

**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ,
НАУКИ И КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ**

**Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ОРДЕНОВ ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»**

Кафедра высшей математики и физики

С. В. Курзенков

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

*Методические указания
для аудиторной и самостоятельной работы
студентов, обучающихся по специальности
7-07-0732-01 Строительство зданий и сооружений*

**Горки
БГСХА
2024**

УДК 517(072)

*Рекомендовано методической комиссией
мелиоративно-строительного факультета.
Протокол № от 2024 г.*

Автор:
кандидат технических наук, доцент *С. В. Курзенков*

Рецензент:
кандидат архитектуры, доцент *Д. В. Кольчевский*

Численные методы решения задач. Численное решение дифференциальных уравнений: методические указания для аудиторной и самостоятельной работы / С. В. Курзенков. – Горки : БГСХА, 2024. – 41 с.

Приведены краткие теоретические сведения по вопросу «Численное решение дифференциальных уравнений», варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы, разработки аудиторных заданий, а также список рекомендуемой литературы.

Для студентов, обучающихся по специальности 7-07-0732-01 Строительство зданий и сооружений.

© УО «Белорусская государственная
сельскохозяйственная академия», 2024

ВВЕДЕНИЕ

С помощью дифференциальных уравнений описываются сложные процессы и явления реального мира. Без использования аппарата дифференциальных уравнений невозможно изучение динамики движения тел, потоков жидкости и газа, различных переходных процессов и так далее.

В представленных методических указаниях рассмотрены различные подходы к решению дифференциальных уравнений и систем в прикладных пакетах программ Excel и MathCad. Весь материал разбит на разделы и подразделы, в которых содержится описание рассмотренных методов. Методические указания включают в себя набор заданий, рекомендуемых для решения на лабораторных занятиях. Все приведенные вычислительные схемы проиллюстрированы решениями типовых примеров в распространенных прикладных пакетах программ.

Данные методические указания представляют собой руководство по изучению основных математических методов численного дифференциальных уравнений и систем средствами ЭВМ, которые рекомендуются для студентов мелиоративно-строительного факультета специальности 07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений». Кроме этого, они могут быть использованы магистрантами и аспирантами в качестве пособия для самостоятельного изучения и закрепления материала по рассматриваемой теме с последующим применением приведенных методов для решения конкретных производственных задач.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы [Электронный ресурс] / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – Электрон. текстовые данные. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. – 639 с. – Режим доступа: <https://csc-knu.github.io/numerical-analysis/books/bahvalov-zhidkov-kobelkov-2015.pdf>

2. Зенков, А. В. Численные методы : учеб. пособие / А. В. Зенков. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2016. – 124 с.

1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Основные определения и понятия дифференциального уравнения

С помощью дифференциальных уравнений описываются сложные процессы и явления реального мира. Без использования аппарата

дифференциальных уравнений невозможно изучение динамики движения тел, потоков жидкости и газа, различных переходных процессов и так далее. Практически любое явление, изменяющееся во времени, можно описать с помощью дифференциального уравнения.

Напомним, что *дифференциальными называются уравнения, содержащие неизвестные функции и их производные*

$$F(x; y; y'; y''; y'''; y^{(4)}; \dots y^{(n)}) = 0.$$

Порядок дифференциального уравнения (ДУ) определяется порядком старшей производной, входящей в него. Поэтому вышеприведенное ДУ – это дифференциальное уравнение n -го порядка.

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Различают общее и частное решения.

Общим называется решение, которое содержит столько произвольных постоянных, каков порядок дифференциального уравнения.

Частное решение – это решение, полученное из общего при фиксированных значениях произвольных постоянных.

Для нахождения произвольных постоянных задаются дополнительными условиями. Их называют *начальными условиями*.

Нахождение частного решения дифференциального уравнения с заданными начальными называется решением задачи Коши.

На практике не существует общих методов решения дифференциальных уравнений. Только для небольшого класса ДУ разработаны точные методы, т.е. для таких уравнений можно аналитически решить уравнение, а значит найти искомую функцию.

В прикладных науках дифференциальные уравнения, решаемые аналитически, встречаются очень редко. Поэтому особое значение приобретают численные, т.е. приближенные методы решения дифференциальных уравнений. Если ДУ имеет точное решение, то это решение может быть представлено в явном виде $y = \varphi(x)$ или неявном – $\varphi(x; y) = 0$.

В приближенных методах решения получают не функцию, а таблицу, в которой указаны некоторые изолированные значения аргумента и соответствующие им значения неизвестной функции, т. е. функцию, заданную таблично.

1.2. Постановка задач, решаемых численными методами.

Постановку задач, решаемых численными методами, рассмотрим на примере обыкновенного дифференциального уравнения первого поряд-

ка. Такое ДУ может быть записано в следующих видах: $y' = f(x; y)$ или $F(x; y; y') = 0$. Этот класс уравнений характеризуется тем, что содержит независимую переменную x , некоторую неизвестную функцию одной переменной y и первую производную этой функции y' .

Как уже отмечалось ранее, общим решением уравнения является функция $y(x; C)$, которая при подстановке в ДУ обращает его в тождество и представляющая фундаментальную систему решений, отличающихся друг от друга на постоянную величину C .

Чтобы получить единственное решение, которое называется частным решением ДУ, задают некоторые дополнительные условия. В зависимости от вида дополнительных условий различают задачу Коши и краевую задачу при решении обыкновенных дифференциальных уравнений. Если в них указывается начальное значение аргумента и соответствующие ему значения функции и производных этой функции, то в совокупности с ДУ данная постановка задачи называется задачей Коши. Например, для ДУ 1-го порядка начальное условие запишется в виде $y(x_0) = y_0$, а для ДУ 2-го порядка – $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$ и так далее.

Задача Коши формулируется следующим образом: дано дифференциальное уравнение $y' = f(x; y)$ и начальное условие $y(x_0) = y_0$. Требуется найти функцию $y(x)$ (частное решение ДУ), удовлетворяющую этому ДУ и заданному начальному условию.

Дополнительные условия называются *краевыми*, если значения функции и ее производных указываются в граничных точках некоторого отрезка изменения аргумента, а в совокупности с ДУ данная постановка задачи называется краевой задачей.

В отличие от задачи Коши, *краевая задача* ставится для дифференциальных уравнений более высоких порядков. В частности, для уравнения второго порядка $y'' = f(x; y; y')$, краевая задача имеет следующую формулировку: дано дифференциальное уравнение $y'' = f(x; y; y')$ и краевые условия $y(x_0) = y_0, y'(x_1) = y_1$, где x_0 и x_1 – граничные значения независимой переменной отрезка $[x_0; x_1]$. В пределах рассматриваемого отрезка $[x_0; x_1]$ найти функцию $y(x)$ (частное решение ДУ), удовлетворяющую этому ДУ и заданным краевым условиям.

Аналитическое решение задачи Коши или краевой задачи заключается в получении частного решения путем выполнения конечного числа операций дифференцирования, интегрирования и арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление). К сожалению, круг

задач, решаемых в квадратурах, крайне узок, поэтому актуальна задача приближенного, численного интегрирования ДУ.

Краевые задачи зачастую сводятся к задаче Коши, поэтому остановимся на рассмотрении методов численного решения задачи Коши.

Решить задачу Коши численно – значит для заданной последовательности значений аргумента (узлов) x_0, x_1, \dots, x_n и числа y_0 (значения искомой функции в начальном узле x_0), не находя самого решения $y = f(x)$ приближенно вычислить значения y_1, y_2, \dots, y_n этого решения в остальных узлах. Численное решение задачи Коши позволяет вместо отыскания точного решения $y = f(x)$ в виде формулы получить таблицу значений этой функции.

Рассмотрим три основных численных метода, относящихся к классу так называемых одношаговых методов. Одношаговые методы характерны тем, что для получения очередной точки кривой $y(x)$ требуется информация лишь о предыдущей точке.

1.2. Метод Эйлера.

Метод Эйлера обеспечивает невысокую точность решения дифференциальных уравнений. Но он весьма прост по содержанию и по реализации в электронных таблицах и математических пакетах. Кроме того, метод является основой для других, более точных методов.

Рассмотрим задачу Коши

$$y' = f(x; y); y(x_0) = y_0.$$

Для перехода от уже известной точки $(x_0; y_0)$ решения ДУ к точке $(x_1; y_1)$, где $x_1 = x_0 + h$, в методе Эйлера применяется следующий алгоритм. Разложим искомую функцию $y(x)$ в ряд Тейлора в достаточно малой h - окрестности точки x_0 :

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h \cdot y'(x_0) + \frac{h^2}{2!} \cdot y''(x_0) + \frac{h^3}{3!} \cdot y'''(x_0) + \dots$$

Поскольку h мало, элементами ряда, содержащими h^2, h^3, \dots можно пренебречь. Тогда из равенства получаем следующую точку решения ДУ

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h \cdot y'(x_0).$$

Так как $y' = f(x; y)$, то приведенное выше равенство можем переписать в виде

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h \cdot f(x_0; y_0),$$

получив тем самым следующую точку $(x_1; y_1)$ функции $y(x)$.

Обобщив результаты, можем сделать вывод, что любая точка интегральной кривой $y(x)$ выражается через предыдущую по формуле

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Такой метод численного решения дифференциального уравнения называется *методом Эйлера*.

Геометрически метод Эйлера означает, что на каждом шаге мы аппроксимируем решение отрезком касательной, проведённой к графику решения в начале интервала.

Точность метода невелика и имеет порядок шага разбиения h . Говорят, что метод Эйлера – метод первого порядка, т. е. его точность растёт линейно с уменьшением шага h .

Пример. Численно решить задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cdot \cos x, \quad y(0) = 0,5$$

в Excel и MathCad с шагом $h = 0,1$ на отрезке $[0; 1,7]$. Сравнить результаты приближенного вычисления с результатами аналитического решения этого ДУ – $y = \frac{1}{2 - \sin(x)}$.

Решение. а) Рассмотрим один из вариантов оформления таблицы при решении методом Эйлера для заданного ДУ показан на рис. 1.

	A	B	C	D
1				
2	x	y	γ	h
3	0	0,5	=1/(2-SIN(A3))	0,1
4	=A3+\$D\$3	=B3+\$D\$3*B3^2*COS(A3)	=1/(2-SIN(A4))	
20	=A19+\$D\$3	=B19+\$D\$3*B19^2*COS(A19)	=1/(2-SIN(A20))	

Рис. 1.

При этом результаты вычислений приведены на рис. 2.

Анализ результатов сравнения точного и приближенного решений $|y_T - y|$ заданного ДУ дает следующие абсолютные погрешности вычислений:

- 1) 0; 2) 0,00127; 3) 0,00272; 4) 0,004355; 5) 0,006163; 6) 0,008109;
- 7) 0,010129; 8) 0,012116; 9) 0,013921; 10) 0,015345; 11) 0,016156;

- 12) 0,016112; 13) 0,015005; 14) 0,01272; 15) 0,009289; 16) 0,004929;
 17) 3,27E-05; 18) 0,00489.

	A	B	C	D
1				
2	x	y	yr	h
3	0	0,5	0,5	0,1
4	0,1	0,525	0,52627	
5	0,2	0,55242	0,55515	
6	0,3	0,58233	0,58669	
7	0,4	0,61473	0,62089	
8	0,5	0,64954	0,65765	
9	0,6	0,68656	0,69669	
10	0,7	0,72547	0,73758	
11	0,8	0,76572	0,77964	
12	0,9	0,80657	0,82191	
13	1	0,84701	0,86316	
14	1,1	0,88577	0,90188	
15	1,2	0,92136	0,93636	
16	1,3	0,95212	0,96484	
17	1,4	0,97637	0,98566	
18	1,5	0,99257	0,9975	
19	1,6	0,99954	0,99957	
20	1,7	0,99662	0,99173	

Рис. 2.

Таким образом, начиная со второго шага значения искомой функции, полученные по методу Эйлера, являются приближенными. Причем на каждом последующем шаге применения данной формулы ошибка вычислений может увеличиваться из-за систематического накопления.

б) Реализацию задачи в Mathcad представим в следующем виде рис. 3, а результаты вычислений на рис. 4.

The screenshot shows the Mathcad interface with the following definitions:

$$a := 0 \quad b := 1.7 \quad h := 0.1 \quad n := \frac{b - a}{h} = 17 \quad i := 0..n - 1 \quad x_0 := 0 \quad y_0 := 0.5$$

$$x_{i+1} := x_i + h \quad f(x, y) := y^2 \cdot \cos(x) \quad y_{i+1} := y_i + f(x_i, y_i) \cdot h \quad g(x, y) = \frac{1}{2 - \sin(x)}$$

Рис. 3.

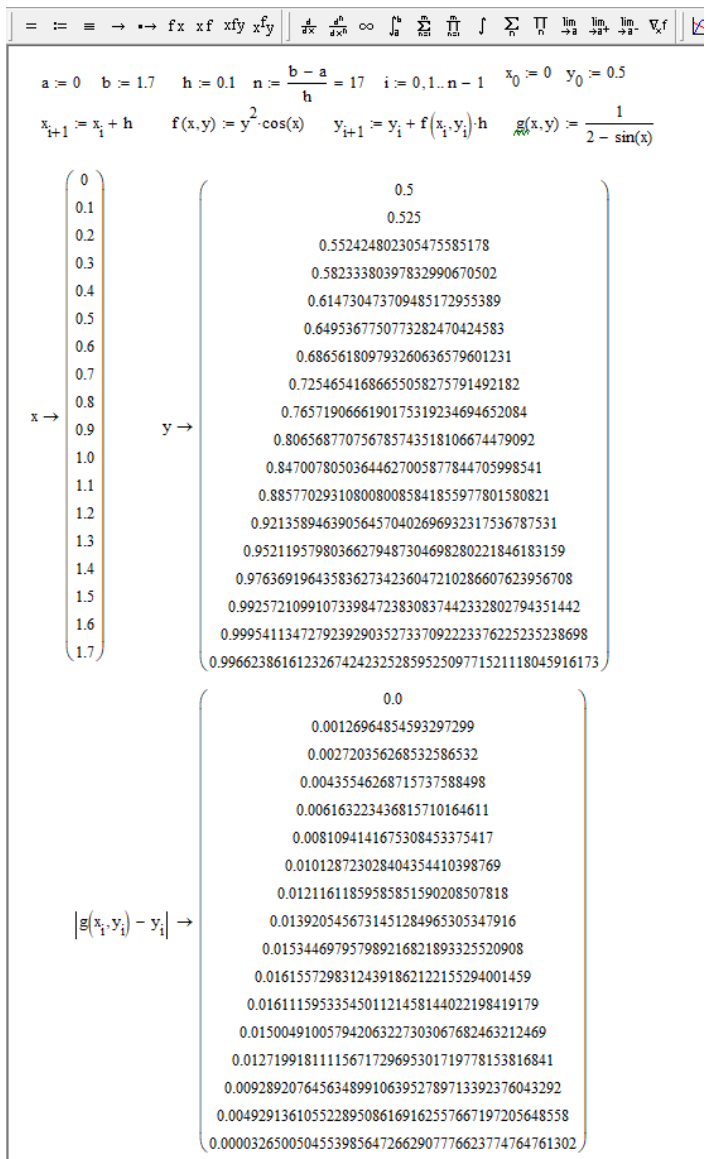


Рис. 4.

Если построить графическое решение данного ДУ и сравнить его с точным (рис. 5), то можно заметить, что уже при небольших значениях i ошибка y_i существенная. Поэтому метод Эйлера на практике применяют очень редко.

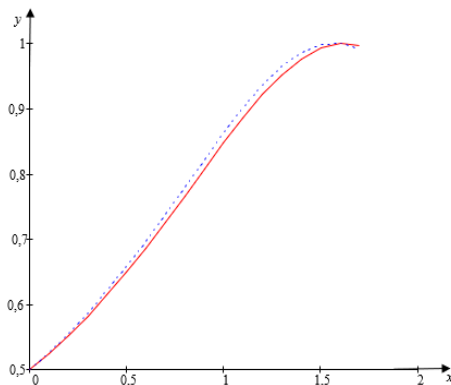


Рис. 5.

Таким образом, по методу Эйлера можно сделать следующие выводы:

1) метод Эйлера – представитель одношаговых приближенных методов, в которых решение в $i + 1$ -м узле получается на основе решения только в одном предыдущем i -м узле. Тем самым информация о более ранних уже вычисленных значениях игнорируется. В этом смысле одношаговые методы не самые экономичные и рациональные методы приближенного решения ДУ;

2) как и в любом одношаговом методе, начиная со второго шага исходное значение является приближенным, т. е. погрешность на каждом последующем шаге может систематически возрастать;

3) оценка погрешности метода затруднительна. Часто пользуются эмпирическим правилом двойного пересчета (половинного шага): дважды проходят заданный отрезок интегрирования ДУ с шагами h и $h/2$. Совпадение соответствующих десятичных знаков в полученных результатах дает основание считать эти знаки верными;

4) уменьшение шага h повышает точность вычислений, но резко увеличивает их объем. В целом метод Эйлера применим только для грубой оценки результатов решения ДУ.

1.3. Модифицированный метод Эйлера.

Значительная погрешность при решении задачи Коши методом Эйлера обусловлена тем, что в разложении искомой функции $y(x)$ удерживаются лишь два первых слагаемых. Очевидно, что, чем больше слагаемых будет удержано, тем точнее получится решение задачи Коши. Однако, чтобы сделать это, надо знать вторую и производные более высоких порядков функции $y(x)$. Приблизненно вычислить вторую производную можно способом конечных разностей:

$$y''(x_0) = \frac{y'(x_0 + h) - y'(x_0)}{h}.$$

Тогда, подставляя это выражение вместо второй производной в разложение функции $y(x)$ в ряд Тейлора в достаточно малой h - окрестности точки x_0 и отбрасывая члены, содержащие h^3, h^4 и т. д., получим:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h \cdot y'(x_0) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{y'(x_0 + h) - y'(x_0)}{h}$$

или

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{h}{2} \cdot (y'(x_0 + h) + y'(x_0)).$$

В приведенном выше равенстве неизвестной величиной является значение первой производной в узле, следующем за начальным, т. е. $y'(x_0 + h)$. В качестве приближенной оценки первой производной в этом узле можно принять величину $y^*(x_0 + h)$, вычисленную по методу Эйлера. Тогда значение искомой функции в узле $x_0 + h$ можно определить по формуле:

$$\begin{aligned} y(x_0 + h) &= y(x_0) + \frac{h}{2} \cdot (f(x_0; y_0) + f(x_1; y_0 + h \cdot f(x_0; y_0))) = \\ &= y_0 + \frac{h}{2} (f(x_0; y_0) + f(x_1; y_1^*)). \end{aligned}$$

Обобщив эту формулу, получим алгоритм модифицированного метода Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(x_i; y_i) + f(x_{i+1}; y_{i+1}^*)), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Пример. Численно решить задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cdot \cos x, \quad y(0) = 0,5$$

модифицированным методом Эйлера в Excel и MathCad с шагом $h = 0,1$ на отрезке $[0; 1,7]$. Сравнить результаты приближенного вычисления с результатами аналитического решения этого ДУ $-y = \frac{1}{2 - \sin(x)}$.

Решение. а) Рассмотрим один из вариантов оформления таблицы при решении ДУ модифицированным методом Эйлера на рис. 6.

	A	B	C	D	E
1					
2	x	y1	y	yт	h
3	0	0,5	0,5	=1/(2-SIN(A3))	0,1
4	=A3+\$E\$3	=C3+E\$3*C3^2*COS(A3)	=C3+\$E\$3/2*(B4^2*	=1/(2-SIN(A4))	
20	=A19+\$E\$3	=C19+E\$3*C19^2*COS(A19)	=C19+\$E\$3/2*(B20^	=1/(2-SIN(A20))	

Рис. 6.

При этом результаты вычислений приведены на рис. 7.

	A	B	C	D	E
1					
2	x	y1	y	yт	h
3	0	0,5	0,5	0,5	0,1
4	0,1	0,525	0,52621	0,52627	
5	0,2	0,55376	0,55502	0,555145	
6	0,3	0,58521	0,58647	0,586689	
7	0,4	0,61933	0,62056	0,620894	
8	0,5	0,65603	0,65718	0,657646	
9	0,6	0,69508	0,69607	0,696691	
10	0,7	0,73606	0,73678	0,737582	
11	0,8	0,7783	0,77865	0,77964	
12	0,9	0,82089	0,82071	0,821913	
13	1	0,86258	0,86174	0,863164	
14	1,1	0,90187	0,90025	0,901882	
15	1,2	0,93701	0,93454	0,936364	
16	1,3	0,96619	0,96285	0,964839	
17	1,4	0,98765	0,98354	0,985658	
18	1,5	0,99998	0,9953	0,997501	
19	1,6	1,0023	0,99733	0,999574	
20	1,7	0,99443	0,98951	0,991734	

Рис. 7.

Анализ результатов сравнения точного и приближенного решений $|y_T - y|$ заданного ДУ дает следующие абсолютные погрешности вычислений:

- 1) 0; 2) 5,72E-05; 3) 0,000129855; 4) 0,00022; 5) 0,000331; 6) 0,000464;
- 7) 0,00062; 8) 0,000798; 9) 0,000994; 10) 0,001204; 11) 0,001419;
- 12) 0,001629; 13) 0,001823; 14) 0,001989; 15) 0,002118; 16) 0,002204;
- 17) 0,002239; 18) 0,002222.

Если сравнить их с соответствующими абсолютными погрешностями метода Эйлера, то можно сделать вывод, что модифицированный метод дает гораздо более точный результат решения ДУ.

б) Реализацию задачи в Mathcad представим в следующем виде рис. 8, результаты вычислений – рис. 9, а погрешности вычислений – рис.10.

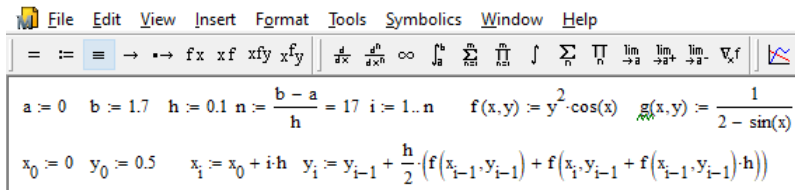


Рис. 8.

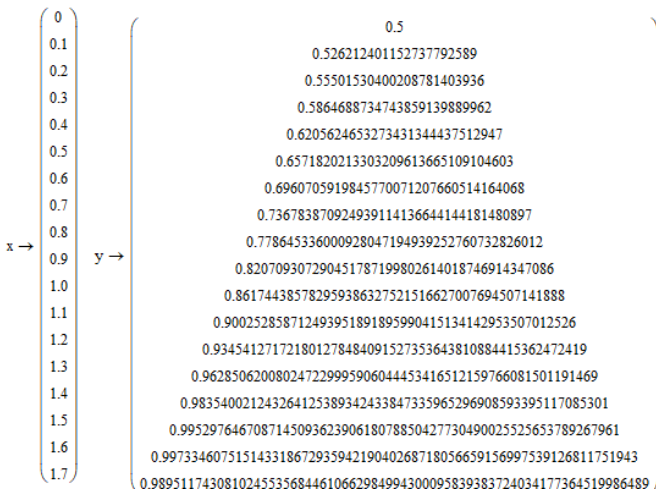


Рис. 9.

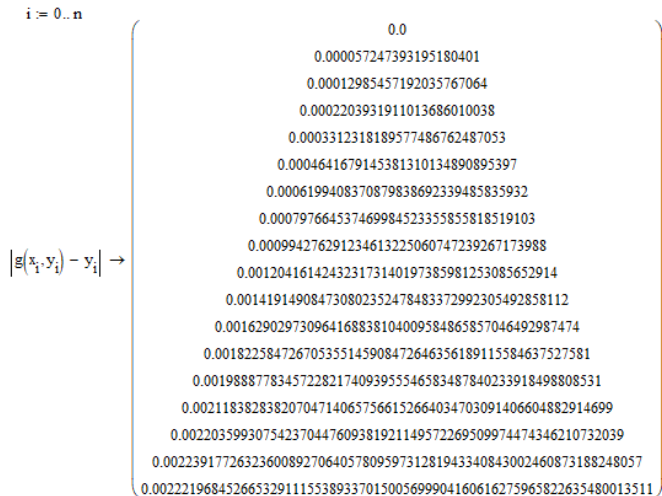


Рис. 10.

Таким образом, по модифицированному методу Эйлера можно сделать следующие выводы:

Если сравнивать результат решения задачи, полученный модифицированным методом Эйлера, с вычислениями по методу Эйлера, то вполне очевидно преимущество модифицированного метода. Однако погрешность метода все же достаточно велика и об этом можно судить, сравнивая полученное решение с точным.

1.4. Методы Рунге-Кутты.

Методы Рунге-Кутты решения дифференциальных уравнений, как и методы Эйлера, принадлежат к классу одношаговых методов. Они являются своеобразным обобщением этого класса методик решения ДУ и обладают рядом достоинств:

- 1) обладают достаточно высокой точностью;
- 2) допускают использование переменного шага, что даёт возможность уменьшить его там, где значения функции быстро изменяются, и увеличить его в противном случае;
- 3) являются легко применимыми, так как для начала расчёта достаточно выбрать сетку x_n и задать значение $y_0 = f(x_0)$.

На практике метод Рунге-Кутты уже четвертого порядка позволяет получить приемлемый результат с точки зрения его точности вычислительного процесса.

Рассмотрим данную методику.

Приведем расчетные формулы метода для решения задач:

$$y_{i+1} = y_i + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) / 6.$$

Для оценки значения производной в этом методе используется четыре вспомогательных шага на которых предварительно вычисляются величины

$$\begin{aligned} K_1 &= h \cdot f(x_i; y_i); \\ K_2 &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{K_1}{2}\right); \\ K_3 &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{K_2}{2}\right); \\ K_4 &= h \cdot f(x_i + h; y_i + K_3); \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

В данном методе погрешность на шаге вычислений соизмерима h^4 .

Пример. Численно решить задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cdot \cos x, \quad y(0) = 0,5$$

методом Рунге-Кутты четвертого порядка в Excel и MathCad с шагом $h = 0,1$ на отрезке $[0; 1,7]$. Сравнить результаты приближенного вычисления с результатами аналитического решения этого ДУ – $y = \frac{1}{2 - \sin(x)}$

и расчетами, полученными методами Эйлера.

Решение. а) Рассмотрим один из вариантов оформления таблицы при решении ДУ модифицированным методом Рунге-Кутты четвертого порядка в Excel (рис. 11).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	x	K1	K2	K3	K4	y	yr	h
3	0					0,5		=1/(2-0,1)
4	=A3+\$H\$3	= \$H\$3 * F3 * 2 * COS(A3)	= \$H\$3 * (F3 + B4 / 2) * 2 * CC	= \$H\$3 * (F3 + C4 / 2) * 2 * CC	= \$H\$3 * (F3 + D4) * 2 * COS(A3 + \$H\$3)	= F3 + (B4 + 2 * C4 + 2 * D4 + E4) / 6	= 1 / (2 -	
19	=A18+\$H\$9	= \$H\$3 * F18 * 2 * COS(A18)	= \$H\$3 * (F18 + B19 / 2) * 2 * CC	= \$H\$3 * (F18 + C19 / 2) * 2 * CC	= \$H\$3 * (F18 + D19) * 2 * COS(A18 + \$H\$9)	= F18 + (B19 + 2 * C19 + 2 * D19 +	= 1 / (2 -	
20	=A19+\$H\$9	= \$H\$3 * F19 * 2 * COS(A19)	= \$H\$3 * (F19 + B20 / 2) * 2 * CC	= \$H\$3 * (F19 + C20 / 2) * 2 * CC	= \$H\$3 * (F19 + D20) * 2 * COS(A19 + \$H\$9)	= F19 + (B20 + 2 * C20 + 2 * D20 +	= 1 / (2 -	

Рис. 11.

При этом результаты вычислений приведены на рис. 12.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	x	K1	K2	K3	K4	y	yr	h
3	0					0,5	0,5	0,1
4	0,1	0,025	0,02623	0,0263	0,02756	0,52627	0,52627	
5	0,2	0,02756	0,02884	0,02891	0,03021	0,55515	0,55515	
6	0,3	0,0302	0,03151	0,03158	0,03289	0,58669	0,58669	
7	0,4	0,03288	0,03417	0,03424	0,03551	0,62089	0,62089	
8	0,5	0,03551	0,03673	0,0368	0,03796	0,65765	0,65765	
9	0,6	0,03796	0,03903	0,03909	0,04007	0,69669	0,69669	
10	0,7	0,04006	0,04089	0,04094	0,04162	0,73758	0,73758	
11	0,8	0,04161	0,04208	0,04211	0,04235	0,77964	0,77964	
12	0,9	0,04235	0,04232	0,04232	0,042	0,82191	0,82191	
13	1	0,04199	0,04133	0,0413	0,04026	0,86316	0,86316	
14	1,1	0,04026	0,03882	0,03876	0,0369	0,90188	0,90188	
15	1,2	0,0369	0,0346	0,03451	0,03177	0,93636	0,93636	
16	1,3	0,03177	0,02859	0,0285	0,0249	0,96484	0,96484	
17	1,4	0,0249	0,02092	0,02083	0,01651	0,98566	0,98566	
18	1,5	0,01651	0,0119	0,01185	0,00704	0,9975	0,99750	
19	1,6	0,00704	0,00208	0,00207	-0,00292	0,99957	0,99957	
20	1,7	-0,00292	-0,00788	-0,00784	-0,01267	0,99173	0,99173	
21								

Рис. 12.

Анализ результатов сравнения точного и приближенного решений $|y_T - y|$ заданного ДУ дает следующие абсолютные погрешности вычислений:

- 1) 0;
- 2) 0,000000008;
- 3) 0,000000021;
- 4) 0,000000040;
- 5) 0,000000066;
- 6) 0,000000099;
- 7) 0,000000139;
- 8) 0,000000183;
- 9) 0,000000228;
- 10) 0,000000269;
- 11) 0,000000301;
- 12) 0,000000318;
- 13) 0,000000320;
- 14) 0,000000308;
- 15) 0,000000290;
- 16) 0,000000275;
- 17) 0,000000271;
- 18) 0,000000284.

Если сравнить их с соответствующими абсолютными погрешностями метода Эйлера и модифицированного метода, то можно сделать вывод, что методом Рунге-Кутты четвертого порядка дает очень хороший результат с точки зрения близости к точному решению ДУ.

б) Реализацию задачи в Mathcad представим в следующем виде рис. 13, результаты вычислений – рис. 14, а погрешности вычислений – рис. 15.

$a = 0$ $b = 1.7$ $h = 0.1$ $n = \frac{b-a}{h} = 17$ $i = 0.1 \cdot n - 1$ $x_0 = 0$ $y_0 = 0.5$ $x_{i+1} = x_i + h$ $f(x, y) = y^2 \cdot \cos(x)$ $g(x, y) = \frac{1}{2 - \sin(x)}$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} \left(f\left(x_i, y_i\right) + 2 \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{f\left(x_i, y_i\right) \cdot h}{2}\right) + 2 \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{f\left(x_i, y_i\right) \cdot h}{2}\right) + f\left(x_i + h, y_i + f\left(x_i, y_i\right) \cdot h\right) \right)$$

Рис. 13.

1.5. Погрешность схем Рунге –Кутта

Эффективная оценка погрешности метода Рунге-Кутта затруднительна. Одним из наиболее простых, широко применяемых и достаточно эффективных методов оценки погрешности и уточнения полученных результатов в приближённых вычислениях с использованием сеток является правило (или принцип) Рунге.

Пусть известно, что на каждом шаге допущена погрешность, приблизительно пропорциональная h^{p+1} ($p \geq 1$ – порядок применяемого метода), и $2n$ представляет собой общее число шагов вычисления.

В таком случае, предполагая, что погрешность на каждом шаге одна и та же, разность между точными и приближенными значениями искомой функции при шаге разбиения h в точке x_{2n} будет составлять

$$y(x_{2n}) - \hat{y}(x_{2n}; h) = 2A nh^{p+1},$$

где $y(x_{2n})$ – точное значение искомой функции в некоторой точке x_{2n} ;

$\hat{y}(x_{2n}; h)$ – приближенное значение искомой функции в точке x_{2n} ;

$x_{2n} = x_0 + 2nh$ – точка, в которой оценивается погрешность решения;

A – коэффициент пропорциональности.

Согласно Рунге, производим тем же методом вторичный пересчет искомого решения y с двойным шагом $H = 2h$. Тогда в силу нашего предположения будет допущена погрешность для исследуемого значения сеточной функции

$$y(x_{2n}) - \hat{y}(x_n; 2h) = An(2h)^{p+1},$$

где $y(x_{2n})$ – точное значение искомой функции в точке, совпадающей по значению с x_{2n} ;

$\hat{y}(x_n; 2h)$ – приближенное значение искомой функции в точке x_n ;

$x_n = x_0 + nh$ – точка, в которой оценивается погрешность решения.

Исключив из приведенных выше формул точное решение и выразив из образованного уравнения коэффициент пропорциональности A получим

$$A = \frac{|\hat{y}(x_n; 2h) - \hat{y}(x_{2n}; h)|}{2n(2^p - 1)h^{p+1}}.$$

Тогда погрешность решения ДУ в совпадающих узлах сеток для применяемого метода можно оценить по формуле

$$\varepsilon_{2n} = \frac{|\hat{y}(x_n; 2h) - \hat{y}(x_{2n}; h)|}{2^p - 1},$$

а точное решение –

$$y(x_{2n}) = \hat{y}(x_{2n}; h) - \frac{\hat{y}(x_n; 2h) - \hat{y}(x_{2n}; h)}{2^p - 1}.$$

В частности, при применении метода Рунге-Кутты четвертого порядка можно использовать следующие формулы оценки погрешности вычисления и точного решения соответственно:

$$\varepsilon_{2n} = \frac{|\hat{y}(x_n; 2h) - \hat{y}(x_{2n}; h)|}{15},$$

$$y(x_{2n}) = \hat{y}(x_{2n}; h) - \frac{\hat{y}(x_n; 2h) - \hat{y}(x_{2n}; h)}{15}.$$

Поэтому для определения правильности выбора шага h на практике обычно на каждом этапе из двух шагов применяют двойной пересчет (принцип Рунге). А именно, исходя из начального верного значения искомой функции $y(x_0)$, вычисляют величину $y(x_0 + 2h)$ двумя способами: один раз с шагом h , а второй раз с двойным шагом $2h$. Если расхождение полученных значений не превышает допустимой погрешности, то выбор шага h считают обоснованным. В противном случае шаг уменьшают в два раза и повторяют указанную процедуру для нового шага.

Пример. Методом Рунге-Кутты четвертого порядка в Excel численно решить задачу Коши $\frac{dy}{dx} = y^2 \cdot \cos x$, $y(0) = 0,5$ на отрезке $[0; 1,7]$ сначала с шагом $h = 0,05$, а затем – с шагом $h = 0,1$. Сравнить результаты приближенного вычисления с результатами аналитического решения этого ДУ – $y = \frac{1}{2 - \sin(x)}$. В совпадающих узлах по правилу Рунге оце-

нить погрешности ε и точные решения y_{τ}^* решения ДУ.

Решение. Результаты расчетов с шагом $h = 0,05$ показаны на рис.16, а с шагом $h = 0,1$ – на рис. 17.

Методика реализации принципа Рунге для данного примера показана на рис. 18.

Анализ представленных результатов показывает, что оценка точного решения, полученного по правилу Рунге практически идеально совпадает результатами аналитического решения в рассматриваемых совпадающих узлах решения ДУ.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	x	K1	K2	K3	K4	y	yr	h
3	0					0,5	0,5	0,05
4	0,1	0,0125	0,01281	0,01282	0,01313	0,51282	0,51282	
5	0,1	0,01313	0,01345	0,01346	0,01378	0,52627	0,52627	
6	0,2	0,01378	0,0141	0,01411	0,01444	0,54038	0,54038	
7	0,2	0,01444	0,01476	0,01477	0,0151	0,55515	0,55515	
8	0,3	0,0151	0,01543	0,01544	0,01577	0,57058	0,57058	
9	0,3	0,01577	0,0161	0,01611	0,01644	0,58669	0,58669	
10	0,4	0,01644	0,01677	0,01678	0,0171	0,60346	0,60346	
11	0,4	0,0171	0,01743	0,01744	0,01775	0,62089	0,62089	
12	0,5	0,01775	0,01807	0,01808	0,01838	0,63896	0,63896	
13	0,5	0,01838	0,01868	0,01869	0,01898	0,65765	0,65765	
14	0,6	0,01898	0,01926	0,01926	0,01953	0,6769	0,67690	
15	0,6	0,01953	0,01978	0,01979	0,02003	0,69669	0,69669	
16	0,7	0,02003	0,02025	0,02026	0,02046	0,71694	0,71694	
17	0,7	0,02046	0,02064	0,02065	0,02081	0,73758	0,73758	
18	0,8	0,0208	0,02094	0,02094	0,02105	0,75852	0,75852	
19	0,8	0,02105	0,02113	0,02113	0,02117	0,77964	0,77964	
20	0,9	0,02117	0,02119	0,02119	0,02116	0,80082	0,80082	
21	0,9	0,02116	0,0211	0,0211	0,021	0,82191	0,82191	
22	1	0,021	0,02085	0,02085	0,02066	0,84275	0,84275	
23	1	0,02066	0,02042	0,02041	0,02013	0,86316	0,86316	
24	1,1	0,02013	0,01979	0,01978	0,0194	0,88294	0,88294	
25	1,1	0,0194	0,01895	0,01894	0,01845	0,90188	0,90188	
26	1,2	0,01845	0,0179	0,01789	0,01728	0,91976	0,91976	
27	1,2	0,01728	0,01662	0,0166	0,01589	0,93636	0,93636	
28	1,3	0,01589	0,01511	0,0151	0,01427	0,95146	0,95146	
29	1,3	0,01427	0,01339	0,01338	0,01245	0,96484	0,96484	
30	1,4	0,01245	0,01147	0,01146	0,01044	0,9763	0,97630	
31	1,4	0,01044	0,00937	0,00936	0,00826	0,98566	0,98566	
32	1,5	0,00826	0,00712	0,00711	0,00594	0,99277	0,99277	
33	1,5	0,00594	0,00474	0,00474	0,00352	0,9975	0,99750	
34	1,6	0,00352	0,00229	0,00228	0,00104	0,99978	0,99978	
35	1,6	0,00104	-0,0002	-0,0002	-0,0015	0,99957	0,99957	
36	1,7	-0,0015	-0,0027	-0,0027	-0,0039	0,99687	0,99687	
37	1,7	-0,0039	-0,0051	-0,0051	-0,0063	0,99173	0,99173	

Рис. 16.

	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1										
2	x	K1	K2	K3	K4	y	yr	yi(h)-yi(2h)	ε	yr*
3	0					0,5	0,5			
4	0,1	0,025	0,0262	0,0263	0,0276	0,526270	0,526270	-5,091E-10	5,1E-10	0,526270
5	0,2	0,028	0,0288	0,0289	0,0302	0,555145	0,555145	-1,32E-09	1,3E-09	0,555145
6	0,3	0,03	0,0315	0,0316	0,0329	0,586689	0,586689	-2,504E-09	2,5E-09	0,586689
7	0,4	0,033	0,0342	0,0342	0,0355	0,620894	0,620894	-4,119E-09	4,1E-09	0,620894
8	0,5	0,036	0,0367	0,0368	0,038	0,657646	0,657646	-6,186E-09	6,2E-09	0,657646
9	0,6	0,038	0,039	0,0391	0,0401	0,696690	0,696691	8,666E-09	8,7E-09	0,696690
10	0,7	0,04	0,0409	0,0409	0,0416	0,737581	0,737582	-1,143E-08	1,1E-08	0,737581
11	0,8	0,042	0,0421	0,0421	0,0424	0,779639	0,779640	-1,427E-08	1,4E-08	0,779639
12	0,9	0,042	0,0423	0,0423	0,042	0,821913	0,821913	-1,685E-08	1,7E-08	0,821913
13	1	0,042	0,0413	0,0413	0,0403	0,863163	0,863164	-1,884E-08	1,9E-08	0,863163
14	1,1	0,04	0,0388	0,0388	0,0369	0,901882	0,901882	-1,995E-08	2,0E-08	0,901882
15	1,2	0,037	0,0346	0,0345	0,0318	0,936364	0,936364	-2,007E-08	2,0E-08	0,936364
16	1,3	0,032	0,0286	0,0285	0,0249	0,964839	0,964839	-1,935E-08	1,9E-08	0,964839
17	1,4	0,025	0,0209	0,0208	0,0165	0,985658	0,985658	-1,822E-08	1,8E-08	0,985658
18	1,5	0,017	0,0119	0,0118	0,007	0,997501	0,997501	-1,729E-08	1,7E-08	0,997501
19	1,6	0,007	0,0021	0,0021	-0,0029	0,999574	0,999574	-1,709E-08	1,7E-08	0,999574
20	1,7	-0,003	-0,008	-0,008	-0,0127	0,991733	0,991734	-1,788E-08	1,8E-08	0,991733

Рис. 17.

	O	P	Q	R	S
1					
2					
3	0,5	=1/(2-SIN(J3))			
4	=O3+(K4+2*L4+2*M4+N4)/6	=1/(2-SIN(J4))	=(O4-F5)/15	=ABS(Q4)	=O4-Q4
20	=O19+(K20+2*L20+2*M20+N20)/6	=1/(2-SIN(J20))	=(O20-F37)/15	=ABS(Q20)	=O20-Q20

Рис. 18.

1.6. Многошаговые методы Адамса.

Если дифференциальное уравнение $y'=f(x, y)$ имеет в правой части сложное аналитическое выражение, значение которого быстро изменяется при незначительном изменении аргумента, то рассмотренные выше одношаговые методы не дают желаемую точность вычислений. В таких случаях применяют многошаговые методы решения ДУ. К таким методам относятся *экстраполяционный и интерполяционный методы Адамса*.

Экстраполяционный метод Адамса. Пусть для дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$ заданы начальные условия $x = x_0, y = y_0$, а также известны или определены с помощью одношаговых методов ещё m точек искомой функции y_1, y_2, \dots, y_m . Требуется найти решение уравнения $y'=f(x, y)$ на отрезке $[a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ равномерно на n частей точками $x_i = x_0 + hi, i=0, 1, \dots, n, h = (b - a)/n$. Выберем произвольно элементарный отрезок, на котором проинтегрируем дифференциальное уравнение

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'dx \text{ или } y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'dx.$$

Если обозначить

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'dx,$$

то рекуррентная формула метода примет вид

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i.$$

Для нахождения производной воспользуемся второй интерполяционной формулой Ньютона. С учётом $t = (x - x_i)/h$ получим:

$$y' = y'_i + t \cdot \Delta y'_{i-1} + \frac{t \cdot (t+1)}{2!} \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{t \cdot (t+1) \cdot (t+2)}{3!} \Delta^3 y'_{i-3} + \dots$$

Подставим полученное выражение для y' в интегральное уравнение и, учитывая, что $dx = hdt$, имеем

$$\Delta y_i = h \cdot \int_0^1 (y'_i + t \Delta y'_{i-1} + \frac{t^2 + t}{2} \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{t^3 + 3t^2 + 2t}{6} \Delta^3 y'_{i-3} + \dots) dt =$$

$$h y'_i + \frac{1}{2} \Delta (h \cdot y'_{i-1}) + \frac{5}{12} \Delta^2 (h \cdot y'_{i-2}) + \frac{3}{8} \Delta^3 (h \cdot y'_{i-3}) + \dots + C_m \Delta^3 (h \cdot y'_{i-m}) + \dots$$

где $C_m = \int_0^1 \frac{t \cdot (t+1) \cdot \dots \cdot (t+m-1)}{m!} dt$

Обозначим через $q_i = y'_i h = f(x_i, y_i) h$, где $i \in \overline{0, N}$, тогда для любой разности $\Delta^m q_i = \Delta^m (y'_i h)$, будет иметь место выражение

$$\Delta y_i = q_i + 1/2 \Delta q_{i-1} + 5/12 \Delta^2 q_{i-2} + 3/8 \Delta^3 q_{i-3} + \dots + C_m \Delta^m q_{i-m} + \dots,$$

используемое для получения решения ДУ

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i.$$

Две последние формулы являются основными в экстраполяционном методе Адамса.

Погрешность экстраполяционного метода Адамса можно оценить по формуле

$$|R_m| \leq h^{m+2} C_{m+1} M_{m+2},$$

где $M_{m+2} = \max_{a \leq x \leq b} |y^{(m+2)}(x)|$.

Для метода Адамса характерно убывание абсолютных величин конечных разностей. Этим обстоятельством обусловлен выбор m и h . Чем меньше h , тем ниже будет m – порядок конечных разностей. Однако это приводит к увеличению узловых точек, а значит и применению укороченных формул, что в свою очередь связано с ростом погрешности вычислений. Обычно m и h стараются подобрать так, чтобы последняя конечная разность, участвующая в вычислениях, была практически постоянной. Обрывать формулу на практически постоянной разности удобно ещё из тех соображений, что это обстоятельство может быть использовано для текущего контроля вычислений.

Чаще всего применяется экстраполяционный метод Адамса ограниченный тремя конечными разностями.

$$y_{i+1} = y_i + q_{i+1}/2\Delta q_{i-1} + 5/12\Delta^2 q_{i-2} + 3/8\Delta^3 q_{i-3}.$$

В этом случае для начала процесса вычисления нужны четыре начальных значения y_0, y_1, y_2 и y_3 , которые можно определить любым известным методом. Далее, зная y_0, y_1, y_2 и y_3 , находят $q_0 = hy_0' = hf(x_0, y_0)$; $q_2 = hy_2' = hf(x_2, y_2)$; $q_3 = hy_3' = hf(x_3, y_3)$ и составляют таблицу конечных разностей величин q (табл. 1)

Таблица 1.

№ п/п	x_i	y_i	Δy_i	$y_i' = f(x; y)$	$q_i = hy_i'$	Конечные разности		
0	x_0	y_0		$f(x_0; y_0)$	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
1	x_1	y_1		$f(x_1; y_1)$	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$...
2	x_2	y_2		$f(x_2; y_2)$	q_2	Δq_2
3	x_3	y_3	Δy_3	$f(x_3; y_3)$	q_3
4	x_4	y_4
5

Метод Адамса заключается в продолжении данной таблицы разностей с помощью формулы для Δy_i . Используя уже вычисленные $q_3, \Delta q_2, \Delta^2 q_1$ и $\Delta^3 q_0$, расположенные в таблице диагонально, по формуле для Δy_i , полагая $n = 3$ получим

$$\Delta y_3 = q_3 + 0,5 \cdot \Delta q_2 + 5/12 \cdot \Delta^2 q_1 + 3/8 \cdot \Delta^3 q_0,$$

и $y_4 = y_3 + \Delta y_3$. Затем, используя x_4 и y_4 находят $f(x_4; y_4), q_4, \Delta q_3, \Delta^2 q_2$ и $\Delta^3 q_1$, т. е. новую диагональ. По этим данным определяют значение Δy_4 , которое тут же вносят в таблицу, и находят $y_5 = y_4 + \Delta y_4$.

Таблицу продолжают по описанному алгоритму до ее заполнения. Для того, чтобы грубых ошибок при реализации данной методики, достаточно просто следить за $\Delta^3 q_i$, так что бы они практически не изменялись, т. е. были постоянными. Этого можно добиться, подбирая h каждый раз такой, чтобы выражение для оценки погрешности было $|\Delta^3 q_{i-1} - \Delta^3 q_i| < \epsilon$. На практике же шаг h выбирают постоянным, руководствуясь неравенству $h^4 < \epsilon$, где ϵ – заданная точность решения.

Интерполяционный метод Адамса (уточняющая формула). Алгоритм интерполяционного метода Адамса можно представить в виде

$$y_{i+1} = y_i + q_{i+1} - C_1 \cdot \Delta q_i - C_2 \cdot \Delta^2 q_{i-1} - \dots - C_m \cdot \Delta^m q_{i-m+1} + \dots$$

где $q_i = h \cdot f(x_i, y_i)$;

$$C_m = \int_{-1}^0 \frac{t \cdot (t+1) \cdot \dots \cdot (t+m-1)}{m!} dt.$$

Для применения интерполяционной формулы Адамса на начальном этапе необходимо знать приближённое значение функции в точке x_{i+1} . Для этого можно использовать экстраполяционную формулу Адамса. Тогда интерполяционная формула Адамса служит, как уточняющая в методе Адамса.

На практике поступают следующим образом:

1) по экстраполяционной формуле Адамса вычисляют y_{n+1} ;
 2) затем это значение уточняют с помощью интерполяционной формулы \hat{y}_{n+1} ;

3) если $|\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}| < \varepsilon$, то в качестве уточнённого решения принимается \hat{y}_{n+1} , иначе производится уточнение для \hat{y}_{n+1} по интерполяционной формуле Адамса.

Пример. Экстраполяционным методом Адамса 3-го порядка в Excel с точностью до 0,00001 численно решить задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cdot \cos x, \quad y(0) = 0,5 \quad \text{на отрезке } [0; 1,7].$$

Решение. Шаг разбиения заданного отрезка $[0; 1,7]$ выберем из условия $h^4 < \varepsilon$, решив неравенство $h^4 < 0,00001$. Получим, что $0 < h < 0,056$. В качестве шага разбиения отрезка $[0; 1,7]$ возьмем $h = 0,05$. Первые три значения искомой функции вычислим с использованием метода Рунге-Кутты 4-го порядка, а для всех последующих алгоритм экстраполяционного метода Адамса.

Макет-таблица применения экстраполяционного метода Адамса покажем на рис. 19, а результаты расчетов на рис. 20.

	A	F	G	H	I	J	K	L	M
1									
2	x	y	Δy_i	$y_i' = f(x_i; y_i)$	$q_i = h y_i'$	Конечные разности			h
3	0	0,5		=F3^2*COS(A3)	=SMS3*H3	=I4-I3	=J4-J3	=K4-K3	0,05
4	=A3+SM\$3	=F3+(B4+2*C4+2*D4+E4)/6		=F4^2*COS(A4)	=SMS3*H4	=I5-I4	=J5-J4	=K5-K4	
5	=A4+SM\$3	=F4+(B5+2*C5+2*D5+E5)/6		=F5^2*COS(A5)	=SMS3*H5	=I6-I5	=J6-J5	=K6-K5	
6	=A5+SM\$3	=F5+(B6+2*C6+2*D6+E6)/6	=I6+1/2*J5+5/12*K4+3/8*L3	=F6^2*COS(A6)	=SMS3*H6	=I7-I6	=J7-J6	=K7-K6	
37	=A36+SM\$3	=F36+G36	=I37+1/2*J36+5/12*K35+3/8	=F37^2*COS(A3)	=SMS3*H37				

Рис. 19.

	A	F	G	H	I	J	K	L	M
2	x	y	Δy_i	$y_i' = f(x_i, y_i)$	$q_i = h y_i'$	Конечные разности			h
3	0	0,5		0,25	0,0125	0,00063253	1,3744E-05	-2,436E-06	0,05
4	0,05	0,512815		0,262850604	0,01313253	0,00064627	1,1308E-05	-3,119E-06	
5	0,1	0,526270		0,275576097	0,0137788	0,00065758	8,1894E-06	-3,943E-06	
6	0,15	0,540376	0,01477	0,288727756	0,01443639	0,00066577	4,2469E-06	-4,849E-06	
7	0,2	0,555145	0,01544	0,302043203	0,01510216	0,00067002	-6,02E-07	-5,877E-06	
8	0,25	0,570583	0,01611	0,315443588	0,01577218	0,00066942	-6,479E-06	-7,025E-06	
9	0,3	0,586690	0,01677	0,328831933	0,0164416	0,00066294	-1,35E-05	-8,283E-06	
10	0,35	0,603464	0,01743	0,34209069	0,01710453	0,00064943	-2,179E-05	-9,639E-06	
11	0,4	0,620896	0,01807	0,355079353	0,01775397	0,00062764	-3,143E-05	-1,107E-05	
12	0,45	0,638966	0,01868	0,367632251	0,01838161	0,00059622	-4,25E-05	-1,254E-05	
13	0,5	0,657649	0,01926	0,379556598	0,01897783	0,00055372	-5,504E-05	-1,4E-05	
14	0,55	0,676908	0,01979	0,390630989	0,01953155	0,00049868	-6,904E-05	-1,539E-05	
15	0,6	0,696695	0,02025	0,400604588	0,02003023	0,00042964	-8,444E-05	-1,663E-05	
16	0,65	0,716947	0,02064	0,409197295	0,02045986	0,0003452	-0,0001011	-1,76E-05	
17	0,7	0,737588	0,02094	0,416101221	0,02080506	0,00024413	-0,0001187	-1,821E-05	
18	0,75	0,758524	0,02112	0,420983808	0,02104919	0,00012546	-0,0001369	-1,831E-05	
19	0,8	0,779647	0,02118	0,423492963	0,02117465	-1,142E-05	-0,0001552	-1,777E-05	
20	0,85	0,800828	0,02109	0,423264531	0,02116323	-0,0001666	-0,000173	-1,646E-05	
21	0,9	0,821922	0,02084	0,419932352	0,02099662	-0,0003396	-0,0001894	-1,428E-05	
22	0,95	0,842764	0,02041	0,413141022	0,02065705	-0,000529	-0,0002037	-1,113E-05	
23	1	0,863172	0,01978	0,402561264	0,02012806	-0,0007327	-0,0002148	-6,987E-06	
24	1,05	0,882951	0,01894	0,387907565	0,01939538	-0,0009475	-0,0002218	-1,898E-06	
25	1,1	0,901890	0,01788	0,368957407	0,01844787	-0,0011693	-0,0002237	4,0188E-06	
26	1,15	0,919770	0,0166	0,345571058	0,01727855	-0,001393	-0,0002197	1,0552E-05	
27	1,2	0,936369	0,0151	0,317710559	0,01588553	-0,0016127	-0,0002091	1,7406E-05	
28	1,25	0,951464	0,01338	0,285456286	0,01427281	-0,0018218	-0,0001917	2,4209E-05	
29	1,3	0,964841	0,01146	0,249019287	0,01245096	-0,0020136	-0,0001675	3,0547E-05	
30	1,35	0,976297	0,00936	0,208747678	0,01043738	-0,0021811	-0,000137	3,5994E-05	
31	1,4	0,985655	0,00711	0,165125643	0,00825628	-0,0023181	-0,000101	4,0159E-05	
32	1,45	0,992760	0,00473	0,118764123	0,00593821	-0,0024191	-6,082E-05	4,2726E-05	
33	1,5	0,997493	0,00228	0,070382999	0,00351915	-0,0024799	-1,81E-05	4,3498E-05	
34	1,55	0,999774	-0,0002	0,02078544	0,00103927	-0,002498	2,5403E-05	4,2413E-05	
35	1,6	0,999563	-0,0027	-0,029174025	-0,0014587	-0,0024726	6,7815E-05		
36	1,65	0,996864	-0,0051	-0,078625436	-0,0039313	-0,0024048			
37	1,7	0,991723	-0,0075	-0,126720541	-0,006336				

Рис. 20.