприятия может принять одно из четырех технологических способов переработки (A_1, A_2, A_3, A_4) при возможных состояния среды: $П_1$ – сырье поступает первого сорта при первом состоянии рынка сбыта; $П_2$ – сырье поступает первого сорта при втором состоянии рынка сбыта; $П_3$ – сырье поступает второго сорта при первом состоянии рынка сбыта; $П_4$ – сырье поступает второго сорта при втором состоянии рынка сбыта (для критерия Гурвица $\lambda = 0{,}7$).

Т а б л и ц а 6.2. **Прибыль от реализации консервов, у.д.е.**

Технологические способы переработки	Ежедневный сбыт консервов ($П_j$)			
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	520	440	280	200
A_2	400	320	560	480
A_3	480	400	400	320
A_4	520	440	360	280

Задача 3. Требуется обосновать оптимальную стратегию выпуска новых видов продукции для молокозавода

Исходная информация.

На молокозаводе готовятся к переходу на выпуск новых видов продукции для освоения новых рынков сбыта. При этом возможны четыре решения (A_1, A_2, A_3, A_4), каждому их которых соответствует определенная модификация выпускаемой продукции. Результаты принятых решений существенно зависят от обстановки (степени обеспеченности производства материальными ресурсами), которая может быть трех видов: $П_1$, $П_2$, $П_3$. Каждому сочетанию решений A_i и обстановки $П_j$ соответствует определенный выигрыш в виде дохода от продажи новых видов продукции (табл. 6.3).

Т а б л и ц а 6.3. **Платежная матрица дохода от сбыта продукции, тыс. у. д. е.**

A_i	$П_j$		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	4,8	0,6	2,1
A_2	4,2	1,2	1,8
A_3	1,5	2,1	2,4
A_4	2,1	4,1	1,2

Задача 3. Необходимо выбрать оптимальную стратегию продажи товаров для агроторговой фирмы**.**

Исходная информация.

Фирма планирует реализацию овощной продукции в зимний сезон, учитывая возможные варианты покупательского спроса $П_j$ (низкий, средний, высокий, очень высокий). Служба маркетинга разрабатывает три варианта стратегий сбыта товаров на различных рынках A_i. Объем товарооборота, зависящий от стратегий и покупательского спроса, представлен в табл. 6.4. (для критерия Гурвица $\lambda = 0{,}7$).

Т а б л и ц а 6.4 **Платежная матрица товарооборота, тыс. у. д. е.**

A_i	$П_j$		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	8,12	6,42	8,28
A_2	8,26	7,86	8,16
A_3	7,08	8,04	8,35

Задача 4. Требуется обосновать вариант модификации производства товара, величина предложения которого обеспечивает предприятию среднюю прибыль при любом уровне спроса.

Исходная информация.

Предприятие планирует производство нового товара в трех модификациях (T_1, T_2, T_3). Производство каждой модификации товара требует различного уровня затрат. Спрос на новый товар не может быть точно определен. Планируется, что его величина будет характеризоваться тремя возможными состояниями (C_1, C_2, C_3). Данные о прибыли, которую получит предприятие при различном уровне затрат на производство и разном состоянии спроса, приведены в табл. 20.

Т а б л и ц а 6.5. **Прибыль предприятия в расчете на единицу товара, у.д.е.**

Модификация товара	Состояние спроса		
	C_1	C_2	C_3
T_1	2,2	2,3	2,2 + 0,1N
T_2	2,1	2,4 - 0,1K	2,3
T_3	2,0 + 0,1K	2,2	2,5

Используя приведенную информацию, необходимо:

1. Используя критерии Байеса и Лапласа, определить, производство или продажа какого товара или товаров обеспечивает предприятию наибольшую прибыль;

2. Используя критерий Вальда, определить, производство или продажа какого товара гарантирует предприятию наилучшие результаты в наихудших условиях;

3. Определить оптимальную стратегию предприятия по критерию Сэвиджа. Для этого необходимо следующее:

а) построить матрицу риска (определить значение коэффициентов риска r_{ij}):

$$r_{ij} = \max a_{ij} - a_{ij} \text{ по каждому столбцу } j,$$

где i – номер строки;

j – номер столбца;

a_{ij} – элемент матрицы а, стоящий в i-й строке j-го столбца;

$\max a_{ij}$ – максимальный элемент a_{ij} в каждом столбце;

б) определить максимальное значение коэффициентов риска по каждой строке, т.е. $\max\limits_{j} r_{ij}$;

в) найти минимальное значение коэффициентов риска по столбцу, полученному выше, т.е. $\min\limits_{i}(\max\limits_{j} r_{ij})$.

В результате определим стратегию предприятия, характеризующуюся наименьшим максимальным риском;

4. Определить по критерию Гурвица оптимальную стратегию пред-

приятия, которая выбирается по формуле

$$\max[\lambda \min a_{ij} + (1-\lambda)\max a_{ij}],$$

где $0 \le \lambda \le 1$;

5. Обосновать, используя различные критерии, производство или продажа какого товара (товаров) более выгодно предприятию при любом уровне спроса.

Матричные игры в чистых стратегиях.

Задача 5. Требуется обосновать, производство каких товаров обеспечивает предприятию наибольшую прибыль при любом уровне спроса.

Исходная информация.

Предприятие планирует производство шести товаров ($T_1 \ldots T_6$) с неопределенным спросом, предполагаемый уровень которого характеризуется тремя состояниями (C_1, C_2, C_3). Данные о прибыли, которую получит предприятие при различном уровне затрат на производство и разном состоянии спроса (коэффициенты платежей матрицы a_{ij}), приведены в табл. 6.6.

Т а б л и ц а 6.6. **Прибыль предприятия в расчете на единицу товара, у.д.е.**

Товар	Состояние спроса		
	C_1	C_2	C_3
T_1	4	3	5
T_2	6	1 + 0,2К	4
T_3	3	2	7
T_4	8	3	1 + 0,1N
T_5	3	2	5
T_6	7	1 + 0,1К	6

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) найти нижнюю чистую цену игры (максимин) $-\alpha$:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij},$$

т.е. сначала найти минимально возможный выигрыш a_i (минимальное значение): $\alpha_i = \min_j a_{ij}\ (i = \overline{1, m})$, а затем из всех α_i выбрать наибольшее значение a: $a = \max_i a_i$ и определить соответствующую ему чистую стратегию T_i^0;

2) найти верхнюю чистую цену игры (минимакс) – β:

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij},$$

т.е. сначала найти минимально возможный выигрыш β_j (максимальное значение): $\beta_j = \max_i a_{ij}\ (j = \overline{1,n})$, а затем из всех β_j выбрать минимальное значение β: $\beta = \min_j \beta_j$ и определить соответствующую ему чистую стратегию C_j^0;

3) найти чистую цену игры.

Если в матричной игре нижняя и верхняя чистые цены совпадают $(\alpha = \beta)$, то игра имеет седловую точку в чистых стратегиях и чистую цену игры:

$$\nu = \alpha = \beta;$$

$$\nu = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij};$$

4) найти оптимальное решение игры $\{A_{i*}, B_{j*}, a_{i*j*}\}$ и обосновать, производство какого товара более выгодно предприятию,
где A_{i*} – оптимальная чистая стратегия игрока А;

B_{j*} – оптимальная чистая стратегия игрока В;

a_{i*j*} – седловой элемент платежной матрицы, стоящей в строке i^* и столбце j^*.

П р и м е ч а н и е 1. Седловой элемент a_{i*j*} является наименьшим в строке i^* и наибольшим в столбце j^*.

Матричные игры в смешанных стратегиях.

Задача 6. Требуется обосновать ассортиментный набор товарной группы, который целесообразно завезти в магазин с целью максимизации результатов его работы.

Исходная информация.

На оптовой базе имеется ассортиментный набор товарной группы, товары которого могут быть завезены в магазин. Если товар будет пользоваться спросом, то от его реализации магазин получит прибыль p_j, в противном случае магазин понесет издержки, связанные с хранением, порчей товара, т.е. получит убыток c_j (табл. 6.7).

Т а б л и ц а 6.7. **Результаты сбыта единицы товара**

Показатели	Товар					
	1	2	3	4	5	6
Доход от сбыта, у.д.е.	30 + 0,5К	28	32	29	31	30
Издержки, у.д.е.	14 + 0,5К	2	8	4	6	16

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) составить платежную матрицу согласно информации табл. 6.7;
2) найти нижнюю чистую цену игры (максимин) – α;
3) найти верхнюю чистую цену игры (минимакс) – β.

Т а б л и ц а 6.8. **Информация платежной матрицы**

Товар	Состояние спроса					
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
T_1	P_1	$-C_1$	$-C_1$	$-C_1$	$-C_1$	$-C_1$
T_2	$-C_2$	P_2	$-C_2$	$-C_2$	$-C_2$	$-C_2$
T_3	$-C_3$	$-C_3$	P_3	$-C_3$	$-C_3$	$-C_3$
T_4	$-C_4$	$-C_4$	$-C_4$	P_4	$-C_4$	$-C_4$
T_5	$-C_5$	$-C_5$	$-C_5$	$-C_5$	P_5	$-C_5$
T_6	$-C_6$	$-C_6$	$-C_6$	$-C_6$	$-C_6$	P_6

4) найти седловую точку игры $(\alpha = \beta)$. Если $\alpha \neq \beta$, то матричная игра должна быть решена в смешанных стратегиях. При этом нижней ценой игры будет число α, а верхней – число β:

$$\alpha = \max_{\bar{p}} \min_{\bar{g}} f(\bar{p}, \bar{g});$$

$$\beta = \min_{\bar{g}} \max_{\bar{p}} f(\bar{p}, \bar{g}).$$

Цена игры (ν) равна:

а) $\nu = \alpha = \beta$;

б) $\nu = f(\bar{p}^*, \bar{g}^*)$;

в) $\nu = \max_{\bar{p}} \min_{\bar{g}} f(\bar{p}^*, \bar{g}^*) = \min_{\bar{g}} \max_{\bar{p}} f(\bar{p}^*, \bar{g}^*)$,

где $\bar{p}$ – смешанная стратегия игрока А;

$$\bar{p} = (p_1, p_2 ... p_m),\ p_i \geq 0\ (i = \overline{1, m}), \sum_{i=1}^{m} p_i = 1;$$

$\bar{g}$ – смешанная стратегия игрока В;

$$\bar{g} = (g_1, g_2 ... g_n),\ g_j \geq 0\ (j = \overline{1, n}), \sum_{i=1}^{n} g_j = 1;$$

$\bar{p}^*, \bar{g}^*$ – соответственно оптимальная смешанная стратегия игрока А и В.

5) свести решение матричной игры в смешанных стратегиях к решению двух взаимно симметричных двойственных задач линейного программирования;

П р и м е ч а н и е 2. Если среди элементов платежной матрицы имеются отрицательные элементы, то их необходимо преобразовать в положительные путем прибавления к каждому элементу платежной матрицы постоянной величины С, значение которой больше максимального по модулю отрицательного элемента платежной матрицы. В противном случае цена игры может быть числом отрицательным.

6) ввести переменные, обозначающие неизвестные величины двойственных задач;

7) составить развернутые экономико-математические задачи, используя следующие структурные модели.

а) задача линейного программирования для игрока А(Т):

требуется найти $F_{\min} = \sum_{i=1}^{m} x_i$.

При условиях:

1. $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1,\ j = \overline{1, n}$;

2. $x_i \geq 0, i = \overline{1, m}$.

Индексация:

i – номер строки;

j – номер столбца.

Неизвестные величины:

$x_i = \dfrac{p_i}{\nu}$;

ν – цена игры;

p_i – вероятности, с которыми игрок А использует в ходе игры свои чистые стратегии.

Известные величины:

a_{ij} – коэффициент a платежной матрицы, стоящий в строке i в столбце j.

б) задача линейного программирования для игрока В(С):

требуется найти $F_{\max} = \sum_{j=1}^{n} y_j$.

При условиях:

1. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq 1, i = \overline{1, m}$;

2. $y_j \geq 0,\ j = \overline{1, n}$.

Индексация:

i – номер строки;

j – номер столбца.

Неизвестные величины:

$y_j = \frac{g_j}{\nu}$;

ν – цена игры;

g_j – вероятности, с которыми игрок В использует в ходе игры свои чистые стратегии.

Известные величины:

a_{ij} – коэффициент a платежной матрицы, стоящий в строке i в столбце j;

8) решить экономико-математическую задачу, используя пакеты прикладных программ на персональном компьютере;

9) найти оптимальное решение задач, проанализировать его;

10) преобразовать результаты решения экономико-математических задач в решение матричной игры:

для игрока А	для игрока В
$\nu = \frac{1}{F_{\min}}$;	$\nu = \frac{1}{F_{\max}}$;
$p_i^* = \nu x_i^*, (i = \overline{1,m})$;	$g_j^* = \nu y_j^*, (j = \overline{1,n})$;

11) найти оптимальное решение игры $\{\overline{p}^*, \overline{g}^*, \nu\}$;

12) обосновать, сбыт каких товаров в ассортименте наиболее выгоден коллективу магазина.

Т е м а 7. МОДЕЛИ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Одноканальная система массового обслуживания с отказами.

Задача 1. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

На телефонную линию филиала банка поступает простейший поток вызовов клиентов с интенсивностью $\lambda = 0{,}9 + 0{,}2K$ вызовов в минуту. Средняя продолжительность обслуживания $\bar{t}_{об.} = 1{,}25 + 0{,}1N$ минут. Вызов – звонок, поступивший в момент, когда телефонная линия занята – получает отказ в обслуживании. Поток вызовов и поток обслуживания являются простейшими.

Задача 2. Требуется проанализировать работу информационной службы.

Исходная информация.

Информационная служба агрофирмы дает справки по телефонной линии о наличии продукции. В среднем за одну минуту происходит 3 запроса, а средняя продолжительность одного разговора составляет 0,25+0,1N минуты. Определить важнейшие характеристики СМО, считая все потоки простейшими. Сравнить фактическую пропускную способность СМО с номинальной, т. е. с пропускной способностью, которой обладала бы система в том случае, если бы каждый запрос обслуживался ровно 0,25+0,1N минуты и все запросы следовали бы один за другим без перерыва.

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) определить μ – интенсивность потока обслуживания: $\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об.}}$;

2) вычислить g – относительную пропускную способность:

$$g = \frac{\mu}{\lambda + \mu};$$

3) найти А – абсолютную пропускную способность: $A = \lambda \cdot g$;

4) определить $p_{отк.}$ – вероятность отказа: $p_{отк.} = 1 - g$;

5) вычислить $A_{ном}$ – номинальную пропускную способность системы: $A_{ном} = \frac{1}{\bar{t}_{об.}}$;

6) определить $\bar{t}_{пр}$ – среднее время простоя канала: $\bar{t}_{пр} = \frac{1}{\lambda}$;

7) вычислить p_0 – вероятность того, что канал свободен:

$$p_0 = \frac{\bar{t}_{пр}}{\bar{t}_{об} + \bar{t}_{пр}};$$

8) вычислить p_1 – вероятность того, что канал занят:

$a) p_1 = 1 - p_0;$

$б) p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu};$

9) проанализировать работу телефонной линии филиала банка (сравнить фактическую пропускную способность системы массового обслуживания с номинальной пропускной способностью; сравнить вероятности того, что телефонная линия занята и свободна; сравнить среднее время обслуживания и среднее время простоя канала).

Одноканальная система массового обслуживания с ожиданием.

Задача 3. Требуется определить вероятностные характеристики системы массового обслуживания.

Исходная информация.

На пост диагностики поступают автомобили, поток которых распределен по закону Пуассона и имеет интенсивность $\lambda = 0{,}9 - 0{,}1K$ (автомобилей в час). Время диагностики автомобиля распределено по показательному закону и в среднем равно 1,1 + 0,1N часа $(\bar{t}_{об})$. Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведения диагностики, ограничено и равно трем $(m = 3)$. Если все стоянки заняты, т.е. в очереди стоят три автомобиля, то очередной автомобиль, прибывший на диагностику, в очередь на обслуживание не становится.

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) определить μ – интенсивность потока обслуживания: $\mu = \dfrac{1}{\bar{t}_{об}}$;

2) рассчитать p – относительную нагрузку на систему: $p = \dfrac{\lambda}{\mu}$;

3) вычислить $p_0, p_к$ – предельные вероятности системы:

а) вероятность свободного состояния (p_0):

$$p_0 = \begin{cases} \dfrac{1-p}{1-p^{m+2}}, & \text{если p} \neq 1; \\ \dfrac{1}{m+2}, & \text{если p} = 1; \end{cases}$$

б) $p_k = p^k \cdot p_0; k = 1,\ldots, m+1,$

где k – состояние системы;

m – максимальное число мест в очереди;

4) определить $p_{отк}$ – вероятность отказа в обслуживании автомобиля: $p_{отк} = p^{m+1} \cdot p_0$;

5) рассчитать g – относительную пропускную способность поста диагностики: $g = 1 - p_{отк}$;

6) вычислить А – абсолютную пропускную способность системы:

$$A = \lambda \cdot g;$$

7) определить $\overline{N}$ – среднее число автомобилей, находящихся в системе (т.е. на обслуживании и в очереди):

$$\overline{N}_{сис} = \begin{cases} \dfrac{p\left[1-(m+2)p^{m+2}+(m+1)p^{m+2}\right]}{(1-p)(1-p^{m+2})}, & \text{если р} \neq 1; \\ \dfrac{m+1}{2}, & \text{если р} = 1; \end{cases}$$

8) рассчитать $\overline{T}_{сис}$ – среднее время пребывания автомобиля в системе: $\overline{T}_{сис} = \dfrac{\overline{N}_{сис}}{\lambda(1-p_{m+1})}$;

9) вычислить $\overline{T}_{оч}$ – среднюю продолжительность пребывания заявки в очереди на обслуживание: $\overline{T}_{оч} = \overline{T}_{сис} - \dfrac{1}{\mu}$;

10) определить $\overline{N}_{оч}$ – среднее число заявок в очереди (длину очереди): $\overline{N}_{оч} = \lambda \cdot (1-p_{m+1}) \cdot \overline{T}_{оч}$;

11) используя рассчитанные характеристики, проанализировать работу поста диагностики автомобилей.

Одноканальная система массового обслуживания с ожиданием без ограничения.

Задача 4. Требуется определить вероятностные характеристики системы массового обслуживания.

Исходная информация.

На разгрузку на перерабатывающее предприятие поступают автомобили с сырьем. Поток прибывающих автомобилей распределен по закону Пуассона и имеет интенсивность $\lambda = 0{,}8 + 0{,}05N$ (автомобилей в час). Время разгрузки автомобиля распределено по показательному закону и в среднем равно 1,05 + 0,1К часа ($\bar{t}_{об}$). Количество площадок для стоянки прибывающих на обслуживание автомобилей, т.е. длина очереди не ограничена.

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) определить μ – интенсивность потока обслуживания: $\mu = \dfrac{1}{\bar{t}_{об}}$;

2) определить p – относительную нагрузку на систему: $p = \dfrac{\lambda}{\mu}$;

3) вычислить $p_0, p_к$ – предельные вероятности системы:

$$p_0 = 1 - p;$$

$$p_к = (1-p) \cdot p^к; к = 1, ..., m+1;$$

4) определить $\overline{N}$ – среднее число автомобилей, находящихся в системе (т.е. на обслуживании и в очереди): $\overline{N}_{сис} = \dfrac{p}{1-p}$;

5) рассчитать $\overline{T}_{сис}$ – среднее время прибывания автомобиля в системе:

$$а)\ \overline{T}_{сис} = \frac{\overline{N}_{сис}}{\lambda};\quad б)\ \overline{T}_{сис} = \frac{1}{\mu \cdot (1-p)};$$

6) вычислить $\overline{N}_{оч}$ – число автомобилей в очереди на обслуживание:

$$а)\ \overline{N}_{оч} = \overline{N}_{сис} - \frac{\lambda}{\mu};\quad б)\ \overline{N}_{оч} = \frac{p^2}{(1-p)};$$

7) определить $\overline{T}_{оч}$ – среднюю продолжительность пребывания автомобиля в очереди (среднее время ожидания заявки в очереди):

$$а)\ \overline{T}_{оч} = \frac{p}{\mu(1-p)};\quad б)\ \overline{T}_{оч} = \frac{\overline{N}_{оч}}{\lambda};$$

8) рассчитать А – абсолютную пропускную способность: $A = \lambda \cdot g$, где g – относительная пропускная способность системы, $g = 1$, так как каждая заявка, пришедшая в систему, будет обслужена;

9) используя рассчитанные характеристики, проанализировать работу пункта разгрузки сырья перерабатывающего предприятия.

Многоканальная система массового обслуживания с отказами.

Задача 5. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

В компьютерный класс кафедры с выделенными для этих целей тремя (n=3) персональными компьютерами поступают заказы от студентов на вычислительные работы. Поток задач, поступающих в компьютерный класс, имеет интенсивность $\lambda = 0{,}7 + 0{,}2K$ задач в час. Средняя продолжительность обслуживания $\bar{t}_{об} = 1{,}8 + 0{,}1N$ часа. Если работают все три персональных компьютера, то вновь поступающий заказ не принимается, и студент вынужден обратиться в компьютерный класс другой кафедры. Поток заявок на решение задач и потом обслуживание этих заявок являются простейшими.

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) определить μ – интенсивность потока обслуживания: $\mu = \dfrac{1}{\bar{t}_{об}}$;

2) рассчитать p – относительную нагрузку на систему: $p = \dfrac{\lambda}{\mu}$;

3) найти $p_0, p_к$ – предельные вероятности состояния системы, используя формулы Эрланга: $p_0 = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n} \dfrac{p^k}{k!}}; k = 0,1,..., n;$

$$p_k = \frac{p^k}{k!} \cdot p_0; k = 1,..., n;$$

4) определить $p_{отк}$ – вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$p_{отк} = p_n;$$

5) вычислить g – относительную пропускную способность системы:

$$g = 1 - p_{отк};$$

6) определить A – абсолютную пропускную способность системы:

$$A = \lambda g \ ;$$

7) найти $\bar{k}$ – среднее число занятых каналов (компьютеров):

$$\bar{k} = p(1 - p_{отк});$$

8) используя рассчитанные характеристики, проанализировать работу системы массового обслуживания;

9) определить оптимальное количество персональных компьютеров в классе, используемых для решения задач студентов, в целях сокращения числа необслуженных заявок, поступающих в компьютерный класс, в 10 раз. Для этого используем формулу $p_{отк}$ – определения вероятности отказа в обслуживании заявки: $p_{отк} = \dfrac{p^n}{n!} p_0$.

Расчеты заносим в табл. 7.1.

Таблица 7.1. **Некоторые характеристики системы**

Показатели	Каналы обслуживания			
n – количество каналов обслуживания	1	2	…	n
p_0 – вероятность свободного состояния системы				
$p_{отк}$ – вероятность отказа в обслуживании заявки				

Многоканальная система массового обслуживания с ожиданием.

Задача 6. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

Ремонтная мастерская сельскохозяйственного предприятия с тремя рабочими (каналами (n)) выполняет ремонт сельхозмашин. Поток (пуассоновский) неисправных сельхозмашин, прибывающих в мастерскую, имеет интенсивность $\lambda = 3 - 0{,}1N$ сельхозмашины в сутки. Среднее время ремонта одной сельхозмашины распределено по показательному закону и равно $\bar{t}_{об} = 0{,}5$ суток. Так как в сельскохозяйственном предприятии одна ремонтная мастерская, то очередь растет неограниченно.

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) определить μ – интенсивность потока обслуживания: $\mu = \dfrac{1}{\bar{t}_{об}}$;

2) рассчитать p – относительную нагрузку на систему: $p = \dfrac{\lambda}{\mu}$;

3) найти $p_0, p_к$ – предельные вероятности состояния системы:

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{p^k}{k!} + \dfrac{p^n}{n!(1 - \dfrac{p}{n})}};$$

$$p_k = \frac{p^k}{k!} p_0; k = 1, ..., n;$$

4) определить $p_{от.о}$ – вероятность отсутствия очереди у мастерской:

$$p_{от.о} = \sum_{k=0}^{n} p_к;$$

5) рассчитать $\bar{N}_{оч}$ – среднее число заявок в очереди на обслуживание: $\bar{N}_{оч} = \left(\dfrac{np}{(n-p)^2} \right) p_n$;

6) вычислить $\bar{N}_{сис}$ – среднее число находящихся в системе заявок:

$$\bar{N}_{сис} = \bar{N}_{оч} + p;$$

7) найти $\bar{T}_{оч}$ – среднее время пребывания сельхозмашины в очереди на обслуживание: $\bar{T}_{оч} = \dfrac{\bar{N}_{оч}}{\lambda}$;

8) определить $\bar{T}_{сис}$ – среднее время пребывания сельхозмашины в

системе (в мастерской): $\overline{T}_{сис} = \dfrac{\overline{T}_{оч}}{\mu}$;

9) используя рассчитанные характеристики, проанализировать работу ремонтной мастерской сельскохозяйственного предприятия.

Замкнутая система массового обслуживания.

Задача 6. Требуется выбрать оптимальный вариант организации замкнутой системы массового обслуживания.

Исходная информация.

На кафедре для обслуживания двенадцати персональных компьютеров выделены два инженера с одинаковой работоспособностью. Поток отказов (неисправностей) одного компьютера – пуассоновский с интенсивностью $\lambda = 0{,}2 + 0{,}05K$. Время обслуживания компьютера подчиняется показательному закону. Среднее время обслуживания одного компьютера одним инженером составляет: $\bar{t}_{об} = 1{,}30 - 0{,}02N$.

Рассматриваются два варианта организации обслуживания персональных компьютеров:

а) создать один компьютерный класс, тогда при отказе компьютера его будет обслуживать один из свободных инженеров $(n = 2; N = 12)$;

б) создать два компьютерных класса по 6 компьютеров в каждом $(n = 1; N = 6)$.

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) определить μ – интенсивность потока обслуживания: $\mu = \dfrac{1}{\bar{t}_{об}}$;

2) рассчитать p – относительную нагрузку на систему: $p = \dfrac{\lambda}{\mu}$;

3) найти $p_0, p_к$ – предельные вероятности состояния системы для двух вариантов ее организации:

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{N!\, p^k p_0}{k!\,(N-k)!}, 1 \le k < n; \\ \dfrac{N!\, p^k p_0}{n^{k-n} n!\,(N-k)!}, n \le k \le N, \end{cases}$$

где N – число источников заявок.

Так как $\sum_{k=0}^{N} p_k = 1$, то найти p_0;

4) определить $\overline{N}_{оч}$ – среднее число компьютеров в очереди на об-

служивание (для двух вариантов организации системы):

$$\overline{N}_{оч} = \sum_{k=n}^{N} (k-n) p_k ;$$

5) определить $\overline{N}_{сис}$ – среднее число компьютеров в системе (на обслуживании и в очереди) для двух вариантов ее организации:

$$\overline{N}_{сис} = \sum_{k=1}^{N} k p_k ;$$

6) рассчитать $\overline{N}_{пр}$ – среднее число инженеров, простаивающих из-за отсутствия работы (для двух вариантов): $\overline{N}_{пр} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) p_k ;$

7) определить a_1 – коэффициент простоя персонального компьютера в очереди (для двух вариантов): $a_1 = \dfrac{\overline{N}_{оч}}{N} ;$

8) определить a_2 – коэффициент использования компьютеров (для двух вариантов): $a_2 = 1 - \dfrac{\overline{N}_{сис}}{N} ;$

9) определить a_3 – коэффициент простоя обслуживающих инженеров (для двух вариантов): $a_3 = \dfrac{\overline{N}_{пр}}{N} ;$

10) рассчитать $\overline{T}_{ож}$ – среднее время ожидания обслуживания компьютера (для двух вариантов): $\overline{T}_{ож} = \dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{1-a_2}{a_2}\right) - \dfrac{1}{\mu} ;$

11) расчеты занести в табл. 7.2, проанализировать ее и найти оптимальное решение задачи.

Таблица 7.2. **Некоторые вероятностные характеристики системы**

Вероятностные характеристики	Варианты организации системы	
	1	2
a_1 – коэффициент простоя компьютера в очереди		
a_2 – коэффициент использования компьютеров		
a_3 – коэффициент простоя обслуживающих инженеров		
$\overline{T}_{ож}$ – среднее время ожидания обслуживания компьютера		

Т е м а 8. МОДЕЛИ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Модель оптимального размера партии поставки (запуска продукции в производство) (рис. 8, 9).

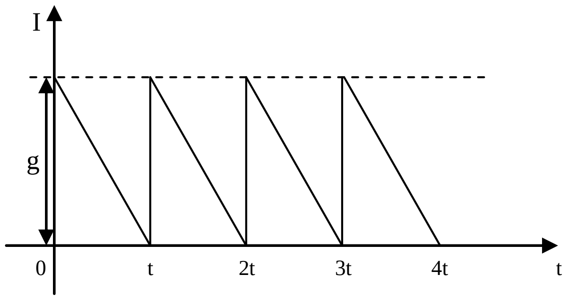


Рис. 8. Динамика изменения уровня запасов в модели Уилсона.

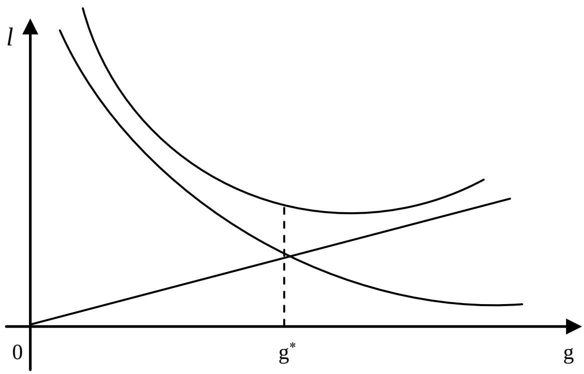


Рис. 9. Зависимость издержек содержания запасов, стоимости заказа от размера партии поставок.

Задача 1. Требуется определить оптимальную партию запуска продукции, периодичность и среднегодовые издержки работы системы.

Исходная информация.

Перерабатывающее предприятие выпускает различные виды макаронных изделий партиями на одном и том же оборудовании. При переходе от одного вида макаронных изделий к другому предприятие несет затраты от переналадок оборудования, которые в среднем равны $K = 200 + 2N$ у.д.е. Средняя потребность в макаронных изделиях каждого вида $\nu = 2500 + 5N$ т в год, стоимость 1 т $\alpha = 500 + 5K$ у.д.е. Издержки на хранение изделий составляют p=1% от стоимости хранимой продукции.

Задача 2. Требуется определить оптимальные параметры существующей системы управления запасами и сравнить с действующей системой поставки партии запасных частей в количестве 400 шт.

Исходная информация.

Торговый отдел районного агросервиса планирует иметь потребность в запчастях в количестве 30000+100N шт. Годовые затраты по хранению одной единицы данной запасной части составляют 1,2 у.д.е. Издержки на транспортировку одной партии этого товара равны 10 у.д.е.

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) найти s – издержки содержания единицы продукции в единицу времени: $s = \alpha p$;

2) используя модель Уилсона, определить g^* – оптимальный размер партии запуска (поставки):

$$g^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}};$$

где K – затраты на организацию поставки;

ν – интенсивность спроса;

3) определить τ^* – оптимальный интервал между поставками:

$$\tau^* = \frac{g^*}{\nu} = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}};$$

4) найти L^* – наименьшие суммарные затраты работы системы (по формированию поставок и содержанию запасов) в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu}.$$

Модель оптимального размера партии поставки.

Задача 3. Требуется определить оптимальные параметры системы и сравнить их с затратами при действующей системе.

Исходная информация.

На одной линии упаковки перерабатывающего предприятия разливаются разные соки в пакеты. Вид сока для упаковки изменяется через месяц (τ_∂). Затраты на подготовительно-заключительные операции составляют: $K = 400 + 2K$ у.д.е. Потребность в соках – $\nu = 1{,}5 + 0{,}01N$ тыс. литров в месяц. Стоимость хранения 1 л сока в течение дня $s = 0{,}1 + 0{,}01K$ у.д.е.

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) найти s – издержки содержания единицы продукции в месяц;

2) используя модель Уилсона, определить g^* – оптимальный размер партии поставки (п. 2 задачи 1);

3) определить τ^* – оптимальный интервал между поставками (п. 3 задачи 1);

4) найти L^* – наименьшие суммарные затраты работы системы в единицу времени (п. 4 задачи 1);

5) найти g_∂ – размер партии поставки при действующей системе:

$$g_\partial = \tau_\partial \nu;$$

6) определить L – суммарные затраты работы действующей системы в единицу времени:

$$L = \frac{K\nu}{g} + \frac{sg}{2};$$

7) проанализировать результаты решения задачи, сравнить оптимальные параметры системы с действующими.

Модель оптимального размера поставки партии с определением точки заказа.

Задача 4. Требуется обосновать точку размещения заказа и другие оптимальные параметры системы.

Исходная информация.

Заводу по выпуску сельскохозяйственной техники требуется $\nu = 8 + 0{,}1N$ тыс. чугунных заготовок в год. Издержки размещения заказа $K = 30 - K$ у.д.е., содержание одной заготовки $s = 2 - 0{,}1N$ у.д.е. в год. Среднее время реализации заказа $\Theta = 20$ дней, или 0,055 года.

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) используя модель Уилсона, определить g^* – оптимальный размер партии поставки (п. 2 задачи 1);

2) определить τ^* – оптимальный интервал между поставками (п. 3 задачи 1);

3) найти r – точку размещения (возобновления) заказа:

$$r = \Theta\nu - \left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right] g^*,$$

где $\left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right]$ – целая часть числа $\frac{\Theta}{\tau^*}$;

4) рассчитать I_0 – минимальный начальный запас, гарантирующий бездефицитное потребление:

$$I_0 = \Theta \nu ;$$

5) определить t_k – моменты размещения заказов:

$$t_k = \frac{I}{\nu} - \Theta + k\tau^*, k = 0,1,2... ,$$

где I – фактический начальный запас;

6) найти L^* – наименьшие суммарные затраты работы системы в единицу времени (п. 4 задачи 1);

7) проанализировать результаты решения задачи.

Модель оптимального размера партии поставки с учетом дискретности спроса (на размер партии поставки налагается условие положительности и целочисленности) (рис. 10).

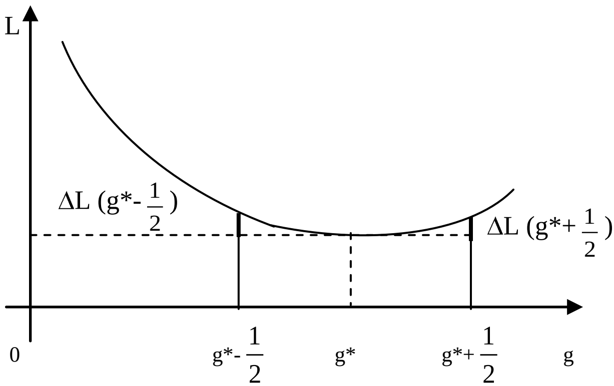


Рис. 10. Зависимость суммарных издержек работы системы от размера партии поставок.

Задача 5. Требуется определить оптимальный размер партии поставки.

Исходная информация.

Завод по выпуску сельскохозяйственной техники поставляет сельскохозяйственным предприятиям района трактора. Средняя потребность в них $\nu = 2 + 0{,}1N$ трактора в месяц. Стоимость организации заказа $K = 500 - 10N$ у.д.е., издержки содержания одного трактора в месяц $s = 100 - 10K$ у.д.е.

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) найти $g^*(g_1^*; g_2^*)$ – оптимальный размер партии поставки (на размер партии поставки налагается условие положительности и целочисленности):

$$g^* = \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K\nu}{s}} \right],$$

где $[a]$ – целая часть числа а;

$$g_1^* \le g^* \le g_2^*;$$

$$-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K\nu}{s}} \le g^* \le \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K\nu}{s}};$$

2) определить $L^*(L_1^*, L_2^*)$ – наименьшие суммарные затраты работы системы в единицу времени:

$$L_{(g)} = \frac{K\nu}{g} + \frac{sg}{2};$$

3) рассчитать $\tau^*(\tau_1^*, \tau_2^*)$ – оптимальный интервал между поставками:

$$\tau^* = \frac{g^*}{\nu};$$

4) проанализировать результаты решения задачи.

Модель оптимального размера партии поставки поступления заказа (партии товара) (рис. 11).

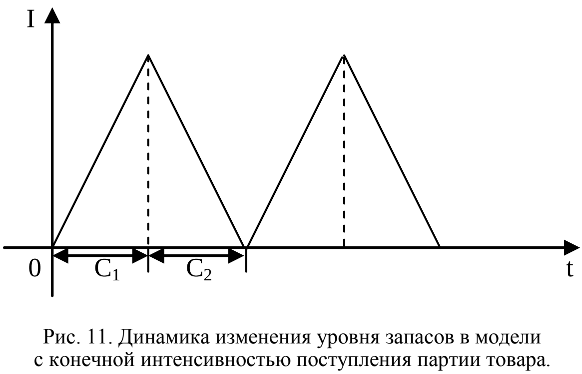


Рис. 11. Динамика изменения уровня запасов в модели с конечной интенсивностью поступления партии товара.

Задача 6. Требуется определить оптимальную партию поставки и другие характеристики системы.

Исходная информация.

Консервный завод выпускает партиями 8 различных видов консервов на одном и том же оборудовании. Спрос на каждый вид консервов – $\nu = 400 + (N + K)$ тыс. туб. в год. Издержки переналадки оборудования, связанные с его очисткой и переоборудованием перед выработкой другого вида консервов, $K = 300 + 2N$ у.д.е. Стоимость хранения 1 тыс. туб. консервов на складе $S = 40 + K$ у.д.е. в год. Производительность завода (интенсивность) $\lambda = 3200{,}0 + 10{,}0(N + K)$ тыс. туб. в год. Время реализации заказа (от его получения до выдачи готовой продукции) $\Theta = 2$ месяца, или 0,164 года.

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) найти g^* – оптимальный размер партии поставки:

$$g^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\nu}{\lambda}}};$$

2) рассчитать τ_1^* – время производства: $\tau_1^* = \frac{g^*}{\lambda}$;

3) рассчитать τ_2^* – время чистого потребления: $\tau_2^* = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\nu}{\lambda}}$;

4) определить оптимальный период возобновления заказа (продолжительность цикла):

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\nu}{\lambda}}};$$

5) определить r – точку заказа:

а) $r = \Theta\nu - \left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right] g^*$, если $\Theta - \left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right]\tau^* < \tau_2^*$;

б) $r = \Theta(\nu - \lambda) + (\left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right] + 1) \cdot \left(\frac{\lambda}{\nu} - 1\right) g^*$, если $\Theta - \left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right]\tau^* > \tau_2^*$;

6) определить t_k – моменты размещения заказа при $t_0 = 0$:

$$t_k = t_0 + k\tau^*, k = 1,2...;$$

7) рассчитать L^* – минимальные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} \cdot \sqrt{1-\frac{\nu}{\lambda}};$$

8) проанализировать результаты решения задачи.

Модель оптимального размера партии поставки при дефиците с учетом неудовлетворенных требований (рис. 12).

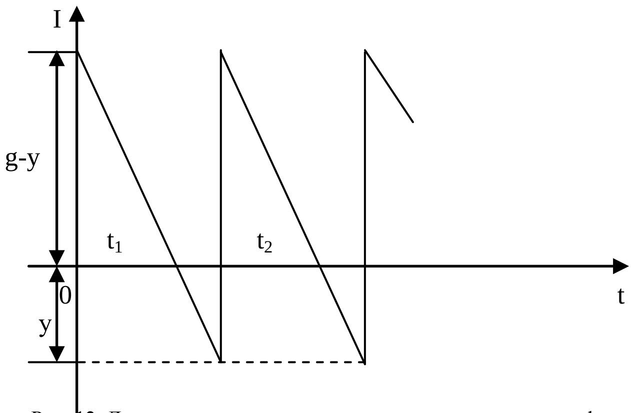


Рис. 12. Динамика изменения уровня запаса в модели при дефиците с учетом неудовлетворенных требований.

Задача 7. Требуется определить оптимальную партию поставки и другие характеристики системы.

Исходная информация.

Согласно договорам сельскохозяйственное предприятие поставляет в торговую сеть картофель. Спрос на продукцию составляет: $\nu = 5000 + 2(N+K)$ т в год. Стоимость хранения картофеля с учетом естественной убыли, включая потери, связанные с нереализованной продукцией, $s = 50 + K$ у.д.е. за 1 т в год. Издержки размещения заказа $K = 400 - K$ у.д.е. Неудовлетворенные требования берутся на учет. При поступлении очередной партии картофеля в первую очередь удовлетворяется задолженный спрос, а затем пополняется запас. Удельные издержки, связанные с дефицитом 1 т картофеля в единицу времени в течение года (штрафы за дефицит), составляют: $d = 150 + 2K$ у.д.е. Время реализации заказа (от его получения до поставки картофеля в торговую сеть) $\Theta = 1$ месяц.

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) найти g^* – оптимальный размер партии поставки:

$$g^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \sqrt{1+\frac{s}{d}};$$

2) рассчитать y^* – максимальную величину задолженного спроса (максимальный уровень дефицита):

$$y^* = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}};$$

3) определить Y^* – максимальную величину наличных (текущих) запасов:

$$Y^* = g^* - y^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}};$$

4) найти τ_1^* – время существования наличного запаса:

$$\tau_1^* = \frac{Y^*}{\nu} = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}};$$

5) найти τ_2^* – время существования дефицита:

$$\tau_2^* = \frac{y^*}{\nu} = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}};$$

6) найти τ^* – оптимальный период возобновления заказа (продолжительность цикла):

$$\tau^* = \tau_1^* + \tau_2^* = \frac{g^*}{\nu} = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \sqrt{1+\frac{s}{d}};$$

7) определить r – точку заказа:

$$r = \Theta\nu - \left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right] g^* - y^*;$$

П р и м е ч а н и е 1. Точка заказа может принимать отрицательное значение. Это показывает, что заказ необходимо разместить в момент, когда величина требований, поставленных на учет, равна $|r|$.

8) рассчитать L^* – минимальные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}};$$

9) проанализировать результаты решения задачи.

Обобщенная модель оптимального размера партии поставки при дефиците с учетом неудовлетворенных требований (рис. 13).

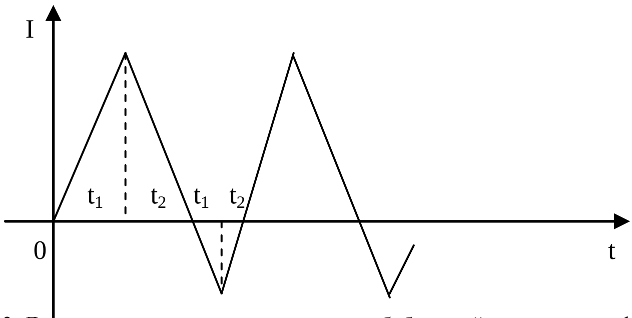


Рис. 13. Динамика изменения уровня запаса в обобщенной модели при дефиците с учетом неудовлетворенных требований.

Задача 8. Требуется определить оптимальные параметры работы системы.

Исходная информация.

Один из цехов перерабатывающего предприятия производит 6 видов полуфабрикатов колбасных изделий. Производительность $\lambda = 40{,}0 + N$ ц в сутки. Средний объем потребления каждого вида полуфабрикатов колбасных изделий термического цеха $\nu = 3 + 0{,}1K$ ц в сутки. Стоимость переналадки оборудования при переходе от одного вида полуфабрикатов к другому и очистке оборудования составляет: $K = 20{,}0 + 2K$ у.д.е. Стоимость хранения 1 ц полуфабрикатов в холодильнике $s = 0{,}02 + 0{,}01K$ в сутки. Неудовлетворенные требования берутся на учет. Удельные издержки дефицита $d = 0{,}1 + 0{,}01N$ у.д.е. в сутки.

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) найти g^* – оптимальный размер партии поставки:

$$g^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \sqrt{\frac{1+\frac{s}{d}}{1-\frac{\nu}{\lambda}}};$$

2) рассчитать y^* – максимальный уровень дефицита:

$$y^* = \nu\tau_3^* = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{\nu}{\lambda}}{1+\frac{s}{d}}};$$

3) определить Y^* – максимальный уровень наличных запасов:

$$Y^* = \nu\tau_2^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{\nu}{\lambda}}{1+\frac{s}{d}}};$$

4) найти τ_1^* – время возрастания запаса:

$$\tau_1^* = \frac{g^*}{\lambda} \cdot \frac{1}{1+\frac{s}{d}};$$

5) найти τ_2^* – время, в течение которого уровень запаса понижается до нуля:

$$\tau_2^* = \frac{g^*}{\nu} \cdot \frac{1-\frac{\nu}{\lambda}}{1+\frac{s}{d}};$$

6) найти τ_3^* – время роста дефицита (время накопления невыполненных заказов):

$$\tau_3^* = \frac{g^*}{\nu} \cdot \frac{1-\frac{\nu}{\lambda}}{1+\frac{s}{d}} \cdot \frac{s}{d};$$

7) найти τ_4^* – время, в течение которого дефицит ликвидируется:

$$\tau_4^* = \frac{g^*}{\lambda} \cdot \frac{1}{1+\frac{s}{d}} \cdot \frac{s}{d};$$

8) найти τ^* – оптимальный период возобновления заказа (продолжительность цикла):

$$\tau^* = \frac{g^*}{\nu} = \tau_1^* + \tau_2^* + \tau_3^* + \tau_4^* = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \sqrt{\frac{1+\frac{s}{d}}{1-\frac{\nu}{d}}};$$

9) найти $\tau_{пр}^*$ – время, затраченное на производство партии:

$$\tau_{пр}^* = \tau_1^* + \tau_4^* = \frac{g^*}{\lambda};$$

10) рассчитать L^* – минимальные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{\nu}{\lambda}}{1+\frac{s}{d}}};$$

11) проанализировать результаты решения задачи.

Многопродуктовая модель размера партии поставки при отсутствии взаимодействия между запасами различных видов (раздельная оптимизация).

Задача 9. Требуется определить оптимальные партии поставок при ограничении на площади холодильника.

Исходная информация.

В холодильник перерабатывающего предприятия поступает готовая продукция шести ассортиментных групп (N). Холодильник имеет площадь $f = 300 - 5N$ м^2. Характеристики запасов готовой продукции приведены в табл. 8.1.

Т а б л и ц а 8.1 **Характеристики запасов готовой продукции**

Ассортиментные группы продукции	ν_i – интенсивность потребления, т/год	K_i – издержки размещения заказа, у.д.е.	s_i – издержки содержания (хранения) в год, у.д.е.	f_i – расход площади холодильника, м^2/т
1	2	3	4	5
1	900 + 5N	3	5 + 0,2K	4
2	2000 – 5N	4	20	3

Окончание табл. 8.1

1	2	3	4	5
3	1000	3	30	2
4	1800	5	25	1
5	1700	4	15	2
6	1500	6	10	3

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) определить g_i^0 – оптимальные размеры партий поставок при отсутствии ограничений на складские площади (площадь холодильника):

$$g_i^0 = \sqrt{\frac{2K_i\nu_i}{s_i}}, i = \overline{1, N};$$

2) проверить, существует ли ограничение на складские площади (площадь холодильника) при максимальном уровне запасов:

$$h\sum_{i=1}^{N} f_i g_i^0 \le f,$$

где h – нормировочный множитель, позволяющий учесть время поступления запасов товаров, $0 < h \le 1$, чаще всего $\frac{1}{2} \le h \le 1$.

Если $h = 1$, то запасы всех товаров поступают одновременно и занятая ими площадь максимальная, т.е. вводят ограничение по максимальному уровню запасов;

Если $h = \frac{1}{2}$, то запасы поступают в разное время, т.е. вводят ограничение по среднему уровню запаса;

3) определить λ^*, используя следующую формулу:

$$h\sum_{i=1}^{N} f_i \sqrt{\frac{2K_i\nu_i}{s_i + 2\lambda h f_i}} = f,$$

где λ^* – неопределенный множитель Лагранжа, который показывает, на сколько можно сократить минимальные издержки функционирования системы в единицу времени, увеличив ограниченные складские площади на единицу;

4) найти g_i^* – оптимальные размеры партий поставок с учетом ограничений на складские площади (площади холодильника):

$$g_i^* = \sqrt{\frac{2K_i\nu_i}{s_i + 2\lambda h f_i}};$$

5) определить $L(g^0)$ – минимальные затраты работы системы в единицу времени при отсутствии ограничений на складские площади (площади холодильника):

$$L(g^0) = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{2K_i s_i \nu_i} = \sum_{i=1}^{N} s_i g_i^0;$$

6) определить $L(g^*)$ – минимальные затраты работы системы в единицу времени с учетом ограничений на складские площади (площади холодильника):

$$L(g^*) = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{2K_i (s_i + 2\lambda f_i \nu_i)} = \sum_{i=1}^{N} (s_i + 2\lambda^* f_i) g_i^*;$$

7) проанализировать результаты решения задачи, определить эффект от расширения складских площадей (площадей холодильника):

$$L(g^*) - L(g^0);$$

Многопродуктовая модель размера партий поставки в случае нескольких ограничений.

Задача 10. Требуется определить оптимальные партии поставок при ограничении на складские площади и оборотные средства, вложенные в запасы.

Исходная информация.

На оптовую базу поступают товары N=6 видов. При нормировании оборотных средств, вложенных в запасы товаров, установлено ограничение в размере $A = 2000 + 2(N + K)$ у.д.е. (ограничение на средний текущий запас). Площадь складских помещений под товары не превышает $f = 1000 + N + K$ м^2. Издержки содержания (хранения) исчисляются в размере $p = 6 - 0{,}1K$ % от стоимости хранимых товаров. Характеристики запасов товаров приведены в табл. 8.2.

Т а б л и ц а 8.2. **Характеристики запасов товаров**

Товары	ν_i – интенсивность потребления в месяц, шт.	K_i – издержки размещения заказа, у.д.е.	α_i – стоимость 1-го товара, у.д.е.	s_i – издержки содержания (хранения) 1-го товара в месяц, у.д.е.	f_i – расход складской площади на один товар, м^2
1	1000 + 2N	8	22	1,0	1,3
2	1800	15	18	1,4 + 0,1K	1,2
3	1600	30 – N	15	2,0 – 0,1K	1,5
4	1200 + 2K	10	30 – N	1,2	1,0
5	2000	25 – K	20	1,8	1,4
6	1500	20	25 – K	1,6	1,6

Используя приведенную информацию, необходимо:

1) найти s – издержки содержания единицы продукции в единицу времени:

$$s = \alpha \cdot p;$$

2) определить g_i^0 – оптимальные размеры партий поставок при отсутствии ограничений:

$$g_i^0 = \sqrt{\frac{2K_i \nu_i}{s_i}}, i = \overline{1, N};$$

3) проверить, существует ли ограничение на складские площади (при среднем уровне запаса – $h = \frac{1}{2}$):

$$h \sum_{i=1}^{N} f_i g_i^0 \le f;$$

4) проверить, существует ли ограничение на оборотные средства (при среднем уровне запаса – $h = \frac{1}{2}$):

$$h \sum_{i=1}^{N} \alpha_i g_i^0 \le A;$$

5) если оба ограничения существенны, то определить λ^*, введя сначала ограничение на складские площади, используя формулу

$$h \sum_{i=1}^{N} f_i \sqrt{\frac{2K_i \nu_i}{s_i + 2\lambda h f_i}} = f, \text{ при } h = \frac{1}{2};$$

6) найти g_i^* – оптимальные размеры партий поставок с учетом ограничений на складские площади:

$$g_i^* = \sqrt{\frac{2K_i \nu_i}{s_i + 2\lambda h f_i}};$$

7) проверить, удовлетворяют ли g_i^* ограничению на оборотные средства:

$$h \sum_{i=1}^{N} \alpha_i g_i^* < A, \text{ при } h = \frac{1}{2};$$

8) если вышеизложенное условие выполняется, то задача решена, в противном случае необходимо определить λ^*, используя формулу

$$h\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\sqrt{\frac{2K_i\nu_i}{s_i+2\lambda hf_i}}=A, \text{ при } h=\frac{1}{2};$$

9) найти g_i^* – оптимальные размеры партий поставок с учетом ограничений на оборотные средства, используя формулу п. 5 задачи 9;

10) проверить, удовлетворяют ли найденные в п. 6 задачи 9 g_i^* требованию ограничения на складские площади;

11) определить $L(g^*)$ – минимальные затраты работы системы в единицу времени с учетом ограничений на складские площади и оборотные средства:

$$L(g^*)=\sum_{i=1}^{N}\sqrt{2K_i(s_i+2\lambda f_i\nu_i)}=\sum_{i=1}^{N}(s_i+2\lambda^* f_i)g_i^*;$$

12) проанализировать результаты решения задачи.

Т е м а 9. МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Задача 1. Необходимо привести схему квадрантов отчетного МОБ с расчетом показателей: промежуточное потребление, промежуточные затраты, конечное использование, валовой внутренний продукт (табл. 9.5). Рассчитать материальные затраты каждой отрасли. Рассчитать матрицу коэффициентов прямых затрат и дать их экономическую интерпретацию.

Исходная информация.

Для условной экономики, состоящей из трех отраслей (промышленность, сельское хозяйство, отрасли сферы услуг), за отчетный период известны межотраслевые потоки (табл. 9.1) и поставки отраслей для целей конечного использования (табл. 9.2).

Т а б л и ц а 9.1. **Межотраслевые поставки, млн. руб.**

Отрасль-производитель	Отрасль-потребитель		
	1	2	3
1	200	20	8
2	20	60	4
3	16	5	8

Т а б л и ц а 9.2. **Отраслевые поставки для целей конечного использования, млн. руб.**

Отрасль-производитель	Конечное использование			
	Конечное потребление	Валовое накопление	Экспорт	Импорт
1	100	80	80	100
2	65	4	40	30
3	8	0	5	4

Задача 2. Необходимо привести числовую схему отчетного МОБ (табл. 9.5), предусмотреть, что 25 % валовой добавленной стоимости приходится на заработную плату. Рассчитать материальные затраты каждой отрасли. Рассчитать матрицу коэффициентов прямых затрат и дать их экономическую интерпретацию. Рассчитать матрицу коэффициентов полных затрат и дать их экономическую интерпретацию.

Исходная информация.

Для условной экономики, состоящей из трех отраслей (промышленность, прочие отрасли материального производства, отрасли сферы услуг), за отчетный период известны межотраслевые потоки (табл. 9.3) и поставки отраслей для целей конечного использования (табл. 9.4).

Т а б л и ц а 9.3. **Межотраслевые поставки, млн. руб.**

Отрасль-производитель	Отрасль-потребитель		
	1	2	3
1	1800	800	1000
2	1400	1200	800
3	1000	1200	400

Т а б л и ц а 9.4. **Поставки отраслей для целей конечного использования, млн. руб.**

Отрасль-производитель	Конечное использование			
	Конечное потребление	Валовое накопление	Экспорт	Импорт
1	1200	900	200	300
2	1040	800	130	160
3	760	0	80	40

Т а б л и ц а 9.5. **Показатели МОБ, млн. руб.**

Отрасль-производитель	Отрасль-потребитель			Промежу-точное потребление	Конечное исполь-зование	Валовой выпуск
	1	2	3			
1						
2						
3						
Промежуточные затраты						
Зарплата					–	–
Прочие элементы добавленной стоимости					–	–
Валовая добавленная стоимость					–	–
Валовой выпуск					–	–

СОДЕРЖАНИЕ

У ч е б н о-м е т о д и ч е с к о е и з д а н и е

Шафранская Ирина Викторовна
Гончарова Екатерина Викторовна

ЭКОНОМЕТРИКА И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Методические указания к практическим и лабораторным занятиям

Редактор
Техн. редактор
Корректор

Подписано в печать . .2019. Формат $60\times84^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Ризография. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .
Тираж 50 экз. Заказ .

УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Свидетельство о ГРИИРПИ № 1/52 от 09.10.2013.
Ул. Мичурина, 13, 213407, г. Горки.

Отпечатано в УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия».
Ул. Мичурина, 5, 213407, г. Горки.