

**Теоретическая механика** – наука об общих законах движения и равновесия материальных тел, и об возникающих при этом взаимодействиях между телами.

По характеру рассматриваемых задач теоретическую механику принято делить на 3 раздела:

1. Статика – равновесие тел под действием сил.
2. Кинематика – движение тел без учета сил.
3. Динамика – движение тел с учетом действующих сил.

## РАЗДЕЛ 1. СТАТИКА

### Тема 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ

#### § 1. Основные понятия статики

**1. Абсолютно твердое тело.** Все тела в теоретической механике считаются абсолютно твердыми. Это такое тело, расстояние между двумя точками которого не изменяется при любых воздействиях на него.

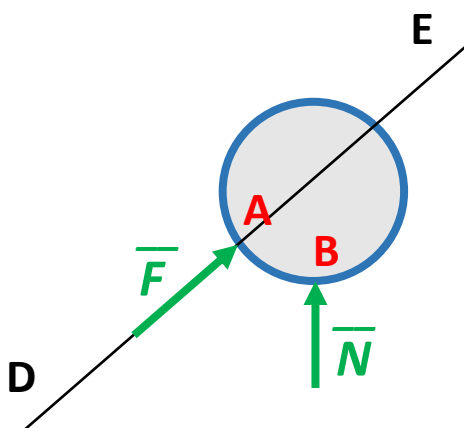
**2. Сила** – количественная мера механического взаимодействия двух тел. Сила является величиной векторной. Ее действие на тело определяется:

- 1) величиной,
- 2) направлением,
- 3) точкой её приложения.

Единица измерения в СИ (международной системе единиц измерения физических величин) – Н, в МКГСС (в технической системе единиц) – кГ.

$$1 \text{ кГ} \approx 9,81 \text{ Н}; 1 \text{ Н} \approx 0,102 \text{ кГ}.$$

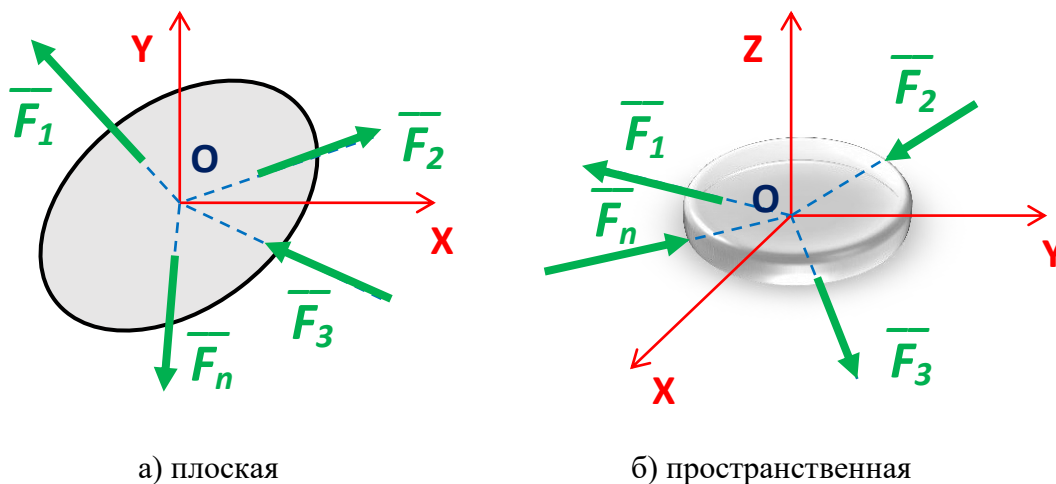
Силы будем обозначать буквами  $\vec{F}$ ,  $\vec{N}$ ,  $\vec{R}$  и т.д.



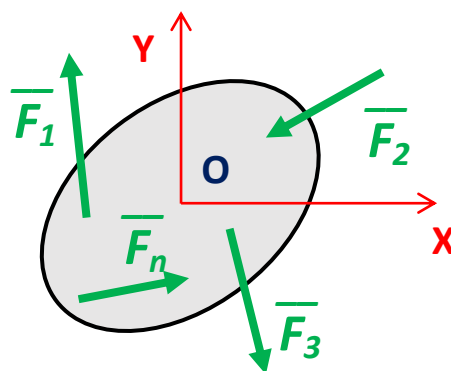
Прямая DE, вдоль которой направлена сила, называется линией действия силы.

**3. Система сил** – совокупность сил, действующих на тело одновременно. По внешнему признаку все системы сил будем делить на три вида:

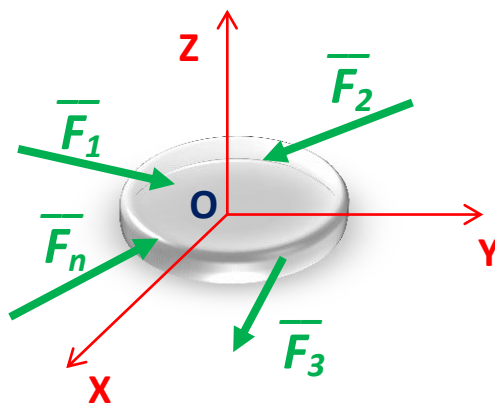
- I. **Система сходящихся сил** (плоская и пространственная) – такая система сил, линии действия которых сходятся в одной точке.



- II. **Произвольная плоская система сил** – такая система сил, линии действия которых расположены как угодно в одной плоскости и они не пересекаются в одной точке.



- III. **Произвольная пространственная система сил** – такая система сил, линии действия которых расположены как угодно в пространстве.



В зависимости от вида системы сил, действующей на тело зависит дальнейшее решение задачи.

#### 4. Свободное и несвободное тело.

**Свободное тело** – такое, которому из данного положения можно сообщить любое перемещение в пространстве.

**Несвободное тело** – на перемещения которого наложены ограничения. Эти ограничения (другие тела) называются связями.

**5. Эквивалентные системы сил (равнозначные по действию).** Если одну систему сил можно заменить другой системой, не изменяя при этом состояния покоя или движения, в котором находилось тело, то такие две системы сил называются эквивалентными.

**6. Уравновешенные системы сил (эквивалентная нулю)** – такая, под действием которой свободное твердое тело может находиться в равновесии.

**7. Равнодействующая сила** – такая, которая одна заменяет действие данной системы сил на тело.

**8. Уравновешивающая сила** – равная по величине равнодействующей силе, прямо противоположна ей по направлению и действует вдоль той же прямой.

#### 9. Силы внешние и внутренние.

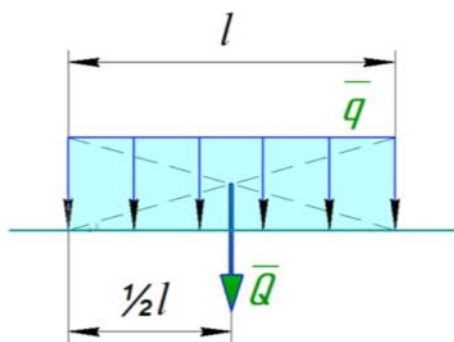
**Внешние** – действующие на точку данного тела со стороны других тел.

**Внутренние** – силы, с которыми частицы данного тела действуют друг на друга.

**10. Сосредоточенная сила** – это сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной его точке.

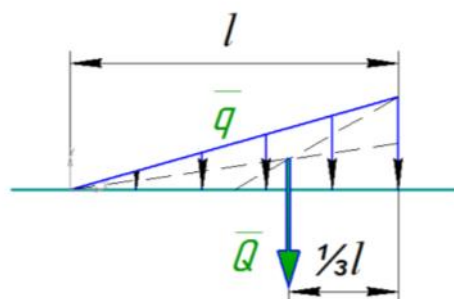
**11. Распределенные силы** – силы, действующие на частицы данного объема тела или частицы поверхности тела одновременно.

При решении задач распределенные силы, как правило, будем заменять сосредоточенной силой, приложенной в центре тяжести фигуры распределения (точка *C*).



$$Q = ql$$

где  $q$  – интенсивность распределения сил, кГ/м.



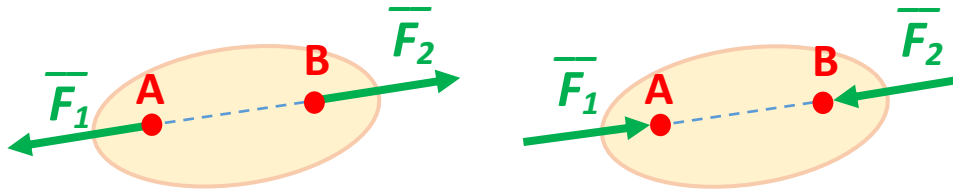
$$Q = 0,5ql$$

## § 2. Аксиомы статики

Это некоторые положения, принимаемые без математических доказательств. Они представляют собой результат обобщений многочисленных опытов и наблюдений над равновесием и движением тел, неоднократно подтвержденные практикой.

Из аксиом выводятся все теоремы и уравнения статики.

**Аксиома 1.** Свободное твердое тело под действием двух сил может находиться в равновесии тогда и только тогда, если эти силы равны по величине, противоположные по направлению и действуют вдоль одной прямой.

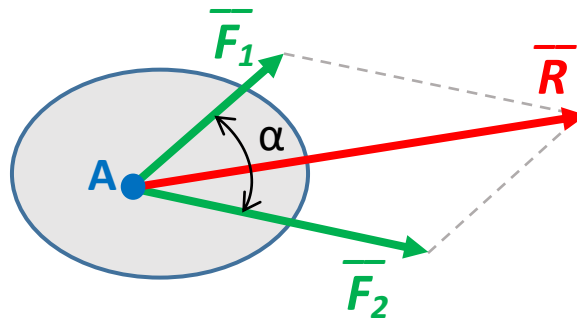


$$|\bar{F}_1| = |\bar{F}_2|.$$

**Аксиома 2.** Действие данной системы сил на тело не изменится, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.

**Аксиома 3.** Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, которая является диагональю параллелограмма, построенная на этих силах, как на сторонах.

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2. \quad (1.1)$$

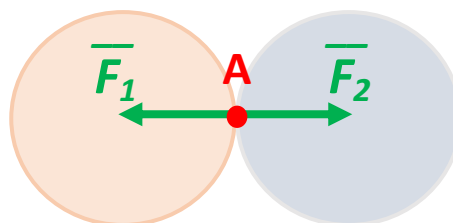


Силу  $\bar{R}$  называют векторной суммой сил  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$ .

Модуль равнодействующей силы определяется по формуле

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}. \quad (1.2)$$

**Аксиома 4 (3-ий закон Ньютона).** Два тела всегда действуют друг на друга с силами равными по величине, противоположными по направлению и направленными вдоль одной прямой.



$$|\bar{F}_1| = |\bar{F}_2|.$$

**Аксиома 5 (принцип отвердевания).** Равновесие деформируемого (изменяемого) тела не измениться, если тело считать отвердевшим.

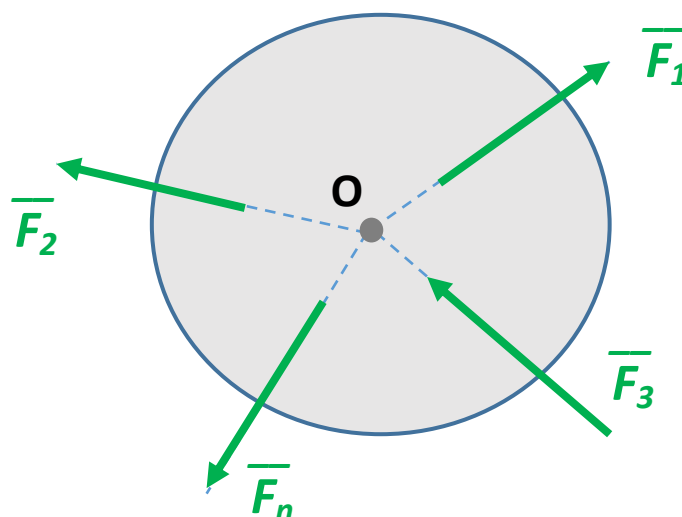
Эта аксиома позволяет пренебрегать незначительными деформациями тел и считать их абсолютно твердыми, и применять к ним все положения статики

**Аксиома 6 (принцип освобождаемости).** Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи, заменив их реакциями.

Эта аксиома позволяет увидеть все силы (активные и силы реакций связей) действующие на тело, а затем определить вид системы сил (сходящихся, произвольная плоская или произвольная пространственная) и выбрать соответствующие условия ее равновесия.

## Тема 2. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Такая система сил, линии действия сил у которой пересекаются в одной точке.



Система сходящихся сил могут быть пространственными и плоскими, т.е. расположенными в одной плоскости.

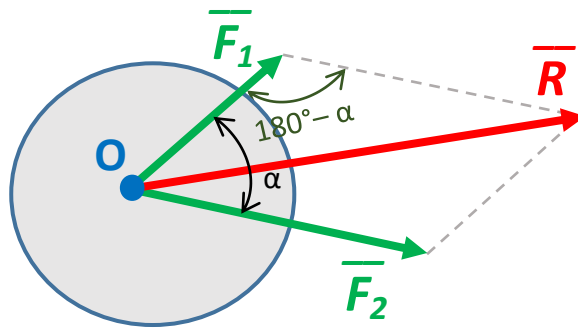
Основной вопрос: каким условиям должны удовлетворять силы, если тело под действием системы сходящихся сил находится в равновесии?

### § 1. Геометрический способ сложения сил

Величину, равную геометрической сумме сил какой-нибудь системы, будем называть главным вектором этой системы сил. Главный вектор нельзя смешивать с равнодействующей, потому что они иногда совпадают, а иногда и нет. Для многих систем сил равнодействующей вообще нет, геометрическую же сумму можно вычислить для любой системы сил и тем самым определить ее главный вектор.

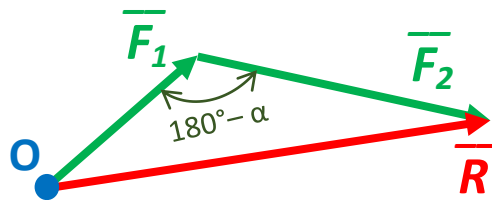
## Сложение двух сил.

1. Правило параллелограмма (аксиома параллелограмма).



$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  – векторная сумма.

2. Правило треугольника.

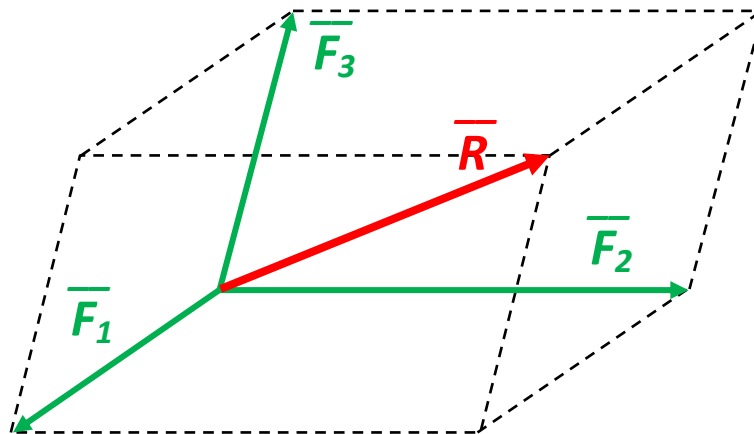


По теореме косинусов  $R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180 - \alpha)$ ,  
где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ .

Но  $\cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha$ , тогда

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}. \quad (2.1)$$

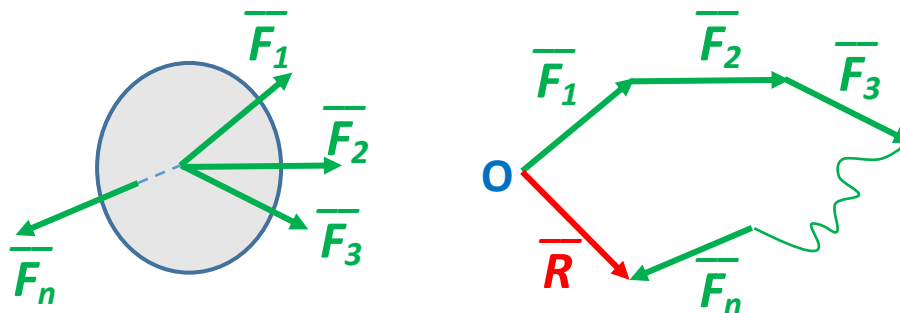
**Сложение трех сил не лежащих в одной плоскости.**



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Равнодействующая сила  $\vec{R}$  представляет диагональ параллелепипеда,  
ребрами которого являются силы  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_3$ .

Сложение системы сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ .



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k.$$

Упрощенно можно записать

$$\vec{R} = \Sigma \vec{F}_k. \quad (2.2)$$

Можно складывать силы тремя способами:

1. Правило параллелограмма.
2. Применять последовательно правило треугольника.
3. Способ силового многоугольника.

Для системы сходящихся сил главный вектор и равнодействующая системы сил совпадают.

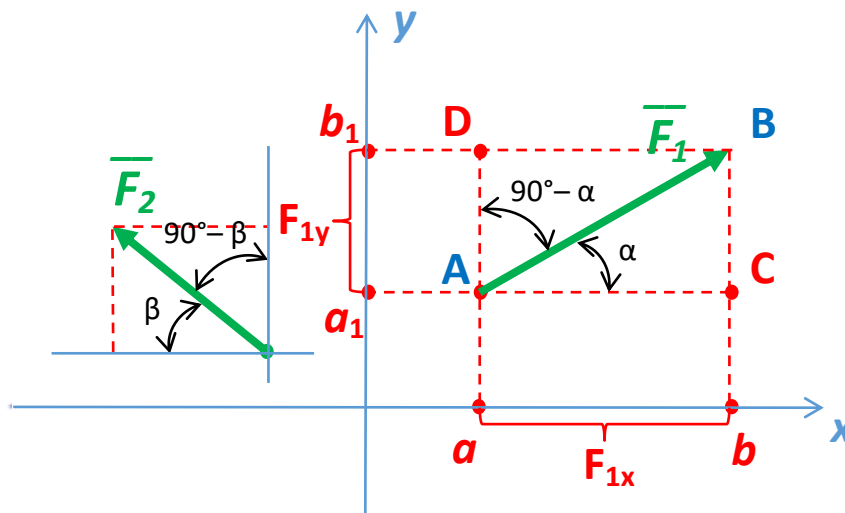
## § 2. Проекция силы на ось и на плоскость

$$F_{1x} = +ab = F_1 \cos \alpha$$

$$F_{1y} = +a_1 b_1 = F_1 \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$F_{2x} = -F_2 \cos \beta$$

$$F_{2y} = F_2 \cos(90^\circ - \beta)$$



Проекция силы на ось равна взятой со знаком «+» или «-» длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца силы на данную ось.

«+», если перемещение от начала проекции к ее концу (от  $a$  к  $b$ ) происходит в положительном направлении оси.

«-», если наоборот.

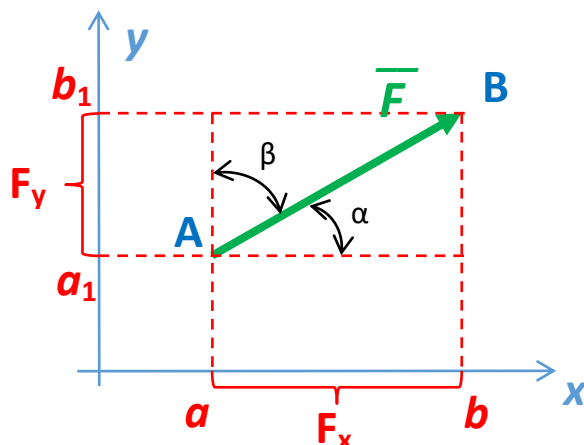
На практике величину проекции силы на ось удобно определять как катет прямоугольного треугольника, гипотенузой которого является сила.

$$F_x = AC = F \cos \alpha, \text{ если } \alpha = 30^\circ;$$

$$F_y = AD = F \cos(90^\circ - \alpha), \text{ если } 90^\circ - \alpha = 60^\circ.$$

### § 3. Определение силы по ее проекции

Пусть известны проекции силы на оси координат



$$F_x = +ab; F_y = +a_1b_1.$$

Величину вектора силы в этом случае можно определить по теореме Пифагора

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}. \quad (2.3)$$

Направление вектора силы можно установить по направляющим косинусам

$$\cos\alpha = F_x / F; \cos\beta = F_y / F.$$

Если проекций будет три, то формулы примут вид

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \quad (2.4)$$

$$\cos\alpha = F_x / F; \cos\beta = F_y / F; \cos\gamma = F_z / F.$$

### § 4. Аналитический способ сложения сил

Основывается на известной из математики теореме о проекции вектора суммы на ось.

**Теорема:** Проекция вектора суммы на какую-нибудь ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.

Пусть на тело действует система сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ . Тогда вектор суммы этой системы сил по формуле 2.2 имеет вид  $\vec{R} = \Sigma \vec{F}_k$ . (2)

Тогда на основании данной теоремы можем записать проекции вектора суммы:

$$\begin{aligned} R_x &= \Sigma F_{kx} \\ R_y &= \Sigma F_{ky} \\ R_z &= \Sigma F_{kz} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Зная эти проекции вектора суммы на оси координат можно определить его величину и направление по формулам 2.3 или 2.4, т.е

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \quad (2.6)$$

$$\cos\alpha = R_x / R; \cos\beta = R_y / R; \cos\gamma = R_z / R.$$

Тем самым мы сложим силы аналитически, т.е без построений.

## § 5. Условия равновесия системы сходящихся сил

Для равновесия системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы сил (равнодействующая) был равен нулю, т.е.  $\bar{R} = 0$ .

Условия, которым при этом должны удовлетворять силы, можно получить в геометрической или аналитической формах,

### **Геометрические условия равновесия системы сходящихся сил:**

Сила  $\bar{R}$  обратится в ноль тогда, когда конец последней силы совпадет с началом первой, т.е. силовой многоугольник должен быть замкнут.

### **Аналитические условия равновесия системы сходящихся сил:**

$R = 0$ , если одновременно в формуле (2.6)

$$R_x = 0, R_y = 0, R_z = 0.$$

Учитывая (2.5) получим, что должны выполняться следующие условия:

– Для пространственной системы сходящихся сил:

$$\Sigma F_{kx} = 0, \Sigma F_{ky} = 0, \Sigma F_{kz} = 0. \quad (2.7)$$

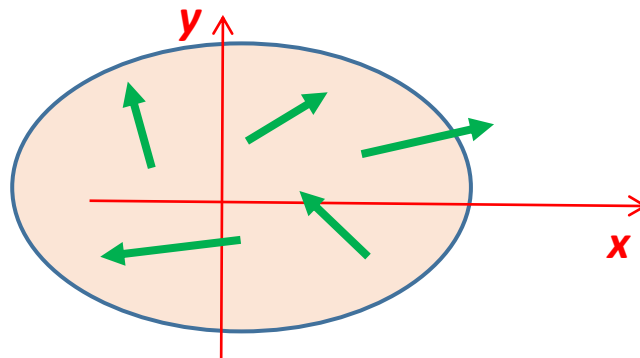
Для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на три взаимноперпендикулярные координатные оси были равны нулю.

– Для плоской системы сходящихся сил.

$$\Sigma F_{kx} = 0, \Sigma F_{ky} = 0. \quad (2.8)$$

## Тема 3. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

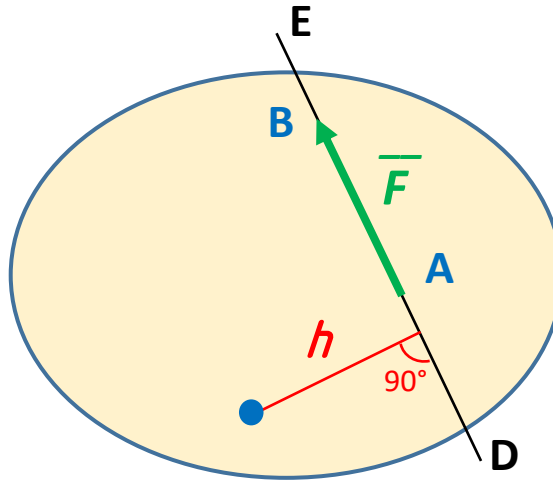
Такая, линии действия которых расположены как угодно в одной плоскостной они не пересекаются в одной точке.



*Основной вопрос:* каким условиям должны удовлетворять силы, если тело под действием произвольной плоской системы сил находится в равновесии?

### § 1. Момент силы относительно точки

Характеризует вращательный эффект действия силы, который определяется моментом силы относительно точки.



**Момент силы относительно точки** равен взятому со знаком «+» или «-» произведению силы на плечо:

$$m_o(\vec{F}) = \pm Fh \quad (3.1)$$

где  $h$  – плечо силы (длина перпендикуляра, опущенного из точки, относительно которой определяется момент силы ( $O$ ), на линию действия силы ( $DE$ )).

Последовательность определения момента

1. Провести линию действия силы ( $DE$ );
2. Из точки  $O$  опустить перпендикуляр на линию действия ( $DE$ );
3. Определить длину плеча  $h$ ;
4. Перемножить  $F \cdot h$ ;
5. Установить знак момента силы («+» или «-»)

Условимся, что момент силы относительно точки будем считать положительным, если сила стремится повернуть тело вокруг точки против хода часовой стрелки, а если по ходу часовой стрелки, то знак минус.

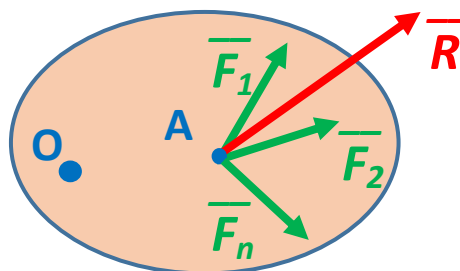


Бывают случаи, когда трудно определить плечо силы относительно точки.

В этом случае удобно применять теорему Вариньона о моменте равнодействующей (1687 г.).

## § 2. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей

Пусть на тело действует плоская система сходящихся сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ .



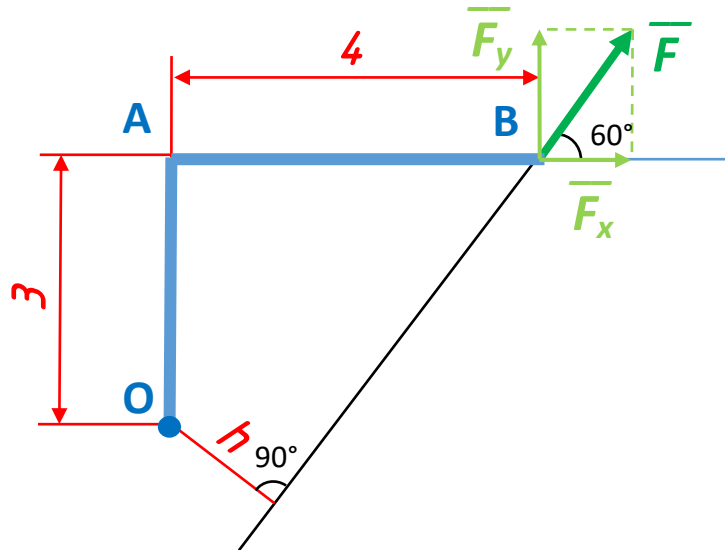
Сложим эти силы геометрически и получим равнодействующую.

$$\vec{R} = \Sigma \vec{F}_k. \quad (3.2)$$

Тогда теорема звучит так: момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно любой точки, расположенной в плоскости действия сил, равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно той же точки.

$$m_o(\vec{R}) = m_o(\vec{F}_k). \quad (3.3)$$

Она имеет важное практическое применение. Рассмотрим на примере. Определить момент силы относительно точки  $O$ .



$$m_o(\vec{F}) = +Fh = m_o(\vec{F}_x) + m_o(\vec{F}_y) = -F_x \cdot 3 + F_y \cdot 4 = -F \cos 60^\circ \cdot 3 + F \cos 30^\circ \cdot 4.$$

Так как плечо  $h$  определить трудно, то воспользуемся теоремой Вариньона (3.3) и силу  $\vec{F}$  разложим на две удобные взаимноперпендикулярные составляющие и определим сумму моментов этих составляющих.

Обычно промежуточные рассуждения опускают и сразу записывают

$$m_o(\vec{F}) = -F \cos 60^\circ \cdot 3 + F \cos 30^\circ \cdot 4.$$

Момент силы относительно точки равен нулю, если линия действия силы проходит через точку. В этом случае плечо силы  $h = 0$ .

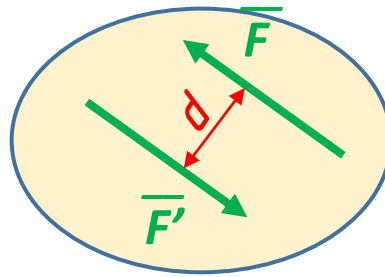
Момент силы не изменится относительно точки, если силу перенести вдоль ее линии действия в любую другую точку тела.

### § 3. Пара сил. Ее свойства

**Пара сил** – это система двух равных по величине, параллельных и направленных в противоположные стороны сил. Система сил, образующих пару, очевидно, не находится в равновесии (см. аксиому 1).

Расстояние между линиями действия сил пары  $d$  называется плечом пары. Эффект действие пары сил на тело сводится к вращательному и оценивается моментом пары.

$$m(\vec{F}, \vec{F}') = \pm Fd. \quad (3.4)$$



Если пара стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, то принимаем знак «+»; если по ходу - «-».

Свойства пары сил:

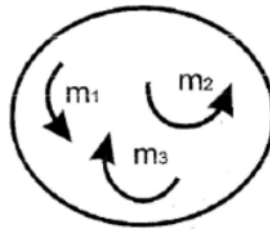
1. Данную пару можно переносить в плоскости её действия или в плоскость ей параллельную в любое место тела. Действия пары сил на тело не изменится.

2. Действие пары сил на тело не изменится, если изменить величину сил пары и плечо, сохранив при этом величину и знак момента пары.

3. Данную пару можно заменить другой парой таким же моментом и действующей в той же плоскости.

4. Алгебраическая сумма проекций двух сил пары на любую ось равна нулю.

Вывод: Так как для пары важен её момент, а не величина сил и её плечо, то на расчетных схемах пары сил изображаем в виде круговых стрелок с обозначением их момента.

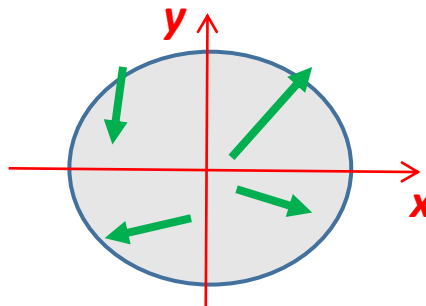


*Условие равновесия тела при действии системы пар:* тело под действием системы пар может находиться тогда в равновесии, если алгебраическая сумма моментов действующих пар равна нулю, т.е.

$$\sum m_k = 0. \quad (3.5)$$

#### § 4. Условия равновесия произвольной плоской системы сил

Первая форма условий равновесия (основная):



$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum m_O(\bar{F}_k) = 0. \quad (3.6)$$

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно суммы проекций всех сил на две взаимноперпендикулярные координатные оси и сумма моментов всех сил относительно любой точки были равны нулю.

Вторая форма условий равновесия:

$$\Sigma F_{ky} = 0, \Sigma m_A(\overline{F}_k) = 0, \Sigma m_B(\overline{F}_k) = 0, \quad (3.7)$$

где ось  $Oy$  неперпендикулярна отрезку  $AB$ .

Для произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно суммы моментов всех сил относительно двух точек ( $A$  и  $B$ ) и сумма проекций всех сил на ось неперпендикулярную прямой  $AB$  были равны нулю.

Третья форма условий равновесия:

$$\Sigma m_A(\overline{F}_k) = 0, \Sigma m_B(\overline{F}_k) = 0, \Sigma m_C(\overline{F}_k) = 0, \quad (3.8)$$

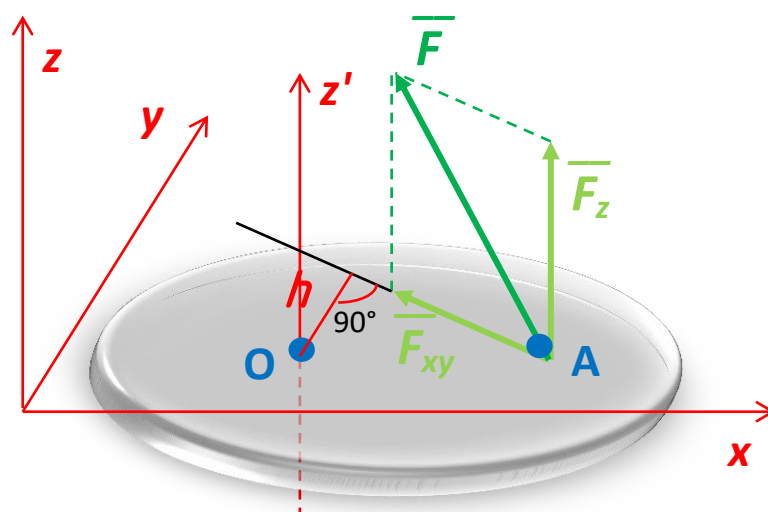
где точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  не лежат на одной прямой.

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно суммы моментов всех сил относительно трех любых точек, расположенных в плоскости действия сил и не лежащих на одной прямой, были равны нулю.

## Тема 4. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

### § 1. Момент силы относительно оси

Тело может вращаться вокруг оси  $z$  под действием силы  $F$ . Вращательный эффект действия силы относительно оси оценивается ее моментом относительно этой оси. Что бы его определить проведем через точку  $A$  плоскость  $xy$  перпендикулярную оси  $z$ , которая пересечет ось  $z$  в некоторой точке  $O$ .



Разложим силу  $\overline{F}$  на две составляющие:

Первая –  $\overline{F}_z$  параллельная оси  $z$ ,

Вторая –  $\overline{F}_{xy}$ , которая лежит в плоскости  $xy$  и является одновременно проекцией силы  $\overline{F}$  на данную плоскость.

Из двух составляющих сил поворачивать тело относительно оси  $z$  будет составляющая  $\overline{F}_{xy}$ .

Тогда момент силы  $\overline{F}$  относительно оси  $z$  будет равен моменту силы  $\overline{F}_{xy}$  относительно этой оси  $z$ , который в свою очередь равен моменту силы  $\overline{F}_{xy}$  относительно точки  $O$ , точки пересечения оси  $z$  с плоскостью  $xy$ , и измеряется произведением модуля этой силы  $\overline{F}_{xy}$  на плечо  $h$ .

$$m_z(\overline{F}) = m_z(\overline{F}_{xy}) = m_o(\overline{F}_{xy}) = F_{xy}h.$$

Окончательно получаем, что момент силы равен

$$m_z(\overline{F}) = \pm F_{xy}h. \quad (4.1)$$

Вывод: момент силы относительно оси равен взятому со знаком «+» или «-» моменту проекции этой силы на плоскость перпендикулярно взятому оси, относительно точки пересечения оси с данной плоскостью.

Условимся момент силы относительно оси считать положительным, если с положительного конца оси поворот тела составляющий  $\overline{F}_{xy}$  виден происходящим против хода часовой стрелки, и отрицательным, если по ходу часовой стрелки.

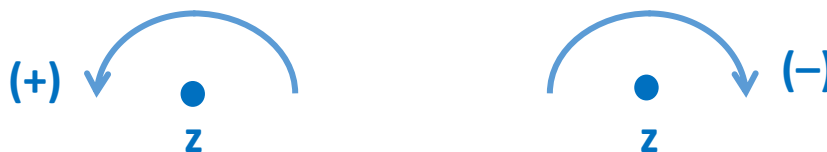
*Последовательность определения момента силы относительно оси:*

1. Провести плоскость перпендикулярную оси (плоскость  $xy \perp z$ ). В любом месте.

2. Спроецировать силу на данную плоскость и определить величину этой проекции ( $F_{xy} = !$ ).

3. Определить момент полученной проекции относительно точки пересечения оси с плоскостью, как это было при определении момента силы относительно точки в плоской системе сил. Иногда, когда трудно будет определить плечо удобно будет применить теорему Вариньона ( $F_{xy}h$ ).

4. Установить знак момента силы.



*Момент силы относительно оси равен нулю в случаях:*

1. Линия действия силы пересекает ось в любом месте ( $h = 0$ ).

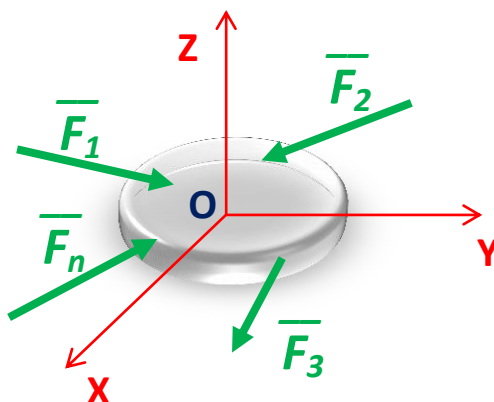
2. Сила или линия действия силы параллельна оси ( $F_{xy} = 0$ ).

На практике, при решении задач, при определении момента силы относительно оси бывает удобно силу сразу разложить на две или три взаимно перпендикулярные составляющие параллельные выбранным осям и применить теорему Вариньона о моменте равнодействующей, которая справедлива и относительно оси.

## § 2. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил

Это такая система сил, линии действия которых расположены как угодно в пространстве, и они не пересекаются в одной точке.

Рассмотрим такую систему сил.



Пусть тело находится в равновесии, то оно не перемещается вдоль трех взаимно перпендикулярных осей, а это возможно лишь тогда, когда суммы проекций всех сил на эти оси координат равны нулю.

$$\begin{array}{l} \text{Нет перемещений тела вдоль осей} \\ \text{Нет вращений тела вокруг осей} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \Sigma F_{kx} = 0, \\ \Sigma F_{ky} = 0, \\ \Sigma F_{kz} = 0, \\ \Sigma m_x(\bar{F}_k) = 0, \\ \Sigma m_y(\bar{F}_k) = 0, \\ \Sigma m_z(\bar{F}_k) = 0. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

**Условия равновесия произвольной пространственной системы сил.** Тело и не вращается относительно этих осей, а это возможно лишь тогда, когда суммы моментов всех сил относительно этих осей равны нулю.

Вывод: для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно суммы проекции всех сил на три взаимно перпендикулярные оси и суммы моментов всех сил относительно этих осей были равны нулю.

## Тема 5. ТРЕНИЕ

### § 1. Трение скольжения

Сила сопротивления, возникающая в точке контакта двух тел при стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого называется силой трения скольжения.

Рассмотрим основные понятия явления трения.

1. Сила трения скольжения изменяется от 0 до некоторой предельной величины, которую будем называть *предельной силой трения* ( $F_{\text{тр}}$ ), и она

направлена в сторону, противоположную той, куда силы стремятся сдвинуть тело.

2. Величина предельной силы трения скольжения равна произведению статического коэффициента трения скольжения на величину нормальной реакции в точке контакта двух тел.

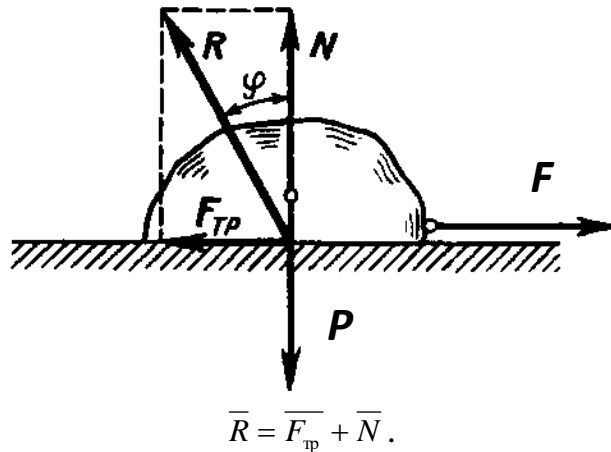
$$F_{\text{тр}} = Nf_0, \quad (5.1)$$

где  $f_0$  – статический коэффициент трения скольжения; безразмерная величина, которая определяется опытным путем и зависит от материала соприкасающихся поверхностей и их состояния (обработка, влажность, смазка и т.п.)

3. Величина силы трения скольжения в широких пределах не зависит от площадей сопрягаемых поверхностей.

Реакция шероховатой поверхности будет состоять из двух сил:

- нормальная реакция  $\bar{N}$ ;
- перпендикулярная ей сила трения скольжения  $\bar{F}_{\text{тр}}$ .



При увеличении силы  $\bar{F}$  будет увеличиваться и сила трения до предельной величины  $\bar{F}_{\text{тр}}$ .

При этом будет увеличиваться и угол между нормальной реакцией ( $\bar{N}$ ) и полной реакцией, и шероховатой поверхности (силы  $\bar{R}$ ) до некоторой предельной величины  $\varphi_0$ .

Предельное значение угла  $\varphi_0$  называется углом трения. Значение угла трения

$$\text{tg} \varphi_0 = \frac{F_{\text{мп}}}{N} = \frac{Nf_0}{N} = f_0 \text{ или } \text{tg} \varphi_0 = f_0. \quad (5.2)$$

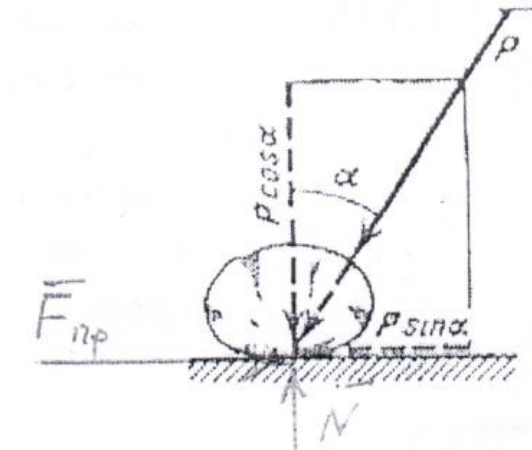
Если сила  $\bar{F}$  повернется на  $360^\circ$ , то повернется и сила  $\bar{R}$  и опишет при этом коническую поверхность, которую называют конусом угла трения.

При равновесии полная реакция  $R$ , в зависимости от сдвигающих сил, может проходить где угодно внутри угла трения. Когда равновесие становится предельным, реакция будет отклонена от нормали на угол  $\varphi_0$ .

Если к телу, лежащему на шероховатой поверхности, приложить силу  $\bar{P}$ , образующую угол  $\alpha$  с нормалью, то тело сдвинется только тогда, когда сдвигающее усилие  $P \sin \alpha$  будет больше  $F_{\text{тр}} = f_0 P \cos \alpha$  (мы считаем  $N = P \cos \alpha$ ,

пренебрегая весом тела). Но неравенство  $P \sin \alpha > f_0 P \cos \alpha$ , в котором  $f_0 = \operatorname{tg} \varphi_0$ , выполняется только при  $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \varphi_0$ , т.е. при  $\alpha > \varphi_0$ .

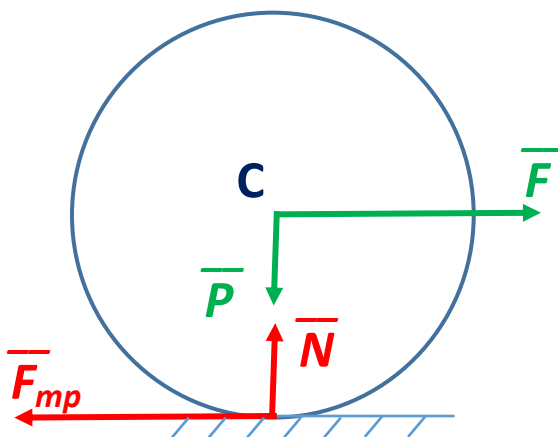
Следовательно, никакой силой, образующей с нормалью угол  $\alpha$ , меньший угла трения  $\varphi_0$  (внутри конуса трения) тело вдоль данной поверхности сдвинуть нельзя. Этим объясняются известные явления заклинивания или самоторможения тел.



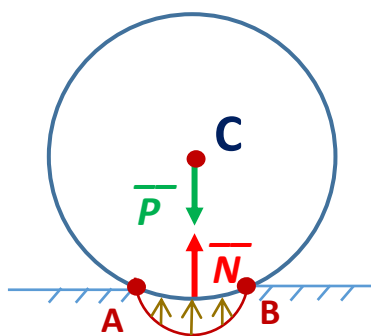
Изучение равновесия тел с учетом трения сводится обычно к рассмотрению предельного положения равновесия, когда сила трения достигает своего наибольшего значения  $\overline{F}_{\text{тр}}$ . При аналитическом решении задач реакцию шероховатой связи в этом случае изображают двумя составляющими  $\overline{N}$  и  $\overline{F}_{\text{тр}}$ , где  $F_{\text{тр}} = N f_0$ . Затем составляют обычные условия равновесия статики, подставляют в них место величин  $F_{\text{тр}}$  величину  $N f_0$  и, решая полученные уравнения, определяют искомые величины.

## § 2. Трение качения

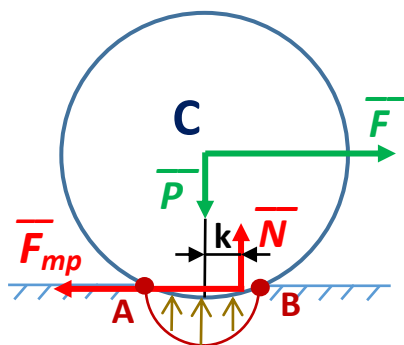
Жесткий цилиндрический каток радиуса  $R$  и веса  $P$  на жесткой поверхности (поверхности не деформируются). Качение начнется при любом значении  $\overline{F}$ .



## Поверхности деформируемые



В этом случае, если приложить силу  $F$ , то давление в точке  $A$  будет уменьшаться, а в точке  $B$  увеличиваться. В результате суммарная нормальная реакция сместится на некоторое расстояние  $k$  в сторону возможного качения катка.



Это предельное расстояние  $k$ , на которое смещается нормальная реакция называется коэффициент трения качения. Это размерная величина (см, мм, м).

Смещенная нормальная реакция создает момент, препятствующий качению катка. Его называют момент трения качения. Величина этого момента равна

$$M_{\text{тр}} = Nk. \quad (5.3)$$

Определим предельную силу  $F_{\text{пр}}$ , при которой начнется качение катка. Для этого составим сумму моментов всех сил относительно точки «O».

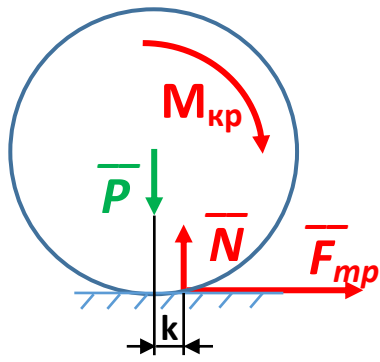
$$\sum m_O(\bar{F}_k) = 0: -F_{\text{пр}}R + Nk = 0.$$

Тогда

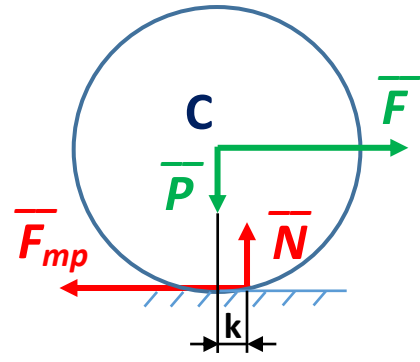
$$F_{\text{пр}} = \frac{k}{R} \cdot N. \quad (5.4)$$

Если  $F > F_{\text{пр}}$ , то начнется качение катка. Чтобы тянуть катка без качения нужно приложить силу  $F$  больше предельной силы трения.

Отношение  $k/R$  значительно меньше статического коэффициента трения  $f_0$ , поэтому в технике, когда это возможно, стремятся заменить скольжение качением (колеса, катки, шариковые подшипники и т.п.) Этим и обосновано и появление железной дороги.



Ведущее колесо

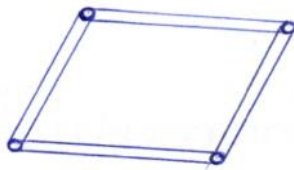


Ведомое колесо

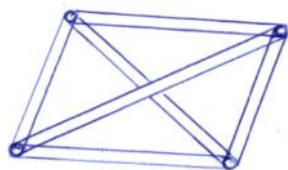
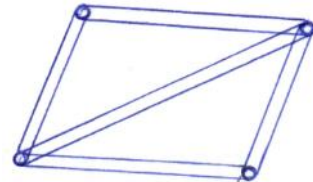
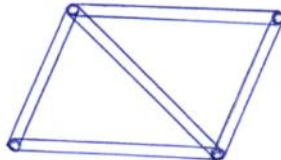
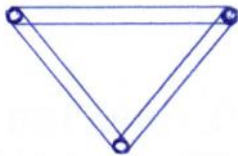
## Тема 6. РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ (ФЕРМ)

### § 1. Понятие ферма

**Ферма** – это жесткая решетчатая конструкция, состоящая из прямолинейных невесомых стержней, соединенных на концах идеальными шарнирами.



Это не ферма

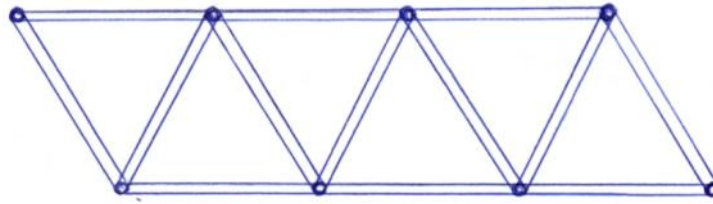


С лишним стержнем

Места соединений стержней между собой называют *узлами*.

Так как ферма состоит из идеальных стержней, то нагрузку они воспринимают в узлах, а стержни работают на растяжение и сжатие.

Ограничимся рассмотрением только лишь плоских ферм образованных из треугольников. Рассмотрим, какое должно быть оптимальное число стержней этой фермы. Для образования первых трех узлов достаточно трех стержней.



3 первых узла  $\rightarrow$  3 стержня

Присоединение любого следующего узла требуется двое стержней.

Если всего узлов  $n$ , то для присоединения  $(n - 3)$  требуется  $2(n - 3)$  стержня. Тогда всего стержней ферме может быть  $K$  количество стержней

$$K = 3 + 2(n - 3) = 2n - 3.$$

$$K = 2n - 3.$$

(6.1)

Если  $K' > K$ , то ферма с лишними стержнями.

Если  $K' < K$ , то не жесткая конструкция.

$$K = 2 \cdot 6 - 3 = 9.$$

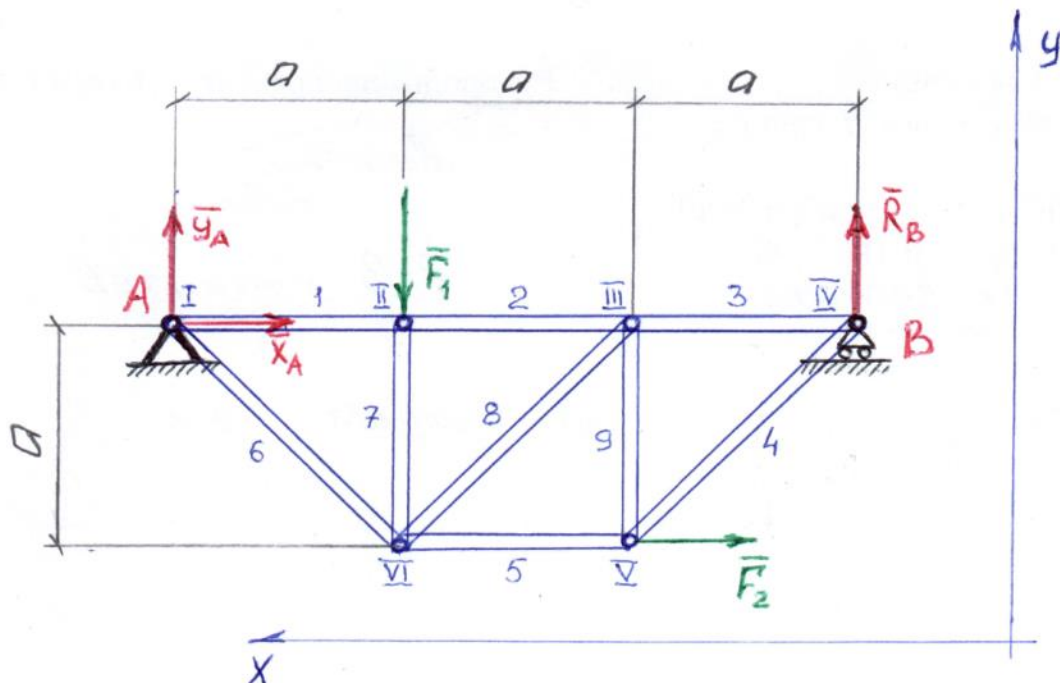
## § 2. Методы расчета ферм

Рассчитать ферму – это значит определить опорные реакции и усилий из каждой ее стержней.

**Пример:**

Дано:  $F_1 = 40$  кН,  $F_2 = 10$  кН.

Найти: опорные реакции  $X_A, Y_A, R_B$ , усилия стержней данных ферм.



Решение:

1. Определение опорные реакции.

Рассмотрим равновесие фермы в целом, освободим ее от внешних связей в точках  $A$  и  $B$ . Так как на ферму действует произвольная плоская система

сил, то выбираем вторую форму условий равновесия, после этого составляем и решаем уравнения:

$$\begin{array}{l} \Sigma F_{kx} = 0 \\ \Sigma m_A(\overline{F_k}) = 0 \\ \Sigma m_B(\overline{F_k}) = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} X_A + F_2 = 0, \\ X_A = -F_2 = -10 \text{ кН.} \\ -F_1 a + 3R_B a + F_2 a = 0, \\ R_B = \frac{F_1 - F_2}{3} = \frac{40 - 10}{3} = 10 \text{ кН.} \\ 2F_1 a - 3Y_A a + F_2 a = 0, \\ Y_A = \frac{2F_1 + F_2}{3} = \frac{2 \cdot 40 + 10}{3} = 30 \text{ кН.} \end{array} \right.$$

Проверка:

$$\Sigma F_{ky} = 0 \quad | \quad Y_A - F_1 + R_B = 30 - 40 + 10 = 40 - 40 = 0.$$

Так как уравнений можем составить три, то ферма должна быть закреплена такими опорами, чтобы неизвестных сил реакций было не более трех.

Проверочное количество стержней:

$$K = 2n - 3 = 2 \cdot 6 - 3 = 9.$$

2. *Определение усилий стержней.*

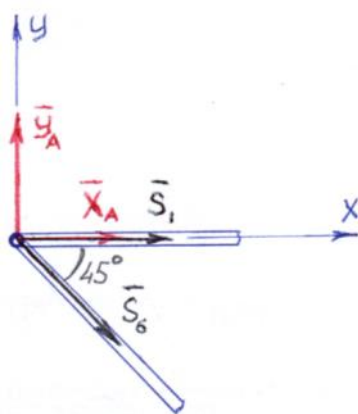
Есть различные методы расчета усилий стержней. Рассмотрим следующие:

Метод 1 (вырезания узлов). Так как ферма находится в равновесии, то и в равновесии находится каждый узел. Их можно вырезать, показав усилия, действующие на них.

Это силы реакции стержня, которые направляем от узла к линиям разреза, предполагая, что стержни работают на растяжение.

Так как на каждый узел действует плоская система сходящихся сил, то можно будет составить только два уравнения равновесия.

Рассмотрим I узел.



$$\begin{array}{l} \Sigma F_{kx} = 0 \\ \Sigma F_{ky} = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} X_A + S_1 + S_6 \cos 45^\circ = 0 \\ Y_A - S_6 \cos(90^\circ - 45^\circ) = 0 \end{array} \right.$$

Тогда

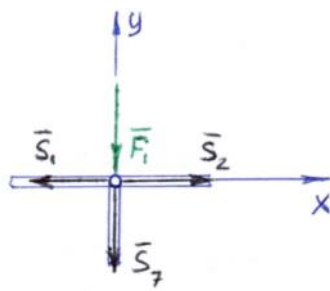
$$S_6 = \frac{Y_A}{\cos(90^\circ - 45^\circ)} = \frac{30}{\cos 45^\circ} \approx 42,4 \text{ кН.}$$

(растяжение)

$$S_1 = -X_A - S_6 \cos 45^\circ = -(-10) - 30 = -20 \text{ кН.}$$

(сжатие)

Рассмотрим II узел.



$$\begin{cases} \Sigma F_{kx} = 0 \\ \Sigma F_{ky} = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} -S_1 + S_2 = 0 \\ -F_1 - S_7 = 0 \end{array} \right.$$

Тогда

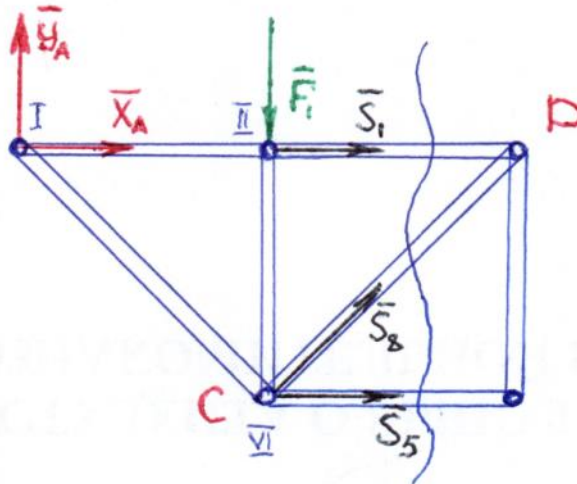
$$S_2 = S_1 = -20 \text{ кН. (сжатие)}$$

$$S_7 = -F_1 = -40 \text{ кН. (сжатие)}$$

Данный метод используется, если нам нужно определить усилие во всех стержнях фермы.

Метод 2 (метод сечений). Ферму рассекают сечением на 2 части и рассматривают равновесие одно из них.

Силу реакций разрезанных стержней направляют от узлов к линии разреза, считая, что они работают на растяжение. Так как на **расм...** действует произвольно плоская система сил, то составляют три уравнения и поэтому можно определить три неизвестные. Поэтому сечение провести так, чтобы проходило не более чем по трем неизвестным. Данный метод применяется для проверочных расчетов или когда требуется определить усилие в одном стержне.



$$\begin{array}{l} \Sigma F_{ky} = 0 \\ \Sigma m_C(\overline{F_k}) = 0 \\ \Sigma m_D(\overline{F_k}) = 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} Y_A - F_1 + S_8 \cos 45^\circ = 0, \\ S_8 = \frac{F_1 - Y_A}{\cos 45^\circ} = \frac{40 - 30}{\cos 45^\circ} \approx 14,1 \text{ кН.} \\ -X_A a - Y_A a - S_1 a = 0, \\ S_1 = -X_A - Y_A = -(-10) - 30 = -20 \text{ кН.} \\ F_1 a - 2Y_A a + S_5 a = 0, \\ S_5 = -F_1 + 2Y_A = -40 + 2 \cdot 30 = 20 \text{ кН.} \end{array} \right.$$

Проверка:

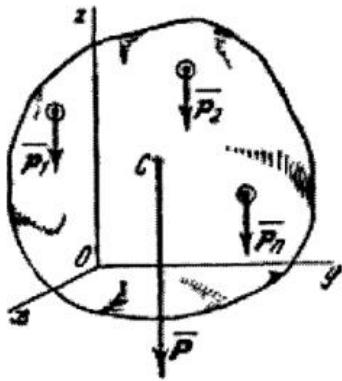
$$\Sigma F_{kx} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} X_A + S_1 + S_5 + S_8 \cos 45^\circ = -10 - 20 + 20 + 14,1 \cos 45^\circ = \\ = 30 - 30 = 0. \end{array} \right.$$

## Тема 7. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

### § 1. Центр тяжести твердого тела

На любую частицу тела, находящегося вблизи земной поверхности, действует направленная вертикально вниз сила, называемая силой тяжести. Сила тяжести является равнодействующей силы притяжения Земли и центробежной силы, возникающей вследствие вращения тела вместе с Землей.

Для тел, размеры которых очень малы по сравнению с земным радиусом, силы тяжести частиц тела можно считать параллельными друг другу и сохраняющими для каждой частицы постоянную величину при любых поворотах тела. Поле тяжести, в котором выполняются эти два условия, называют однородным полем тяжести.



Равнодействующую сил тяжести  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$ , действующих на частицы данного тела, обозначим  $\vec{P}$ . Модуль этой силы равен весу тела и определяется равенством  $\vec{P} = \sum \vec{p}_k$ .

Равнодействующая  $\vec{P}$  сил  $\vec{p}_k$  будет при любых положениях тела проходить через одну и ту же неизменно связанную с телом точку  $C$ , являющуюся центром параллельных сил тяжести  $\vec{p}_k$ . Эта точка и называется центром тяжести тела. Таким образом, центром тяжести твердого тела называется неизменно связанная с этим телом точка, через которую проходит линия действия равнодействующей, сил тяжести частиц данного тела при любом положении тела, в пространстве. Координаты центра тяжести, определяются формулами:

$$\begin{aligned}x_c &= (p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n) / P \rightarrow x_c = \Sigma(p_kx_k) / P; \\y_c &= (p_1y_1 + p_2y_2 + \dots + p_ny_n) / P \rightarrow y_c = \Sigma(p_ky_k) / P; \\z_c &= (p_1z_1 + p_2z_2 + \dots + p_nz_n) / P \rightarrow z_c = \Sigma(p_kz_k) / P,\end{aligned}\tag{7.1}$$

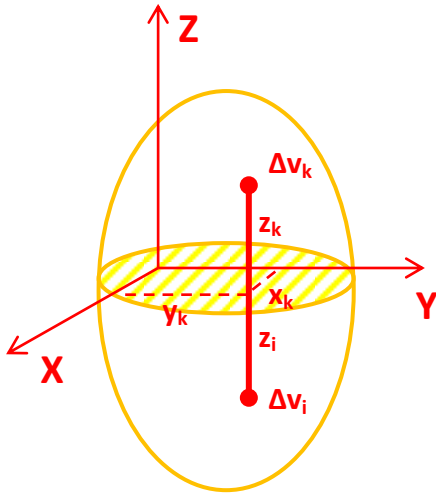
где  $x_k, y_k, z_k$  – координаты точек приложения сил тяжести  $p_k$  частиц тела.

Отметим, что согласно определению *центр тяжести* – это точка геометрическая; она может лежать и вне пределов данного тела (например, для кольца).

### § 2. Способы определения координат центра тяжести

Исходя из полученных выше формул, можно указать следующие конкретные способы определения координат центров тяжести тел.

1. Случай симметрии. Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии, или в центре симметрии.



Допустим, что однородное тело имеет плоскость симметрии. Совместим с этой плоскостью координатную плоскость  $Oxy$ .

Тогда каждому элементу объема тела  $\Delta v_k$ , положение которого определяется координатами  $x_k, y_k, z_k$

будет соответствовать элемент объема тела  $\Delta v_i$  с координатами  $x_i, y_i, z_i$ , причем  $x_k = x_i; y_k = y_i; z_k = -z_i$

$$\Delta v_k = \Delta v_i.$$

Следовательно,  $z_c = \frac{\Delta v_k z_k}{V} = 0$ , т. к. в сумме  $\Delta v_k z_k$  все члены попарно уни-

чтожаются.

Т. к.  $z_c = 0$ , то центр тяжести лежит в плоскости  $Oxy$  (пл. симметрии).

Аналогичные результаты получаются и в случаях, когда тело имеет ось или центр симметрии.

Из свойства симметрии следует, что центр тяжести однородного круглого кольца, круглой или прямоугольной пластины, прямоугольного параллелепипеда, шара и других однородных тел, имеющих центр симметрии, лежит в геометрическом центре (центре симметрии) этих тел.

1. Метод разбиения. Этот метод заключается в том, что тело разбивают на наименьшее число частей, силы тяжести и положение центров тяжести которых известны, после чего применяют выведенные ранее формулы.

2. Метод дополнения. Этот способ является частым случаем способа разбиения. Он применяется к телам, имеющим вырезы, если центры тяжести тела без выреза и вырезанной части известны.

3. Интегрирование. Если тело нельзя разбить на несколько конечных частей, положения центров тяжести, которых известны, то тело разбивают вначале на произвольные малые объемы  $\Delta v_k$ , для которых формулы (7.1) примут вид.

$$z_c = \frac{\Delta v_k z_k}{V} = 0 \text{ и т. д.}$$

где,  $x_k, y_k, z_k$  – координаты некоторой точки, лежащей внутри объема  $\Delta v_k$ .

Затем в полученном равенстве переходят к пределу, устремляя  $\Delta v_k$  к нулю. Тогда стоящие в числителе суммы обращаются в интегралы, распространенные на весь объем тела и формулы дают в пределе:

$$x_c = \frac{1}{V} \int_{(v)} x \cdot dv; \quad y_c = \frac{1}{V} \int_{(v)} y \cdot dv; \quad z_c = \frac{1}{V} \int_{(v)} z \cdot dv. \quad (7.2)$$

Аналогично для площадей

$$x_c = \frac{1}{S} \int_{(s)} x \cdot ds; \quad y_c = \frac{1}{S} \int_{(s)} y \cdot ds. \quad (7.3)$$

Для линий

$$x_c = \frac{1}{L} \int x \cdot dl ; \quad y_c = \frac{1}{L} \int y \cdot dl ; \quad z_c = \frac{1}{L} \int z \cdot dl . \quad (7.4)$$

Применение этих формул к определению координат центра тяжести рассмотрим в следующем параграфе.

4. Экспериментальный способ. Центры тяжести неоднородных тел сложной конфигурации (самолет, трактор, паровоз и т.п.) можно определить экспериментально.

Один из возможных экспериментальных методов – метод подвешивания. Он состоит в том, что тело подвешивают на нити или тросе за различные его точки. Направление нити будет каждый раз давать направление силы тяжести. Точка пересечений этих направлений определяет центр тяжести тела.

### § 3. Координаты центров тяжести однородных тел

Для однородного тела вес  $p_k$  любой его части пропорционален объему  $v_k$  этой части:  $p_k = \gamma v_k$ , а вес  $P$  всего тела пропорционален объему  $V$  этого тела  $p_k = \gamma V$ , где  $\gamma$  – вес единицы объема.

Подставив эти значения  $P$  и  $p_k$  в предыдущие формулы, мы заметим, что в числителе у как общий множитель выносится за скобку и сокращается с  $\gamma$  в знаменателе. В результате получим:

$$x_c = \Sigma(v_k x_k) / V ; \quad y_c = \Sigma(v_k y_k) / V ; \quad z_c = \Sigma(v_k z_k) / V . \quad (7.5)$$

Как видно, центр тяжести однородного тела зависит только от его геометрической формы, а от величины  $\gamma$  не зависит. По этой причине точку  $C$ , координаты которой определяются формулами, называют центром тяжести объема  $V$ .

Путем аналогичных рассуждений легко найти, что если тело представляет собой однородную плоскую и тонкую пластину, то для нее

$$x_c = \Sigma(s_k x_k) / S ; \quad y_c = \Sigma(s_k y_k) / S . \quad (7.6)$$

где  $S$  – площадь всей пластины, а  $s_k$  – площади ее частей.

Точку, координаты которой определяются формулами называют центром тяжести площади  $S$ .

Точно так же получаются формулы для координат центра тяжести линии:

$$x_c = \Sigma(l_k x_k) / L ; \quad y_c = \Sigma(l_k y_k) / L ; \quad z_c = \Sigma(l_k z_k) / L . \quad (7.7)$$

где  $L$  – длина всей линии,  $l$  – длины ее частей.

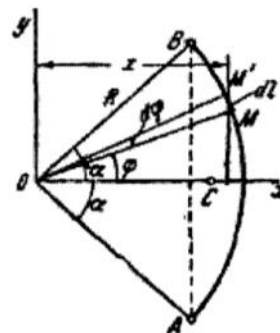
Таким образом, центр тяжести однородного тела определяется, как центр тяжести соответствующего объема, площади или линии.

### § 4. Центры тяжести некоторых однородных тел

1) *Центр тяжести дуги окружности.* Рассмотрим дугу  $AB$  радиуса  $R$  с центральным углом  $AOB = 2\alpha$ . В силу симметрии центр тяжести этой дуги лежит на оси  $Ox$ .

Найдем координату  $x_c$  по формуле  $x_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} x dl$ .

Для этого выделим на дуге  $AB$  элемент  $MM'$  длиной  $dl = R d\varphi$ , положение которого определяется углом  $\varphi$ . Координата  $x$  элемента  $MM'$  будет  $x = R \cos \varphi$ . Подставляя эти значения  $x$  и  $dl$  и имея в виду, что интеграл должен быть распространен на всю длину дуги, получим



$$x_c = \frac{1}{L} \int_A^B x dl = \frac{R^2}{L} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi = 2 \frac{R^2}{L} \sin \alpha, \quad (7.8)$$

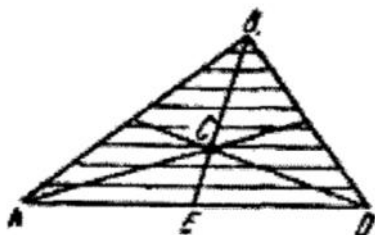
где  $L$  – длина дуги  $AB$ , равная  $R \cdot 2\alpha$ .

Отсюда окончательно находим, что центр тяжести дуги окружности лежит на ее оси симметрии на расстоянии от центра  $O$ , равном

$$x_c = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad (7.9)$$

где  $\alpha$  измеряется в радианах.

2) *Центр тяжести площади треугольника.* Разобьем площадь треугольника  $ABD$  прямыми, параллельными  $AD$ , на узкие полоски; центры тяжести этих полосок будут лежать на медиане  $BE$  треугольника.

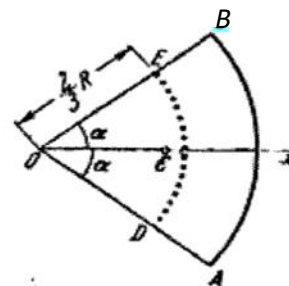


Следовательно, и центр тяжести всего треугольника лежит на этой медиане. Аналогичный результат получается для двух других медиан. Отсюда заключаем, что центр тяжести площади треугольника лежит в точке пересечения его медиан.

При этом, как известно, что  $CE = \frac{1}{3}BE$ .

3) *Центр тяжести площади кругового сектора.*

Рассмотрим круговой сектор  $OAB$  радиуса  $R$  с центральным углом  $2\alpha$ . Разобьем мысленно площадь сектора  $OAB$  радиусами, проведенными из центра  $O$ , на  $n$  секторов. В пределе, при неограниченном увеличении числа  $n$ , эти секторы можно рассматривать как плоские треугольники, центры тяжести которых лежат на дуге  $DE$  радиуса  $\frac{2}{3}R$ . Следовательно, центр тяжести сектора  $OAB$  будет совпадать с центром тяжести дуги  $DE$ . Окончательно получим, что центр тяжести площади кругового сектора лежит на его центральной оси симметрии на расстоянии от начального центра  $O$ , равном



$$x_c = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (7.10)$$

## РАЗДЕЛ 2. КИНЕМАТИКА

### ВВЕДЕНИЕ

Это раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных точек и тел без учета их масс и действующих на них сил.

В теоретической механике изучается только лишь механическое движение, то есть такое, при котором происходит изменение положения одного тела по отношению к другому.

С тем другим телом, по отношению к которому изучается движение данного тела, связывают какую-нибудь систему осей координат, которую называют **системой отсчета**.

*Систему отсчета* можно связать с любым телом и по отношению к разным системам отсчета, одного и то же тело или движется, или находится в покое.

Поэтому движение и покой относительны.

Начнем кинематику с изучения движения точки.

**Точка** – это материальное тело, размерами которого можно пренебречь при определенных условиях.

Движение точки считается заданным, если указан способ позволяющий определить положение точки в данный момент времени в данной системе отсчета.

### Тема 1. КИНЕМАТИКА АБСОЛЮТНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Рассмотрим три способа задания движения точки.

1-й. Векторный.

2-й. Координатный.

3-й. Естественный.

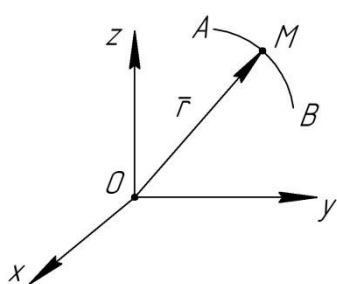
Рассматривая эти три способа, мы должны дать ответы на три вопроса.

1-й. Закон движения точки. Траектория.

2-й. Скорость точки.

3-й. Ускорение точки.

#### § 1. Векторный способ задания движения точки



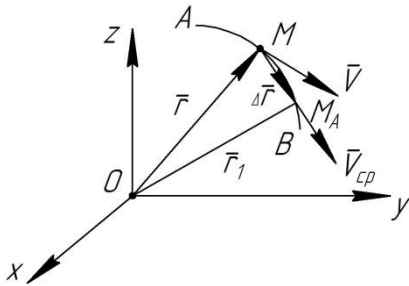
**Закон движения точки. Траектория** Пусть по некоторой траектории  $AB$  движется точка  $M$ . Положение ее в системе отсчета  $Oxyz$  можно определить с помощью радиуса-вектора  $r$ , проведенного из начала координат  $O$  к точке  $M$ .

При движении точки радиус-вектор  $R$  будет изменяться по величине и направлению, и тогда он является некоторой вектор-функцией времени  $t$ .

Закон движения точки:

$$\vec{r} = \vec{f}(t). \quad (1.1)$$

Траектория точки в этом случае – это линия, проведенная через концы радиусов-векторов, построенных для различных моментов времени при движении точки (годограф вектора  $\vec{r}$ ).



**Скорость точки.** Пусть момент времени  $t$  точка находилась в положении  $M$ , которое определяется радиус-вектором  $\vec{r}$ , а в момент времени  $t_1 = t + \Delta t$  точка приходит в положение  $M_1$ , которое определяется радиусом вектором  $\vec{r}_1$ .

Тогда за промежуток времени  $\Delta t = t_1 - t$  перемещение точки определяется вектором  $\overline{MM_1} = \Delta \vec{r}$ , который будем называть вектором перемещения точки.

Отношение  $\Delta \vec{r}$  к  $\Delta t$  называют средней скоростью точки за промежуток времени  $\Delta t$ , т.е.

$$\overline{V}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Вектор  $\overline{V}_{cp}$  совпадает с  $\Delta \vec{r}$ .

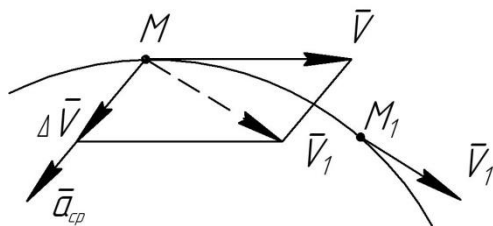
Чтобы определить скорость в данный момент времени, нужно в равенстве выше перейти к пределу при стремлении  $\Delta t \rightarrow 0$ , т.е.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.2)$$

**Определение:** Вектор скорости точки в данный момент времени равен первой производной от радиус-вектора точки по времени (1-ой производной от закона движения точки по времени).

Вектор скорости точки в данный момент времени направляется по касательной к траектории движения точки (всегда).

Он называет, в каком направлении и как быстро перемещается точка.



**Ускорение точки.** Пусть в момент времени  $t$  точка находится в положении  $M$  и имеет скорость  $\vec{V}$  ( $t \rightarrow M \rightarrow \vec{V}$ ), а в момент времени  $t_1 = t + \Delta t$  ( $t_1 \rightarrow M_1 \rightarrow \vec{V}_1$ ).

$$\text{Тогда } \vec{V}_1 = \vec{V} + \Delta \vec{V}.$$

За промежуток времени  $t_1 = t + \Delta t$  скорость точки получает приращение

$$\Delta \vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}.$$

Для построения вектора  $\Delta \vec{V}$  перенесем вектора  $\vec{V}_1$  параллельно в точку  $M$  и построим параллелограмм, в котором диагональю будет вектор  $\vec{V}_1$ , а одной стороной вектор  $\vec{V}$ . Тогда вторая сторона будет изображать вектор  $\Delta \vec{V}$ . Вектор  $\Delta \vec{V}$  всегда будет направлен в сторону вогнутости траектории точки.

За время  $\Delta t$  произошло изменение вектора скорости по величине и направлению на величину  $\Delta \vec{V}$ . Отношение приращение вектора скорости  $\Delta \vec{V}$

к промежутку времени  $\Delta t$  определяет вектор среднего ускорения точки за этот промежуток времени, т.е.

$$\bar{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t}.$$

Вектор среднего ускорения точки имеет то же направление, что и вектор  $\Delta \bar{V}$ , т.е. он направлен в сторону вогнутости траектории точки. Переходя к пределу в равенстве выше, при стремлении  $\Delta t$  к нулю, получим значение ускорения точки в данный момент времени

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} = \frac{d\bar{V}}{dt}. \quad (1.3)$$

Учитывая формулу (1.2), можем записать, что

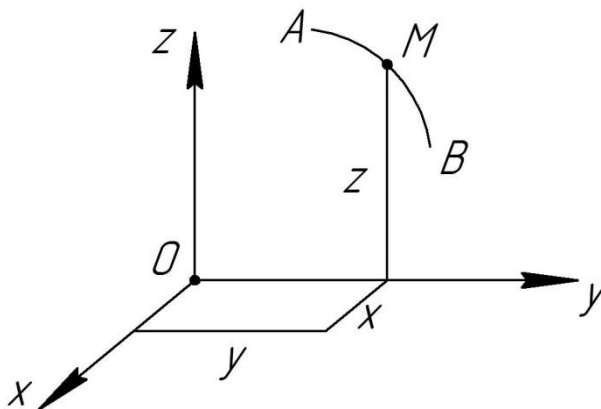
$$\bar{a} = \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2}. \quad (1.4)$$

Вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости точки по времени (1.3) или второй производной от радиус-вектора точки по времени (1.4) (второй производной от закона движения точки по времени).

1. Вектор ускорения точки характеризует изменение вектора скорости точки по величине и направлению.

2. Он всегда направлен в сторону вогнутости траектории движения точки и расположен в соприкасающейся к траектории точки плоскости.

## § 2. Координатный способ задания движения точки



**Закон движения точки. Траектория.** Положение точки  $M$  по отношению к неподвижной декартовой системе осей координат  $Oxyz$  можно определить тремя координатами  $(x, y, z)$ , которые при движении точки будут изменяться и они будут являться некоторыми функциями времени  $t$ , т.е.

$$\begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Уравнения (1.5) определяют закон движения точки при координатном способе задания её движения.

Траекторию точки можно построить двумя способами.

1. Построить ряд положений точки для различных моментов времени и соединить их плавной линией.

2. Получить уравнение траектории движения точки, т.е. зависимость между  $x, y, z$ , исключив параметр времени  $t$ .

**Скорость точки.** В этом случае скорость точки находится путем определения проекций вектора скорости точки на неподвижные декартовы оси

координат. Проекции вектора скорости на оси равны первым производственным от соответствующих координат движущейся точки по времени (от закона движения точки)

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt}, \\ V_y &= \frac{dy}{dt}, \\ V_z &= \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Величину и направление вектора скорости в точке можно определить по известным из математики формулам.

Величина скорости

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}.$$

Направление – по направляющим косинусам

$$\begin{aligned} \cos(\vec{V} \wedge x) &= \frac{V_x}{V}, \\ \cos(\vec{V} \wedge y) &= \frac{V_y}{V}, \\ \cos(\vec{V} \wedge z) &= \frac{V_z}{V}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

**Ускорение точки.** Определяется аналогично, как и скорость точки, путем определения проекций вектора ускорения точки на неподвижные декартовы оси координат. Они равны первым производным от соответствующих проекций скорости точки на оси координат или вторым производным от соответствующих координат движущейся точки по времени.

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dV_x}{dt}, \\ a_y &= \frac{dV_y}{dt}, \\ a_z &= \frac{dV_z}{dt}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Величину и направление вектора ускорения точки можно определить аналогично, как и вектор скорости по формулам похожим на (1.7)

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \\ \cos(\vec{a} \wedge x) &= \frac{a_x}{a}, \\ \cos(\vec{a} \wedge y) &= \frac{a_y}{a}, \\ \cos(\vec{a} \wedge z) &= \frac{a_z}{a}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

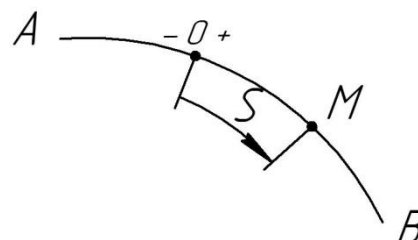
**Вывод:** при координатном способе задания движения точки, скорость и ускорение точки определяются через их проекции на неподвижные декартовы оси координат.

### § 3. Естественный способ задания движения точки

**Закон движения точки. Траектория.** Этим способом задания движения точки удобно пользоваться в случаях, когда известна заранее траектория движущейся точки.

Что бы считать, что движение точки задано естественным способом необходимо знать.

1. Траекторию движения точки  $AB$  (дорогу).
2. Начало отсчета (точка  $O$ ) с ускорением положительного и отрицательного направления отсчета криволинейной координаты, определяющей положение точки на траектории (+) (-).
3. Закон изменения криволинейной координаты  $S$ , как функцию времени  $t$ .



$$S = f(t). \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) выражает закон движения точки при естественном способе задания движения точки. Например, закон движения трактора по дороге

$$S = Vt = 20t \text{ (км)}.$$

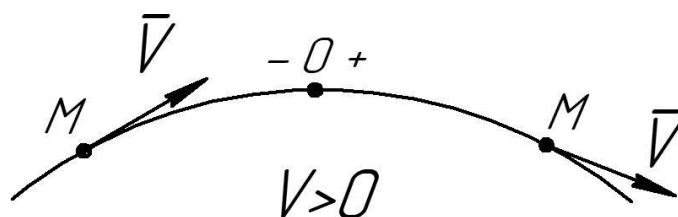
$S$  – это не пройденной точкой путь, а криволинейная координата, определяющая положение точки на траектории.

**Скорость точки.** Скорость точки равна первой производной от закона движения точки по времени.

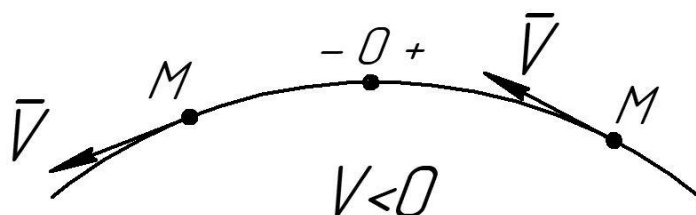
$$V = \frac{dS}{dt}. \quad (1.11)$$

Формула (1.11) определяет скорость точки со знаком «+» или «-».

Если  $V > 0$  (+), то в данный момент времени точка перемещается в положительном направлении отсчета координаты  $S$ .



Если  $V < 0$  (-), то в данный момент времени точка перемещается в отрицательном направлении отсчета координаты  $S$ .



Направлением вектора скорости точки учитывается знак скорости.

**Ускорение точки.** Построим в точке  $M$  три оси координат

1. Касательная к траектории ( $\tau$ ), направленная в положительном направлении отсчета координаты  $S$ .

2. Нормальная ось, направленная к центру кривизны траектории точки в данном месте и перпендикулярная к касательной оси ( $n$ ).

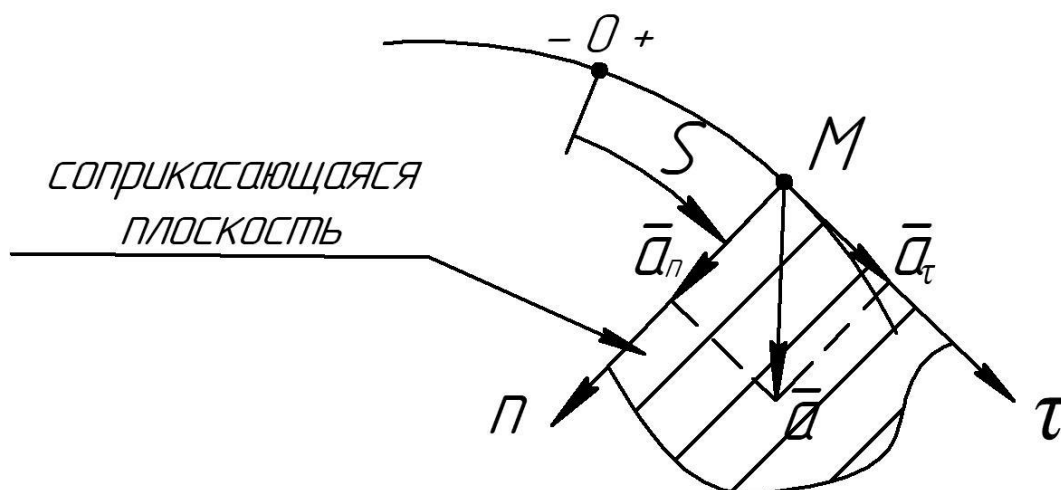
3. Бинормальная ось, перпендикулярная этим двум осям ( $b$ )

Эти оси  $\tau$ ,  $n$ ,  $b$  называют осями естественного трехгранника (или скостными осями).

Оси  $n$  и  $\tau$  образуют соприкасающуюся к траектории движения точки, плоскость в данном месте.

При перемещении точки  $M$  данные оси и плоскость перемещаются вместе с ней.

Полное ускорение точки, как известно из векторного способа задания ее движения, расположена в соприкасающейся плоскости и направлено в сторону вогнутости траектории движения точки, поэтому данный вектор может быть спроецирован на две оси (нормальную и тангенциальную), см. рисунок.



В дальнейшем эти проекции рассматривают, как векторные величины и называются

$\bar{a}_n$  – нормальное (центростремительное) ускорение точки;

$\bar{a}_\tau$  – тангенциальное (касательное) ускорение точки.

Тогда полное ускорение точки представляется, как их геометрическая сумма

$$\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau, \quad (1.12)$$

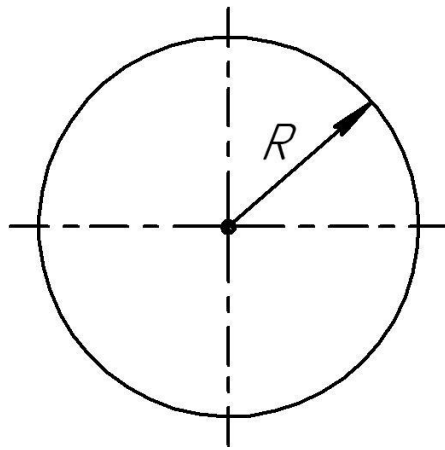
где  $\bar{a}_n \perp \bar{a}_\tau$ .

Нормальное ускорение точки определяется по формуле

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}, \quad (1.13)$$

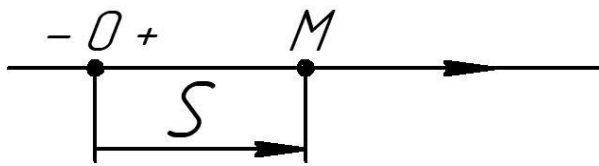
где  $\rho$  – радиус кривизны траектории точки в данном месте.

Если точка движется по окружности радиуса  $R$ , то  $\rho = R$ .



$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{R}$$

Если точка движется по прямой, то  $\rho = \infty$ .



$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{\infty} = 0$$

Вектор нормального ускорения точки  $\overline{a}_n$  всегда направляется к центру кривизны траектории точки в данном месте.

Тангенциальное ускорение точки равно первой производной от скорости точки по времени.

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}. \quad (1.14)$$

Вектор  $\overline{a}_\tau$  направляется по касательной к траектории движения точки. И если  $\overline{a}_\tau > 0$  – в положительном направлении отсчета координаты S; а если  $\overline{a}_\tau < 0$  – в отрицательном.

Если скорость точки увеличивается по абсолютной величине, такое движение точки ускоренное, то скорость точки и касательное ускорение будут одного знака (+, + или –, –).

Если скорость точки будет уменьшаться, такое движение точки замедленное, то скорость и касательное ускорение будут разного знака (+, – или –, +).

Эти знаки скорости и касательного ускорения точки на расчетной схеме учитываются направлениями соответствующих векторов.

#### **Частные случаи движения точки.**

1.  $\overline{a}_\tau = 0, \overline{a}_n = 0$

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow V = const \text{ – равномерное движение точки.}$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = 0 \Rightarrow \rho = \infty \text{ – прямолинейное движение точки.}$$

2.  $\overline{a}_\tau \neq 0, \overline{a}_n = 0$  – прямолинейное неравномерное движение точки.

3.  $\overline{a}_\tau = 0, \overline{a}_n \neq 0$  – криволинейное равномерное движение точки.

4.  $\overline{a}_\tau \neq 0 = const$  – равнопеременное движение точки.

**Закон равномерного движения точки имеет вид**

$$S = S_0 + Vt. \quad (1.15)$$

**Закон изменения скорости точки при равнопеременном движении**

$$V = V_0 \pm a_{\tau}t. \quad (1.16)$$

**Закон равнопеременного движения точки имеет вид**

$$S = S_0 + V_0t \pm \frac{a_{\tau}t^2}{2}, \quad (1.17)$$

где «+» – равноускоренное движение точки;

«-» – равнозамедленное движение точки.

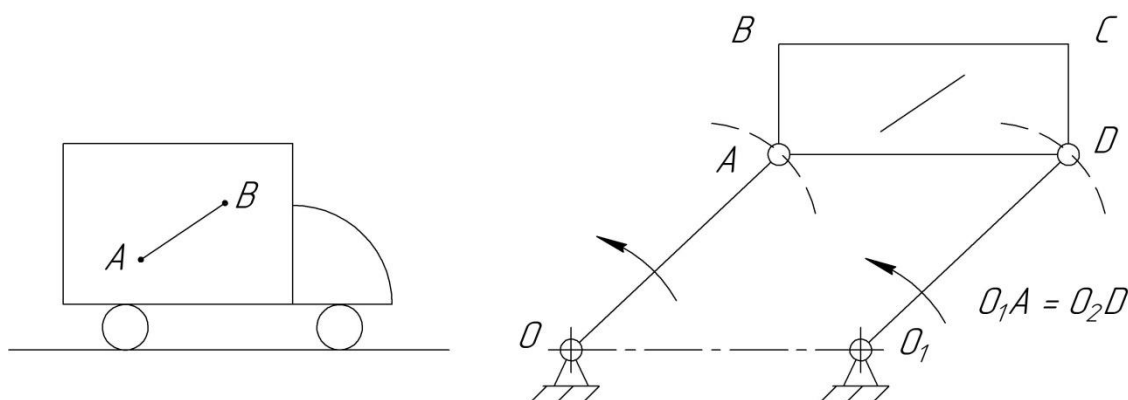
**Вывод:** ускорение точки и скорость точки при естественном способе задания движения точки, как и при координатном способе, определяется через проекции на подвижные оси координат, начало которых совпадает с точкой и они перемещаются вместе с ней.

Эти подвижные оси называются естественными осями.

## Тема 2. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

### § 1. Поступательное движение тела

Такое движение тела, при котором любая прямая проведенная в теле, остается параллельной самой себе при его движении.



Свойства поступательного движения тела.

- 1) Траектории всех точек тела одинаковы, при наложении совпадают.
- 2) Скорости и ускорения всех точек тела равны по величине и направлению в каждый момент времени.

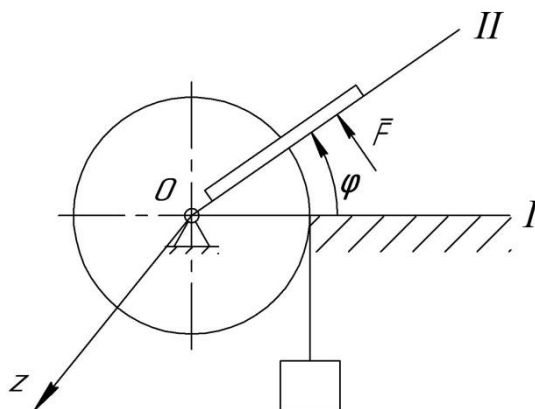
$$\begin{aligned} \overline{V_A} = \overline{V_B} = \overline{V_C} = \overline{V_D} = \dots \\ \overline{a_A} = \overline{a_B} = \overline{a_C} = \overline{a_D} = \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

Это обосновано тем, что за одно и то же время все точки тела проходят одно и то же расстояние.

**Вывод:** кинематика поступательного движения тела сводится к кинематике точки – достаточно определить скорость и ускорение каким-то способом одной точки тела, как автоматически определяются скорости и ускорения всех остальных точек тела, потому что они равны.

## § 2. Вращательное движение тела

Вращательным называют такое движение тела, при котором две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются неподвижными, при его движении.



Прямая, проходящая через эти две неподвижные точки называется осью вращения.

**Закон вращательного движения тела.** Положение тела в любой момент времени можно определить углом  $\varphi$ , отложенным от некоторой неподвижной полуплоскости I до подвижной полуплоскости II, связанной с телом.

При движении тела угол  $\varphi$  изменяется, и он является некоторой функцией времени  $t$

$$\varphi = f(t). \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) выражает закон вращательного движения твердого тела неподвижной оси. Положительное направление отсчета угла  $\varphi$  задается на расчетной схеме круговой стрелкой.

Если тело сделало  $N$  оборотов, то соответствующий угол  $\varphi$  в радианах определяется по формуле

$$\varphi = 2\pi N. \quad (2.3)$$

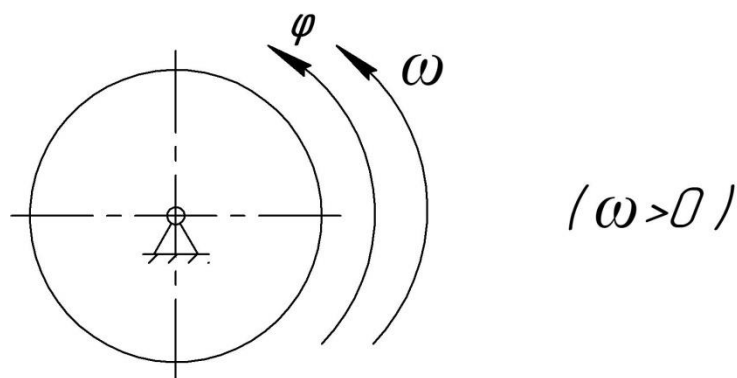
Различают кинематические характеристики тела в целом и кинематические характеристики точки тела.

**Угловая скорость тела**

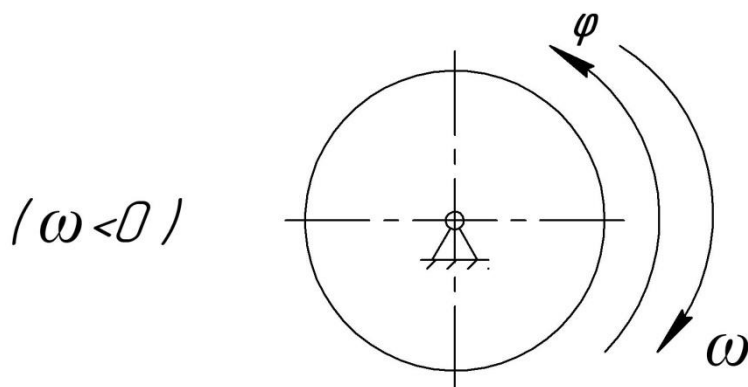
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.4)$$

Равна первой производной от закона вращательного движения тела по времени.

Формула (2.4) позволяет определить угловую скорость тела со знаком «+» или «-». Если  $\omega > 0$  (+), то вращение тела происходит в положительном направлении отсчета угла  $\varphi$  и в этом направлении изображаем угловую скорость на расчетной схеме круговой стрелкой.



Если  $\omega < 0$ . (–), то угол  $\varphi$  уменьшается и тело вращается против положительного направления отсчета угла  $\varphi$  и в этом направлении изображаем угловую скорость тела круговой стрелкой, и этим учитываем её знак.



В технике часто быстроту вращения тела определяют числом оборотов в минуту, т.е.  $[n] = \text{об/мин}$ . Угловая скорость измеряется в радианах в секунду.

За один оборот тело поворачивается на угол  $2\pi$  рад. За одну минуту угол поворота тела составит

$$\varphi = 2\pi N \text{ (рад).}$$

Тогда за 1 секунду – нужно разделить угол на 60 секунд. Получаем

$$\omega = \frac{\varphi}{60} = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{ (рад/с).} \quad (2.5)$$

**Угловое ускорение тела.** Характеризует изменение угловой скорости тела с течением времени.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad (2.6)$$

или

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (2.7)$$

Угловое ускорение тела равно первой производной от угловой скорости телами по времени (2.6) или второй производной от закона вращательного движения тела по времени (2.7).

Формула (2.6) позволяет определить угловое ускорение тела знаком «+» или «–».

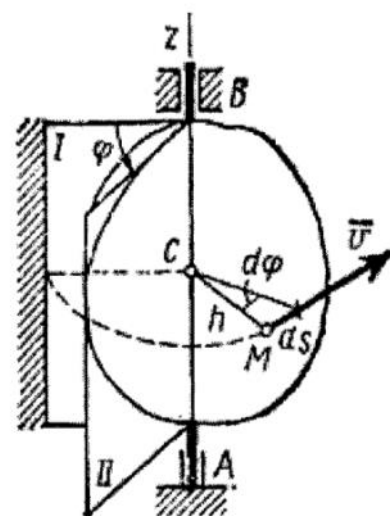
Если угловая скорость увеличивается по абсолютной величине, такое движение тела ускоренное, то угловая скорость и угловое ускорение будут одного знака, т.е. ( $\omega > 0$ ;  $\varepsilon > 0$ ) или ( $\omega < 0$ ;  $\varepsilon < 0$ ).

Если угловая скорость уменьшается по абсолютной величине, такое движение тела замедленное, то угловая скорость и угловое ускорение будут разного знака, т.е. ( $\omega > 0$ ;  $\varepsilon < 0$ ) или ( $\omega < 0$ ;  $\varepsilon > 0$ ).

### § 3. Скорости и ускорения точек вращающегося тела.

Установив характеристики движения всего тела в целом, перейдем к изучению движения отдельных его точек.

**Скорости точек тела.** Рассмотрим какую-нибудь точку  $M$  твердого тела, находящуюся на расстоянии  $h$  от оси вращения. При вращении тела точка  $M$  будет описывать окружность радиуса  $h$ , плоскость которой перпендикулярна оси вращения, а центр  $C$  лежит на самой оси. Если за время  $dt$  происходит элементарный поворот тела на угол  $d\varphi$  то точка  $M$  при этом совершает вдоль своей траектории элементарное перемещение  $ds = h d\varphi$ . Тогда числовое значение скорости точки будет равно отношению  $ds$  к  $dt$ , т.е



$$V = \frac{dS}{dt} = h \frac{d\varphi}{dt}$$

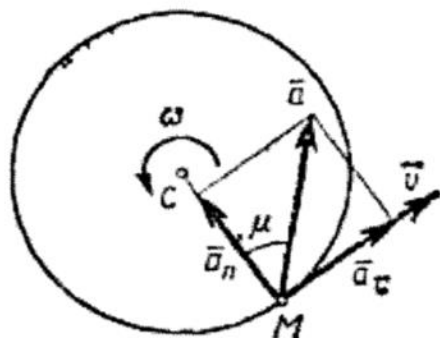
или

$$v = h\omega. \quad (2.8)$$

Скорость  $V$  в отличие от угловой скорости тела называют иногда еще *линейной* или *окружной скоростью точки  $M$* .

Таким образом, числовое значение скорости точки вращающегося, твердого тела равно произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения.

Направлена скорость по касательной к описываемой точкой окружности или перпендикулярно плоскости, проходящей через ось вращения и точку  $M$ .



Так как для всех точек тела  $\omega$  имеет в данный момент времени одно и то же значение, то скорости точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения.

**Ускорения точек тела.** Для нахождения ускорения точки  $M$  воспользуемся формулами  $a_t = dV / dt$ ,  $a_n = V^2 / \rho$ .

В нашем случае  $\rho = h$ . Подставляя значение  $V$  в выражения  $a_t$  и  $a_n$  получим

$$a_\tau = h \frac{d\omega}{dt}, \quad a_n = \frac{h^2 \omega^2}{h}$$

или окончательно

$$a_\tau = h\varepsilon, \quad (2.9)$$

$$a_n = h\omega^2. \quad (2.10)$$

Касательная составляющая ускорения  $a_\tau$  направлена по касательной к траектории (в сторону движения при ускоренном вращении тела и в обратную сторону при, замедленном); нормальная составляющая  $a_n$  всегда направлена по радиусу МС к оси вращения.

Полное ускорение точки  $M$  будет

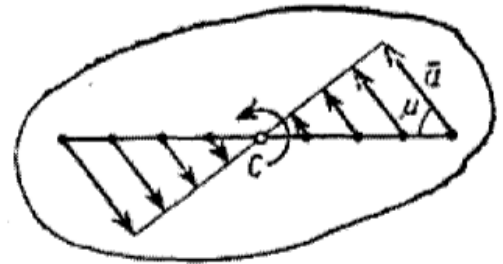
$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

или

$$a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.11)$$

Отклонение вектора полного ускорения от радиуса описываемой точкой окружности определяется углом  $\mu$ , который вычисляется по формуле  $\operatorname{tg} \mu = a_\tau / a_n$ . Подставляя сюда значения  $a_\tau$  и  $a_n$ , получаем  $\operatorname{tg} \mu = \varepsilon / \omega^2$ .

Так как  $\omega$  и  $\varepsilon$  имеют в данный момент времени для всех точек тела одно и то же значение, то ускорения всех точек вращающегося твердого тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения и образуют в данный момент времени один и тот же угол  $\mu$  с радиусами описываемых ими окружностей.



**Векторы скорости и ускорения точек тела.** Чтобы найти выражения непосредственно для векторов  $V$  и  $a$ , проведем из произвольной точки  $O$  оси  $AB$  радиус-вектор  $r$  точки  $M$ . Тогда  $h = r \sin \alpha$  и по формуле

$$|V| = |\omega| h = |\omega| r \cdot \sin \alpha$$

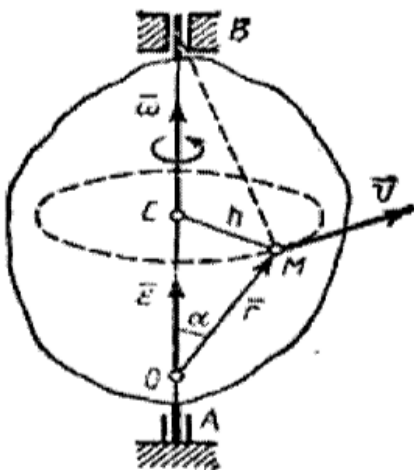
или

$$|\vec{V}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}|. \quad (2.12)$$

Таким образом, модуль векторного произведения  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  равен модулю скорости точки  $M$ . Направления векторов  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  и  $\vec{V}$  тоже совпадают (оба они перпендикулярны плоскости  $OMB$ ) и размерности их одинаковы. Следовательно,

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.13)$$

т.е. вектор скорости любой точки вращающегося тела равен векторному произведению угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки.



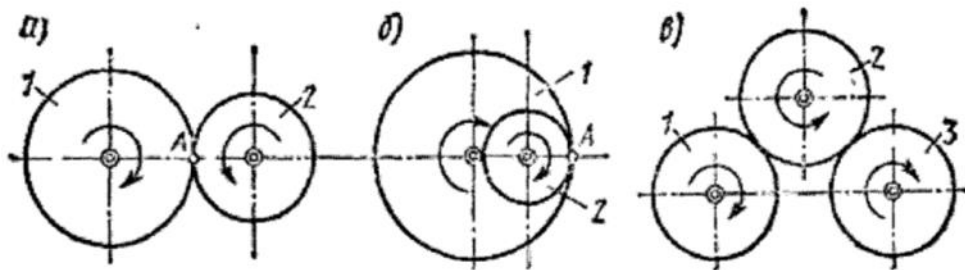
## § 4. Преобразование движений. Цилиндрические зубчатые передачи

Рассмотрим основные виды этих передач.

1. Рядовой назовем передачу, в которой все оси колес, находящихся в последовательном зацеплении, неподвижны. При этом одно из колес является ведущим, а остальные ведомыми.

В случае внешнего или внутреннего зацепления двух колес имеем  $|\omega_1 r_1| = |\omega_2 r_2|$ , так как скорость точки сцепления  $A$  у обоих колес одинакова. Учитывая, что число  $z$  зубцов сцепленных колес пропорционально их радиусам, а вращения колес происходят при внутреннем зацеплении в одну сторону, а при внешнем в разные, получаем

$$\begin{aligned} (\omega_1 / \omega_2)_{\text{внеш}} &= -r_2 / r_1 = -z_2 / z_1, \\ (\omega_1 / \omega_2)_{\text{внут}} &= r_2 / r_1 = z_2 / z_1. \end{aligned} \quad (2.14)$$



При внешнем зацеплении трех колес найдем, что

$$\begin{aligned} \omega_1 / \omega_2 &= -r_2 / r_1, \quad \omega_2 / \omega_3 = r_3 / r_2 \\ \text{или} \\ \omega_1 / \omega_3 &= r_3 / r_1 = z_3 / z_1. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Следовательно, отношение угловых скоростей крайних шестерен в этой передаче обратно пропорционально их радиусам (числу зубцов) и не зависит от радиусов промежуточных (паразитных) шестерен.

Из полученных результатов следует, что при рядовом сцеплении шестерен

$$\omega_1 / \omega_n = (-1)^k r_n / r_1 = (-1)^k z_n / z_1,$$

где  $k$  – число внешних зацеплений.

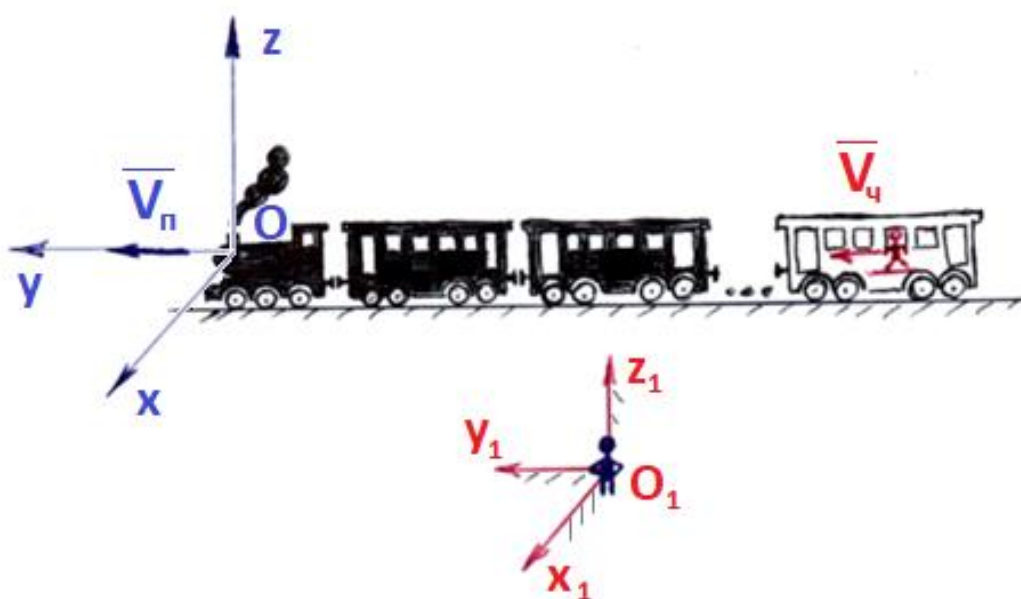
Передаточным числом данной зубчатой передачи называется величина  $i_n$  дающая отношение угловой скорости ведущего колеса к угловой скорости ведомого:

$$i_n = \omega_1 / \omega_n.$$

### Тема 3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

До сих пор мы изучали движение точки или тела по отношению к одной заданной системе отсчета. Однако в ряде случаев при решении задач механи-

ки оказывается целесообразным (а иногда и необходимым) рассматривать движение точки (или тела) одновременно по отношению к двум системам отсчета, из которых одна считается основной или условно неподвижной, а другая определенным образом движется по отношению к первой. Движение, совершаемое при этом точкой (или телом), называют составным или сложным. Например, человек, передвигающийся по вагону движущегося поезда, можно считать совершающим по отношению к человеку, стоящего в стороне от железной дороги сложное движение, состоящее из передвижения человека по отношению к вагону (подвижная система отсчета), и движения вместе с поездом по отношению к стоящему человеку (неподвижная система отсчета). Таким путем сложное движение человека разлагается на два более простых и более легко исследуемых.



## § 1. Основные понятия

*Относительное движение точки* – движение точки относительно подвижной системы отсчета, связанной телом  $Oxyz$ .

Скорость и ускорение точки в этом движении называются относительными и обозначаются  $\vec{V}_r$  и  $\vec{a}_r$ .

*Переносное движение точки* – движение тела, которое переносит точку.

Скорость и ускорение той точки тела, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка, называются переносными и обозначаются  $\vec{V}_e$  и  $\vec{a}_e$ .

*Абсолютное движение точки* – движение точки относительно неподвижной системы отсчета  $O_1x_1y_1z_1$ .

Скорость и ускорение точки в этом движении называются абсолютными и обозначаются  $\vec{V}_a$  и  $\vec{a}_a$ .

## § 2. Абсолютная скорость точки

Зависимость между абсолютной, относительной и переносной скоростями точки, совершающей сложное движение, определяется теоремой сложения скоростей, согласно которой абсолютная скорость равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей.

$$\overline{V}_a = \overline{V}_r + \overline{V}_e . \quad (3.1)$$

Если угол между направлениями  $\overline{V}_r$  и  $\overline{V}_e$  известен, то величина абсолютной скорости определяется как

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_r V_e \cos(\overline{V}_r \wedge \overline{V}_e)} . \quad (3.2)$$

С помощью уравнения (3.1) величину абсолютной скорости можно определить геометрически и аналитически. Величину скорости можно определить через проекции на оси координат, а именно:

$$V_a = \sqrt{V_{ax}^2 + V_{ay}^2 + V_{az}^2} . \quad (3.3)$$

Величины же проекций скорости в абсолютном движении определяют, проецируя уравнение (3.1) на оси координат:

$$\begin{aligned} \overline{V}_{ax} &= \overline{V}_{rx} + \overline{V}_{ex}, \\ \overline{V}_{ay} &= \overline{V}_{ry} + \overline{V}_{ey}, \\ \overline{V}_{az} &= \overline{V}_{rz} + \overline{V}_{ez}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Зная проекции вектора абсолютной скорости, можем построить его как диагональ параллелепипеда и определить его величину по теореме Пифагора, а направление – по направляющим косинусам

$$\begin{aligned} \cos(\overline{V}_a \wedge x) &= \frac{V_{ax}}{V_a}, \\ \cos(\overline{V}_a \wedge y) &= \frac{V_{ay}}{V_a}, \\ \cos(\overline{V}_a \wedge z) &= \frac{V_{az}}{V_a}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

## § 3. Абсолютное ускорение точки

Величина абсолютного ускорения точки зависит от вида переносного движения тела. При поступательном движении тела абсолютное ускорение определяется по формуле

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e , \quad (3.6)$$

при непоступательном –

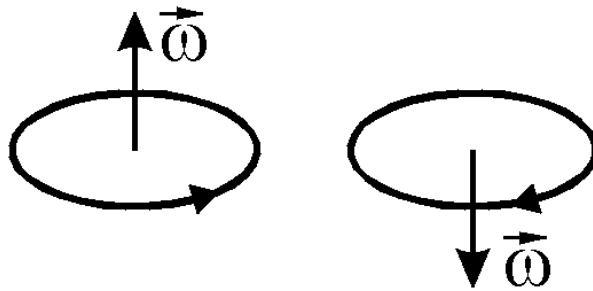
$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_K , \quad (3.7)$$

где  $\overline{a}_K$  – ускорение Кориолиса:

$$\overline{a}_K = 2(\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r) , \quad (3.8)$$

где  $\overline{\omega}_e$  – вектор угловой скорости переносного движения.

Модуль этого вектора равен величине угловой скорости тела, а сам вектор направлен вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение тела видно происходящим против хода часовой стрелки.



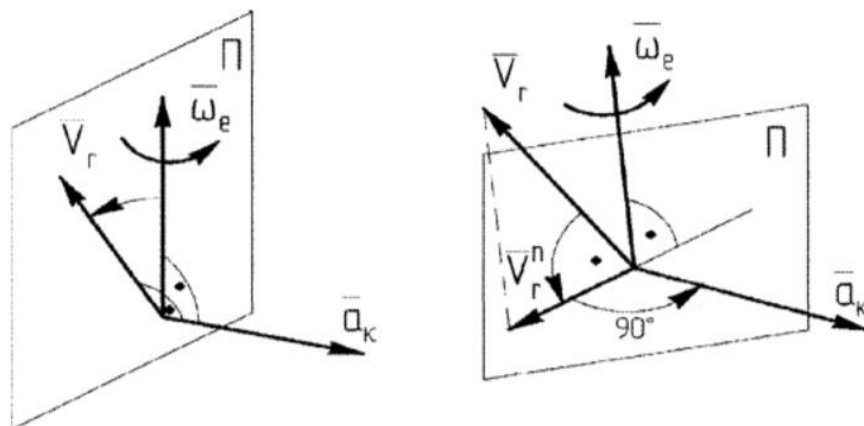
Величина ускорения Кориолиса определяется по формуле

$$\bar{a}_K = 2|\omega_e|V_r|\sin(\omega_e \wedge \bar{V}_r). \quad (3.9)$$

Направление ускорения Кориолиса можно установить, руководствуясь одним из двух правил: правилом векторного произведения или правилом Н. Е. Жуковского.

*Правило векторного произведения:* Вектор  $\bar{a}_K$  направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы  $\bar{\omega}_e$  и  $\bar{V}_r$  в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение  $\bar{\omega}_e$  с  $\bar{V}_r$  видно происходящим против хода часовой стрелки.

*Правило Н. Е. Жуковского:* Для определения направления ускорения Кориолиса  $\bar{a}_K$  необходимо спроецировать вектор относительной скорости  $\bar{V}_r$  на плоскость, перпендикулярную к вектору угловой скорости  $\bar{\omega}_e$  (оси вращения тела), и повернуть полученную проекцию в этой плоскости на угол  $90^\circ$  в сторону переносного вращения.



Из выражения (3.9) следует, что ускорение Кориолиса обращается в нуль в случаях:

1) если  $\omega_e = 0$ , т. е. когда переносное движение является поступательным или если угловая скорость переносного вращения в данный момент времени обращается в нуль;

2) если  $V_r = 0$ , т. е. когда относительная скорость в данный момент времени обращается в нуль;

3) векторы относительной скорости точки и переносной угловой скорости параллельны между собой, т. е.  $\overline{V}_r \parallel \overline{\omega}_e$ . Тогда  $\sin(\overline{\omega}_e \wedge \overline{V}_r) = 0$ .

Величину ускорения в абсолютном движении можно определить через проекции на оси неподвижной системы координат:

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2}. \quad (3.10)$$

Величины же проекций ускорений в абсолютном движении определяют, проецируя уравнение (3.6) на оси координат:

$$\begin{aligned} \overline{a}_{ax} &= \overline{a}_{rx} + \overline{a}_{ex} + \overline{a}_{kx}, \\ \overline{a}_{ay} &= \overline{a}_{ry} + \overline{a}_{ey} + \overline{a}_{ky}, \\ \overline{a}_{az} &= \overline{a}_{rz} + \overline{a}_{ez} + \overline{a}_{kz}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Направление вектора абсолютного ускорения устанавливается с помощью углов, которые образуют вектор  $\overline{a}_a$  с осями координат

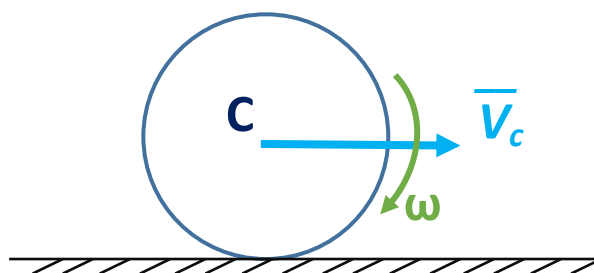
$$\begin{aligned} \cos(\overline{a}_a \wedge x) &= \frac{a_{ax}}{a_a}, \\ \cos(\overline{a}_a \wedge y) &= \frac{a_{ay}}{a_a}, \\ \cos(\overline{a}_a \wedge z) &= \frac{a_{az}}{a_a}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

## Тема 4. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ

### § 1. Основные понятия

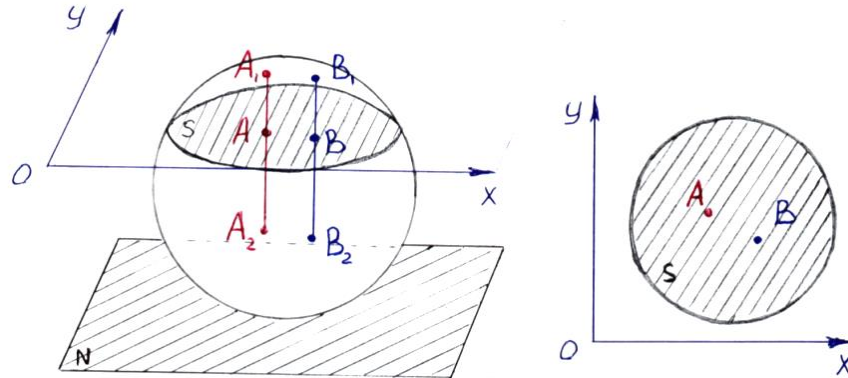


Плоскопараллельное движение тел (или плоское движение тел) – движение, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельной некоторой неподвижной плоскости.



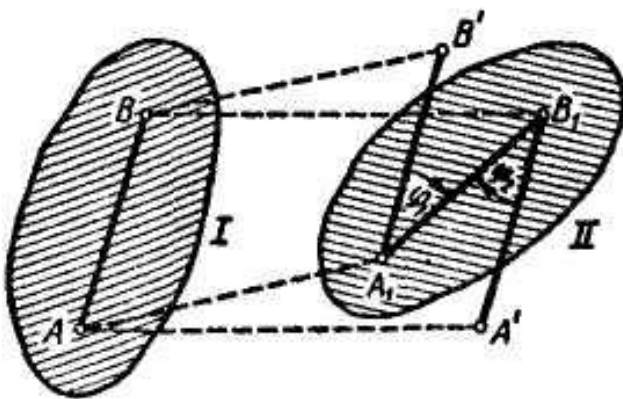
Пусть тело совершает плоское движение относительно неподвижной плоскости  $N$ . Пересечем данное тело плоскостью  $xu \perp N$ . В результате получим сечение  $S$ . Проведем в теле отрезок  $A_1A_2 \perp N$ , который пересечется в сечении  $S$  в некоторой точке  $A$ . При движении тела  $A_1A_2$  будет оставаться параллельной себе, т.е. совершать поступательное движение, при котором скорости и ускорения всех точек тела, расположенных на данном отрезке будут равны по величине и направлению в данный момент времени.

Проведем аналогичный отрезок  $B_1B_2$ . Все точки тела расположенные на отрезке  $B_1B_2$  будут иметь такую скорость и ускорения, как и  $B$ , расположенной в сечении  $S$ .



*Вывод:* Чтобы изучить движение тела, достаточно изучить движение сечения  $S$  и его точек. В дальнейшем совмещается  $xu$  с плоскостью чертежа и изучается движение сечения  $S$ .

## § 2. Разложение плоского движения тела на простейшие



Пусть фигура переместилась и совершила плоское движение. Это же перемещение можно получить и другим способом рассматривая плоское движение как сложное.

1 – Переносное, как поступательное вместе с каким-нибудь полюсом (например, точка  $A$ ).

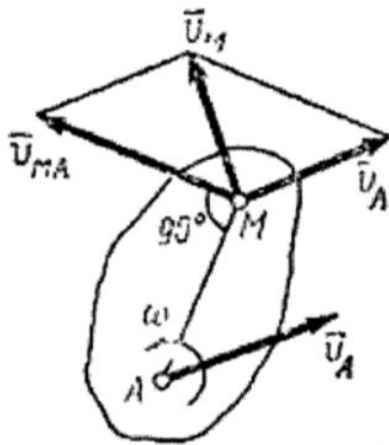
2 – Относительное, как вращательное вокруг полюса.

## § 3. Скорости и ускорения точек плоской фигуры

*Скорость точек плоской фигуры.* Пусть известна скорость  $V_A$  и  $\omega$ . Требуется определить скорость  $V_M$ .

На основании того, что плоское движение является сложным, то скорость  $V_M$  можно определить как скорость в двух движениях.

1. В поступательном вместе с полюсом.



2. Во вращательном вокруг полюса (точка A).

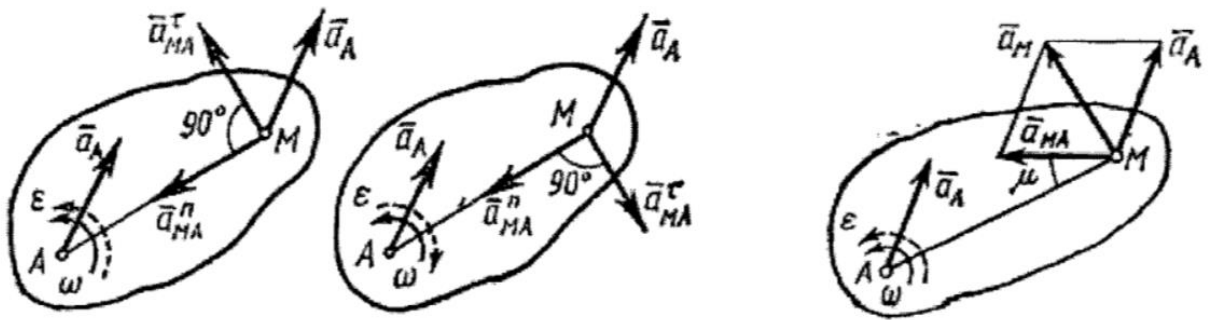
Тогда

$$\overline{V_M} = \overline{V_A} + \overline{V_{MA}}, \quad (4.1)$$

где  $V_{MA} = \omega \cdot AM$ .

**Вывод:** Абсолютная скорость любой точки фигуры в каждый момент времени геометрически складываем их скорости какой-нибудь другой точки этой же фигуры, принятой за полюс и скорости точки во вращательном движении вокруг полюса.

**Ускорение точек плоской фигуры.** Пусть известны ускорение  $a_A$ , угловая скорость тела  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$ . Требуется найти ускорение  $a_M$ .



Ускорение любой точки плоской фигуры определяется аналогично скорости.

$$\overline{a_M} = \overline{a_A} + \overline{a_{MA}}$$

или

$$\overline{a_M} = \overline{a_A} + \overline{a_{MA}^n} + \overline{a_{MA}^{\tau}}, \quad (4.2)$$

где  $a_{MA}^n = \omega^2 \cdot AM$ ;

$a_{MA}^{\tau} = \varepsilon \cdot AM$ .

#### § 4. Определение скоростей точек плоской фигуры с использованием мгновенного центра скоростей

**Мгновенный центр скоростей (МЦС)** – это точка, принадлежащей плоской фигуры, абсолютная скорость которой в момент времени равен нулю.

Пусть известна скорость  $V_{Pv} = 0$ ,  $Pv$  и  $\omega$ . Требуется определить скорости  $V_A$  и  $V_B$ .

Согласно формуле (4.1), приняв  $Pv$  за полюс, получим

$$\vec{V}_B = \vec{V}_{Pv} + \vec{V}_{BPv}$$

Так как  $V_{Pv} = 0$ , то  $\vec{V}_B = \vec{V}_{BPv}$ .

Величина:  $V_B = (\omega h) = \omega \cdot BPv$ .

Направление:  $\vec{V}_B \perp BPv \rightarrow \omega$ .

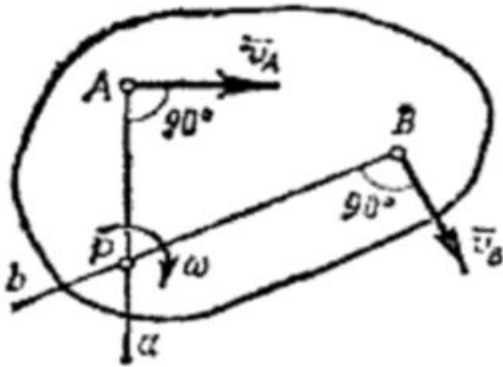
Скорость точки  $A$  определяется аналогично.

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{Pv} + \vec{V}_{APv}$$

Так как  $V_{Pv} = 0$ , то  $\vec{V}_A = \vec{V}_{APv}$ .

Величина:  $V_A = (\omega h) = \omega \cdot APv$ .

Направление:  $\vec{V}_A \perp APv \rightarrow \omega$ .



*Выводы:*

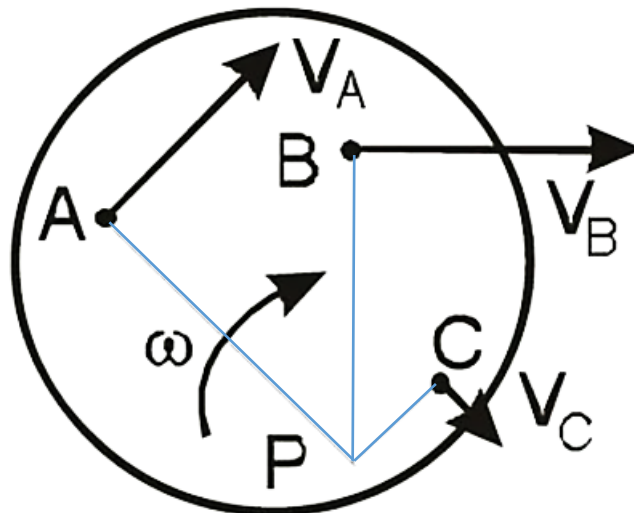
1) Если известно положение МЦС, то скорости точек плоской фигуры определяются как скорости точек тела совершающее вращательное движение вокруг оси, проходящей через МЦС.

2) Скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстоянию от точек до МЦС.

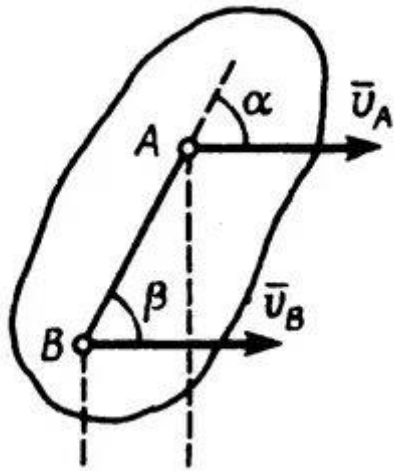
3) Если известна абсолютная скорость какой-нибудь любой точки плоской фигуры и расстояние от этой точки до МЦС, то угловая скорость плоской фигуры равна отношению скорости точки на это расстояние.

## § 5. Определение положения мгновенного центра скоростей

1. Достаточно знать направления векторов скоростей двух точек плоской фигуры.



2. Векторы скоростей точек плоской фигуры параллельны между собой, а отрезок, соединяющие две эти точки, не перпендикулярен векторам скоростей.



$P_V$  – в бесконечности

$$\omega = \frac{V_B}{BP_V} = \frac{V_B}{\infty} = 0$$

При мгновенном поступательном движении скорости всех его точек равны по величине и направлению в данное мгновение, но не ускорения.

$$\overline{V}_A = \overline{V}_B = \overline{V}_C$$

## РАЗДЕЛ 3. ДИНАМИКА

### Тема 1. Динамика абсолютного движения материальной точки

*Динамика* основывается на ряде положений, которые являются аксиомами и называются законами динамики. Прежде чем перейти к рассмотрению этих законов, введем новое для нас понятие *изолированной материальной точки*, т. е. точки, на которую не действуют другие материальные точки. В действительности изолированные тела в природе не существуют и понятие изолированной материальной точки условно.

Итак, изолированная от влияния окружающих тел материальная точка не может сама себе сообщить ускорение. Это свойство тел называется *инерцией* или *инертностью*.

Можно сказать, что инерция или инертность есть способность тела сохранять свою скорость по модулю и направлению неизменной.

Материальную точку можно выделить как свободную и несвободную.

Материальная точка, движение которой в пространстве не ограничено какими-либо связями, называется *свободной*. Примером свободной материальной точки может служить искусственный спутник Земли в околоземном пространстве или летящий самолет. Их перемещение в пространстве ничем не ограничено, и, в частности, поэтому летчик на спортивном самолете способен проделывать различные сложные фигуры высшего пилотажа.

Материальная точка, свобода перемещения которой ограничена наложенными связями, называется *несвободной*. Примером несвободной материальной точки может служить движущийся по рельсам трамвай (если пренебречь его формой и размерами).

### § 1. Основные законы динамики

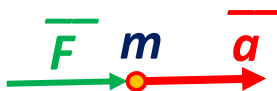
*1-й закон «Принцип инерции»:* Всякая изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока приложенные силы не выведут ее из этого состояния.

$$\Sigma F_k = 0 \rightarrow V = \text{const}$$

*2-й закон «Основной закон динамики»:* Ускорение материальной точки пропорционально действующей силе и направлено по той прямой, по которой действует эта сила.

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (1.1)$$

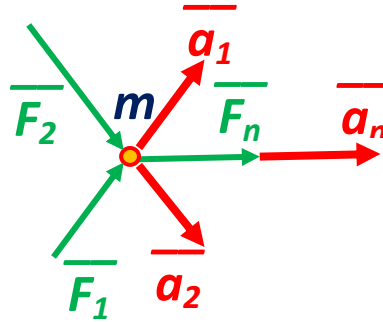
где  $m$  – коэффициент пропорциональности. Этот коэффициент характеризует меру инертности тел и называется *массой*.



$$\Sigma F_k \neq 0 \rightarrow (V \neq \text{const}) \rightarrow a = F/m.$$

3-й закон «Равенство сил действия и противодействия»: Два тела всегда действуют друг на друга с силами равными по величине и противоположными по направлению и направлены вдоль одной прямой.

4-й закон «Принцип независимости действия сил»: Ускорение, которое получает точка при действии системы сил, равно геометрической сумме тех ускорений, которые сообщила бы сила по отдельности.



$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n. \quad (1.2)$$

Такой прием определяет ускорение точки, складывая ускорения от отдельных сил, неудобен в практике. Поэтому удобно воспользоваться следствием из четвертого закона. Умножим левую и правую часть уравнения на массу точки

$$m\bar{a} = m\bar{a}_1 + m\bar{a}_2 + \dots + m\bar{a}_n = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k = \Sigma \bar{F}_k$$

Получаем основное уравнение динамики абсолютного движения точки

$$m\bar{a} = \Sigma \bar{F}_k. \quad (1.3)$$

Это уравнение позволяет определить ускорение точки при действии системы сил более быстро.

## § 2. Задачи динамики точки

При использовании формулы (1.3) можно решить два типа задач динамики:

1. *Прямая* – зная ускорение точки по основному закону динамики можем определить силы, действующие на точку, т.е.

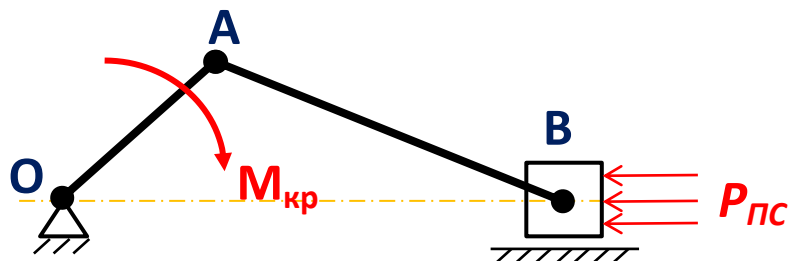
$$\text{зная } a \rightarrow F - ?.$$

2. *Обратная* – зная силу или систему сил, действующие на точку, можем определить ускорение точки, а затем законы изменения скорости и движения точки, т.е.

$$\text{зная } F \rightarrow \begin{cases} a - ? \\ V - ? \\ S - ? \end{cases}$$

## Тема 2. ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

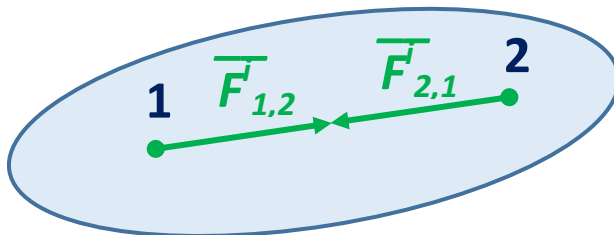
*Механическая система* – совокупность материальных точек и тел, в которой положение или движение каждой точки и тела, зависит от положения или движения остальных точек или тела. Частным случаем механической системы является абсолютное твердое тело.



Силы, действующие на механическую систему, различают на *внутренние*  $\overline{F}^i$  (силы, действуют друг на друга внутри системы) и *внешние*  $\overline{F}^e$  (силы, действуют на точки и тела данной системы со стороны других точек и тел из вне системы).

Свойства внутренних сил:

- 1) Геометрическая сумма внутренних сил равно нулю, т.е.  $\Sigma \overline{F}_k^i = 0$ .



- 2) Алгебраическая сумма моментов всех внутренних сил относительно точки и оси равны нулю, т.е.  $\Sigma m_o(\overline{F}_k^i) = 0$ ,  $\Sigma m_z(\overline{F}_k^i) = 0$ .

## Тема 3. ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

### § 1. Дифференциальные уравнения движения системы

Рассмотрим систему, состоящую из  $n$  материальных точек. Выделим какую-нибудь точку системы с массой  $m_k$ . Обозначим равнодействующую всех приложенных к точке внешних сил (и активных и реакций связей) через  $\overline{F}_k^e$ , а равнодействующую всех внутренних сил – через  $\overline{F}_k^i$ . Если точка имеет при этом ускорение  $\overline{a}_k$ , то по основному закону динамики

$$m_k \overline{a}_k = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i. \quad (3.1)$$

Аналогичный результат получим для любой точки. Следовательно, для всей системы будет:

$$\begin{cases} m_1 \overline{a_1} = \overline{F_1^e} + \overline{F_1^i} \\ m_2 \overline{a_2} = \overline{F_2^e} + \overline{F_2^i} \\ \dots \\ m_k \overline{a_k} = \overline{F_k^e} + \overline{F_k^i} \end{cases} \quad (3.2)$$

Эти уравнения, из которых можно определить закон движения каждой точки системы, называются дифференциальными уравнениями движения системы в векторной форме. Уравнения являются дифференциальными, так как  $\overline{a_k} = \frac{d\overline{V_k}}{dt} = \frac{d^2\overline{r_k}}{dt^2}$ ; входящие в правые части уравнений силы будут в общем случае зависеть от времени, координат точек системы и их скоростей.

Проектируя на какие-нибудь координатные оси, мы можем получить дифференциальные уравнения движения системы в проекциях на эти оси.

Полное решение основной задачи динамики для системы состояло бы в том, чтобы, зная заданные силы, проинтегрировать соответствующие дифференциальные уравнения и определить таким путем закон движения каждой из точек системы в отдельности.

Однако такой путь решения обычно не применяется по двум причинам. Во-первых, этот путь слишком сложен и почти всегда связан с непреодолимыми математическими трудностями. Во-вторых, в большинстве случаев при решении задач механики бывает достаточно знать некоторые суммарные характеристики движения системы в целом, а не движение каждой из ее точек в отдельности. Эти суммарные характеристики определяются с помощью общих теорем динамики системы, к изучению которых мы и перейдем.

Основная роль уравнений состоит в том, что они, или следствия из них, являются исходными для получения соответствующих общих теорем.

Общие теоремы динамики механической системы: теоремы о движении центра масс механической системы и об изменении количества движения, теоремы об изменении кинетического момента и кинетической энергии, являются следствием основного уравнения динамики. Данные теоремы рассматривают не движение отдельных точек и тел, входящих в механическую систему, а некоторые интегральные характеристики, такие как движение центра масс механической системы, ее количество движения, кинетический момент и кинетическую энергию. В результате из рассмотрения исключаются неизвестные внутренние силы, а в ряде случаев и реакции связей, что существенно упрощает решения задачи.

## § 2. Теорема о движении центра масс

В ряде случаев для определения характера движения системы (особенно твердого тела), достаточно знать закон движения ее центра масс. Например, если бросить камень в цель, совсем не нужно знать, как он будет кувыраться во время полета, важно установить попадет он в цель или нет. Для этого достаточно рассмотреть движение какой-нибудь точки этого тела.

Чтобы найти этот закон, обратимся к уравнениям движения системы и сложим почленно их левые и правые части. Тогда получим:

$$m_k \overline{a_k} = \Sigma \overline{F_k^e} + \Sigma \overline{F_k^i}. \quad (3.3)$$

Преобразуем левую часть равенства. Из формулы для радиус-вектора центра масс имеем:

$$\Sigma m_k \overline{r_k} = M \overline{r_C}. \quad (3.4)$$

Беря от обеих частей этого равенства вторую производную по времени и замечая, что производная от суммы равна сумме производных, найдем:

$$\Sigma m_k \frac{d^2 \overline{r_k}}{dt^2} = M \frac{d^2 \overline{r_C}}{dt^2}$$

или

$$\Sigma m_k \overline{a_k} = M \overline{a_C}. \quad (3.5)$$

где  $\overline{a_C}$  – ускорение центра масс системы. Так как по свойству внутренних сил системы  $\Sigma \overline{F_k^i} = 0$ , то, подставляя все найденные значения, получим окончательно:

$$M \overline{a_C} = \Sigma \overline{F_k^e}. \quad (3.6)$$

Уравнение и выражает теорему о движении центра масс системы: *произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил*. Сравнивая с уравнением движения материальной точки, получаем другое выражение теоремы: *центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему*.

Проектируя обе части равенства на координатные оси, получим:

$$M \frac{d^2 \overline{x_C}}{dt^2} = \Sigma \overline{F_{kx}^e}, \quad M \frac{d^2 \overline{y_C}}{dt^2} = \Sigma \overline{F_{ky}^e}, \quad M \frac{d^2 \overline{z_C}}{dt^2} = \Sigma \overline{F_{kz}^e}.$$

Эти уравнения представляют собою дифференциальные уравнения движения центра масс в проекциях на оси декартовой системы координат.

Значение доказанной теоремы состоит в следующем.

1) Теорема дает обоснование методам динамики точки. Из уравнений видно, что *решения, которые мы получаем, рассматривая данное тело как материальную точку, определяют закон движения центра масс этого тела*, т.е. имеют вполне конкретный смысл.

В частности, если тело движется поступательно, то его движение полностью определяется движением центра масс. Таким образом, поступательно движущееся тело можно всегда рассматривать как материальную точку с массой, равной массе тела. В остальных случаях тело можно рассматривать как материальную точку лишь тогда, когда практически для определения положения тела достаточно знать положение его центра масс.

2) Теорема позволяет при определении закона движения центра масс любой системы исключать из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы. В этом состоит ее практическая ценность.

Так движение автомобиля по горизонтальной плоскости может происходить только под действием внешних сил, сил трения, действующих на колеса со стороны дороги. И торможение автомобиля тоже возможно только этими силами, а не трением между тормозными колодками и тормозным барабаном. Если дорога гладкая, то как бы не затормаживали колеса, они будут скользить и не остановят автомобиль.

Или после взрыва летящего снаряда (под действием внутренних сил) части, осколки его, разлетятся так, что центр масс их будет двигаться по прежней траектории.

Теоремой о движении центра масс механической системы следует пользоваться для решения задач механики, в которых требуется:

– по силам, приложенным к механической системе (чаще всего к твердому телу), определить закон движения центра масс;

– по заданному закону движения тел, входящих в механическую систему, найти реакции внешних связей;

– по заданному взаимному движению тел, входящих в механическую систему, определить закон движения этих тел относительно некоторой неподвижной системы отсчета.

С помощью этой теоремы можно составить одно из уравнений движения механической системы с несколькими степенями свободы.

При решении задач часто используются следствия из теоремы о движении центра масс механической системы.

### § 3. Закон сохранения движения центра масс

Из теоремы о движении центра масс можно получить следующие важные следствия:

1) Пусть сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю

$$\overline{\Sigma F_k^e} = 0$$

Тогда из уравнения (3.6) следует, что  $\overline{a_c} = 0$  или  $\overline{V_c} = \text{const}$ . Следовательно, *если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то центр масс этой системы движется с постоянной по модулю и направлению скоростью, т. е. равномерно и прямолинейно*. В частности, если вначале центр масс был в покое, то он и останется в покое. Действие внутренних сил, как мы видим, движение центра масс системы изменить не может.

2) Пусть сумма внешних сил, действующих на систему, не равна нулю, но эти силы таковы, что сумма их проекций на какую-нибудь ось (например, ось  $Ox$ ) равна нулю:

$$\overline{\Sigma F_{kx}^e} = 0$$

Тогда уравнение  $M \frac{d^2 \overline{x_c}}{dt^2} = \overline{\Sigma F_{kx}^e}$ , дает:  $\frac{d^2 \overline{x_c}}{dt^2} = 0$  или  $\frac{d \overline{x_c}}{dt} = V_{Cx} = \text{const}$ .

Следовательно, *если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось есть величина постоянная*. В частности, если в начальный момент

$V_{Cx} = 0$ , то и в любой последующий момент  $V_{Cx} = 0$ , т.е. центр масс системы в этом случае вдоль оси  $Ox$  перемещаться не будет ( $x_C = \text{const}$ ).

Все эти результаты выражают собою закон сохранения движения центра масс системы. Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие его приложения.

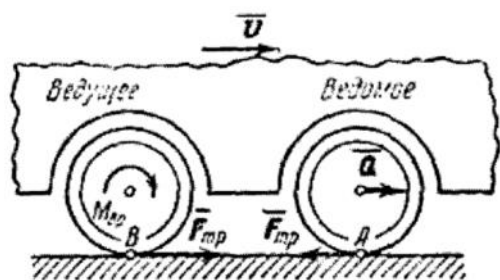
а) Движение центра масс солнечной системы. Так как притяжением звезд можно практически пренебречь, то можно считать, что на солнечную систему никакие внешние силы не действуют. Следовательно, в первом приближении ее центр масс движется в мировом пространстве равномерно и прямолинейно.

б) Действие пары сил на тело. Если на свободное твердое тело начнет действовать пара сил  $(\vec{F}, \vec{F}')$ , то геометрическая сумма этих внешних сил будет равна нулю ( $\vec{F} + \vec{F}' = 0$ ). Следовательно, центр масс  $C$  тела, если он вначале был неподвижен, должен остаться неподвижным и при действии пары. Таким образом, где бы к свободному твердому телу ни была приложена пара сил, тело начнет вращаться вокруг своего центра масс.

в) Движение по горизонтальной плоскости. При отсутствии трения человек с помощью своих мускульных усилий (силы внутренние) не мог бы двигаться вдоль горизонтальной плоскости, так как в этом случае сумма проекций на любую горизонтальную ось  $Ox$  всех приложенных к человеку внешних сил (сила тяжести и реакция плоскости) будет равна нулю и центр масс человека вдоль плоскости перемещаться не будет ( $x_C = \text{const}$ ).

Если, например, человек вынесет правую ногу вперед, то левая его нога скользнет назад, а общий центр масс останется на месте.

При наличии же трения скольжению левой ноги назад будет препятствовать сила трения, которая в этом случае будет направлена *вперед*. Эта сила и будет той внешней силой, которая позволяет человеку перемещаться в сторону ее действия (в данном случае вперед).



Аналогично происходит движение паровоза или автомобиля. Сила давления пара или газа в двигателе является силой внутренней и сама по себе не может переместить центр масс системы. Движение происходит потому, что двигатель передает соответствующим колесам, называемыми

ведущими, вращающий момент. При этом точка касания  $B$  ведущего колеса стремится скользить влево. Тогда на колесо будет действовать сила трения, направленная вправо. Эта внешняя сила и позволит центру тяжести паровоза или автомобиля двигаться вправо. Когда этой силы нет или когда она недостаточна для преодоления сопротивления, испытываемого ведомыми колесами, движения вправо не будет; ведущие колеса будут при этом вращаться на месте (буксовать).

## Тема 4. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

### § 1. Количество движения точки

*Количеством движения точки* называется векторная величина  $m\bar{V}$  равная произведению массы точки на вектор ее скорости. Направлен вектор  $m\bar{V}$  так же, как и скорость точки, т. е. по касательной к ее траектории.

Например, зная количество движения автомобиля (т. е. величину  $Q = mV$ ) а не величины  $m$  и  $V$  в отдельности) и действующую на него при торможении силу, можно определить, через сколько секунд автомобиль остановится, но по этим данным нельзя найти пройденный за время торможения путь. Наоборот, зная начальную кинетическую энергию автомобиля и тормозящую силу, можно определить тормозной путь, но по этим данным нельзя найти время торможения.

### § 2. Импульс силы

Для характеристики действия, оказываемого на тело силой за некоторый промежуток времени, вводится понятие об импульсе силы. Введем сначала понятие об элементарном импульсе, т. е. об импульсе за бесконечно малый промежуток времени  $dt$ . *Элементарным импульсом силы* называется векторная величина  $d\bar{S}$ , равная произведению вектора силы  $\bar{F}$  на элементарный промежуток времени  $dt$

$$d\bar{S} = \bar{F} dt. \quad (4.1)$$

Направлен элементарный импульс по линии действия силы.

Импульс  $\bar{S}$  любой силы  $\bar{F}$  за конечный промежуток времени  $t_1$  вычисляется как интегральная сумма соответствующих элементарных импульсов:

$$\bar{S} = \int_0^{t_1} \bar{F} dt. \quad (4.2)$$

Следовательно, *импульс силы* за любой промежуток времени  $t_1$  равен определенному интегралу от элементарного импульса, взятому в пределах от нуля до  $t_1$ . В частном случае, если сила  $\bar{F}$  и по модулю, и по направлению постоянна ( $\bar{F} = \text{const}$ ), будем иметь  $\bar{S} = \bar{F} t_1$ . Причем, в этом случае и модуль  $S = Ft_1$ . В общем случае модуль импульса может быть вычислен через его проекции.

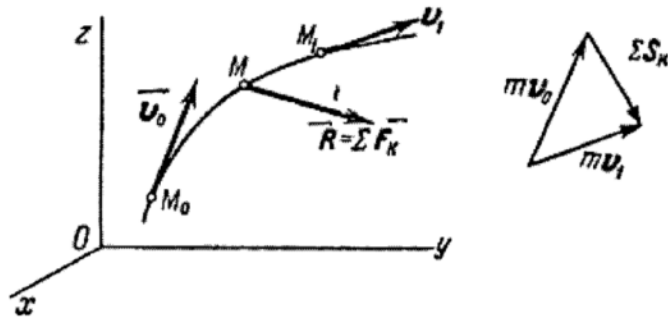
### § 3. Теорема об изменении количества движения точки

Так как масса точки постоянна, а ее ускорение  $\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt}$ , то уравнение, выражающее основной закон динамики, можно представить в виде

$$\frac{d(m\bar{V})}{dt} = \Sigma \bar{F}_k. \quad (4.3)$$

Уравнение выражает одновременно теорему об изменении количества движения точки в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения точки равна геометрической сумме действующих на точку сил*. Проинтегрируем это уравнение.

Пусть точка массы  $m$ , движущаяся под действием силы  $\bar{R} = \Sigma \bar{F}_k$ , имеет в момент времени  $t_0$  скорость  $\bar{V}_0$ , а в момент  $t_1$  – скорость  $\bar{V}_1$ . Умножим тогда обе части равенства на  $dt$  и возьмем от них определенные интегралы. При этом справа, где интегрирование идет по времени, пределами интегралов будут 0 и  $t_1$  а слева, где интегрируется скорость, пределами интеграла будут соответствующие значения скорости  $V_0$  и  $V_1$ .



Так как интеграл от  $d(mv)$  равен  $mv$ , то в результате получим:

$$m\bar{V}_1 - m\bar{V}_0 = \Sigma \int_0^{t_1} \bar{F}_k dt. \quad (4.4)$$

Стоящие справа интегралы представляют собою импульсы действующих сил. Поэтому окончательно будем иметь:

$$m\bar{V}_1 - m\bar{V}_0 = \Sigma \bar{S}_k. \quad (4.5)$$

Уравнение выражает теорему об изменении количества движения точки в конечном виде: *изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени*.

При решении задач вместо векторного уравнения часто пользуются уравнениями в проекциях.

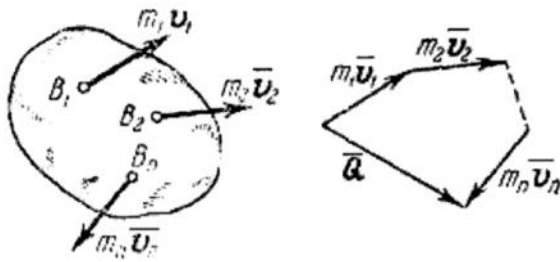
$$\begin{aligned} m\bar{V}_{1x} - m\bar{V}_{0x} &= \Sigma \bar{S}_{kx}; \\ m\bar{V}_{1y} - m\bar{V}_{0y} &= \Sigma \bar{S}_{ky}; \\ m\bar{V}_{1z} - m\bar{V}_{0z} &= \Sigma \bar{S}_{kz}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

В случае прямолинейного движения, происходящего вдоль оси  $Ox$  теорема выражается первым из этих уравнений.

#### § 4. Количество движения системы

*Количеством движения системы* будем называть векторную величину  $\bar{Q}$ , равную геометрической сумме (главному вектору) количества движения всех точек системы

$$\bar{Q} = \Sigma m_k \bar{V}_k. \quad (4.7)$$



Из чертежа видно, что независимо от величин скоростей точек системы (если только эти скорости не параллельны) вектор  $\bar{Q}$  может принимать любые значения и даже оказаться равным нулю, когда многоугольник, построенный из векторов  $m_k \bar{v}_k$ , замкнется.

Следовательно, по величине нельзя полностью судить о характере движения системы.

Найдем формулу, с помощью которой значительно легче вычислять величину  $\bar{Q}$ , а также уяснить ее смысл. Из равенства  $\bar{r}_C = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M}$  следует, что  $\sum m_k \bar{r}_k = M \bar{r}_C$ .

Беря от обеих частей производную по времени, получим

$$\sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = M \frac{d\bar{r}_C}{dt}$$

или

$$\sum m_k \bar{v}_k = M \bar{V}_C. \quad (4.8)$$

Отсюда находим, что  $\bar{Q} = M \bar{V}_C$ , т. е. количество движения системы равно произведению массы всей системы на скорость ее центра масс. Этим результатом особенно удобно пользоваться при вычислении количеств движения твердых тел.

Из формулы видно, что если тело (или система) движется так, что центр масс остается неподвижным, то количество движения тела равно нулю. Например, количество движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр масс, будет равно нулю.

Если же движение тела является сложным, то величина  $\bar{Q}$  не будет характеризовать вращательную часть движения вокруг центра масс. Например, для катящегося колеса  $\bar{Q} = M \bar{V}_C$  независимо от того, как вращается колесо вокруг его центра масс  $C$ .

Таким образом, количество движения характеризует только поступательное движение системы. При сложном же движении величина  $\bar{Q}$  характеризует только поступательную часть движения системы вместе с центром масс.

## § 5. Теорема об изменении количества движения

Рассмотрим систему, состоящую из  $n$  материальных точек. Составим для этой системы дифференциальные уравнения движения и сложим их почленно. Тогда получим:

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i. \quad (4.9)$$

Последняя сумма по свойству внутренних сил равна нулю. Кроме того,

$$\Sigma m_k \overline{a_k} = \frac{d}{dt} (\Sigma m_k \overline{V_k}) = \frac{d\overline{Q}}{dt}. \quad (4.10)$$

Окончательно находим:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \Sigma \overline{F_k^e}. \quad (4.11)$$

Уравнение выражает теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил*. В проекциях на координатные оси будем иметь:

$$\frac{d\overline{Q}_x}{dt} = \Sigma \overline{F_{kx}^e}, \quad \frac{d\overline{Q}_y}{dt} = \Sigma \overline{F_{ky}^e}, \quad \frac{d\overline{Q}_z}{dt} = \Sigma \overline{F_{kz}^e}.$$

Найдем другое выражение теоремы. Пусть в момент  $t = 0$  количество движения системы равно  $\overline{Q}_0$ , а в момент  $t_1$  становится равным  $\overline{Q}_1$ . Тогда, умножая обе части равенства  $\frac{d\overline{Q}}{dt} = \Sigma \overline{F_k^e}$  на  $dt$  и интегрируя, получим:

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \Sigma \int_0^{t_1} \overline{F_k^e} dt \quad (4.12)$$

или

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \Sigma \overline{S_k^e}.$$

так как интегралы, стоящие справа, дают импульсы внешних сил.

Уравнение выражает теорему об изменении количества движения системы в интегральной форме: *изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени*.

В проекциях на координатные оси будем иметь:

$$\overline{Q}_{1x} - \overline{Q}_{0x} = \Sigma \overline{S_{kx}^e}, \quad \overline{Q}_{1y} - \overline{Q}_{0y} = \Sigma \overline{S_{ky}^e}, \quad \overline{Q}_{1z} - \overline{Q}_{0z} = \Sigma \overline{S_{kz}^e}.$$

Укажем на связь между доказанной теоремой и теоремой о движении центра масс. Так как  $\overline{Q} = M\overline{V}_C$ , то, подставляя это значение в равенство и учитывая, что  $\frac{d\overline{V}_C}{dt} = \overline{a}_C$ , мы получим  $M\overline{a}_C = \Sigma \overline{F_k^e}$ .

Следовательно, теорема о движении центра масс и теорема об изменении количества движения системы представляют собой, по существу, две разные формы одной и той же теоремы. В тех случаях, когда изучается движение твердого тела (или системы тел), можно в равной мере пользоваться любой из этих форм.

Практическая ценность теоремы состоит в том, что она позволяет исключить из рассмотрения наперед неизвестные внутренние силы (например, силы давления друг на друга частиц жидкости).

## § 6. Закон сохранения количества движения

Из теоремы об изменении количества движения системы можно получить следующие важные следствия:

1) Пусть сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, т.е.  $\overline{\Sigma F_k^e} = 0$ . Тогда из уравнения  $\frac{d\overline{Q}}{dt} = \overline{\Sigma F_k^e}$  следует, что при этом  $Q = \text{const}$ . Таким образом, *если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то вектор количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению.*

2) Пусть внешние силы, действующие на систему, таковы, что сумма их проекций на какую-нибудь ось (например  $Ox$ ) равна нулю, т.е.  $\overline{\Sigma F_{kx}^e} = 0$ . Тогда из уравнения  $\frac{dQ_x}{dt} = \overline{\Sigma F_{kx}^e}$  следует, что при этом  $Q_x = \text{const}$ . Таким образом, *если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция количества движения системы на эту ось есть величина постоянная.*

Эти результаты и выражают закон сохранения количества движения системы. Из них следует, что внутренние силы изменить суммарное количество движения системы не могут. Рассмотрим некоторые примеры:

а) Явление отдачи или отката. Если рассматривать винтовку и пулю как одну систему, то давление пороховых газов при выстреле будет силой внутренней. Эта сила не может изменить суммарное количество движения системы. Но так как пороховые газы, действуя на пулю, сообщают ей некоторое количество движения, направленное вперед, то они одновременно должны сообщить винтовке такое же количество движения в обратном направлении. Это вызовет движение винтовки назад, т. е. так называемую отдачу. Аналогичное явление получается при стрельбе из орудия (откат). б)

б) Работа гребного винта (пропеллера). Винт сообщает некоторой массе воздуха (или воды) движение вдоль оси винта, отбрасывая эту массу назад. Если рассматривать отбрасываемую массу и самолет (или судно) как одну систему, то силы взаимодействия винта и среды как внутренние не могут изменить суммарное количество движения этой системы. Поэтому при отбрасывании массы воздуха (воды) назад самолет (или судно) получает соответствующую скорость движения вперед, такую, что общее количество движения рассматриваемой системы останется равным нулю, так как оно было нулем до начала движения.

Аналогичный эффект достигается действием весел или гребных колес.

в) Реактивное движение. В реактивном снаряде (ракете) газообразные продукты горения топлива с большой скоростью выбрасываются из отверстия в хвостовой части ракеты (из сопла реактивного двигателя). Действующие при этом силы давления будут силами внутренними, и они не могут изменить суммарное количество движения системы ракета - продукты горения топлива. Но так как вырывающиеся газы имеют известное количество движения, направленное назад, то ракета получает при этом соответствующую скорость движения вперед.

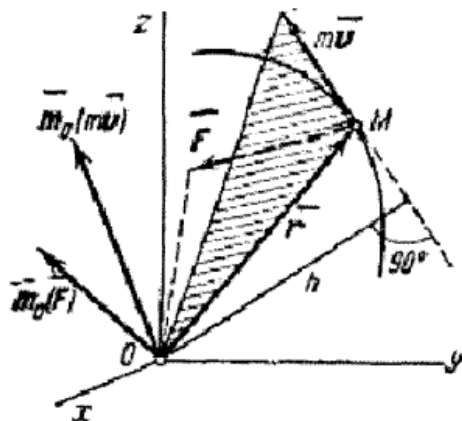
## Тема 5. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

### § 1. Теорема об изменении момента количества движения точки

Из двух основных динамических характеристик, величина  $m\bar{V}$  является векторной.

Иногда при изучении движения точки вместо изменения самого вектора  $m\bar{V}$  оказывается необходимым рассматривать изменение его момента. Момент вектора  $m\bar{V}$  относительно данного центра  $O$  или оси  $z$  обозначается  $m_O(m\bar{V})$  или  $m_z(m\bar{V})$  и называется соответственно *моментом количества движения* или *кинетическим моментом* точки относительно этого центра (оси).

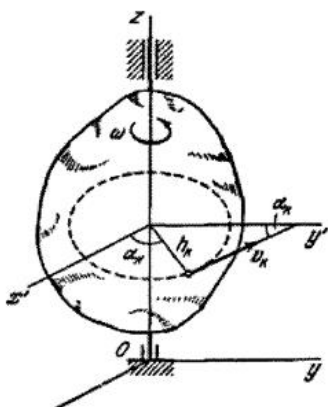
Вычисляется момент вектора  $m\bar{V}$  так же, как и момент силы. При этом вектор  $m\bar{V}$  считается приложенным к движущейся точке. По модулю  $m_O(m\bar{V}) = mVh$ , где  $h$  – длина перпендикуляра, опущенного из центра  $O$  на направление вектора  $m\bar{V}$ .



Вектор  $m_O(\bar{F})$  направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр  $O$  и вектор  $\bar{F}$ , а вектор  $m_O(m\bar{V})$  – перпендикулярно плоскости, проходящей через центр  $O$  и вектор  $m\bar{V}$ .

### § 2. Главный момент количества движения системы

Главным моментом количеств движения (или кинетическом моментом) системы относительно данного центра  $O$  называется величина  $\bar{K}_0$ , равная геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра.



$$\bar{K}_0 = \sum m_O(m_k \bar{V}_k). \quad (5.1)$$

Аналогично определяются моменты количеств движения системы относительно координатных осей:

$$K_x = \sum m_x(m_k \bar{V}_k),$$

$$K_y = \sum m_y(m_k \bar{V}_k),$$

$$K_z = \sum m_z(m_k \bar{V}_k).$$

При этом  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$  представляют собою одновременно проекции вектора  $\bar{K}_0$  на коорди-

натные оси.

Подобно тому, как количество движения системы является характеристикой ее поступательного движения, главный момент количества движения системы является характеристикой вращательного движения системы.

Чтобы уяснить механический смысл величины  $K_o$  и иметь необходимые формулы для решения задач, вычислим кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. При этом, как обычно, определение вектора  $\overline{K}_o$  сводится к определению его проекций  $K_x, K_y, K_z$ .

Найдем сначала наиболее важную для приложений формулу, определяющую величину  $K_z$ , т. е. кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения.

Для любой точки тела, отстоящей от оси вращения на расстоянии  $h_k$ , скорость  $V_k = \omega h_k$ . Следовательно, для этой точки  $m_k(m_k \overline{V}_k) = m_k V_k h_k = m_k \omega h_k^2$ . Тогда для всего тела, вынося общий множитель  $\omega$  за скобку, получим

$$K_z = \Sigma m_k(m_k \overline{V}_k) = (\Sigma m_k h_k^2) \omega. \quad (5.2)$$

Величина, стоящая в скобке, представляет собою момент инерции тела относительно оси  $z$ . Окончательно находим

$$K_z = I_z \omega. \quad (5.3)$$

Таким образом, *кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела.*

Если система состоит из нескольких тел, вращающихся вокруг одной и той же оси, то, очевидно, будет

$$K_z = I_{1z} \omega_1 + I_{2z} \omega_2 + \dots + I_{nz} \omega_n. \quad (5.4)$$

Легко видеть аналогию между формулами  $\overline{Q} = M \overline{V}_c$  и  $K_z = I_z \omega$ : количество движения равно произведению массы (величина, характеризующая инертность тела при поступательном движении) на скорость; кинетический момент равен произведению момента инерции (величина, характеризующая инертность тела при вращательном движении) на угловую скорость.

### **§ 3. Теорема об изменении главного момента количества движения системы (теорема моментов)**

Теорема моментов для одной материальной точки будет справедлива для каждой из точек системы. Следовательно, если рассмотреть точку системы с массой  $m_k$ , имеющую скорость  $V_k$ , то для нее будет

$$\frac{d}{dt} [m_k(m_k \overline{V}_k)] = m_k(\overline{F}_k^e) + m_k(\overline{F}_k^i), \quad (5.5)$$

где  $\Sigma \overline{F}_k^e$  и  $\Sigma \overline{F}_k^i$  – равнодействующие всех внешних и внутренних сил, действующих на данную точку.

Составляя такие уравнения для всех точек системы и складывая их почленно, получим:

$$\frac{d}{dt} [\Sigma \overline{m}_0 (\Sigma \overline{m}_k \overline{V}_k)] = \Sigma \overline{m}_0 (\overline{F}_k^e) + \Sigma \overline{m}_0 (\overline{F}_k^i). \quad (5.6)$$

Но последняя сумма по свойству внутренних сил системы равна нулю. Тогда найдем окончательно:

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \Sigma \overline{m}_0 (\overline{F}_k^e). \quad (5.7)$$

*Полученное уравнение выражает следующую теорему моментов для системы:* производная по времени от главного момента количества движения системы относительно некоторого неподвижного центра, равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра.

Проектируя обе части равенства на неподвижные оси  $Oxyz$ , получим:

$$\frac{dK_x}{dt} = \Sigma m_x (\overline{F}_k^e), \quad \frac{dK_y}{dt} = \Sigma m_y (\overline{F}_k^e), \quad \frac{dK_z}{dt} = \Sigma m_z (\overline{F}_k^e).$$

Уравнения выражают теорему моментов относительно любой неподвижной оси.

В кинематике было показано, что движение твердого тела в общем случае складывается из поступательного движения вместе с некоторым полюсом и вращательного движения вокруг этого полюса. Если за полюс выбрать центр масс, то поступательная часть движения тела может быть изучена с помощью теоремы о движении центра масс, а вращательная – с помощью теоремы моментов.

Практическая ценность теоремы моментов состоит еще в том, что она, аналогично теореме об изменении количества движения, позволяет при изучении вращательного движения системы исключать из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы.

#### § 4. Закон сохранения главного момента количеств движения

Из теоремы моментов можно получить следующие важные следствия.

1) Пусть сумма моментов относительно центра  $O$  всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, т.е.  $\Sigma \overline{m}_0 (\overline{F}_k^e) = 0$ . Тогда из уравнения  $\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \Sigma \overline{m}_0 (\overline{F}_k^e)$  следует, что при этом  $\overline{K}_0 = \text{const}$ . Таким образом, *если сумма моментов относительно данного центра всех приложенных к системе внешних сил равна нулю, то главный, момент количества движения системы относительно этого центра будет численно и по направлению постоянен.*

2) Пусть внешние силы, действующие на систему, таковы, что сумма их моментов относительно некоторой неподвижной оси  $Oz$  равна нулю, т.е.  $\Sigma m_z (\overline{F}_k^e) = 0$ . Тогда из уравнения  $\frac{dK_z}{dt} = \Sigma m_z (\overline{F}_k^e)$  следует, что при этом

$K_z = \text{const}$ . Таким образом, если сумма моментов всех действующих на систему внешних сил относительно какой-нибудь оси равна нулю, то главный момент количества движения системы относительно этой оси будет величиной постоянной.

Эти результаты выражают собою закон сохранения главного момента количества движения системы. Из них следует, что внутренние силы изменить главный момент количества движения системы не могут.

## § 5. Случай вращающейся системы

Рассмотрим систему, вращающуюся вокруг неподвижной (или проходящей через центр масс) оси  $Oz$ . Тогда  $K_z = I_z \omega$ . Если в этом случае  $\Sigma m_z (\overline{F_k^e}) = 0$ , то  $I_z \omega = \text{const}$ .

Отсюда приходим к следующим выводам.

а) Если система *неизменяема* (абсолютно твердое тело), то  $I_z = \text{const}$  и, следовательно,  $\omega = \text{const}$ , т. е. твердое тело, закрепленное на оси, вращается в этом случае с постоянной угловой скоростью.

б) Если система *изменяема*, то под действием внутренних (или внешних) сил отдельные ее точки могут удаляться от оси, что вызывает увеличение  $I_z$ , или приближаться к оси, что приведет к уменьшению  $I_z$ . Но поскольку  $I_z \omega = \text{const}$ , то при увеличении момента инерции угловая скорость системы будет уменьшаться, а при уменьшении момента инерции – увеличиваться. Таким образом, действием внутренних сил можно изменить угловую скорость вращения системы, так как постоянство  $K_z$  не означает вообще постоянства  $\omega$ .

Рассмотрим некоторые примеры:

а) *Опыты с платформой Жуковского*. Для демонстрации закона сохранения момента количества движения удобно пользоваться простым прибором, называемым «платформой Жуковского». Это круглая горизонтальная платформа на шариковых опорных подшипниках, которая может с малым трением вращаться вокруг вертикальной оси  $z$ . Для человека, стоящего на такой платформе,  $\Sigma m_z (\overline{F_k^e}) = 0$  и, следовательно,  $I_z \omega = \text{const}$ . Если человек, разведя руки в стороны, сообщит себе толчком вращение вокруг вертикальной оси, а затем опустит руки, то величина  $I_z$  уменьшится и, следовательно, угловая скорость вращения возрастет. Таким способом увеличения угловой скорости вращения широко пользуются в балете, при прыжках в воздухе (сальто) и т. п.

Далее, человек, стоящий на платформе неподвижно ( $K_z = 0$ ), может повернуться в любую сторону, вращая вытянутую горизонтально руку в противоположном направлении. Угловая скорость вращения человека при этом будет такой, чтобы в сумме величина  $K_z$  системы осталась равной нулю.

б) *Раскачивание качелей.* Давлением ног (сила внутренняя) человек, стоящий на качелях, раскачать их не может. Сделать это можно следующим образом. Когда качели находятся в левом верхнем положении  $A_0$ , человек приседает. При прохождении через вертикаль он быстро выпрямляется. Тогда массы приближаются к оси вращения  $z$ , величина  $I_z$  уменьшается, и угловая скорость  $\omega$  скачком возрастает. Это увеличение со временем приводит к тому, что качели поднимутся выше начального уровня  $A_0$ . В правом верхнем положении, когда  $\omega = 0$ , человек опять приседает (на величине со временем, очевидно, не скажется); при прохождении через вертикаль он снова выпрямляется и т. д. В результате размахи качелей будут возрастать.

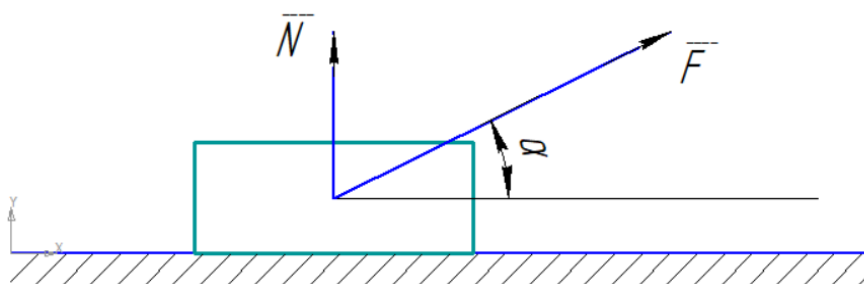
в) *Реактивный момент винта.* Воздушный винт, установленный на вертолете, не только отбрасывает воздух вниз, но и сообщает отбрасываемой массе вращение. Суммарный момент количества движения отбрасываемой массы воздуха и вертолета должен при этом оставаться равным нулю, так как система вначале была неподвижна, а силы взаимодействия между винтом и средой внутренние. Поэтому вертолет начинает вращаться в сторону, противоположную направлению вращения винта. Действующий при этом на вертолет вращающий момент называют *реактивным моментом*.

Чтобы предотвратить реактивное вращение корпуса одновинтового вертолета, на его хвостовой части устанавливают соответствующий рулевой винт. У многовинтового вертолета винты делают вращающимися в разные стороны.

## Тема 6. РАБОТА И МОЩНОСТЬ СИЛ

### § 1. Работа постоянной силы на прямолинейном перемещении

*Работа постоянной силы на прямолинейном перемещении* равна произведению силы на перемещение точки приложения силы и на косинус угла между вектором силы и вектором перемещения.



$$A_F = F \cdot S \cdot \cos(\bar{F} \wedge \bar{S}) \quad (6.1)$$

*Работа силы* – величина алгебраическая, т. е. может быть положительной, отрицательной или равной нулю.

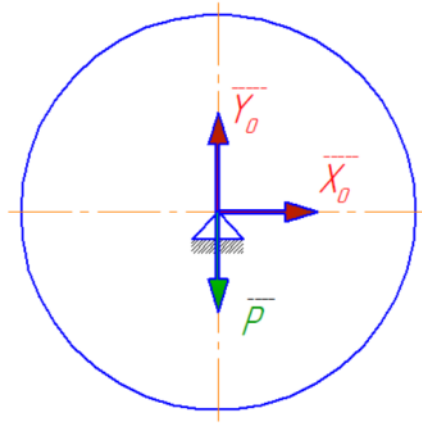
Зависит это от угла между вектором силы и вектором перемещения:

1. Если  $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ , то  $A_F > 0$ ;
2. Если  $\alpha = 90^\circ$ , то  $A_F = 0$ ;
3. Если  $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ , то  $A_F < 0$ .

$$A_N = N \cdot S \cos 90^\circ = 0;$$

$$A_{F_{mp}} = F_{mp} \cdot S \cos 180^\circ = -F_{mp} \cdot S;$$

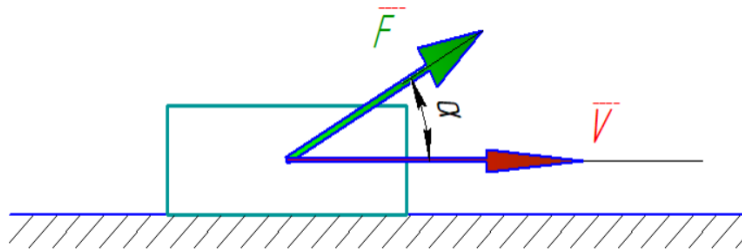
где  $S$  – перемещение той точки, к которой сила приложена.



$$A_P = P \cdot S_0 = 0;$$

## § 2. Мощность силы

Это отношение работы к промежутку времени ее выполнения.



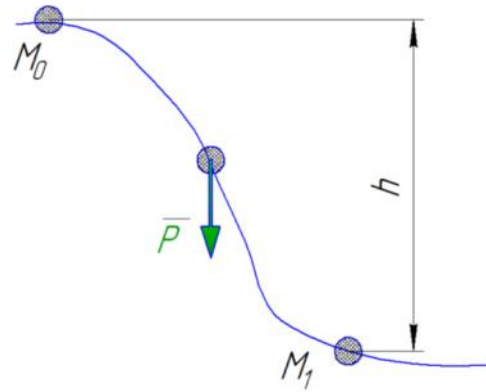
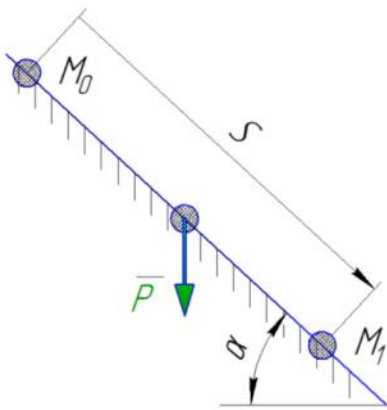
$$N_F = \frac{A_F}{\Delta t} = \frac{F \cdot S \cdot \cos(\vec{F} \cdot \vec{S})}{\Delta t};$$

$$N_F = FV \cos(\vec{F} \wedge \vec{V}). \quad (6.2)$$

*Мощность силы* равна произведению силы на скорость точки приложения силы и на косинус угла между вектором силы и вектором скорости точки ее приложения.

Мощность силы, как и работа, величина алгебраическая. Может быть положительной, отрицательной и равной нулю.

### § 3. Работа силы тяжести



$$A_p = P \cdot S \cdot \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$A_p = \pm P \cdot h \quad (6.3)$$

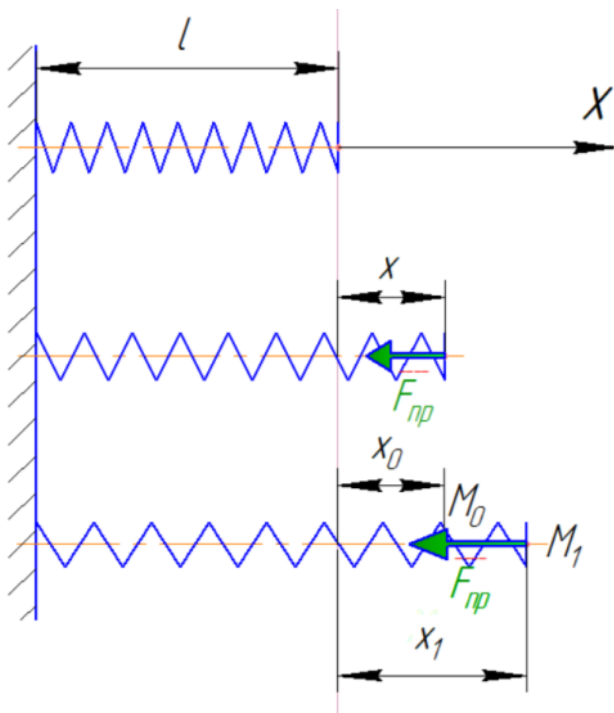
Работа силы тяжести равна, взятому со знаком «+» или «-» произведению силы тяжести на вертикальное перемещение точки ее приложения:

[+] – если перемещение происходит «вниз»;

[-] – если перемещение происходит «вверх».

Формула (6.3) универсальная для силы тяжести. Она справедлива как на прямолинейном, так и на криволинейном перемещении точки приложения силы тяжести.

### § 4. Работа силы упругости пружины



$\overline{F_{\text{пр}}}$  – сила упругости пружины:

$$\overline{F_{\text{пр}}} = Cx,$$

где  $C$  – коэффициент жесткости пружины (кГ/см).

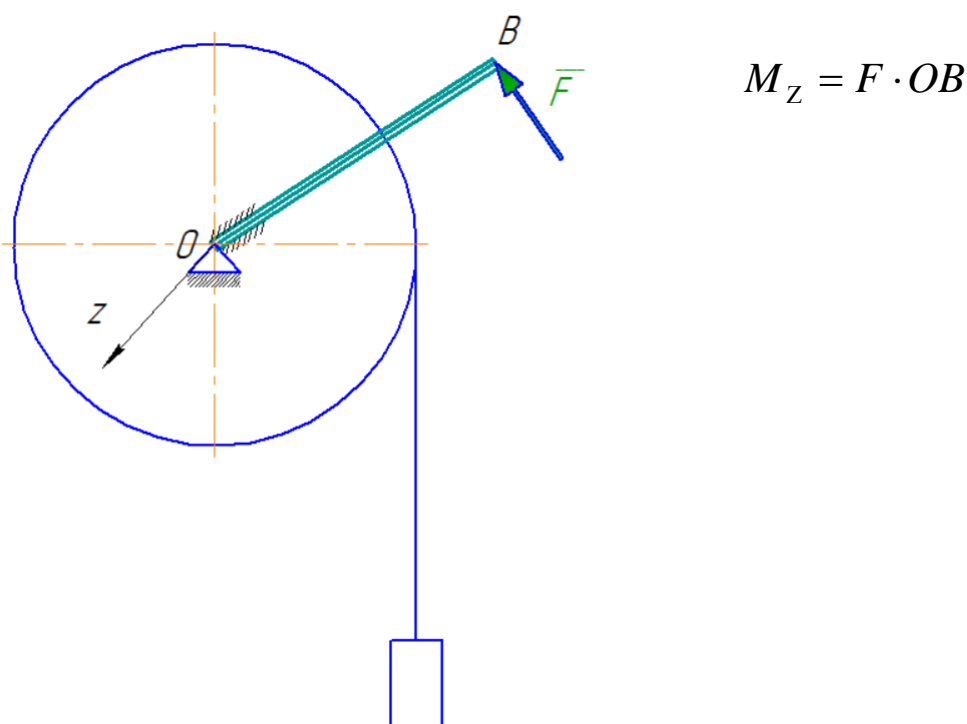
$$A_{F_{np}} = \frac{1}{2} \cdot C(x_0^2 - x_1^2) \quad (6.4)$$

Работа силы упругости пружины равна половине произведения коэфф. жесткости пружины на разность квадратов начального и конечного удлинений или сжатий пружины.

Работа силы упругости пружины будет отрицательной, если конец пружины удаляется от равновесного положения и работа будет положительной, если конец пружины стремится к своему равновесному положению.

Работа силы упругости пружины не зависит от ее длины, а только лишь от удлинений или сжатий.

### § 5. Работа и мощность сил, приложенных к вращающемуся телу



В этом случае работу и мощность силы удобно определять через момент силы относительно оси вращения тела.

Работа момента сила равна взятому со знаком «+» или «-» произведению момента силы на угол поворота тела.

$$A_M = \pm M\varphi : \quad (6.5)$$

где [+] – если направление угла поворота тела и направление момента совпадают;

[-] – если направление угла поворота тела и направление момента не совпадают.

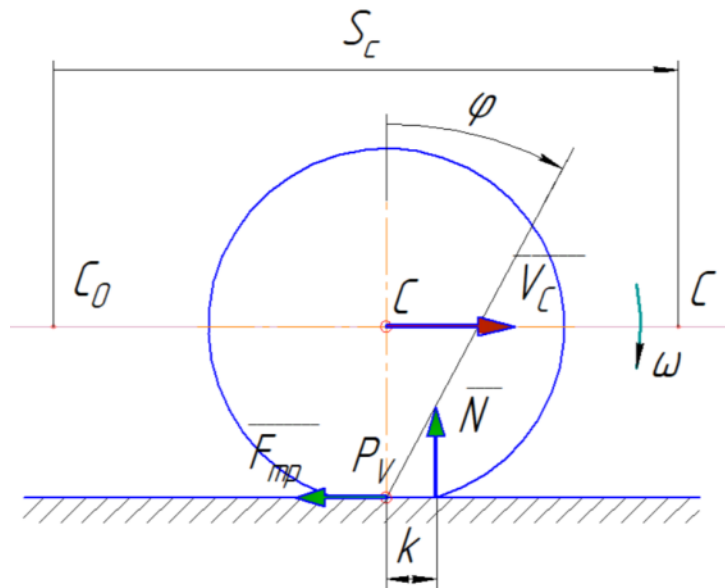
Мощность момента силы:

$$N_M = \pm M \cdot \omega \quad (6.6)$$

где [+] – если направление момента силы и направление угловой скорости совпадают;

[-] – если направление момента силы и направление угловой скорости не совпадают.

### § 6. Работа и мощность сил трения, приложенных к тянущемуся без проскальзывания колесу



$$A_{F_{mp}} = F_{mp} \cdot S_{Pv} = F_{mp} \cdot 0 = 0$$

$$A_{F_{mp}} = F_{mp} \cdot S_{Pv} = 0 \quad (6.7)$$

$$S_{Pv} = V_{Pv} \cdot \Delta t = 0$$

$$N_{mp} = F_{mp} \cdot V_{Pv} = 0 \quad (6.8)$$

Смещенная нормальная реакция создает момент трения, препятствующий качению колеса. Величина этого момента равна.

$$M_{mp} = kN$$

Работу и мощность момента трения качения можно определить по формулам аналогичным 6.5 и 6.6

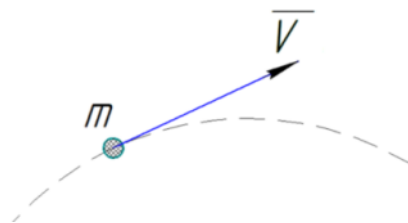
$$A_{M_{тр}} = \pm M_{тр} \varphi = -kN\varphi = -kN \frac{S_C}{CPv}; \quad (6.9)$$

$$N_{M_{тр}} = \pm M_{тр} \omega = -kN\omega = -kN \frac{V_C}{CPv}. \quad (6.10)$$

# Тема 7. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ТОЧКИ И СИСТЕМЫ

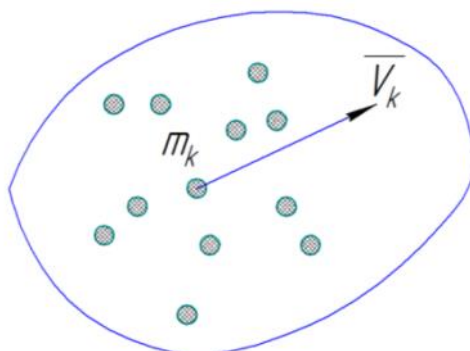
## § 1. Кинетическая энергия точки и системы

А) для точки



$$T = \frac{m \cdot V^2}{2} \quad (7.1)$$

Б) для системы

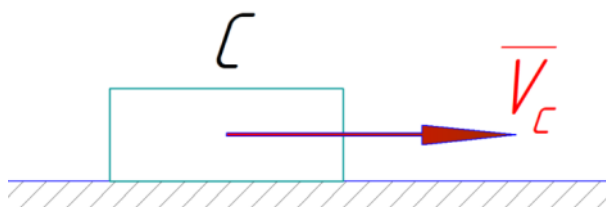


$$T = \sum \frac{m_k \cdot V_k^2}{2} \quad (1)$$

Формула (1) неудобна в употреблении, т. к. предполагает большое число сложений.

Поэтому, для однородных тел, в зависимости от вида их движения, получены удобные формулы для определения кинетической энергии тела:

1. Поступательное движение тела.

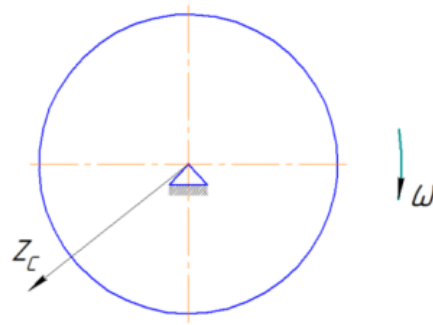


$$T = \frac{1}{2} M V_C^2 \quad (7.2)$$

где  $M$  – масса тела;

$V_C$  – скорость центра масс.

## 2. Вращательное движение тела.

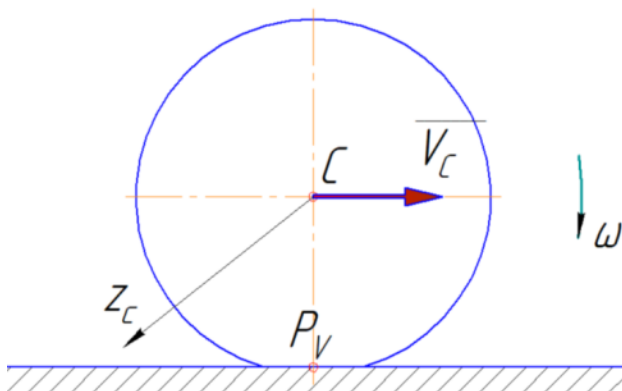


$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad (7.3)$$

где  $I_z$  – момент инерции тела, относительно оси вращения  $z$ .

Момент инерции тела относительно оси является его мерой инертности при вращательном движении. Как и масса тела является мерой инертности тела при поступательном движении.

## 3. Плоскопараллельное движение тела.



Плоское движение тела представляется, как сумма 2-х движений:

1) поступательное движение вместе с произвольно выбранным полюсом

2) вращательное движение вокруг оси, проходящей через полюс

Возьмем за полюс центр масс колеса (точку  $C$ ). Тогда кинетическая энергия тела будет равна сумме кинетических энергий в поступательном и вращательном его движениях.

$$T = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} I_z \omega^2. \quad (7.4)$$

Если система состоит из многих тел, то по формулам 7.2; 7.3; 7.4 можно определить кинетическую энергию каждого тела, а затем их сложить.

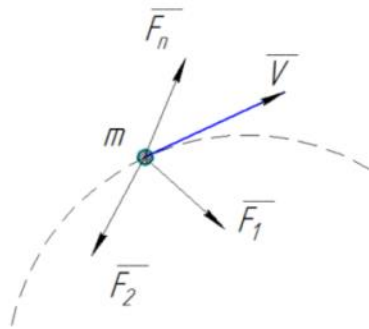
$$T = T_1 + T_2 + \dots + T_n$$

## § 2. Теорема об изменении кинетической энергии.

И для точки, и для системы она имеет две формы:

- дифференциальная
- интегральная (конечная)

**A) для точки**



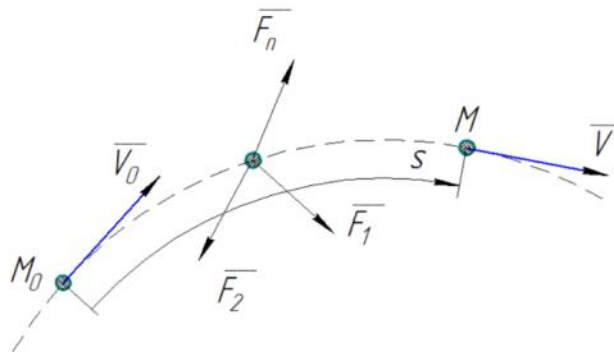
$$T = \frac{mV^2}{2}$$

1) дифференциальная форма теоремы для точки

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mV^2}{2} \right) = \sum N_k \quad (7.5)$$

Производная по времени от кинетической энергии точки равна сумме мощностей всех действующих на точку сил.

2) интегральная (конечная) форма теоремы для точки



$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A_k \quad (7.6)$$

Изменение кинетической энергии точки (разность), при некотором ее перемещении, равно сумме работ всех действующих на точку сил на этом же перемещении S.

Дифференциальная форма теоремы как правило может применяться для определения ускорения точки, но применяется редко.

Интегральная форма теоремы (7.6) имеет частный характер и может применяться для точки при определенных условиях.

В условии задачи речь должна идти о:

- 1) перемещении точки – S
- 2) начальной скорости точки
- 3) конечной скорости точки

Из уравнения (7.6) можно определить только лишь одну неизвестную величину (любую).

**Б) для системы (изменяемой)**

1) дифференциальная

$$\frac{dT}{dt} = \sum N_k^e + \sum N_k^i \quad (7.7)$$

Производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей всех действующих на систему внешних и внутренних сил.

2) интегральная (конечная)

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i \quad (7.8)$$

Изменение кинетической энергии системы, при некотором ее перемещении, равно сумме работ всех действующих на систему внешних и внутренних сил на этом же перемещении.

В динамике это единственная теорема, где нужно учитывать внутренние силы, но только для изменяемых механических систем.

Изменяемая механическая система – это такая система тел, в которой изменяется расстояние между точками приложения внутренних сил. И тогда они совершают работу и есть их мощность.

Есть системы неизменяемые.

### *Неизменяемая механическая система.*

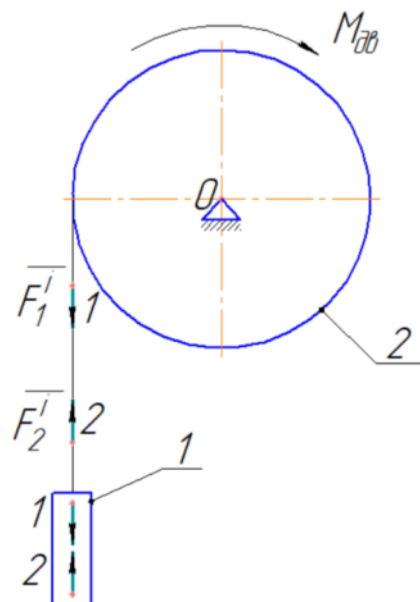
Это такая система тел, расстояние между точками приложения внутренних сил у которой, не изменяется при движении тел системы.

Признаком такой неизменяемой системы является: тела системы абсолютно твердые; нити связи не растяжимые.

В неизменяемой механической системе сумма мощностей и сумма работ внутренних сил равна нулю.

$$\sum N_k^i = 0$$

$$\sum A_k^i = 0$$



Тогда, для неизменяемой механической системы уравнение (7.7) и (7.8) примут вид:

– дифференциальная форма

$$\frac{dT}{dt} = \sum N_k^e, \quad (7.9)$$

– интегральная форма

$$T - T_0 = \sum A_k^e. \quad (7.10)$$

### § 3. Указания к решению задач

1. Теорема об изменении кинетической энергии может применяться для точки; для тела, независимо от вида его движения или для любой механической системы. В этом универсальность данной системы.

2. Для изменяемых механических систем необходимо учитывать внутренние силы.

3. Т. к. теорема имеет две формы, то и применение их отличается.

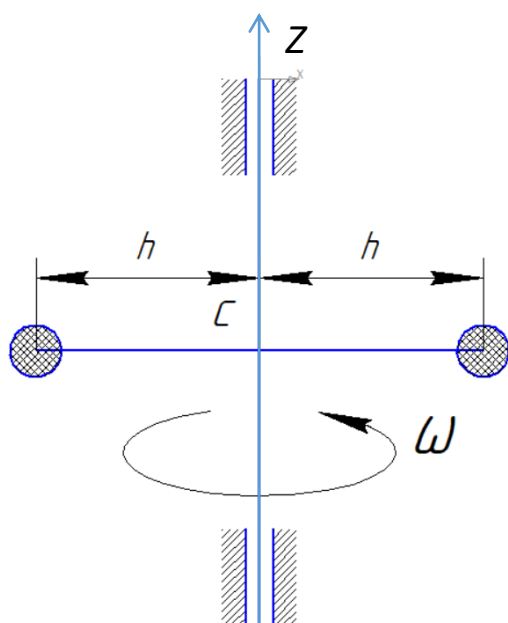
3.1) дифференциальная форма (7.9) теоремы является универсальной и может применяться для решения прямой и обратной задач динамики для точки, тела или системы.

3.2) интегральная (конечная) форма теоремы (7.10) носит частный характер и как и для точки (7.6) применяется при определенных условиях.

В условии задачи речь должна идти о:

- 1) перемещении, линейном или угловом ( $S$  или  $\varphi$ );
- 2) начальной скорости, линейной или угловой ( $V_0$  или  $\omega_0$ );
- 3) конечной скорости, линейной или угловой ( $V$  или  $\omega$ ).

## Тема 8. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ



Для тел и систем, совершающих вращательное движение, важную роль играет распределение массы относительно оси вращения.

Это распределение массы относительно оси учитывается моментом инерции тела (системы) относительно оси  $I_z$ .

Для точки момент инерции

$$I_z = mh^2, \quad (8.1)$$

Для тела (системы)

$$I_z = \sum m_k h_k^2. \quad (8.2)$$

Моментом инерции тела (системы) относительно оси называется скалярная величина равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний от этой оси.

Момент инерции тела (системы) величина всегда положительная и не равная нулю, с некоторым допущением момент инерции такой нити, расположенной вдоль оси, может быть равен нулю.

Момент инерции тела (системы) относительно оси, является мерой их инертности относительно оси как и масса тела при поступательном его движении.

Формула 8.2 неудобна в употреблении, т. к. предполагает большое число сложений.

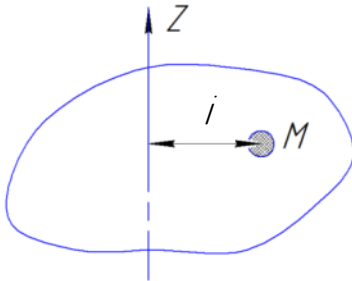
Для тел сложной формы и неоднородных тел часто момент инерции определяется с помощью радиуса инерции тела относительно оси  $i$ .

Радиусом инерции тела относительно оси называется величина, произведение квадрата которой на массу тела равно моменту инерции тела относительно этой же оси.

Если знаем  $i$ , то

$$I_z = Mi^2 \quad (8.3)$$

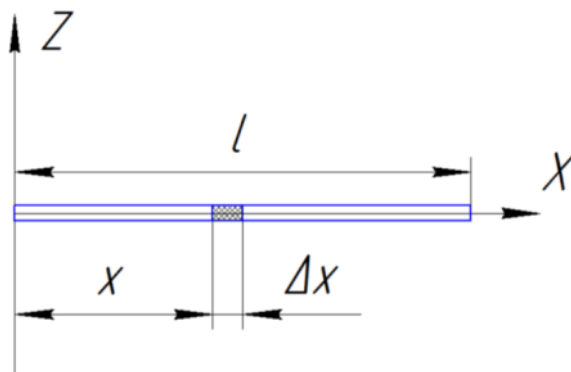
где  $M$  – масса тела.



Физический смысл радиуса инерции тела: это расстояние от оси до той точки тела, где нужно сосредоточить массу всего тела и тогда момент инерции одной этой точки будет равен моменту инерции всего тела относительно этой оси.

Для однородных тел определенной формы получены формулы для определения моментов инерции тела относительно различных осей.

1. Однородный стержень массой  $M$  и длиной  $l$  относительно оси, проходящей через его конец.



Совместим с осью стержня ось «X».

Выделим на некотором расстоянии  $x$  элементарный участок стержня длиной  $dx$ . Тогда элементарный момент инерции данного участка равен

$$\begin{aligned} dI_z &= dm \cdot x^2, \\ dm &= M/l \cdot dx. \end{aligned}$$

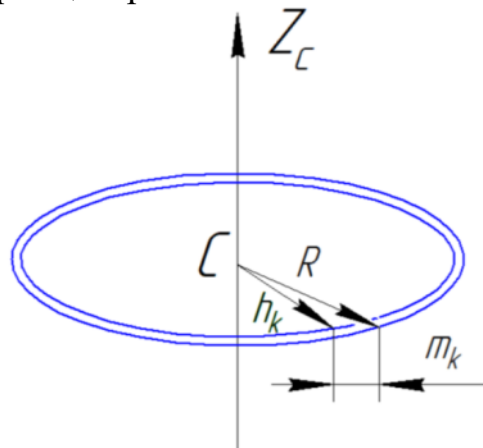
Тогда

$$dI_z = M/l \cdot x^2 \cdot dx.$$

Интегрируя данное выражение в пределах от 0 до  $l$ , определим момент инерции стержня относительно оси  $Z$

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{M}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{M}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{M \cdot l^3}{l \cdot 3}; \\ I_z &= \frac{Ml^2}{3}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

2. Тонкое однородное кольцо массой  $m$  и радиусом  $R$  относительно оси, проходящей через центр.



За основу возьмем формулу (8.2)

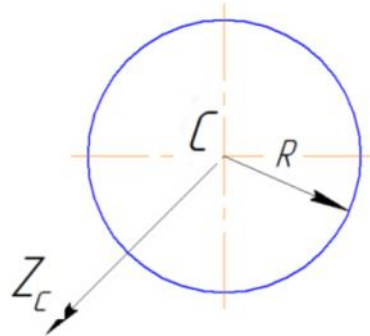
$$I_z = \sum m_k h_k^2 = \sum m_k R^2 = mR^2$$

Так как  $h_k = R$ , то

$$I_z = mR^2. \quad (8.5)$$

Данная формула справедлива и для тонкостенного цилиндра относительно оси, проходящей через его центр масс.

3. Сплошной однородный диск массой  $M$  и радиусом  $R$  относительно оси, проходящей через его центр.

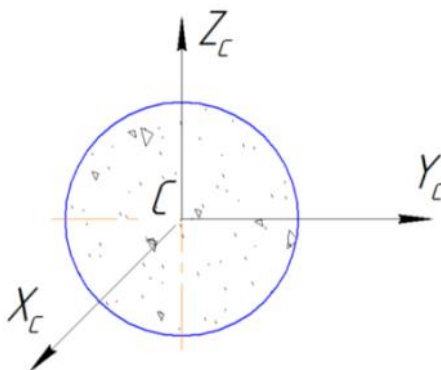


Ось  $Z$  перпендикулярна плоскости диска.

$$I_{zc} = 0,5mR^2. \quad (8.6)$$

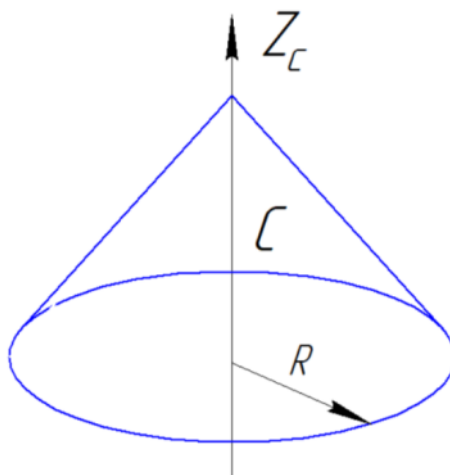
Данная формула (8.6) справедлива и для сплошного однородного цилиндра относительно оси, проходящей через центр массы.

4. Шар массой  $M$  и радиусом  $R$ .



$$I_{zc} = I_{xc} = I_{yc} = 0,4MR^2. \quad (8.7)$$

## 5. Однородный конус в основании радиус $R$

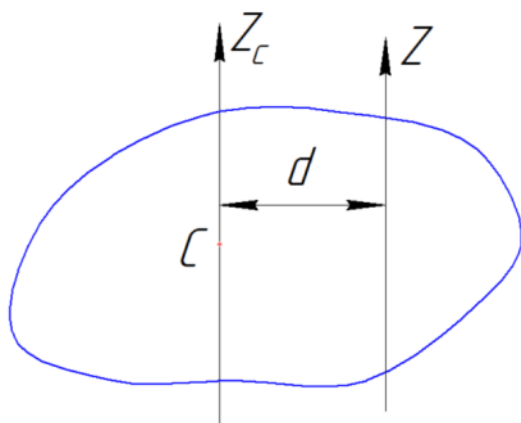


$$I_{zc} = 0,3MR^2. \quad (8.8)$$

Теорема о зависимости между моментами инерции тела относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс тела.

Расстояние между осями.

$$I_z = I_{zc} + Md^2. \quad (8.9)$$

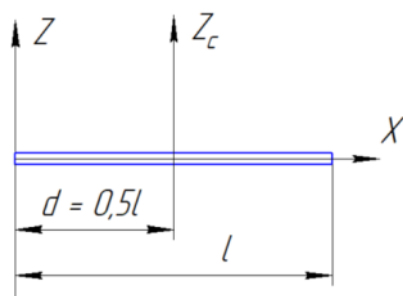


Момент инерции тела относительно какой-нибудь оси равен моменту инерций того же тела, относительно оси ей параллельной и проходящей через центр масс, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями.

Из всех параллельных осей самый малый момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс  $I_{zc}$ .

Данная формула позволяет определять моменты инерции тел относительно различных осей, если известно  $I_{zc}$ .

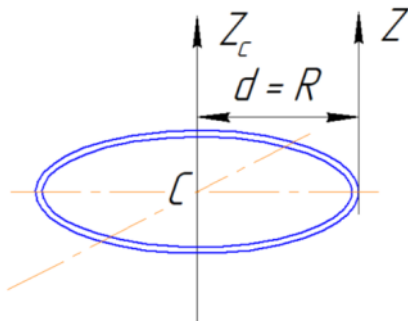
Определим момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через центр.



$$\begin{aligned} I_z &= I_{zc} + Md^2 = I_{zc} + \frac{Ml^2}{4} \\ I_{zc} &= I_z - \frac{Ml^2}{4} = \frac{Ml^2}{3} - \frac{Ml^2}{4} \\ I_{zc} &= \frac{Ml^2}{12}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

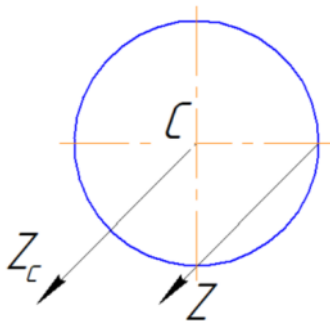
Зная  $I_{zc}$  можем определить момент инерции стержня относительно любой оси по формулам (8.9).

Момент инерции тонкого однородного кольца относительно оси, проходящей через обод.



$$\begin{aligned} I_z &= I_{zc} + Md^2 = MR^2 + MR^2 \\ I_z &= 2MR^2. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Момент инерции сплошного однородного диска относительно оси, проходящей через его обод.



$$\begin{aligned} I_z &= I_{zc} + Md^2 = 0,5MR^2 + MR^2 \\ I_z &= 1,5MR^2 \end{aligned} \quad (8.12)$$

## Тема 9. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА (1717 – 1783)

Принцип открыл в 1743 г.

Принцип Даламбера – это новый метод решения задач динамики, когда задачи динамики решаются методами статики, составляя уравнения условного равновесия.

Получим данный принцип для точки из основного уравнения динамики (1.3), т.е.

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k$$

### § 1. Принцип Даламбера для материальной точки

Получим его из основного уравнения динамики абсолютного движения точки (1.3)

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k$$

Перенесем  $m\bar{a}$  в правую часть уравнения.

$$0 = \sum \overline{F}_k + (-ma) \quad (1)$$

Выражение, стоящее в скобках, имеет размерность силы. Обозначим его ( $\overline{\Phi}$ ) и назовем «сила инерции»

$$\overline{\Phi} = -m\overline{a} \quad (9.1)$$

Сила инерции точки равна по величине произведению массы точки на ее ускорение и направлена она противоположно ускорению точки.

Величина силы инерции.

$$\Phi = ma \quad (9.2)$$

Тогда подставим данную силу в уравнении (1).

Получим.

$$0 = \sum \overline{F}_k + \overline{\Phi} \quad (9.3)$$

Уравнение (9.3) выражает принцип Даламбера для материальной точки



The diagram shows a central point mass labeled 'm' in green. To its left, a vector labeled 'Φ' with a bar over it points to the left. To its right, a vector labeled 'Σ F<sub>k</sub>' with a bar over it points to the right. Further to the right, a vector labeled 'a' with a bar over it points to the right. The mass 'm' is represented by a blue circle with a grid pattern.

$$\begin{aligned} \Phi &= m \cdot a \\ \Sigma F_k &= m \cdot a \\ (\Phi &= \Sigma F_k) \end{aligned}$$

*Определение:* Для материальной точки в каждый момент времени ее движения, геометрическая сумма всех действующих на точку активных сил, сил реакций связей и приложенной условно силы инерции, равна 0.

А если сумма сил равна 0, то точка будет находиться в состоянии условного равновесия.

И тогда, согласно статики, можем составлять уравнения условного равновесия точки.

Они имеют вид.

$$\Sigma F_{k_x} = 0; \Sigma F_{k_y} = 0; \Sigma F_{k_z} = 0 \quad (9.4)$$

Т. к. на точку действует система сходящихся сил.

На самом деле сила инерции к точке не приложена.

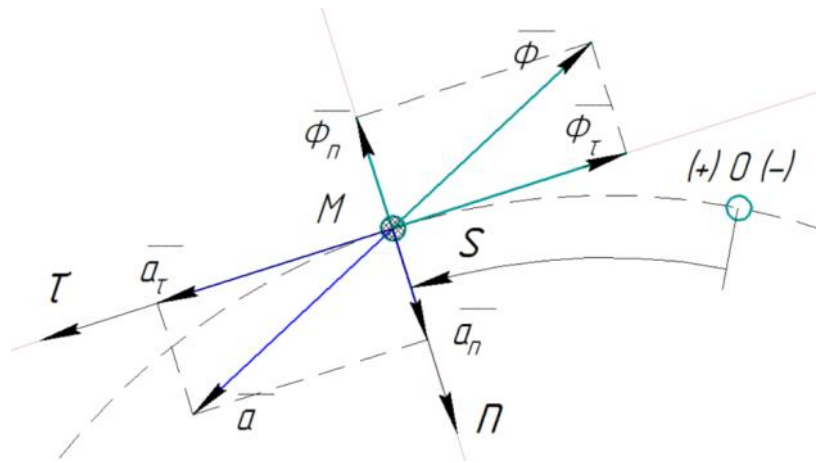
Если бы она была приложена, то точка находилась бы в действительном равновесии и ускорение ее было бы равно нулю, а она движется с ускорением.

Приложение силы инерции это лишь «прием» позволяющий привести точку в условное равновесие, а затем задачу динамики решать методами статики, составляя уравнение условного равновесия (9.4).

В эти уравнения. (9.4) будет входить кроме активных сил, сил реакций связей и сила инерции, ( $\Phi = ma$ ), которая содержит ускорение точки.

Поэтому с помощью уравнения (9.4) можно решать прямую и обратную задачи динамики для точки.

В случаях, когда точка движется по криволинейной траектории, ее ускорение принято разлагать на два:  $\bar{a}_\tau$  и  $\bar{a}_n$ .



$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$$

Помножим на  $-m$

Получим

$$\begin{aligned} -m\bar{a} &= -m\bar{a}_n + \underbrace{(-m\bar{a}_\tau)}_{\bar{\Phi}_\tau} \\ \bar{\Phi} &= \bar{\Phi}_n + \bar{\Phi}_\tau \end{aligned}$$

По величине

$$\Phi_n = m \cdot a_n = m \frac{V^2}{\rho} \quad (9.5)$$

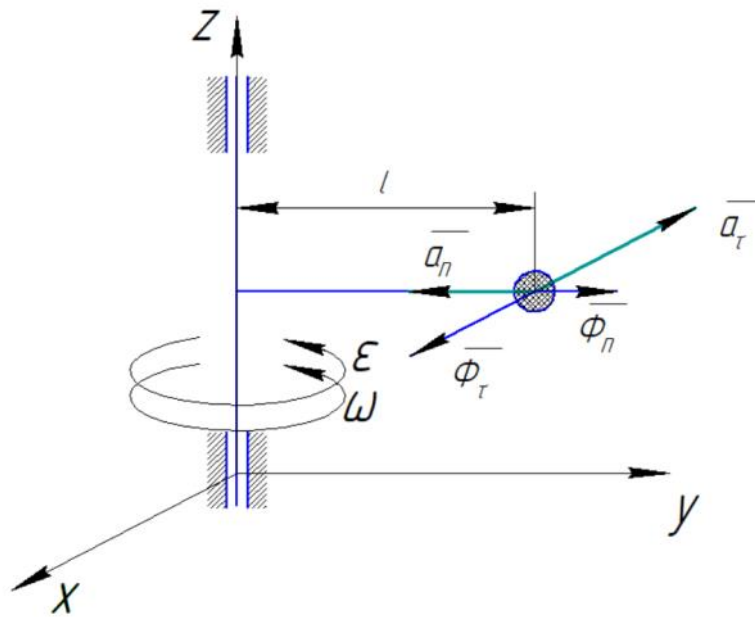
$$\Phi_\tau = m a_\tau = m \frac{dV}{dt}$$

В этом случае и уравнения условного равновесия удобно составлять в проекциях на естественные оси координат (касательную, нормаль и бинормаль)

Тогда уравнения условного равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} \Sigma F_{k_n} &= 0 \\ \Sigma F_{k_\tau} &= 0 \\ \Sigma F_{k_b} &= 0 \end{aligned} \quad (9.6)$$

В случае, если точечный груз вращается вокруг вертикальной оси, то его ускорение также принято раскладывать на два вектора.



$$\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau$$

Тогда и

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_n + \bar{\Phi}_\tau$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_n &= m \cdot a_n = m \cdot \omega^2 \cdot l \\ \Phi_\tau &= m \cdot a_\tau = m \cdot \Sigma \cdot l \end{aligned} \quad (9.7)$$

## § 2. Принцип Даламбера для механической системы

Если система из n-точек, которые движутся с ускорениями, то в соответствии с принципом Даламбера к ним можно приложить силы инерции и тогда каждая точка будет находиться в состоянии условного равновесия, т. к. геометрическая сумма всех сил, действующая на нее, будет равна нулю.

В итоге и сумма всех сил, действующих на систему также будет равна нулю.

И тогда, в зависимости от вида системы сил, действующих на систему тел, можем составлять соотв. уравнения условного равновесия статики.

Если имеет место произвольная плоская система сил, находящихся в условном равновесии, то можем составить 3 уравнения условного равновесия в одной из 3-х форм.

1-ая форма

$$\begin{aligned} \Sigma F_{k_x} &= 0 \\ \Sigma F_{k_y} &= 0 \\ \Sigma m_0(\bar{F}_k) &= 0 \end{aligned} \quad (9.8)$$

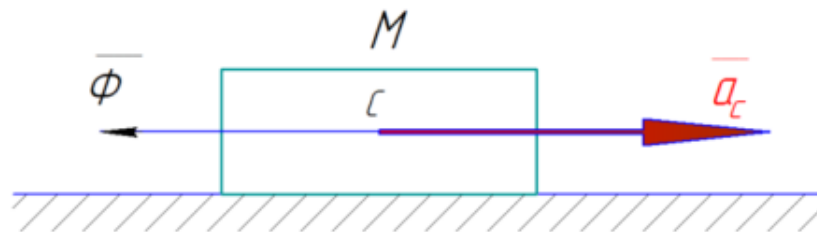
Если имеет место произвольная пространственная система сил, то можем составить шесть уравнений условного равновесия.

$$\begin{aligned}
 \Sigma F_{k_x} &= 0 \\
 \Sigma F_{k_y} &= 0 \\
 \Sigma F_{k_z} &= 0 \\
 \Sigma m_x(\bar{F}_k) &= 0 \\
 \Sigma m_y(\bar{F}_k) &= 0 \\
 \Sigma m_z(\bar{F}_k) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{9.9}$$

### § 3. Приведение сил инерции точек тел к простейшему виду

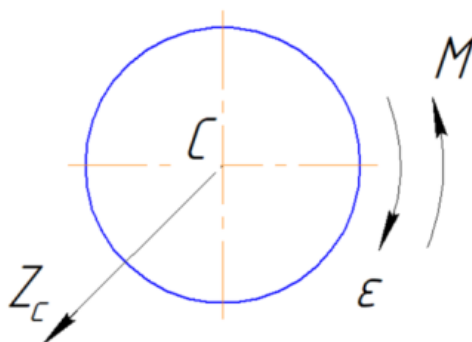
В зависимости от вида движения тел, к нему (телу) можно приложить не к каждой точке силы инерции, а некоторую суммарную силу инерции.

- 1) Поступательное движение тела.



$$\Phi = M \cdot a_c
 \tag{9.10}$$

- 2) Тело вращается оси, проходящей через центр масс.

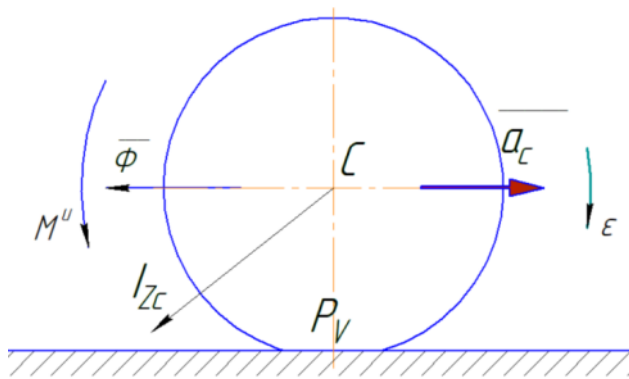


$$M^u = I_{zc} \varepsilon
 \tag{9.11}$$

В этом случае нужно приложить момент сил инерции ( $M^u$ ), который равен произведению момента инерции тела, относительно оси проходящей через центр масс ( $I_{zc}$ ) на угловое ускорение тела ( $\varepsilon$ ).

Направляется момент сил инерции тела противоположно  $\varepsilon$ .

3) Плоскопараллельное движение тела.



$$\begin{aligned} \Phi &= M \cdot a_c \\ M^H &= I_{zC} \varepsilon \end{aligned} \quad (9.12)$$

где  $\varepsilon = \frac{a_c}{CR}$ .

### § 4. Указания к решению задач

1. Принцип Даламбера можно применять для точки, тела или системы тел, которые движутся с ускорениями. Прикладывая к ним соответствующие силы инерции, мы как бы останавливаем их, приводя в состояние условного равновесия, а затем задачи динамики решаем методами статики.

2. Принцип Даламбера широко применяется для определения сил реакций внешних связей (можно определить 6 штук).

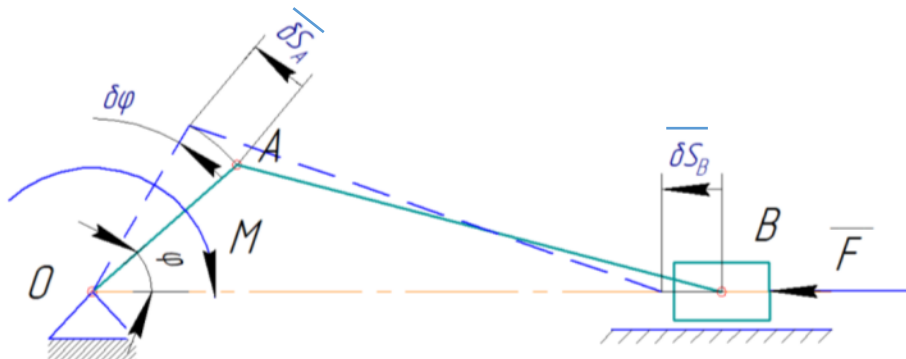
3. Недостаток принципа Даламбера заключается в том, что если система состоит из нескольких тел, то иногда (не всегда) ее нужно будет расчленять на отдельные части тела. И для каждой части тела составлять соответствующие уравнения статики и их будет много, а затем решать систему уравнений.

## Тема 10. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Применяется для систем, которые находятся в равновесии. Это задачи статики. Следовательно, применяя данный метод, задачи статики будут решаться методами динамики.

Достоинство этого метода в том, что систему расчленять не нужно.

### § 1. Возможные перемещения точек системы. Число степеней свободы



$$\overline{\delta S}_A \perp OA$$

$$\sum \delta A_k^a = 0$$

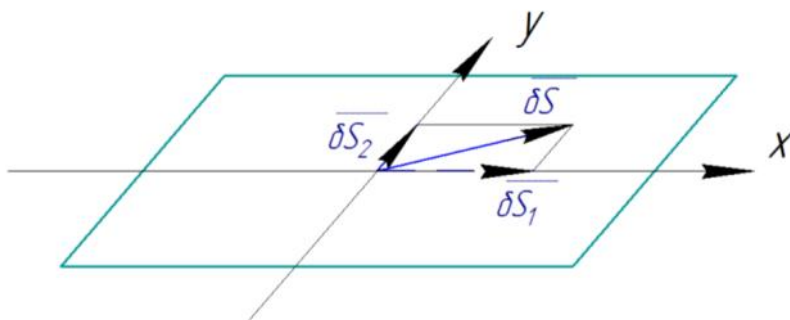
*Возможными перемещениями* называются бесконечно малые перемещения точек системы, допускаемые в данный момент времени (при данном положении механизма) всеми положенными на систему связями.

Для кривошипа возможным перемещением будет его поворот на бесконечно малый угол  $\Delta\varphi$ .

Возможные перемещения точек системы рассматривают, как величины первого порядка малости, пренебрегая величинами высшего порядка, т. е. их рассматривают, как прямолинейные отрезки, направленные по касательным и возможным траекториям движения точек.

Требования к возможным перемещениям:

1. Они бесконечно малые.
2. Рассматриваются в данный момент времени, при данном положении механизма.
3. Не нарушают наложенных на систему связей.



$$\overline{S} = \delta\overline{S}_1 + \delta\overline{S}_2$$

Точку на плоскости можно переместить куда угодно. При этом перемещение  $\delta\overline{S}$  и перемещение  $-\delta\overline{S}$  будем считать одинаковыми, как направленными вдоль одной прямой. Но для точки на плоскости можно взять два независимые между собой возможные перемещения, из которых можно получить любое возможное перемещение точки как их геометрическую сумму.

Число независимых между собой возможных перемещений для точки или системы называется числом степеней свободы (ЧСС).

Для точки на плоскости число степеней свободы – 2.

Для точки в пространстве ЧСС – 3.

Для тела свободного в пространстве ЧСС – 6.

Для плоских механизмов число степеней свободы определяется следующим образом.

Предположим, что механизм пришел в движение. И если теперь остановить одно из простейших движений (поступательное или вращательное) одного из тел системы и механизм остановится – он имеет 1 степень свободы. Если же некоторые тела продолжают движение, но после остановки еще одного простейшего движения одного из тел, механизм остановится – он имеет 2 степень свободы.

А если механизм имеет 1 степень свободы, то для него можно будет составить только одно уравнение работ и все возможные перемещения точек и углы поворотов тел, в этом механизме, можно будет выразить через одно любое возможное перемещение, принятое за независимое.

## § 2. Элементарная работа силы. Идеальные связи.

Под элементарной работой силы понимают величину той работы, которую сила совершила бы, если бы элементарное перемещение точки приложения силы, состоялось.

$$\delta A_F = F \cdot \delta S \cdot \cos(F \wedge \delta S) \quad (10.1)$$

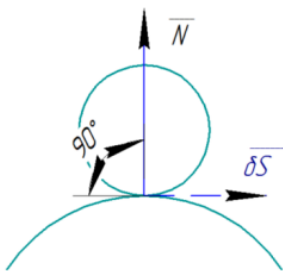
$$\delta A_M = \pm M \cdot \delta \varphi \quad (10.2)$$

Связи, положенные на систему, будем считать идеальными, если сумма элементарных работ сил реакций этих связей на любом перемещении, равна нулю.

$$\sum \delta A_k^N = 0 \quad (10.3)$$

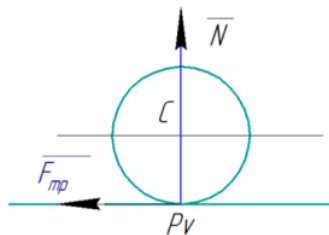
К ним относятся:

1. Идеально гладкая поверхность или плоскость.



$$\delta A_N = N \cdot \delta S \cdot \cos 90^\circ = 0$$

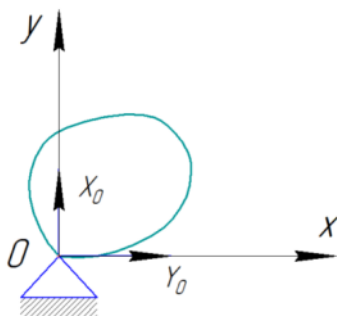
2. Жесткий диск катится без проскальзывания по жесткой поверхности.



$$\delta A_N = 0$$

$$\delta A_{F_{mp}} = 0$$

3. Идеальный шарнир (цилиндрический, сферический).

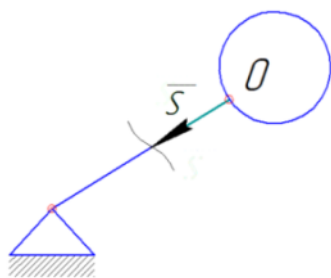


$$\delta S_0 = 0$$

$$\delta A_{x_0} = 0$$

$$\delta A_{y_0} = 0$$

#### 4. Идеальный стержень.



$$\delta A_s = 0$$

При решении задач на принцип возможных перемещений силы реакций идеальных связей показывать не нужно будет, т. к. они в уравнении работ входить не будут.

### § 3. Принцип возможных перемещений (ПВП)

Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ, всех действующих на систему активных сил, на любом возможном перемещении системы, была равна нулю.

Математически ПВП выражается уравнением.

$$\sum \delta A_k^a = 0 \quad (10.4)$$

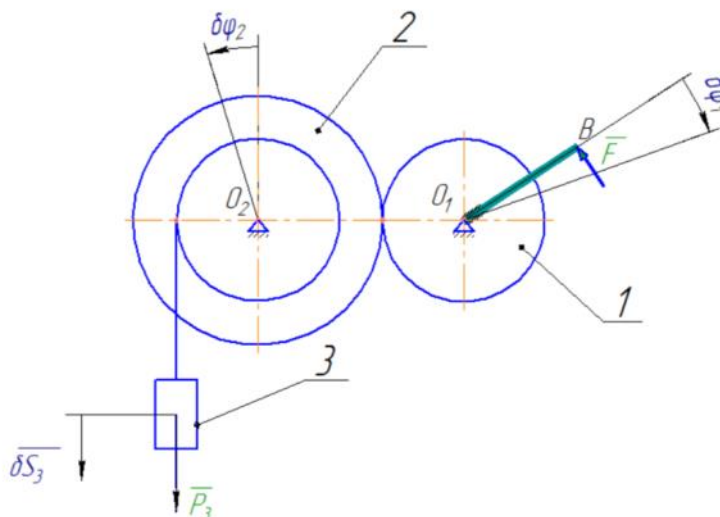
Данное уравнение называется еще – уравнение работ.

### § 4. Указания к решению задач.

1. ПВП применяется для систем, которые находятся в равновесии. При этом задача статики решается методами динамики.

2. Достоинство его в том, что систему расчленять не нужно и не нужно учитывать силы реакций идеальных.

Методику применения его рассмотрим на примере.



Дано:  $R_1; R_2; r_2, 0_1 B = l$

Определить величину силы  $\bar{F}$  при равномерном подъеме груза (3) весом  $P_3$

Решение:

1. Схема; 2. Объект; 3. Силы (активные).

ПВП

4. Установить число степеней свободы.

Здесь число степени свободы равно 1.

5. Задать одному из тел системы возможные перемещения и показать возможные перемещения остальных тел системы.

6. Составить уравнения работ (7.4)

$$\Sigma \delta A_k^a = 0$$

$$P \cdot \delta S_3 - F \cdot l \cdot \delta \varphi_1 = 0 \quad (1)$$

7. Выразить все возможные перемещения через одно, любое, принятое за независимое.

Например, через  $\delta \varphi_2$

$$\delta S_3 = \delta S_A = \delta \varphi_2 \cdot r_2$$

$$\delta S_{k_2} = \delta S_{k_1};$$

$$\delta \varphi_2 R_2 = \delta \varphi_1 \cdot R_1$$

$$\delta \varphi_1 = \frac{\delta \varphi_2 \cdot R_2}{R_1}$$

8. Подставить полученные выражения в уравнение работ (1), сохранить данное уравнение на независимое возможное перемещение ( $\delta \varphi_2$ ) и определить, интересующую нас силу.

$$P \cdot \delta \varphi_2 r_2 - F \cdot l \cdot \frac{\delta \varphi_2 \cdot R_2}{R_1} = 0$$

$$F = ?$$

## Тема 11. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Это применение к решению задач динамики одновременно 2-х принципов: принцип Даламбера и принципа возможных перемещений.

Если к системе, тела которой движутся с ускорениями применить принцип Даламбера (приложить силы инерции), то система будет находиться в условном равновесии, а это задача статики.

Тогда для решения данной задачи можно применить принцип возможных перемещений, который не требует расчленения системы.

Этот метод решения задач динамики математически выражается общим уравнением динамики и имеет вид.

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0 \quad (11.1)$$

где  $\sum \delta A_k^a$  – сумма работ активных сил;

$\sum \delta A_k^u$  – сумма работ сил инерции.

При движении любой механической системы с идеальными связями сумма элементарных работ, всех действующих на систему активных сил и сумма элементарных работ, всех приложенных сил инерции на любом возможном перемещении системы, равна нулю.

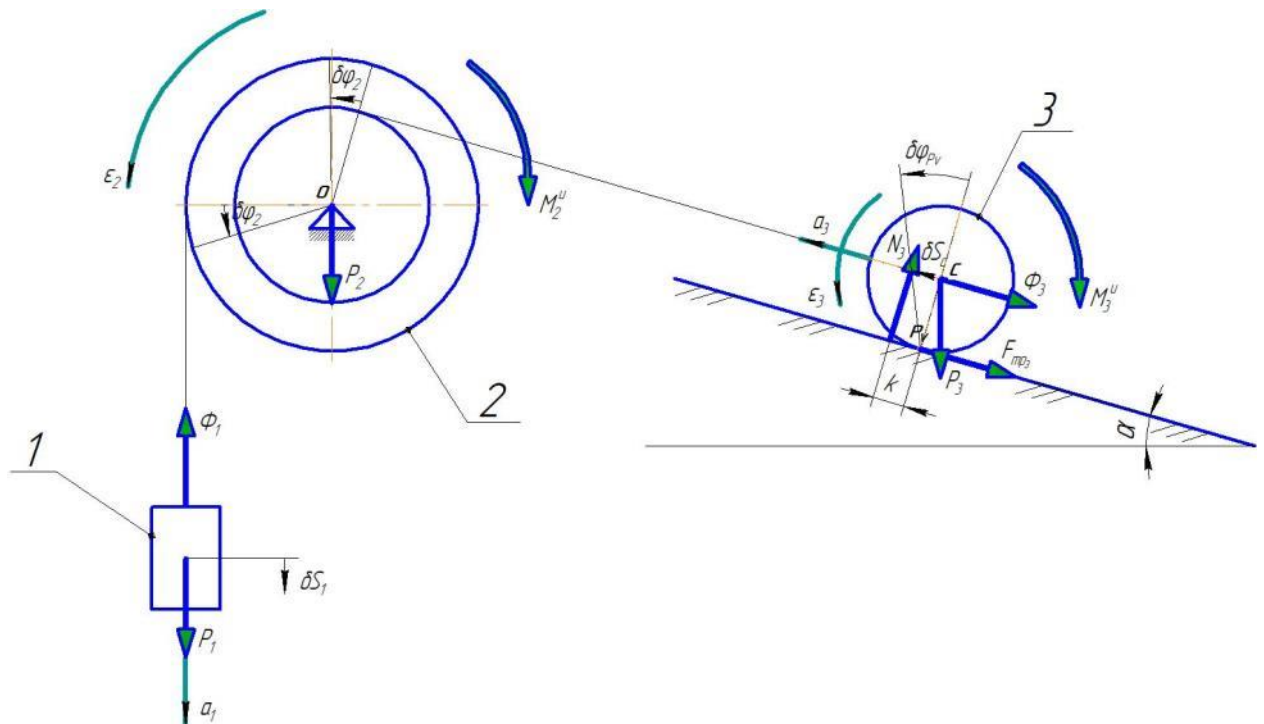
Уравнение 8.1 называется уравнением работ.

Достоинство данного метода решения задач динамики заключается в том, что систему расчленять не нужно и он применяется для систем, тела которой движутся с ускорением.

**Пример.** Система тел приходит в движение из состояния покоя под действием сил тяжести, при этом тело 1 (груз) опускается. Определить ускорение тела 1, если известно:

- массы тел  $m_1, m_2, m_3$ ;
- радиусы тела 2  $R_2, r_2$ ;
- радиус инерции тела 2 относительно оси вращения  $i_2$ .

Для расчетов принять тело 3 сплошной однородный цилиндр радиусом  $R_3$ , который катится без проскальзывания. Принять коэффициент трения качения равным  $k$ .



*Решение:*

Рассмотрим данную систему тел. Приложим к данным телам силы тяжести  $P_1, P_2, P_3$ , а также приложим силу трения  $F_{тр3}$  к точке  $Pv$  (мгновенный центр скоростей) и нормальную реакцию  $N$  перпендикулярно опорной плоскости, по которой катиться тело 3, со смещением на расстоянии  $k$ .

Для решения данной задачи применим общие уравнения динамики, который заключается в применении двух принципов: принцип Даламбера и принцип возможных перемещений.

Математически выражается следующим уравнением

$$\sum \delta A_K^A + \sum \delta A_K^H = 0$$

Применяем принцип Даламбера.

На расчетной схеме к телам приложим ускорения  $a_1, \varepsilon_2, a_3$  и  $\varepsilon_3$ , а затем приложим силы и моменты инерции, которые будут направлены в противоположные стороны ускорений и определены по следующим формулам:

для тела 1 –  $\Phi_1 = m_1 a_1$ ;

для тела 2 –  $M_2^H = I_2 \varepsilon_2 = m_2 i_2^2 \varepsilon_2$ ;

для тела 3 –  $\Phi_3 = m_3 a_C$ ,

$$M_3^H = I_{Zc} \varepsilon_3 = 0,5 m_3 R_3^2 \varepsilon_3.$$

Применяем принцип возможных перемещений.

Для данной системы тел число степени свободы равно 1.

На расчетной схеме задаем возможное перемещение  $\delta S_1, \delta \varphi_2, \delta S_C, \delta \varphi_{Pv}$ .

Составляем уравнение работ

$$\begin{aligned} & \sum \delta A_K^A + \sum \delta A_K^H = \\ = & \delta A_{P_1} + \delta A_{\Phi_1} + \delta A_{P_2} + \delta A_{Mu_2} + \delta A_{P_3} + \delta A_{\Phi_3} + \delta A_{F_{тр3}} + \delta A_{Mu_3} + \delta A_{MN} \\ \delta A_{P_1} &= P_1 \delta S_1 \cos 0^\circ = m_1 g \delta S_1 \\ \delta A_{\Phi_1} &= \Phi_1 \delta S_1 \cos 180^\circ = -m_1 a_1 \delta S_1 \\ \delta A_{P_2} &= P_2 \delta S_2 = 0, \text{ т. к. } \delta S_2 = 0 \\ \delta A_{Mu_2} &= -M_2^H \delta \varphi_2 = -m_2 i_2^2 \varepsilon_2 \delta \varphi_2 \\ \delta A_{P_3} &= P_3 \delta S_C \cos(90^\circ + \alpha) = m_3 g \delta S_C \cos(90^\circ + \alpha) \\ \delta A_{\Phi_3} &= \Phi_3 \delta S_C \cos 180^\circ = -m_3 a_C \delta S_C \\ \delta A_{F_{тр3}} &= F_{тр3} \delta S_{Pv} = 0, \text{ т. к. } \delta S_{Pv} = 0 \\ \delta A_{Mu_3} &= -M_3^H \delta \varphi_{Pv} = -0,5 m_3 R_3^2 \varepsilon_3 \delta \varphi_{Pv} \\ \delta A_{MN} &= -N_3 k \delta \varphi_{Pv} \end{aligned}$$

Тогда

$$m_1 g \delta S_1 - m_1 a_1 \delta S_1 - m_2 i_2^2 \varepsilon_2 \delta \varphi_2 + m_3 g \delta S_C \cos(90^\circ + \alpha) - m_3 a_C \delta S_C - \\ - 0,5 m_3 R_3^2 \varepsilon_3 \delta \varphi_{Pv} - N_3 k \delta \varphi_{Pv} = 0$$

Выражаем перемещения через  $\delta S_1$ . Тогда

$$\delta S_1 = \delta \varphi_2 R_2 \Rightarrow \delta \varphi_2 = \frac{\delta S_1}{R_2}$$

$$\delta S_C = \delta \varphi_{Pv} R_3 = \delta \varphi_2 r_2 = \frac{\delta S_1}{R_2} r_2; \delta \varphi_{Pv} = \frac{\delta S_1 r_2}{R_2 R_3}.$$

Выражаем ускорения через  $a_1$ . Тогда

$$a_1 = \varepsilon_2 R_2 \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{a_1}{R_2}$$

$$a_C = \varepsilon_3 R_3 = \varepsilon_2 r_2 = \frac{a_1}{R_2} r_2; \varepsilon_3 = \frac{a_1 r_2}{R_2 R_3}.$$

Подставляем выраженные перемещения и ускорения в уравнение работ

$$m_1 g \delta S_1 - m_1 a_1 \delta S_1 - m_2 i_2^2 \frac{a_1 \delta S_1}{R_2^2} + m_3 g \frac{\delta S_1}{R_2} r_2 \cos(90^\circ + \alpha) - m_3 \frac{a_1 \delta S_1}{R_2^2} r_2^2 - \\ - 0,5 m_3 \frac{a_1 \delta S_1 r_2^2}{R_2^2} - N_3 k \frac{\delta S_1 r_2}{R_2 R_3} = 0$$

Делим левую и правую часть уравнения на  $\delta S_1$  и выносим ускорение  $a_1$  за скобки. Тогда

$$m_1 g - N_3 k \frac{r_2}{R_2 R_3} + m_3 g \frac{r_2}{R_2} \cos(90^\circ + \alpha) - a_1 \left( m_1 + \frac{m_2 i_2^2}{R_2^2} + \frac{m_3 r_2^2}{R_2^2} + 0,5 \frac{m_3 r_2^2}{R_2^2} \right) = 0$$

В итоге:

$$a_1 = \frac{m_1 g - N_3 k \frac{r_2}{R_2 R_3} + m_3 g \frac{r_2}{R_2} \cos(90^\circ + \alpha)}{m_1 + \frac{m_2 i_2^2}{R_2^2} + \frac{m_3 r_2^2}{R_2^2} + 0,5 \frac{m_3 r_2^2}{R_2^2}}$$