1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ПО РАЗДЕЛУ «ДИНАМИКА»

Динамика является основным завершающим разделом курса теоретической механики. В нем изучаются законы движения материальных объектов (тел и механических систем) в связи с механическими взаимодействиями, т.е. при действии на них сил.

Большое количество механических и физических понятий, рассматриваемых в динамике для описания движения материальных объектов, количественной и качественной оценок явлений, возникающих при движении, вызывают определенные трудности при самостоятельном изучении раздела. Поэтому основными задачами разработки являются следующие:

1) оказание методической помощи студенту-заочнику в наиболее рациональном, последовательном изучении раздела;

2) привитие навыков решения практических инженерных задач, что особенно важно для формирования инженерного мышления.

Работая с данным учебно-методическим изданием, рекомендуется следовать программам изучения каждой темы, указаниям, приведенным в тексте, и последовательности рассмотрения вопросов темы, принятой в нем.

После усвоения каждого этапа и темы в целом необходимо выполнить тренировочные задания, сверяя получаемые результаты с приведенными в конце примера ответами.

В качестве основной литературы для усвоения основ динамики можно использовать следующие учебники и учебные пособия.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики/ С.М. Тарг. М.: Наука, 1972.
2. Добронравов, В.В. Курс теоретической механики/ В.В. Добронравов, Н.Н. Никитин. М.: Высш. шк., 1983.
3. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики. Ч. 2/ А.А. Яблонский. М., 1984.
4. Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике/ И.В. Мещерский. М.: Наука, 1986.

2. ДИНАМИКА АБСОЛЮТНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

2.1. Основные понятия и задачи динамики

Изучать тему «Динамика точки» рекомендуется по следующей программе:

1. Введение в динамику. Предмет динамики. Задачи динамики [1, п.100]; [2, гл.1, п.2]; [3, п.1,2];

2. Законы механики. Инерциальные системы отсчета;

3. Динамика абсолютного движения материальной точки. Дифференциальные уравнения движения. Решение первой задачи динамики. Решение второй задачи динамики. Интегрирование дифференциальных уравнений движения в простейших случаях [1, п.101, 105]; [2, разд. III, гл.1, п. 4...7]; [3, п. 5...10].

При изучении темы необходимо уяснить ряд новых понятий. Одной из количественных материальных характеристик движущихся тел, их мерой инертности, является масса.

В отличие от кинематики, где системы отсчета выбираются произвольно, без каких-либо условий, в динамике это недопустимо. Основные законы динамики (законы Ньютона) справедливы для определенной (инерциальной) системы отсчета. Понятие такой системы обосновывается в динамике точки.

Предметом изучения динамики являются те же материальные объекты, которые изучались в статике и кинематике: материальная точка, твердое тело, механическая система.

Под материальной точкой следует понимать геометрический образ материального тела любой формы, размерами которого можно пренебречь. Тело можно рассматривать как материальную точку в двух случаях: когда его размеры малы в сравнении с расстояниями, которые проходят его точки, и когда тело совершает поступательное движение.

В динамике точки рассматривается решение двух основных задач. **Первая (прямая) задача**: зная движение материальной точки, найти силы, под действием которых это движение происходит. **Вторая (обратная) задача**: зная силы, действующие на материальную точку, определить ее движение. Теоретической базой для решения обеих задач динамики являются законы механики, окончательно сформулированные Ньютоном. Именно с них и рекомендуется начинать изучение динамики.

2.2. Основные законы механики (законы Ньютона)

Законы Ньютона уже изучались в курсе физики. Поэтому при повторении в курсе теоретической механики следует обратить особое внимание на их возможности, условия применимости и практическую ценность.

Первый закон (закон инерции). *Всякая свободная материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока и поскольку приложенные к ней силы не заставят ее изменить это состояние.*

Условиями и особенностями, в которых действует первый закон динамики, являются следующие:

1) закон справедлив в инерциальной системе отсчета;

2) в качестве инерциальной системы отсчета при решении технических задач принимают систему отсчета, неизменно связанную с землей;

3) закон справедлив для свободной материальной точки, перемещение которой не ограничено какими-нибудь другими телами.

Второй закон (основной закон динамики). *Произведение массы точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы.*

Обозначив массу точки через m, из второго закона динамики получают следующее основное векторное уравнение динамики:

$$m\bar{a} = \bar{F}. \qquad (2.1)$$

Второй закон динамики справедлив при тех же условиях, что и первый. Однако он является основой всех теоретических положений, общих теорем и принципов динамики. Кроме того, из него вытекают следующие важные практические выводы:

1) причиной ускоренного движения материальной точки является сила;

2) если сила или равнодействующая системы сил, приложенных к материальной точке, постоянны, то ее ускорение также будет постоянным;

3) одна и та же сила, приложенная к точкам различной массы, сообщает этим точкам различные ускорения, следовательно, масса является мерой инертности материальной точки;

4) если на точку действует несколько сил, то в правой части уравнения (1.1) должна быть их геометрическая сумма $\sum \bar{F}_k$ – равнодействующая.

Третий закон (закон равенства действия и противодействия). *Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки.*

Четвертый закон (закон независимости действия сил). *При одновременном действии на свободную материальную точку нескольких сил полное ускорение точки относительно инерциальной системы отсчета равно векторной сумме ускорений от действия отдельных сил.*

Математически он может быть записан в следующем виде:

$$m(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n , \qquad (2.2)$$

или

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k .$$

Основной системой единиц, используемой в механике, является система СИ. В ней в качестве базовых приняты: масса – килограмм (кг); время – секунда (с); длина – метр (м). Размерность же остальных механических величин определяется исходя из второго закона динамики. Например, размерность силы Ньютон определяется следующим образом: $F = ma = 1$ кг·1 м/с^2 = 1 кг·м/с^2 = 1 Н.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ АБСОЛЮТНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

3.1. Методика составления дифференциального уравнения движения

Дифференциальное уравнение абсолютного движения материальной точки получают заменой ускорения в равенстве (2.1) второй производной от векторной координаты точки $\vec{r}$ по времени

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} . \qquad (3.1)$$

Для практических расчетов используются аналитические формы дифференциальных уравнений движения, получаемые в результате проецирования равенства (3.1) на оси той или иной системы отчета.

В кинематике рассматривались декартова и естественная системы координат. Соответственно и дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки могут быть использованы в двух аналитических формах.

В проекциях на декартовы Oxyz оси координат (в координатной форме):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} = F_x ; m\frac{d^2y}{dt^2} = m\ddot{y} = F_y ; m\frac{d^2z}{dt^2} = m\ddot{z} = F_z . \qquad (3.2)$$

В проекциях на естественные Mτnb (рис.1) оси координат (в естественной форме):

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau ; m\frac{v^2}{\rho} = F_n ; 0 = F_b . \qquad (3.3)$$

В системе уравнений (3.2) вторые производные от координаты по времени есть проекции ускорения точки на соответствующие декартовы оси координат. Соотношения dv/dt и v^2/ρ в системе уравнений (3.3) есть проекции ускорения соответственно на касательную и нормальную оси естественного трехгранника. Проекция же ускорения на бинормаль, как известно из кинематики, равна нулю.

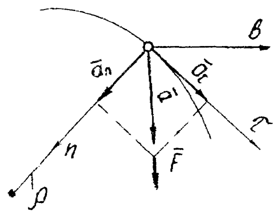


Рис. 1.

В правых частях приведенных уравнений стоят проекции равнодействующей силы на соответствующие оси координат.

Второй закон динамики справедлив, как отмечалось ранее, для свободной материальной точки. На практике же в основном изучается движение несвободной точки, положение которой ограничивают связи. Поэтому прежде чем составлять для такой точки уравнения (3.2) или (3.3), ее необходимо освободить от связей, а их действие на точку заменить силами реакций.

3.2. Методика решения первой задачи динамики

Суть первой (прямой) задачи динамики, как указывалось ранее, заключается в том, что по заданному движению точки известной массы необходимо определить одну из сил, действующих на нее. Решение задач такого типа является наиболее простым: по заданному движению определяются проекции ускорения на соответствующие оси координат. Полученные результаты подставляют в уравнения (3.2) или (3.3) и находят проекции силы на координатные оси. При этом рекомендуется поступать следующим образом:

1) выбрать точку, движение которой необходимо рассмотреть, изобразить ее в промежуточном положении;

2) освободить точку от связей, заменив их действие силами реакций, и приложить активные силы;

3) выбрать способ задания движения и показать соответствующую систему координат, если она не задана;

4) определить в соответствии с выбранным способом задания движения проекции ускорения на оси;

5) составить дифференциальные уравнения движения материальной точки в форме, соответствующей выбранной системе отсчета;

б) из составленных уравнений движения определить проекции силы на соответствующие оси, а затем найти величину силы по формуле

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\ , \text{ или } F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}\ .$$

Если требуется определить направление вектора силы, то можно воспользоваться направляющими косинусами.

При выполнении отдельных этапов решения задачи необходимо учитывать некоторые особенности:

1. Выбирая способ задания движения, следует исходить из того, что наиболее простое решение получается при использовании естественных осей координат и соответственно уравнений вида (3.3). Однако необходимо иметь в виду, что естественный способ задания движения применим тогда, когда явно заданы траектория движения (например, окружность известного радиуса) и закон движения по заданной траектории в виде $S = f(t)$.

2. Если движение задано в координатной форме, то оси координат целесообразно направлять в сторону движения.

Пример 1. Свободная материальная точка массы m движется согласно уравнениям $x = c\cos kt$, $y = b\sin kt$. Определить силу F, вызывающую это движение.

Решение. 1. По условию видно, что движение точки происходит в плоскости и задано в координатной форме, поэтому для решения достаточно выбрать плоскую декартову систему координат Oxy.

2. В выбранных произвольным образом осях координат (рис.2) изображаем точку M.

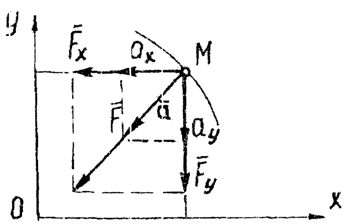


Рис. 2.

3. Определяем проекции ускорения на оси координат, дважды продифференцировав уравнения движения.

$$v_x = \dot{x} = -ck\sin kt\ ,\ v_y = \dot{y} = bk\cos kt,$$

$$a_x = \dot{v}_x = -ck^2\cos kt,\ a_y = \dot{v}_y = -bk^2\sin kt.$$

4. Подставив значения a_x и a_y в уравнения (3.2), находим:

$$F_x = -mck^2\cos kt,\ F_y = -mbk^2\sin kt.$$

5. Заменяя c coskt и b sinkt соответственно координатами x и y, определяем величину силы F:

$$F_x = -mk^2x,\ F_y = -mk^2y,$$

$$F = mk^2\sqrt{x^2 + y^2} = mk^2OM.$$

3.3. Методика решения второй задачи динамики

Вторая (обратная) задача динамики решается, как и первая, с помощью дифференциальных уравнений движения точки. Целью задачи является определение характеристик движения материальной точки по известным силам. Достигается это интегрированием системы дифференциальных уравнений движения вида (3.2) или (3.3).

При составлении дифференциальных уравнений движения рекомендуется поступать следующим образом:

1. Выбрать точку или тело, движение которой необходимо рассмотреть, и изобразить ее на расчетной схеме в положении, соответствующем произвольному моменту времени;

2. Освободить точку от связей, заменив их действие силами реакций связей, и приложить все остальные силы, действующие на нее;

3. Выбрать в зависимости от способа задания движения систему координат. Если используются декартовы оси координат, начало их отсчета удобно поместить в точку, соответствующую начальному моменту времени. Направлять же оси следует в сторону движения точки;

4. Записать необходимые уравнения движения в общем виде;

5. Составить суммы проекций сил на соответствующие оси и подставить полученные результаты в дифференциальные уравнения движения;

6. Записать начальные условия движения;

7. Решить полученные дифференциальные уравнения движения и определить искомые величины.

Из перечисленных выше этапов решения второй задачи динамики наибольшие затруднения вызывает последний – решение дифференциальных уравнений движения.

При движении точек и тел, особенно при их взаимодействии со средой, могут возникать как постоянные, так и переменные силы. Из переменных наиболее часто встречаются силы, зависящие от времени, перемещения и скорости движения.

В качестве примера сил, зависящих от времени, можно назвать моменты, развиваемые тепловыми и электрическими двигателями. От перемещения (деформации) или координат зависят силы упругости пружины или других деформируемых тел. От скорости движения зависят, как правило, силы сопротивления сплошной среды – воздуха или жидкости.

Ниже на примере прямолинейного движения приведены рекомендации по способам замены переменной для наиболее распространенных на практике случаев задания сил. Масса точки считается постоянной.

Так как за основу взято прямолинейное движение точки, то для его описания достаточно выбора одной координатной оси Ox. Тогда во всех случаях дифференциальное уравнение движения должно иметь такой вид: $m\ddot{x} = F_x$.

Случай постоянной силы. В таком случае правая часть дифференциального уравнения движения также будет постоянной, а именно:

$$m\ddot{x} = F_x = \text{const}.$$

Откуда $\ddot{x} = F_x / m = \text{const}$.

Следовательно, движение точки равнопеременное, и в рассматриваемом случае нет необходимости в интегрировании дифференциального уравнения. Целесообразнее воспользоваться известными из кинематики готовыми решениями:

$$\dot{x} = v = v_0 \pm at; \ x = x_0 + v_0 t \pm \frac{at^2}{2}. \qquad (3.4)$$

Совместно решая эти уравнения, можно получить любые две неизвестные величины, входящие в них.

Рассмотрим сказанное на примере.

Пример 2. Частица удобрений (рис.3) сходит с горизонтального диска неподвижно стоящего центробежного разбрасывателя со скоростью v_0. Диск расположен над поверхностью поля на высоте h.

Установить зависимость начальной скорости схода частицы v_0 от ширины разбрасывания (ширины захвата) *l*. При решении силой сопротивления воздуха при полете частицы пренебречь.

Решение. Так как половина ширины захвата разбрасывателя равна дальности полета частицы, то решение задачи должно быть направлено на определение начальной скорости движения для получения необходимой дальности полета.

1. Рассмотрим движение частицы на участке свободного полета, изобразив ее на траектории в положении, соответствующем произвольному моменту времени.

2. Приложим к частице силу тяжести P.

3. Выбираем декартовы оси координат так, чтобы направление движения частицы совпадало с положительным направлением осей. Так как частица движется в плоскости, то достаточно плоской системы координат xOy, расположенной, как показано на рис. 3.

4. Составляем дифференциальные уравнения движения:

$$m\ddot{x} = 0; \ m\ddot{y} = P.$$

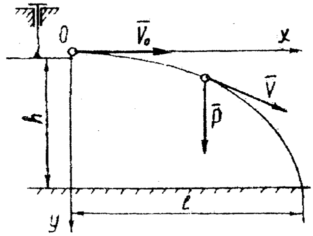


Рис. 3.

5. Начальные условия:

$$t_0 = 0;\quad x_0 = 0;\quad y_0 = 0;\quad v_{x0} = v_0;\quad v_{y0} = 0.$$

6. Решаем полученные дифференциальные уравнения.

С учетом начальных условий из первого уравнения видно, что так как $\ddot{x} = 0$, то $\dot{x} = v_x = v_0$. Следовательно, по направлению оси Ох частица движется равномерно со скоростью v_0 . Ее закон движения выглядит таким образом:

$$x = v_0 t. \qquad (A)$$

Второе уравнение с учетом того, что P = mg, приводим к виду $\ddot{y} = g$. В результате получаем, что по направлению оси Оу частица движется равноускоренно с ускорением g. Поэтому ее закон движения в направлении оси Оу можно записать без интегрирования в следующем виде:

$$y = gt^2/2\,. \qquad (B)$$

7. Исключив время из уравнений (A) и (B) и учтя то, что в момент падения частицы на почву $x = l$, а $y = h$, определяем зависимость между скоростью схода частицы и дальностью ее полета:

$$v_0 = l\sqrt{\frac{g}{2 \cdot h}}.$$

Случай, когда сила зависит от времени. В этом случае дифференциальное уравнение движения точки по оси Ох имеет следующий вид:

$$m\ddot{x} = F_x(t).$$

Понизить порядок и интегрировать такое уравнение рекомендуется следующим образом:

1. Заменить ускорение производной скорости по времени $\ddot{x} = dv_x/dt$ и подставить результат в исходное уравнение. В итоге оно станет уравнением первого порядка с переменными v и t.

$$m\,dv_x/dt = F_x(t).$$

2. Разделить переменные и проинтегрировать левую часть уравнения в пределах v_0 и v_x, а правую – 0...t .

Случай, когда сила зависит от координаты. Дифференциальное уравнение движения точки по оси Ох в этом случае принимает такой вид:

$$m\ddot{x} = F(x).$$

Интегрирование можно вести следующим образом:

1. Заменить ускорение подстановкой

$$\ddot{x} = \frac{dv_x dx}{dt\, dx} = \frac{v_x dv_x}{dx}. \tag{3.5}$$

В результате будет получено уравнение

$$m\frac{v_x dv_x}{dx} = F(x).$$

2. Разделив переменные, проинтегрировать левую часть уравнения в пределах v_{x0} и v_x, а правую часть в пределах x_0 и x.

Случай, когда сила зависит от скорости. В этом случае дифференциальное уравнение движения имеет такой вид: $m\ddot{x} = F(v_x)$.

Для понижения его порядка можно использовать любую из рассмотренных ранее подстановок.

Задание 1. Для приобретения навыков в решении простейших задач динамики точки решите приведенные ниже задачи. В конце задач в скобках указаны ответы. При решении задач составляйте расчетные схемы.

1. Груз массой m = 50 кг с помощью троса поднимается вертикально с ускорением a = 0,5 м/с^2. Определить силу натяжения троса, приняв ускорение свободного падения g = 9,82 м/с^2. (516 Н).

2. Тело массой m = 16 кг, размерами которого можно пренебречь, движется по криволинейному каналу R = 9 м, расположенному в горизонтальной плоскости, со скоростью v = 0,8 м/с. Определить силу бокового давления тела на трубу, пренебрегая трением. (1,16 Н).

3. Автомобиль массой 1000 кг движется по горизонтальной дороге со скоростью 20 м/с. После резкого торможения он останавливается через четыре секунды. Определить силу трения колес о дорогу, считая ее постоянной. Сопротивлением воздуха пренебречь. (5000 Н).

4. Автомобиль массой 1000 кг, двигаясь со скоростью 20 м/с, начинает резко тормозить. Определить путь, пройденный автомобилем через 2 с с начала торможения, если коэффициент трения колес о дорогу f = 0,6. Сопротивлением воздуха пренебречь. (9,82 м).

5. Тело массой m = 200 кг движется вверх по гладкой наклонной плоскости с углом подъема α = 30° под действием силы F = 1кН. Сила F параллельна наклонной плоскости. Определить время, за которое тело пройдет 8 м. (4,33 с).

4. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ТЕЛА

Динамика механической системы и твердого тела – наиболее сложная часть курса теоретической механики. Рекомендуется следующая программа изучения вопроса:

1. Введение в динамику механической системы. Механическая система. Масса системы. Центр масс. Классификация сил, действующих на механическую систему. Свойства внутренних сил [1, п.129, 130]; [2, гл.3, п.1, гл.4, п.1]; [3, ч.2, п.31...33];

2. Момент инерции твердого тела и системы относительно оси, плоскости и полюса. Радиус инерции. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей. Примеры вычисления моментов инерции тел в простейших случаях [1, п.131, 132]; [2, гл.3, п.2...4]; [3, ч.2, п.34...36];

3. Момент инерции относительно оси любого направления. Центробежные моменты инерции. Главные оси инерции и их свойства [1, п.133]; [2, гл.3, п.5,7]; [3, ч.2, п.37, 39].

В процессе изучения вопроса необходимо уяснить такие понятия, как механическая система, ее масса, центр масс, моменты инерции, уметь определять эти величины; знать основные свойства внутренних сил.

Под механической системой понимают совокупность точек или тел, положение которых взаимообусловлено, т.е. положение или движение любой точки (тела) зависит от положения или движения всех остальных.

Силы, действующие на механическую систему, делят на две группы – внешние и внутренние.

Внешние силы – это силы, с которыми действуют точки и тела, не входящие в рассматриваемую систему, на точки и тела выбранной системы, точнее – это силы взаимодействия интересующей нас системы с телами, ограничивающими ее движение. Например, если изучается движение трактора, то внешними силами для него будут силы трения качения колес, силы сцепления колес с дорогой, сила тяги на крюке. К внутренним силам относят те силы, с которыми тела интересующей нас системы действуют друг на друга. В примере с трактором – это сила давления газов в цилиндрах двигателя, силы, с которыми действуют друг на друга шестерни трансмиссии, и др. На основании закона равенства действия и противодействия сила, с которой одно тело действует на другое, равна по величине и противоположна по направлению силе, с которой второе тело действует на первое. Следовательно, в сумме эти две силы равны нулю. Из сказанного вытекают следующие свойства внутренних сил:

1. Геометрическая сумма (главный вектор) внутренних сил механической системы равна нулю:

$$\vec{R}_0^i = \sum \vec{F}_k^i = 0;$$

2. Геометрическая сумма моментов внутренних сил относительно центра (главный момент) также равна нулю, т.е.

$$\vec{M}_0^i = \sum \vec{M}_0^i(\vec{F}_k^i) = 0.$$

Однако из приведенных свойств не следует, что внутренние силы уравновешены и не могут изменить характер движения механической системы. Эти силы приложены к разным телам системы, поэтому могут вызывать взаимное перемещение тел в ней. Перемещаясь же, тела системы могут привести к возникновению внешних сил. которые и изменят характер движения системы. В примере с трактором вращение колес, вызываемое действием внутренних сил, приводит к появлению сил сцепления с дорогой, которые движут трактор.

Характер движения механической системы зависит не только от действующих внешних сил. но и от ее массы и распределения масс в системе. Масса системы m определяется как арифметическая сумма масс всех точек или тел.

Распределение масс характеризуется положением центра масс механической системы и ее моментами инерции. Центром масс (центром инерции) системы, состоящей из n материальных точек, называют геометрическую точку C, положение которой относительно декартовых осей координат определяется следующими зависимостями:

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{m}; y_c = \frac{\sum m_k y_k}{m}; z_c = \frac{\sum m_k z_k}{m}, \qquad (4.1)$$

где (k = 1, 2, ... n) – массы всех материальных точек системы;

x_k, y_k, z_k – координаты точек;

m – масса системы.

Необходимо иметь в виду, что при практических расчетах задается или бывает известна масса не точек механической системы (их бесконечно большое количество), а тел, входящих в нее. Тогда в уравнениях (4.1) под m_k следует понимать массу k-го тела, а под x_k, y_k, z_k – координаты центров масс (тяжести).

Моменты инерции наряду с центром масс являются важной характеристикой распределения масс механической системы. Они могут определяться относительно центра, оси и плоскости. Моментом инерции механической системы материальных точек относительно центра, оси и плоскости называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек на квадраты их расстояний соответственно до центра, оси или плоскости. Обозначают их буквами I_o, I_x, I_{oxy}.

Размерность моментов инерции в системе СИ – кг·м^2 , а в технической системе единиц – кгс·м·с^2.

При практических расчетах моменты инерции системы определить трудно, а чаще и невозможно. Поэтому их находят экспериментальным путем. Расчетом же можно определять моменты инерции только для однородных тел простейших форм. Примеры и формулы для определения моментов инерции тел простейщей формы относительно оси приведены на рис.4. Как видно из рис.4, расчетные формулы приводятся в основном только для осей симметрии, проходящих через центры тяжести тел. Если же необходимо определить момент инерции относительно любой другой оси, параллельной оси, проходящей через центр масс (тяжести) тела, то необходимо пользоваться теоремой Штернера: **момент инерции тела относительно какой-нибудь оси, не проходящей через центр масс, равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями d:**

$$I_Y = I_{YC} + md^2. \qquad (4.2)$$

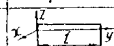
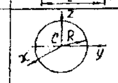
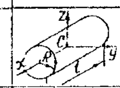
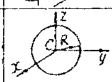
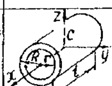
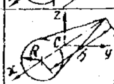
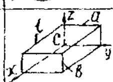
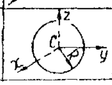
Форма тела	Изображение	J_x	J_y	J_z
Стержень		$\frac{ml^2}{3}$	—	—
Сплошной диск		$\frac{mR^2}{2}$	$\frac{mR^2}{4}$	
Сплошной цилиндр		$\frac{mR^2}{2}$	$\frac{m}{12}(3R^2+l)$	
Тонкое кольцо		mR^2	$\frac{mR^2}{2}$	
Пустотелый цилиндр		$\frac{m}{2}(R^2+r^2)$	$\frac{m}{12}(3(R^2+r^2)+l^2)$	
Конус		$0{,}3mR^2$	$\frac{3m}{80}(4R^2+h^2)$	
Параллелепипед		$\frac{m}{12}(a^2+b^2)$	$\frac{m}{12}(b^2+l^2)$	$\frac{m}{12}(l^2+a^2)$
Сплошной шар		$\frac{2}{3}mR^2$		

Рис.4.

Из сказанного можно сделать заключение, что моменты инерции симметричных тел относительно осей симметрии или осей, им параллельных, определяются сравнительно просто. Для определения моментов инерции тел сложной формы нередко используется радиус инерции i, или ρ. Радиус инерции представляет собой расстояние от точки до оси, масса которой равна массе тела и момент инерции которой относительно оси равен моменту инерции тела относительно той же оси. Если, например, известен радиус инерции тела i_z относительно оси z, то его момент инерции определяется как для материальной точки:

$$I_Z = mi_z^2. \qquad (4.3)$$

Для учета асимметрии в распределении масс по отношению к осям в механике используются центробежные моменты инерции. Центробежными моментами инерции тела по отношению к осям называют величины I_{xy}, I_{yz}, I_{zy}:

$$I_{xy} = \sum m_k x_k y_k; \quad I_{YZ} = \sum m_k y_k z_k; \quad I_{ZX} = \sum m_k z_k x_k . \qquad (4.4)$$

Для сплошного однородного тела суммы (4.4) обращаются в интегралы. Например, для I_{xy}, учитывая плотность ρ и объем тела V, заменив массу m_k через $dm = \rho\, dV$, получаем

$$I_{xy} = \int_V \rho\, xydV.$$

Так как координаты x, y, z – алгебраические величины, то центробежные моменты инерции могут быть положительными, отрицательными или обращаться в нуль. Знаки и величина их зависят от выбора координатных осей.

Рассмотрим тонкую однородную квадратную пластинку (рис.5).

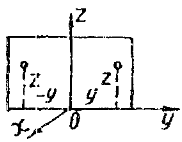


Рис. 5.

Координатные оси выберем так, чтобы хотя бы одна из них (ось Oz) совпадала с осью симметрии. Тогда в силу симметрии каждой точке, расположенной справа от оси Oz с координатами y, z, будет соответствовать точка с координатами y, z. В результате сумма $\sum m_k y_k z_k = 0$ и соответственно $I_{yz} = 0$.

Оси, по отношению к которым центробежные моменты инерции равны нулю, называются *главными осями инерции тела*. Если одна из главных осей инерции проходит через центр масс тела, то она является главной центральной осью инерции. Знание положения главных центральных осей инерции значительно упрощает задачу определения моментов инерции тел относительно оси любого направления.

Доказано, что главными осями инерции в каждой точке являются следующие оси: **оси симметрии тел; ось, перпендикулярная плоскости симметрии тела, если таковая имеется.**

Для таких осей центробежные моменты инерции, в которые входит хотя бы одна соответствующая им координата, равны нулю.

Если известны моменты инерции тела относительно каких-то координатных осей и центробежные моменты инерции относительно каждой пары этих осей, то момент инерции относительно любой оси OL (рис.6), проходящей через начало координат, вычисляется по следующей формуле:

$$I_L = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma - 2I_{xy}\cos\alpha \cdot \cos\beta - - 2I_{yz}\cos\beta\,\cos\gamma - 2I_{zx}\cos\gamma\,\cos\alpha, \qquad (4.5)$$

где α, β, γ – углы между осью OL и осями координат.

Если оси координат являются главными осями инерции, то $I_{xy}=I_{yz}=I_{zx}$, а в формуле (4.5) остаются только первые три слагаемые.

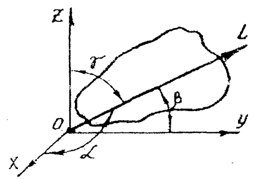


Рис. 6.

Вопросы для самоконтроля

1. Как классифицируются в динамике силы, действующие на точки механической системы?

2. Что называется механической системой материальных точек?

3. Сформулируйте основные свойства внутренних сил, действующих на механическую систему.

4. Что называют центром масс механической системы и как определяются его координаты?

5. Зависят ли координаты центра масс от сил?

6. Что называют моментом инерции материальной точки или твердого тела?

7. Какую величину называют радиусом инерции тела относительно оси?

8. Какая зависимость существует между моментами инерции тела относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр тяжести?

9. Что называется центробежными моментами инерции тела и что они характеризуют?

10. Какие оси называют главными и главными центральными осями инерции?

11. Какие из осей будут являться главными осями инерции для тел, имеющих ось симметрии или плоскость симметрии?

5. ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

5.1. Формы теоремы и основные выводы

Подробно теорема изложена в учебной литературе: [1,п.135...137]; [2, гл.4, п.3]; [3, ч.2, п.43...45].

Сущность теоремы состоит в следующем: **центр масс механической системы движется так, как двигалась бы материальная точка, масса которой равна массе системы и к которой были бы приложены все внешние силы, действующие на систему.** Отсюда вытекает следующий вывод: **произведение массы системы на ускорение центра масс равно геометрической сумме всех внешних сил, действующих на нее.**

$$m\bar{a}_c = m\frac{d^2\bar{r}_c}{dt^2} = \sum \bar{F}_k^e. \qquad (5.1)$$

Уравнение (5.1) представляет собой дифференциальное уравнение движения центра масс механической системы в векторной форме. В проекциях на декартовы оси координат уравнение записывают следующим образом:

$$ma_{cx} = m\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^e;$$
$$ma_{cy} = m\ddot{y}_c = \sum F_{ky}^e;$$
$$ma_{cz} = m\ddot{z}_c = \sum F_{kz}^e. \qquad (5.2)$$

В правой части уравнений (5.2) стоят суммы проекций всех внешних сил на оси координат. Левые части уравнений при практических расчетах целесообразно заменять суммой произведений массы каждого тела на проекцию ускорения его центра масс на соответствующую ось. Сказанное обусловлено тем, что, как правило, положение центра масс системы неизвестно, а положение центров масс тел определяется сравнительно просто:

$$ma_{cx} = \sum m_k\ddot{x}_k; \quad ma_{cy} = \sum m_k\ddot{y}_k; \quad ma_{cz} = \sum m_k\ddot{z}_k.$$

Основные выводы, вытекающие из теоремы, следующие:

1. Внутренние силы, которые не входят в приведенные уравнения, непосредственно не влияют на движение центра масс. Вызванное внутренними силами движение тел системы будет происходить так, что положение и движение центра масс системы меняться не будут;

2. Приведенные уравнения позволяют описать только поступательное движение системы. И действительно, как известно из кинематики, по движению одной точки (в рассматриваемом случае центра масс) можно судить лишь о поступательном движении тела;

3. Уравнения (5.2) представляют собой дифференциальные уравнения поступательного движения механической системы или тел и позволяют решать как прямую, так и обратную задачи динамики. Они наиболее удобны для определения реакций внешних связей системы. Могут использоваться и для определения реакций внутренних связей, но при этом систему необходимо расчленять на части;

4. Если геометрическая сумма $\sum \bar{F}_k^e$ внешних сил равна нулю или сумма их проекций на какую-нибудь координатную ось, например, на ось Ox, равна нулю, то ускорение центра масс $\bar{a}_c$, или его проекция на ось Ox равны нулю. Следовательно, центр масс системы будет находиться в покое или двигаться прямолинейно и равномерно. Будет ли иметь место покой или движение, зависит от начальных условий. Если в момент времени, когда сумма внешних сил стала равна нулю, скорость центра масс также равнялась нулю, то она останется равной нулю и при дальнейшем движении тел системы. При этом тела будут двигаться так, что центр масс системы останется неподвижным. Полученные результаты отражают **закон сохранения движения центра масс**, который, например, по направлению оси Ox может быть записан в следующем виде:

$$m\Delta x_c = \sum m_k \Delta x_k = 0. \qquad (5.3)$$

где m_k – масса k-го тела;

Δx_k – проекция абсолютного перемещения центра масс k-го тела на ось Ox.

Часто математическую запись закона сохранения движения центра масс приводят не в форме перемещений (5.3), а в форме координат центров масс тел:

$$\sum m_k x_k = \text{const}.$$

Для практических расчетов это менее удобно, так как требует обязательного выбора начала отсчета осей координат в каком-то известном положении. При использовании уравнения в форме (5.3), в этом нет необходимости, так как в него входят лишь величины перемещений центров тяжести тел. В этом случае достаточно выбрать направление положительного отсчета осей.

5.2. Методика решения задач

Задачи могут быть двух типов: 1) задачи, решаемые с помощью теоремы о движении центра масс в форме (5.2); 2) задачи, решаемые с помощью уравнения (5.3), отражающего закон сохранения движения центра масс. Методика решения обоих типов задач практически одинакова:

1. Выбрать систему тел, движение которых необходимо рассмотреть. Расчленять систему на части нецелесообразно, так как неизвестные силы взаимодействия тел между собой будут внутренними и в уравнения не войдут;

2. Изобразить тела системы в положении, соответствующем произвольному моменту времени, освободить ее от внешних связей и приложить активные силы и силы реакций связей;

3. Выбрать удобным образом оси неподвижной системы координат. Начало их поместить в точку, относительно которой можно определить положение центров тяжести всех тел. Направить оси так, чтобы они были параллельны или перпендикулярны наибольшему количеству внешних сил;

4. Составить суммы проекций всех внешних сил на координатные оси. Дальнейший ход решения задачи зависит от того, чему будут равны суммы проекций сил на координатные оси. Если они не равны нулю, то решение выполняется с помощью уравнений (5.2) в такой последовательности:

а) заменить левую часть уравнения (5.2) суммами:

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 + \ldots + m_n\ddot{x}_n;$$

$$m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + \ldots + m_n\ddot{y}_n;$$

$$m_1\ddot{z}_1 + m_2\ddot{z}_2 + \ldots + m_n\ddot{z}_n;$$

б) определить проекции ускорений $\ddot{x}_k$, $\ddot{y}_k$, $\ddot{z}_k$ центров масс всех тел на координатные оси, выражая их через известные величины. При этом необходимо помнить, что **проекции ускорений центров масс тел на координатные оси определяются в их абсолютных движениях**, т.е. в движениях по отношению к неподвижным осям координат. Поэтому, если тело совершает сложное движение, то ускорение его центра тяжести определяется как сумма ускорений в переносном и относительном движениях:

$$\vec{a}_c = \vec{a}_c^{\,e} + \vec{a}_c^{\,r};$$

в) подставить полученные результаты в уравнения (5.2) и решить их относительно неизвестных величин.

Если сумма проекций внешних сил на какую-нибудь ось, например, Ox окажется равной нулю (имеет место закон сохранения движения центра масс), то для решения целесообразно выполнить этапы 1...4, указанные выше, а затем определить проекции Δx_k перемещений центров тяжести тел на неподвижную ось. При этом, как и для ускорений, **проекции перемещений центров масс на ось следует определять в их абсолютных движениях** как сумму переносного и относительного;

5. Составить уравнение (5.3), решив которое, определить неизвестную величину.

Рассмотрим приведенную методику решения задач на конкретных примерах.

Пример 3. Определить давление на фундамент поршневого компрессора (рис. 7) при работе его вхолостую, если масса корпуса *1* равна m_1, масса кривошипа ОА длиной *l* равна m_2, масса поршня *3* вместе с кулисой – m_3. Кривошип ОА, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω, считать однородным стержнем.

Решение. 1. Поскольку необходимо определить силу давления насоса на фундамент, то систему выбираем так, чтобы эта сила стала внешней. Для этого насос считаем телом, а фундамент – связью. Тогда реакция фундамента по величине будет равна силе давления, но направлена ей противоположно.

Выбор насоса для рассмотрения движения обусловлен и тем, чтобы неизвестные силы взаимодействия отдельных частей (реакции в точке О, давление камня А на кулису и др.) были внутренними. Тогда они не войдут в уравнение движения.

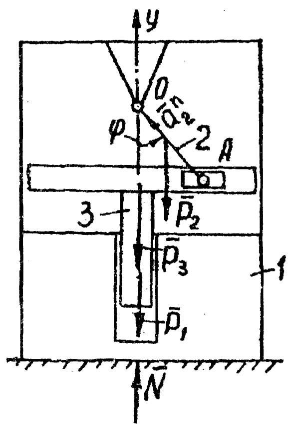


Рис. 7.

2. Изображаем систему в положении, соответствующем произвольному моменту времени, когда кривошип образует какой-то угол φ с вертикалью. При этом, для удобства расчетов, угол φ показываем так, чтобы он был острым.

3. Освобождаем систему от связей, прикладываем силы реакции связей и внешние силы. Так как связью является фундамент, то реакцию N направляем перпендикулярно опоре вверх. Из внешних сил на систему будут действовать только силы тяжести звеньев P_1, P_2, P_3.

4. Выбираем оси координат. В рассматриваемой задаче требуется определить одну величину. Поэтому достаточно выбрать одну ось. Начало оси целесообразно поместить в точку O, которая неподвижна, а направить ось можно вертикально вверх.

5. Записываем дифференциальное уравнение движения центра масс системы в проекции на выбранную ось:

$$m\ddot{y}_c = \sum F_{ky}.$$

6. Составляем сумму проекций всех сил на ось Oy:

$$\sum F_{ky} = N - P_1 - P_2 - P_3.$$

7. Определяем левую часть уравнения как сумму произведений массы каждого тела на проекцию ускорений его центра тяжести на ось Oy:

$$m\ddot{y}_c = m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_3.$$

В записанном равенстве величины $\ddot{y}_1$, $\ddot{y}_2$, $\ddot{y}_3$ являются проекциями ускорений центров тяжести корпуса насоса, кривошипа и поршня на ось Oy. Чтобы их определить, вначале находим ускорения центров тяжести тел. При этом имеем в виду, что корпус насоса неподвижен и его ускорение равно нулю. Кривошип вращается равномерно, поэтому ускорение его центра тяжести равно нормальному:

$$a_2^n = \omega^2 0{,}5\, l.$$

Направляем вектор $\vec{a}_2^n$ к оси вращения.

Проекция полученного ускорения на ось Oy равна:

$$\ddot{y}_2 = \omega^2 0{,}5\, l \cos\varphi.$$

Так как кривошип вращается равномерно, то угол его поворота

$$\varphi = \omega t.$$

Тогда

$$\ddot{y}_2 = 0{,}5\omega^2 l \cos\omega t.$$

Поршень *3* вместе с кулисой движется поступательно. Поэтому ускорения всех его точек одинаковы и равны проекции нормального ускорения точки A кривошипа на ось Oy:

$$\ddot{y}_3 = \omega^2 l \cos\omega t.$$

8. Подставив полученные значения проекций ускорений, сумму проекций всех сил на ось Oy в дифференциальное уравнение (см.п.5), получим

$$N = (m_1 + m_2 + m_3)g + (0{,}5m_2 + m_3)\omega^2 \cos \omega t.$$

Результат показывает, что сила реакции фундамента переменна и состоит из двух составляющих: статической, обусловленной силой тяжести тела, и динамической, обусловленной ускоренным движением центров тяжести кривошипа и поршня.

Пример 4. Подъемный кран стоит на недеформируемых рельсах (рис.8) и удерживает груз *3*. Пренебрегая трением в подшипниках колес крана, определить его горизонтальное перемещение за время подъема, если стрела *2* из начального положения повернется на угол 30° и станет вертикальной. Массы крана, стрелы и груза известны и соответственно равны m_1, m_2, m_3. Стрелу считать однородным стержнем длиной *l*.

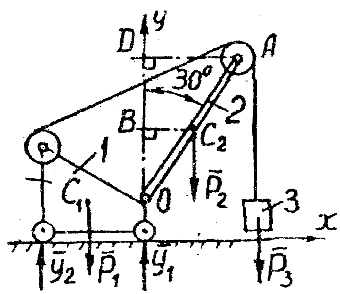


Рис. 8.

Решение. 1. Рассматриваем движение всей системы, состоящей из корпуса *1*, стрелы *2* и груза *3*.

2. Изображаем систему в положении, соответствующем произвольному моменту времени.

3. Освобождаем систему от связей, показываем силы реакций связей и внешние силы. Связью для системы являются идеально гладкие недеформируемые рельсы. Реакции такой связи направляем вертикально вверх.

Из внешних сил на систему действуют только силы тяжести крана, стрелы и груза.

4. Выбираем неподвижные оси координат. Поскольку необходимо определить горизонтальное перемещение крана, то достаточно выбрать одну ось, направив ее по горизонтали. Начало отсчета устанавливать необязательно.

При указанном выборе координатной оси, как видно из рисунка, проекции всех сил на x равны нулю. Следовательно, по направлению оси x имеет место закон сохранения движения центра масс.

5. Составляем расчетное уравнение:

$$m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + m_3\Delta x_3 = 0.$$

6. Определяем проекции перемещений центров масс (C_1, C_2, C_3) всех тел на ось x, имея в виду, что перемещение центра масс корпуса крана Δx_1 неизвестно.

При определении проекций перемещений центров масс стрелы и груза на ось x учитываем, что они участвуют в движении относительно корпуса (относительном) и движении вместе с корпусом (переносном). Переносные перемещения центров тяжести стрелы и груза равны перемещению корпуса крана Δx_1.

С учетом сказанного проекции перемещений центров тяжести стрелы и груза на ось x:

$$\Delta x_2 = \Delta x_1 + \Delta x_2^r; \quad \Delta x_3 = \Delta x_1 + \Delta x_3^r.$$

Относительные перемещения Δx_2^r и Δx_3^r определяем из расчетной схемы. Для стрелы: $\Delta x_2^r = -0{,}5\, l \sin 30° = -0{,}25\, l$. Для груза: $\Delta x_3^r = = -l \sin 30° = -0{,}5\, l$. Тогда $\Delta x_2 = \Delta x_1 - 0{,}25\, l$; $\Delta x_3 = \Delta x_1 - 0{,}5\, l$.

7. Подставив найденные значения Δx_2 и Δx_3 в расчетное уравнение (см.п.5), получим

$$\Delta x_1 = \frac{(m_2 + 2m_3)\, l}{4(m_1 + m_2 + m_3)}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте теорему о движении центра масс механической системы.

2. Какой вид имеют дифференциальные уравнения движения центра масс?

3. Какое движение твердого тела или системы описывает дифференциальное уравнение движения центра масс?

4. Могут ли внутренние силы изменить положение центра масс системы?

5. В чем сущность закона сохранения движения центра масс?

6. Как поступать с механической системой (расчленять или не расчленять) при применении теоремы о движении центра масс?

7. Можно ли определять реакции внешних связей системы с помощью теоремы о движении центра масс?

8. Как практически определить реакции внутренних связей механической системы с помощью теоремы о движении центра масс?

9. При каких условиях центр масс системы находится в покое и при каких он движется равномерно и прямолинейно?

6. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

6.1. Основные физические понятия и их определение

Подробно теорема изложена в учебниках: [1,п.110, 111, 138...141]; [2, гл.3, п. 3];[3, ч.2, п. 46...50].

Теорема об изменении количества движения позволяет дать качественную и количественную оценки динамики движения сплошной среды (жидкостей и газов), определить силы, возникающие при этом, изучить явления, имеющие место при соударении тел.

Основными физическими понятиями, связь между которыми устанавливает теорема, являются импульс силы и количество движения (импульс движения). Импульс силы $\vec{S}$ является количественной мерой взаимодействия точек или тел за определенный промежуток времени. Различают элементарный и полный импульсы силы. Элементарный импульс силы определяется как произведение вектора силы на элементарный промежуток времени:

$$d\vec{S} = \vec{F}dt.$$

Полный импульс силы определяется как сумма элементарных импульсов или как интеграл элементарного импульса:

$$\vec{S} = \int_0^t \vec{F}dt. \qquad (6.1)$$

Если сила – величина постоянная, то полный импульс равен произведению вектора силы на промежуток времени, в течение которого она действует:

$$\vec{S} = \vec{F}t. \qquad (6.2)$$

Импульс силы – величина векторная. Направлен вектор $\vec{S}$ так же, как и вектор силы $\vec{F}$.

Если на точку или тело действует несколько сил, то полный их импульс равен геометрической сумме (замыкающей стороне векторного многоугольника) импульсов каждой силы:

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + ... + \vec{S}_n = \sum \vec{S}_k.$$

Размерность импульса силы в системе СИ – Ньютон на секунду (Н·с).

При практических расчетах импульсы сил целесообразнее определять через их проекции на координатные оси. Проекция импульса силы на ось – величина алгебраическая (как и силы) и равна проекции силы на ту же ось, умноженной на промежуток времени.

Если известны проекции импульса силы на оси декартовой системы координат S_x, S_y, S_z, то величину импульса силы находят, как и величину любого вектора:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}.$$

Направление вектора $\vec{S}$ определяют по направляющим косинусам.

Количество движения материальной точки определяют как произведение массы на ее скорость:

$$\vec{q} = m\vec{v}. \tag{6.3}$$

Направлен вектор $\vec{q}$ так же, как и вектор скорости.

Количеством движения механической системы называют векторную величину, определяемую как геометрическую сумму произведений массы каждой материальной точки системы на ее скорость:

$$\vec{Q} = \sum m_k \vec{v}_k. \tag{6.4}$$

Практически количество движения механической системы удобнее вычислять как геометрическую сумму количества движения отдельных ее тел:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + ... + \vec{Q}_n = \sum \vec{Q}_k. \tag{6.5}$$

Количество движения тел необходимо определять как произведение массы на скорость центра масс:

$$\vec{Q}_k = m_k \vec{v}_{ck}. \tag{6.6}$$

Количество движения системы может быть определено также через массу системы m и скорость ее центра масс $\vec{v}_c$:

$$\vec{Q} = m\vec{v}_c.$$

Из сказанного следует, что величина количества движения тела или системы определяется скоростью центра масс. Если тело или система движется так, что скорости центров масс равны нулю, то и количество движения равно нулю. Например, для диска, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс, количество движения равно нулю.

Таким образом, количество движения характеризует динамические свойства тела или механической системы только в поступательном движении со скоростью, равной скорости центра масс.

При практических расчетах величину количества движения удобнее определять в аналитической форме через проекции его на координатные оси Q_x, Q_y, Q_z:

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}. \qquad (6.7)$$

Проекции вектора количества движения механической системы на координатные оси определяют как алгебраические суммы произведений массы каждого тела на проекцию скорости его центра масс на соответствующую ось:

$$Q_x = \sum m_k v_{xk}; \quad Q_y = \sum m_k v_{yk}; \quad Q_z = \sum m_k v_{zk}. \qquad (6.8)$$

Единицами измерения количества движения в системе СИ является килограмм на метр в секунду (кг·м/с), в технической системе единиц – килограмм силы на секунду (кгс·с).

Для приобретения практических навыков в определении количества движения тел и механических систем выполните следующие задания.

Задание 2. Определите величины проекций количества движения тел и систем, изображенных на рис.9, на координатные оси. По полученным значениям определите величину и покажите направление векторов количества движения. Результаты сверьте с ответами, приведенными в скобках.

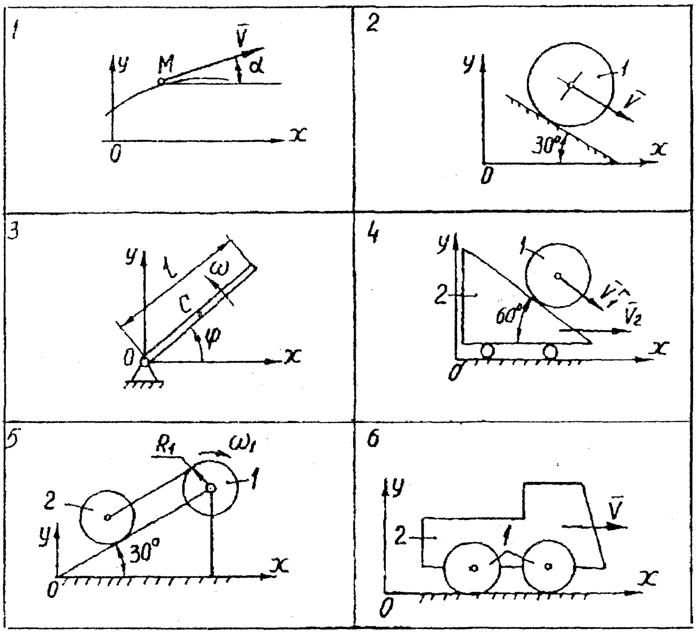


Рис. 9.

Краткие условия и исходные данные соответственно для каждой расчетной схемы следующие:

1. Материальная точка массой 2 кг движется со скоростью $v = 3$м/с, $\alpha = 60°$. ($q_x = 3$ кг·м/с, $q_y = 5{,}22$ кг·м/с, $q = 6$ кг·м/с);

2. Цилиндр массой 10 кг скатывается вниз со скоростью $v = 2$ м/с. ($Q_x = 17.32$ кг·м/с. $Q_y = -10$ кг·м/с, $Q = 20$ кг·м/с);

3. Стержень массой 10 кг вращается с угловой скоростью $\omega = 20$ с$^{-1}$. Угол поворота $\varphi = 30°$, длина стержня $l = 1$ м. ($Q_x = -50$ кг·м/с, $Q_y = 86.6$ кг·м/с. $Q = mv_c = 100$ кг·м/с);

4. Цилиндр массой $m_1 = 10$ кг скатывается по призме со скоростью $v_r = 2$ м/с относительно призмы. Призма массой $m_2 = 100$ кг движется со скоростью $v_2 = 0{,}5$ м/с. ($Q_x = 65$ кг·м/с, $Q_y = -8{,}7$ кг·м/с, $Q = 65{,}6$ кг·м/с);

5. Барабан радиусом $R = 0{,}2$ м вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 10$ с$^{-1}$. Масса барабана $m_1 = 10$ кг, масса цилиндра $m_2 = 100$ кг, массой троса пренебречь. ($Q_x = m_2v_{2x} = 174$ кг·м/с, $Q_y = m_2v_{2y} = 50$ кг·м/с, $Q = 180{,}5$ кг·м/с);

6. Автомобиль движется прямолинейно со скоростью $v = 0{,}5$ м/с. Масса каждого колеса $m_1 = 100$ кг, масса кузова $m_2 = 4$т. ($Q_x = (4m_1 + m_2)\cdot v = 2200$ кг· м/с, $Q_y = 0$, $Q = 2200$ кг·м/с).

В качестве примера определим количество движения системы (автомобиля), представленной на схеме 6 (рис.9). Приняв за основу четырехколесный вариант автомобиля, в проекциях на оси координат имеем:

$$Q_x = 4m_1v_{1x} + m_2v_{2x}\,; \quad Q_y = 4m_1v_{1y} + m_2v_{2y}.$$

Так как кузов движется поступательно по направлению оси Ох, то проекции скорости его центра масс на оси равны: $v_{2x} = v$, $v_{2y} = 0$. Скорость центров масс колес равна скорости кузова, а следовательно:

$$Q_x = (4m_1 + m_2)\cdot v = (4100 + 4\cdot 10^3)\cdot 0{,}5 = 2200;\ Q_y = 0.$$

Тогда $Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = 2200$ кг·м/с.

6.2. Формы теоремы и основные выводы

Теорема об изменении количества движения (в дальнейшем для упрощения – теорема количества движения) устанавливает связь между количеством движения и импульсом силы. Имеются две формы теоремы – дифференциальная и конечная.

В дифференциальной форме теорема формулируется следующим образом: **дифференциал (приращение) количества движения механической системы (материальной точки) равен геометрической сумме элементарных импульсов всех внешних сил:**

$$d\bar{Q} = \sum \bar{F}_k^e dt. \tag{6.9}$$

В конечной форме теорема формулируется так: **изменение количества движения системы за конечный промежуток времени равно геометрической сумме импульсов, действующих на систему внешних сил:**

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^e, \tag{6.10}$$

где $\bar{Q}$ – количество движения системы в конце промежутка времени;

$\bar{Q}_0$ – количество движения системы в начале промежутка времени.

Наибольшее практическое применение имеет последняя форма теоремы, причем не в векторной записи, а в аналитической, т.е. в проекциях на оси координат:

$$Q_x - Q_{0x} = \sum S_{kx}^e; Q_y - Q_{0y} = \sum S_{ky}^e; Q_z - Q_{0z} = \sum S_{kz}^e. \tag{6.11}$$

При изучении теоремы необходимо хорошо уяснить следующие важные особенности:

1. В уравнения, характеризующие теорему, не входят внутренние силы. Следовательно, они не влияют на изменение количества движения механической системы. В большинстве задач внутренние силы (сила взаимодействия тел между собой) неизвестны. Теорема же позволяет полностью исключить их из рассмотрения. В этом ее основная практическая ценность;

2. Количество движения тела или системы характеризует только поступательное движение. Поэтому теорема может использоваться только для описания поступательного движения механических систем;

3. Конечная форма теоремы в проекциях на декартовы оси координат представляет собой обычные алгебраические уравнения, **связывающие между собой промежуток времени и скорости по концам этого промежутка;**

4. Если при движении механической системы окажется, что геометрическая сумма всех внешних сил равна нулю или хотя бы проекция её на какую-нибудь координатную ось (например, ось Ox) равна нулю, то количество движения системы в целом или же проекция его на соответствующую ось будут являться постоянными и равными начальным их значениям:

$$\bar{Q} = \bar{Q}_0, \text{ или } Q_x = Q_{0x}. \tag{6.12}$$

Записанные уравнения отражают закон сохранения количества движения.

6.3. Методика применения теоремы к решению задач

Приведенные выше две формы теоремы количества движения неравнозначны. Дифференциальная форма (6.9) теоремы для практических расчетов применяется мало.

Для практики наибольшую ценность представляет конечная форма теоремы. Поэтому при изучении теоремы именно этой формы и следует уделить особое внимание. Особенностями, отличающими теорему количества движения от других теорем и способов, являются:

1. Явное присутствие в условии задачи промежутка времени и скоростей точек или тел по концам этого промежутка;

2. Необходимость или достаточность описания поступательного движения тел.

Задачи на применение рассматриваемой теоремы можно разделить на два типа. Первый тип – задачи на применение теоремы в форме (6.11), второй – задачи на закон сохранения количества движения. Методика решения задач как первого, так и второго типов совершенно аналогична методике применения предыдущей теоремы (см.п.5.2). Поэтому подробно описывать ее нет необходимости. Некоторые отличия имеют место лишь в выполнении пунктов 4...6.

Итак, для решения задачи целесообразно выполнить пункты 1...3, приведенные в подразделе 5.2.

4. Составить суммы проекций импульсов всех внешних сил на оси координат.

5. Составить равенства для определения проекций количества движения системы в начале и конце движения на координатные оси как алгебраические суммы проекций количества движения каждого из тел на эти же оси. Например, на ось Ox:

$$Q_{0x} = Q_{01x} + Q_{02x} + ... + Q_{0nx};$$

$$Q_{x} = Q_{1x} + Q_{2x} + ... + Q_{nx}.$$

6. Определить проекции скоростей центров тяжести всех тел на координатные оси, выразив их через заданные величины. При этом следует помнить, что скорости должны определяться в абсолютном движении соответствующих точек, точнее, в движении относительно неподвижных осей координат.

7. Подставить полученные результаты в уравнение, соответствующее типу задачи (6.11) или (6.12), и решить его относительно неизвестных величин.

Пример 5. Автомобиль, двигаясь по негладкой горизонтальной дороге, развил скорость v_0, после чего была выключена передача. Далее до остановки он двигался накатом. При этом продолжительность его движения составила tc. Определить величину скорости движения автомобиля в момент выключения передачи, если масса кузова m_1, масса каждого из четырех колес m_2, суммарный коэффициент сопротивления качению равны f_k. Считать, что общая сила тяжести автомобиля равномерно распределена по всем четырем колесам.

Решение. 1. В предлагаемой задаче рассмотрим движение всего автомобиля. Это позволит исключить неизвестные силы взаимодействия колес с осями, так как они при таком выборе будут внутренними силами.

Так как все четыре колеса одинаковой массы и одинаково нагружены, то их на расчетной схеме можно заменить одним с массой, равной $4m_2$. При таком подходе автомобиль будет представлять двухмассовую систему, состоящую из кузова и колес (рис.10).

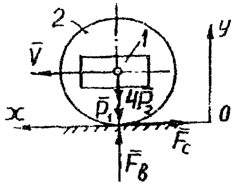


Рис. 10.

2. Освобождаем выбранную систему от связей, заменяя их силами реакций связей. Так как связью в рассматриваемом случае является негладкая дорога, поэтому сил реакций будет две – нормальная $F_в$ и сила сопротивления (трения) F_c. Из других внешних сил будут действовать только силы тяжести P_1 и $4P_2$.

3. Выбираем декартовы оси координат. Учитывая, что движение автомобиля прямолинейное, одну из осей (Ox) направляем в сторону движения, а другую – перпендикулярно ей. Начало отсчета можно совместить с положением, соответствующим началу движения автомобиля накатом.

4. Составляем сумму проекций импульсов всех внешних сил на координатные оси:

$$\sum S^e_{kx} = -F_c t; \quad \sum S^e_{ky} = F_в t - (P_1 + 4P_2)\cdot t.$$

5. Записываем равенства, характеризующие теорему об изменении количества движения в проекциях на координатные оси:

$$Q_x - Q_{0x} = \sum S^e_{kx}; Q_y - Q_{0y} = \sum S^e_{ky}.$$

6. Определяем проекции количества движения системы на координатные оси ($Q_x = 0$, $Q_y = 0$, так как в конце движения скорость автомобиля равна нулю):

$$Q_{0x} = m_1 v_{1x} + 4m_2 v_{2x}.$$

Так как проекция скорости автомобиля на ось Oy равна нулю, то $Q_{0y} = 0$.

Автомобиль движется поступательно. Следовательно, скорость кузова v_1 и скорость центров тяжести колес v_2 равны. Поэтому $v_{1x}=v_{2x}=v_0$.

Тогда

$$Q_{0x} = m_1 v_0 + 4m_2 v_0 = (m_1 + 4m_2)\cdot v_0.$$

7. Подставляя полученные результаты в исходные уравнения и имея в виду, что $P_1 = m_1g$, $P_2 = m_2g$, находим:

$$-(m_1 + 4m_2) \cdot v_0 = F_c t;$$

$$0 = F_в t - (m_1 + 4m_2) \cdot gt.$$

Учитывая, что сила сопротивления $F_c = f_k F_в$, и определяя из второго уравнения $F_в$, находим v_0:

$$F_в = (m_1 + 4m_2) \cdot g,\ v_0 = f_k gt.$$

6.4. Особенности применения теоремы к описанию движения сплошных сред (жидкостей и газов)

Теорема об изменении количества движения наибольшее применение находит в описании механического движения сплошных сред, в первую очередь жидкостей и газов. Причем для практических расчетов, как и ранее, наиболее удобна ее конечная форма. Однако в применении теоремы к решению конкретных инженерных задач движения сплошной среды есть отличительные особенности. Суть их заключается в следующем:

1. Как количество движения, так и импульс внешних сил необходимо определить за один и тот же определенный промежуток времени, лучше за единицу времени – одну секунду.

2. Массу движущейся среды за одну секунду (секундную массу) необходимо определять через ее объем и плотность.

Секундный объем при постоянной скорости истечения среды определится по формуле

$$V = Av,$$

где A – площадь поперечного сечения канала или трубы;

v – скорость движения среды.

Соответственно секундная масса среды, протекающей через любое сечение трубы, равна $m = \rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2$.

3. Объем среды, проходящей через любое сечение в единицу времени, неизменен.

С учетом приведенных особенностей теорема о количестве движения принимает следующую форму:

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_2 + \vec{F}_м + \vec{F}_п = 0, \qquad (6.13)$$

где $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ – соответственно скорости движения среды через сечения A_1 и A_2;

$F_м$ – массовые силы (силы тяжести частиц среды);

$F_п$ – поверхностные силы (силы, действующие со стороны трубы на среду – силы давления и силы трения).

Пример 6. Карусельная моечная установка (рис. 11) представляет собой кольцевую платформу диаметром d. Она может вращаться вокруг вертикальной оси. В середине платформы на неподвижном основании располагаются детали для мойки. По периферии платформы расположены сопла, как показано на рис. 11, из которых истекает моечная жидкость. Определить количество сопел n, которые необходимо установить на платформе, чтобы она могла вращаться, если момент трения в подшипниках известен и равен $M_{тр}$. Производительность насоса такая, что обеспечивается скорость истечения жидкости из сопел v при их диаметре d_1 .

Решение. Необходимое количество сопел можно определить как частное от деления момента трения на момент, развиваемый поверхностными окружными силами при истечении жидкости из одного сопла. Следовательно, задача сводится к определению величины указанных сил.

1. Выбираем систему тел, движение которых необходимо рассмотреть (в нашем случае жидкости, движущейся со скоростью v).

2. Реакцию связи, равную поверхностным силам, действующим со стороны сопла на жидкость, представляем в виде двух перпендикулярных составляющих – одну $F_р$ по радиусу к центру, другую F_k по касательной к окружности кольца. В дальнейшем нас будет интересовать составляющая F_k, которая равна по модулю и противоположно направлена искомой окружной силе.

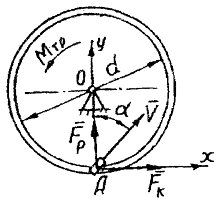


Рис. 11.

Из других внешних сил на систему действуют силы тяжести. Но так как они перпендикулярны плоскости чертежа, то на схеме их не показываем.

3. Для удобства составления уравнений оси координат располагаем на кольце и направляем по направлению сил $\vec{F}_р$ и $\vec{F}_k$.

4. Составляем уравнение количества движения. Так как нас интересует лишь сила $\vec{F}_k$, то для ее нахождения при выбранных осях координат достаточно составить одно уравнение в проекции на ось Ax:

$$m(v_{2x} - v_{1x}) = F_{kx}.$$

5. Определяем величины, входящие в это равенство.

Секундная масса жидкости на выходе $m = \rho\pi d^2/4$.

Определяя проекцию скорости жидкости на ось Ax, пренебрегаем небольшой переносной скоростью кольцевой платформы, т.е. считаем платформу неподвижной: $v_{2x} = v \cdot \sin\alpha$.

Скорость жидкости в начале движения $v_{1x} = 0$.

6. Подставив полученные результаты в равенство, имеем

$$F_k = \rho \cdot \pi \cdot d_1^2 \cdot v^2 \cdot \sin\alpha / 4.$$

7. Определяя момент силы F_k относительно оси вращения M = $=F_k$ d/2, находим количество сопел n:

$$n = \frac{2M\text{тр}}{F_k d} = \frac{8M\text{тр}}{\rho \cdot \pi \cdot d \cdot d_1^2 \cdot v^2 \cdot \sin\alpha}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как определить импульс переменной и постоянной сил за конечный промежуток времени?

2. Как направляется вектор импульса силы?

3. Как определить импульс равнодействующей системы сил?

4. Как определяются проекции импульса силы на координатные оси?

5. Что называется количеством движения материальной точки и механической системы?

6. Как практически определить величину количества движения механической системы?

7. Сформулируйте теорему об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме.

8. Как определяется количество движения твердого тела?

9. Входят ли внутренние силы в уравнения, характеризующие теорему об изменении количества движения системы?

10. При каких условиях количество движения системы остается постоянным?

11. Какие величины являются основными критериями, определяющими целесообразность применения теоремы к решению задач?

12. Какое движение тела или механической системы описывает теорема?

13. Как целесообразнее поступать с системой (расчленять или не расчленять на части) при решении задач?

14. Можно ли с помощью теоремы определять реакции внешних связей системы?

15. В какой форме удобнее использовать теорему для изучения движения сплошной среды?

16. Какие силы называют массовыми, а какие – поверхностными?

7. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

7.1. Моменты количества движения

Изучить теорему можно в учебной литературе: [1, п.116, 143...147]; [3, п. 53...57].

Главным отличием рассматриваемой теоремы от предыдущих двух является то, что ее результаты позволяют дать качественную и количественную оценки динамики вращательного движения тел и механических систем. Она позволяет составлять дифференциальные уравнения вращательного движения тел, не включающие неизвестные силы реакций внешних связей.

В процессе изучения теоремы необходимо хорошо усвоить методику определения такой механической характеристики, как момент количества движения точки и тела, научиться составлять дифференциальные уравнения вращательного движения, а по ним определять кинематические характеристики тела.

Момент количества движения тела является той механической величиной, которая определяет динамические свойства тела при его вращении.

Момент количества движения материальной точки относительно оси, как и момент силы, можно определять двумя способами.

Первый способ. Провести плоскость перпендикулярно оси. Спроецировать вектор $m\vec{v}$ на эту плоскость и определить момент от полученной проекции mv_s относительно точки O пересечения оси и плоскости. Полученная величина и является моментом количества движения материальной точки относительно оси:

$$k_z = mv_s h_1. \tag{7.1}$$

Второй способ. Разложить вектор $m\vec{v}$ на составляющие по осям координат (mv_x, mv_y, mv_z) (рис. 12). От полученных составляющих определить моменты количества движения относительно координатных осей:

$$\begin{aligned} k_x &= -mv_y z + mv_z y; \\ k_y &= mv_x z - mv_z x; \\ k_z &= mv_y x - mv_x y, \end{aligned} \tag{7.2}$$

где x, y, z – координаты точки M в осях Oxyz.

По полученным проекциям определяется величина вектора $\vec{k}_0$:

$$k_0 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}. \tag{7.3}$$

Направление вектора $\vec{k}_0$ можно определить по направляющим косинусам.

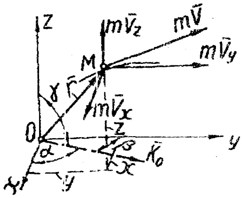


Рис. 12.

Момент количества движения механической системы относительно какой-нибудь оси равен алгебраической сумме моментов количества движения всех ее точек относительно этой же оси:

$$K_z = \sum k_{zi}. \tag{7.4}$$

При практических расчетах удобнее моменты количества движения механической системы определять посредством моментов количества движения тел, входящих в нее. Тогда в равенстве (7.4) k_{zi} следует считать как моменты количества движения i-го тела относительно оси z. Определение же моментов количества движения тел зависит от вида их движения.

В частном случае вращения тела вокруг неподвижной оси, например, оси z (рис.13), его момент количества движения равен произведению момента инерции тела относительно оси вращения на угловую скорость:

$$K_z = J_z \omega . \tag{7.5}$$

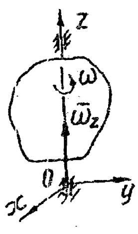


Рис. 13.

При сложном плоском движении тела момент количества движения относительно неподвижной оси можно определять как сумму момента количества движения точки массой, равной массе тела и движущейся со скоростью центра масс и момента количества движения тела относительно оси, параллельной заданной и проходящей через центр масс. Например, для диска *1* (рис.14) момент количества движения относительно оси z равен:

$$K_z = m_1 v_c OC + J_2\omega_1 . \qquad (7.6)$$

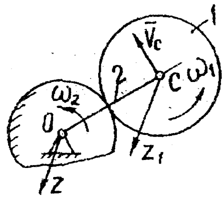


Рис.14.

Для приобретения навыков в определении момента количества движения выполните следующее задание.

Задание 3. Определите величины моментов количества движения материальных точек или механических систем относительно осей, указанных на расчетных схемах (**рис.15**), и покажите направление их векторов. Ответы приведены в скобках после исходных данных для каждой расчетной схемы.

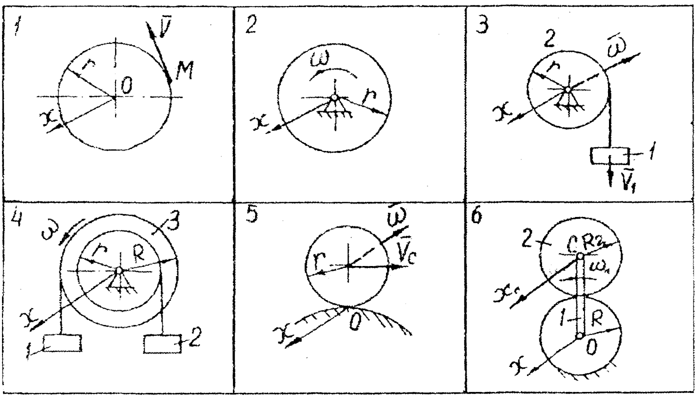


Рис. 15.

1. Материальная точка массой m =1 кг движется по окружности радиусом r = 0,5 м со скоростью v = 4 м/с. K_z = ? (2).

2. Сплошной однородный диск массой m =10 кг и радиусом r =0,3 м вращается вокруг горизонтальной оси с угловой скоростью ω = 20 c^{-1}. K_x = ? (9).

3. Груз массой m_1 =10 кг подвешен на нити, намотанной на барабан 2 массой m_2 =5 кг и радиусом r =0,2 м, опускается вниз, имея скорость

$v_1 = 2$ м/с. Массу барабана считать распределенной по ободу, массой троса пренебречь. $K_z = ?$ (– 6).

4. Грузы *1* и *2* массами $m_1 = 10$ кг и $m_2 = 5$ кг подвешены на невесомых нитях, намотанных на двухступенчатый барабан массой $m_3 = 10$ кг. Барабан вращается с угловой скоростью $\omega_3 = 10 c^{-1}$. При расчете принять момент инерции барабана $J_{3z} = 0{,}5$ кг·м^2, радиусы ступеней $r = 0{,}2$ м, $R = 0{,}3$ м. $K_z = ?$ (16).

5. Кольцо радиусом $r = 0{,}5$ м и массой $m = 10$ кг катится по неподвижной поверхности, имея скорость центра масс $v_c = 2$ м/с. $K_z = ?$ (– 20).

6. Планетарный механизм состоит из кривошипа *1* (однородного стержня) массой $m_1 = 2$ кг, подвижного колеса *2* (сплошного однородного диска) массой $m_2 = 4$ кг и радиусом $R_2 = 0{,}3$ м. Кривошип вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью $\omega_1 = 10$ c^{-1}. При этом колесо *2* обкатывается по поверхности неподвижного цилиндра радиусом R = =0,3 м. $K_z = ?$ (20,4).

В качестве примера определим момент количества движения механизма *6*, изображенного на рис.13. Механизм состоит из двух тел, стержня *1* и колеса *2*. Момент количества движения относительно оси Oz определим как сумму $K_z = K_{1z} + K_{2z}$. Момент количества движения вращающегося стержня $K_{1z} = J_{1z}\omega_1$. Момент инерции стержня относительно его конца $J_{1z} = m_1 l_1^2/3 = m_1(R+R_2)^2/3 = 0{,}24$; $K_{1z} = 0{,}24 \cdot 10 = 2{,}4$кг·м^2/с.

Момент количества движения диска *2*, совершающего сложное движение, находим по формуле (7.6), $K_z = m_2 v_c OC + J_{zc}\omega_2$.Скорость центра диска $v_c = \omega_1 OC = 10 \cdot 0{,}6 = 6$ м/с. Момент инерции диска относительно центра C $J_{zc} = m_2 R_2^2/2 = 4 \cdot 0{,}3^2/2 = 0{,}18$ кг·м^2.

Угловую скорость диска находим из условия, что он совершает плоское движение, катится по поверхности цилиндра. Так как мгновенный центр скоростей точек диска находится в точке касания его и цилиндра, то $\omega_2 = v_c/R_2 = 6/0{,}3 = 20$ c^{-1}. С учетом полученных результатов имеем: $K_{2z} = 4 \cdot 6 \cdot 0{,}6 + 0{,}18 \cdot 20 = 18$ кг·м^2/с.

Следовательно, $K_z = 2{,}4 + 18 = 20{,}4$ кг·м^2/с.

7.2. Формы теоремы и основные выводы

Теорема об изменении момента количества движения устанавливает связь между быстротой изменения момента количества движения материальной точки или механической системы и силами, действующими на нее. Сущность ее в следующем: **производная по времени от главного момента количества движения механической системы относительно некоторого неподвижного центра равна взятому относительно того же центра главному моменту всех внешних сил, приложенных к системе:**

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum \vec{M}_0(\vec{F}_k^e). \qquad (7.7)$$

Векторному равенству (7.7) соответствуют три алгебраических равенства в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum M_x(\vec{F}_k^e); \frac{dK_y}{dt} = \sum M_y(\vec{F}_k^e); \frac{dK_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e). \qquad (7.8)$$

Так как проекция вектора момента на какую-нибудь ось равна моменту вектора относительно оси, то равенства (7.8) соответствуют следующей формулировке теоремы: **производная от главного момента количества движения механической системы относительно оси равна алгебраической сумме моментов всех внешних сил относительно этой оси.**

В случае, когда движение системы изучается за какой-то конечный промежуток времени, то равенства (7.8) удобнее преобразовывать к следующему виду. Например, относительно оси x:

$$dK_z = \sum M_z(\vec{F}_k^e)\,dt.$$

Интегрируя левую часть в пределах от K_{x0} (начальный момент количества движения) до K_x, получаем

$$K_z - K_{z0} = \int_0^t \sum M_z(\vec{F}_k^e)\cdot dt. \qquad (7.9)$$

При постоянных внешних силах равенство (7.9) можно записать и в таком виде:

$$K_z - K_{z0} = \sum M_z(\vec{F}_k^e)\cdot t. \qquad (7.10)$$

Если главный момент внешних сил относительно некоторого центра или оси равен нулю, то момент количества движения системы относительно этого центра или оси остаются постоянными и равными их начальным величинам. Например, если относительно оси z $\sum M_z(\vec{F}_k^e) = 0$, то имеем:

$$K_z = K_{z0} = \text{const}. \qquad (7.11)$$

Сказанное выше выражает **закон сохранения момента количества движений** механической системы относительно оси.

Основные выводы, вытекающие из теоремы:

1. В уравнения, отражающие теорему, не входят внутренние силы. Поэтому они непосредственно не влияют на изменение момента количества движения. Однако сказанное справедливо для неизменяемой механической системы с идеальными внутренними связями. Если система изменяема, или внутренние связи неидеальны, то невозможно заранее сказать что-нибудь определенное о сумме моментов внутренних сил относительно оси или центра. Здесь нужно исходить из конкретных условий задачи;

2. Если при сложном движении системы или твердого тела в качестве центра моментов выбирать их центр масс, то математическая форма теоремы об изменении главного момента количества движения

в относительном движении (по отношению к движению центра масс) полностью совпадает с ранее приведенными формами теоремы в абсолютном движении. Поэтому теорема об изменении момента количества движения в относительном движении может быть сформулирована следующим образом: **производная от главного момента количества движения относительно центра масс равна главному моменту всех внешних сил относительно этого же центра;**

3. Закон сохранения момента количества движения остается справедливым и при движении системы относительно центра масс. Однако из этого не следует, что если он имеет место в абсолютном движении, то обязательно должен иметь место и в относительном;

4. Теорема учитывает вращательное движение, в этом ее принципиальное отличие от первых двух общих теорем. В частном случае при применении ее к описанию вращения тела вокруг неподвижной оси получаем дифференциальное уравнение вращательного движения. И действительно, так как момент количества движения вращающегося тела равен $J_z\omega$, то на основании равенства (7.8) получаем

$$J_z\varepsilon = J_z\ddot{\varphi} = \sum M_z(\bar{F}_k^e). \qquad (7.12)$$

7.3. Методика решения задач

Последовательность решения задач при применении теоремы об изменении момента количества движения:

1. Практически определять моменты количества движения тел мы можем только относительно неподвижных или движущихся поступательно осей, поэтому систему приходится расчленять на части по числу осей, относительно которых происходит движение тел;

2. При составлении расчетной схемы тела системы необходимо изображать в положениях, соответствующих произвольному моменту времени;

3. Составляя уравнения моментов относительно координатных осей, в качестве положительного целесообразно выбирать направление, совпадающее с направлением движения (вращения) тел. Тогда моменты движущихся сил будут положительны, а моменты сил сопротивления – отрицательны. Чтобы и момент количества движения относительно оси был положительным, последнюю целесообразно направлять в сторону, откуда вращение видится происходящим против хода часовой стрелки;

4. Составлять уравнение моментов лучше, начиная с определения суммы моментов всех внешних сил, т.е. с определения правой части уравнения.

Методику решения задач с помощью теоремы об изменении момента количества движения и его закона сохранения рассмотрим на конкретных примерах.

Пример 7. Груз *1* массой m_1 =100 кг (рис.16,а) из неподвижного состояния поднимается вверх с помощью электрической лебедки, состоящей из ведущего вала с шестерней *3* массой m_3 =5 кг радиусом R_3= =0.1 м, к которому приложен постоянный вращающий момент двигателя M=50 Н·м. На ведомом валу установлены барабан радиусом r_2 =0.1 м и шестерня радиусом R_2 = 0,3 м общей массой m_2 =15 кг. Радиус инерции барабана и жестко связанной с ним шестерни i_2 =0,2 м. Определить закон движения груза *1*, считая шестерню *3* сплошным однородным диском.

Решение. 1. Рассмотрим движение системы. Так как она содержит две неподвижные оси вращения, то расчленяем ее на две части: ведущий вал с шестерней *3*, ведомый вал с барабаном *2* и грузом *1* (рис.16, б). Составление уравнения моментов начнем с ведущего вала.

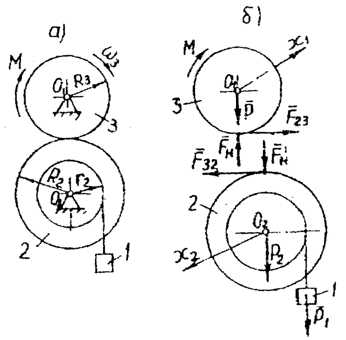


Рис.16.

2. Освобождаем вал вместе с шестерней *3* от связей (подшипники в точке O_1 и шестерня *3*) и показываем реакции связей: окружную силу F_{23}, нормальную реакцию $F_н$. Реакции подшипников на рисунке не показаны, так как они пересекают ось вращения и их момент относительно этой оси равен нулю.

Из активных сил на шестерню действуют момент двигателя M и сила тяжести P_3.

3. Составляем уравнение момента количества движения относительно оси вращения Oz_1, приняв в качестве положительного направление в сторону вращения. Так как вращается лишь одно тело, то теорему запишем в форме дифференциального уравнения вращательного движения:

$$J_{3z}\ddot{\varphi}_3 = \sum M_{z_1}(\vec{F}_k^e), \qquad (A)$$

где $\sum M_{z_1}(\vec{F}_k^e) = M - F_{23}R_3 = 50 - 0,1\ F_{23};$

$J_{3z} = m_3R_3^2/2 = 5 \cdot 0{,}01/2 = 0{,}025$ кг·м^2.

Подставляем полученные результаты в исходное уравнение

$$0{,}025\ddot{\varphi}_3 = 50 - 0{,}1\ F_{23}\ . \qquad (B)$$

4. Составляем уравнение моментов количества движения для второй части:

$$\frac{dK_{z_2}}{dt} = \sum M_{z_2}(\bar{F}_k^e). \qquad (C)$$

На рассматриваемую часть (рис.16,б) действуют силы тяжести тел P_1 и P_2, силы реакции F_{32} и F_H'. Реакции в подшипниках O_2 не показываем по той же причине, что и в первом случае.

Тогда

$$\sum M_{z_2}(\bar{F}_k^e) = F_{32}R_2 - P_1r_2 = 0{,}3F_{32} - 100;$$

$$K_{z_2} = K_1 + K_2.$$

Здесь K_1 – момент количества движения груза *1* относительно оси z_2, $K_1 = m_1v_1r_2 = 10v_1$;

K_2 – момент количества движения барабана *2* относительно оси x_2, $K_2 = J_2\omega_2 = m_2i_2^2\omega_2 = 0{,}6\omega_2$.

Следовательно, $K_{Z2} = 10v_1 + 0{,}6\omega_2$.

Так как по условию задачи необходимо определить закон движения груза *1*, то угловую скорость барабана *2* выражаем через v_1, $\omega_2 = v_1/r_2 = = v_1/0{,}1 = 10\ v_1$.

Окончательно момент количества движения второй части равен $K_{Z2} = 10v_1 + 0{,}6\ 10v_1 = 16v_1$.

Подставляем полученные результаты в формулу (С):

$$16\frac{dv_1}{dt} = 16\ddot{s}_1 = 0{,}3F_{32} - 100.$$

Итак, в результате выполненных расчетов получены два следующих дифференциальных уравнения движения тел системы:

$$0{,}025\ddot{\varphi}_3 = 50 - 0{,}1 \cdot F_{23};$$

$$16\ddot{s}_1 = 0{,}3F_{32} - 100.$$

Так как $\left|\bar{F}_{23}\right| = \left|\bar{F}_{32}\right|$, то в приведенной системе уравнений три неизвестных (ускорения $\ddot{\varphi}_3$, $\ddot{s}_1$ и окружная сила F_{23}). Однако в рассматриваемой механической системе ускорения $\ddot{\varphi}_3 = \varepsilon_3$ и $\ddot{s}_1 = a_1$ взаимозависимы, $\varepsilon_3 = \varepsilon_2R_2/R_3 = a_1R_2/R_3r_2 = 30a_1$.

Тогда

$$\begin{array}{l|l} 0{,}75a_1 = 50 - 0{,}1F_{23} & 3 \\ 16a_1 = 0{,}3F_{32} - 100 & 1\ . \end{array}$$

Исключая из приведенных уравнений F_{23}, находим:

$$3 \cdot 0{,}75a_1 + 16a_1 = 50.$$

Отсюда $a_1 = 2{,}74$ м/с^2.

Ускорение груза *1* постоянно. Следовательно, он поднимается вверх равноускоренно. С учетом того, что в начальный момент времени $v_{10} = 0$, получаем уравнение движения груза *1*:

$$s_1 = a_1 t^2/2 = 1{,}37t^2.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется момент количества движения материальной точки относительно центра и оси?

2. Как направлен вектор-момент количества движения материальной точки относительно центра?

3. Как определяется в общем случае главный момент количества движения механической системы относительно центра и оси?

4. Как определяются моменты количества движения тела относительно координатных осей?

5. Как определяется момент количества движения тела относительно оси вращения?

6. Можно ли с помощью момента количества движения тела полностью оценить его динамические свойства?

7. Как определить момент количества движения тела относительно оси при сложном вращательном движении?

8. Сформулируйте теорему об изменении момента количества движения системы относительно центра и оси.

9. В каком случае момент количества движения системы относительно центра и относительно оси остается постоянным?

10. Расчленять или не расчленять механическую систему на части при применении теоремы об изменении момента количества движения?

11. Можно ли определять реакции внешних связей тел, вращающихся относительно неподвижных осей?

12. Какое движение тел можно описать с помощью теоремы об изменении момента количества движения?

13. Какую форму имеет теорема об изменении момента количества движения системы относительно центра масс?

8. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

8.1. Значение теоремы. Цель и задачи

Теорема об изменении кинетической энергии является наиболее важной и универсальной теоремой, позволяющей изучить любое движение тел и механической системы в целом. С помощью ее можно количественно оценить преобразование механического движения в машинах в другие формы движения: тепловые, электрические и т.д.

В результате изучения теоремы необходимо: усвоить методику и основные формулы определения кинетической энергии тел и механической системы, работы и мощности сил; научиться использовать основные выводы и положения для определения силовых и кинематических характеристик системы.

Изучение теоремы целесообразно начинать с рассмотрения методики и особенностей определения работы и мощности сил, кинетической энергии тел и механических систем. При этом рекомендуется придерживаться следующей программы:

1. Элементарная работа силы. Работа силы на конечном пути. Мощность. Аналитическое выражение работы силы [1, п.112]; [2, гл.4, п.5]; [3, гл.9, п.59, 60];

2. Работа силы тяжести, упругости и силы тяготения. Работа и мощность сил, приложенных к твердому телу. Работа внутренних сил [1, п.113, 148]; [2, гл.4, п.5]; [3, гл.10, п.61, 65];

3. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы. Вычисление кинетической энергии твердого тела в различных случаях его движения [1, п.147]; [2, гл.4, п.5]; [3, гл.10, п.58,67,68];

4. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки и механической системы [1, п.114,149]; [2, гл.4, п.5]; [3, гл.10, п.62,69].

8.2. Работа и мощность сил

Работа силы является количественной мерой превращения механического движения в какую-нибудь другую форму движения (теплоту, потенциальную энергию, энергию деформации упругого тела).

Различают элементарную работу силы и работу силы на конечном перемещении.

Элементарная работа силы δA есть скалярная величина, равная произведению величины силы на элементарное перемещение ds точки, к которой она приложена, и на косинус угла α (рис.17) между направлением вектора силы и касательной к траектории в данной точке (вектора скорости):

$$\delta A = F ds \cos\alpha . \qquad (8.1)$$

Полная работа силы на конечном перемещении M_0M определяется как сумма элементарных работ на этом отрезке, причем сумма эта интегральная.

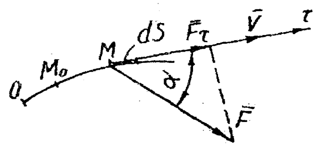


Рис.17.

$$\delta A = \int_{M_0}^{M} Fds \cos\alpha.$$

Если сила постоянна, то ее работа на конечном перемещении

$$A = Fs\cos\alpha. \qquad (8.2)$$

Мощность N, как быстрота выполнения работы силы в единицу времени, определяется по формуле

$$N = \frac{\delta A}{dt} = Fv\cos\alpha. \qquad (8.3)$$

Следовательно, **мощность силы равна произведению силы на скорость перемещения точки, к которой приложена сила, и косинус угла между направлением векторов силы и скорости.**

При практическом определении работы и мощности силы рекомендуется поступать следующим образом. Спроецировать силу на направление перемещения (касательную) или вектора скорости. Далее работу или мощность определять как произведение полученной проекции силы на перемещение или скорость, взятое с соответствующим знаком:

$$A = \pm F_\tau s;\ N = \pm F_\tau v. \qquad (8.4)$$

Работа и мощность положительны, если проекция силы направлена в сторону скорости, и отрицательны – если она направлена в противоположную сторону.

Если при движении материальной точки на нее действует несколько сил, то полную работу сил, действующих на точку (тело), необходимо определять как алгебраическую сумму работ от всех сил на заданном перемещении:

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Sigma A_k.$$

Аналогично определяют и полную мощность действующих сил:

$$N = N_1 + N_2 + \ldots + N_n = \Sigma N_k.$$

За единицу работы принимается в системе СИ 1Дж(1Дж=1Н·1м=Н·м), в технической системе единиц – 1 килограмм-сила на метр (1кгс·м=

=1кгс·1м). Так как 1 кгс технической системы единиц равна 9,81 Н, то 1 кгс·м = 9,81 Дж, или 1 Дж = 0,102 кгс·м.

За единицу мощности в системе СИ принимают 1 Ватт. 1Вт = 1Н·1м/с=Н·м/с. В технической системе единиц мощность измеряется в килограмм-силах на метр в секунду – кгс·м/с. 1Вт =1Дж/с = 0,102 кгс·м/с.

В технической литературе часто можно встретить мощность в киловаттах (кВт). 1 кВт = 10^3 Вт = 102 кгс·м/с = 1,36 л.с. Одна лошадиная сила (л.с.) = 75 кгс·м/с = 736 Вт.

Приведенные ранее формулы показывают, что работа и мощность в общем случае зависят от характера движения точки приложения силы. Поэтому при определении работы и мощности сил, действующих на твердые тела, необходимо использовать **перемещения и скорости точек, к которым приложены силы.**

При вращательном движении тела работу и мощность сил целесообразно определять через вращающий момент. Элементарная работа силы при этом (рис.18, а) равна

$$\delta A = Frd\varphi = Md\varphi.$$

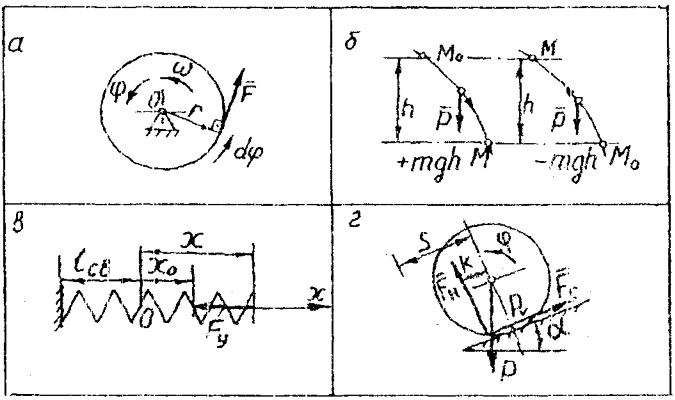


Рис. 18.

Работа момента силы на конечном перемещении

$$A = \int\limits_{\varphi} Frd\varphi = \int\limits_{\varphi} Md\varphi. \qquad (8.5)$$

Если сила или момент силы постоянны, то их работа на конечном повороте тела равна произведению момента силы относительно оси вращения на угол поворота.

$$A = \pm Fr\varphi = \pm M\varphi. \qquad (8.6)$$

Мощность силы, приложенной к вращающемуся твердому телу, равна произведению момента силы относительно оси вращения на угловую скорость:

$$N = \pm F r \omega = \pm M\omega . \tag{8.7}$$

Работа и мощность положительны, если направление момента силы совпадает с направлением поворота тела, и отрицательны, если момент силы противоположен вращению тела.

При изучении вопросов, связанных с определением работы силы и мощности, следует уяснить также, что, несмотря на равенство нулю геометрической суммы внутренних сил и их моментов, работа и мощность их не всегда равны нулю. Сумма работ всех внутренних сил равна нулю только для неизменяемой механической системы с идеальными (без трения) связями. При этом под неизменяемой механической системой следует понимать систему, состоящую из твердых тел. Если же в систему входят деформируемые тела (упругие тела и газы), то она изменяемая. И работа сил, возникающих при деформации тел, при сжатии или расширении газов не равна нулю. Сказанное относится и к мощности внутренних сил.

Примером изменяемой механической системы является двигатель внутреннего сгорания. Газ в цилиндрах двигателя – тело не абсолютно твердое. Поэтому при движении за счет работы двигателя работа и мощность, совершаемая газами, не равна нулю.

Следует также уяснить, что есть такие силы, работа которых не зависит от вида траектории точки их приложения, а зависит от начального и конечного положений точки на траектории. К этим силам относятся силы тяжести, силы упругости деформируемого тела и силы тяготения.

Работа силы тяжести (рис.18, б) всегда равна взятому со знаком плюс или минус произведению силы тяжести на вертикальное перемещение (высоту перемещения) точки ее приложения:

$$A = \pm mgh .$$

Работа силы упругости (рис.18, в) равна половине произведения коэффициента упругости c на разность квадратов конечного x и начального x_0 удлинений (деформаций) пружины от ее статического положения, взятого с отрицательным знаком:

$$A = -c(x^2 - x_0^2)/2 .$$

Работа получается положительной, если деформация уменьшается, и отрицательной – если увеличивается.

Если деформация пружины происходит из свободного состояния, то $x_0 = 0$, $A = -cx^2/2$.

Некоторые трудности вызывает определение работы сил, действующих на диск, катящийся по деформируемой поверхности. Как было показано в статике, вследствие деформации поверхности в точке контакта нормальная реакция $F_н$ смещается в сторону движения на величину k (рис.18, г), создавая момент сопротивления качению, $M_k = F_н k$. Тогда работа сил, действующих на катящийся без проскальзывания диск,

$$A = P \cdot s \cdot \sin\alpha - F_н k\varphi .$$

Сила сцепления диска с поверхностью F_c работы не совершает, так как отсутствует его скольжение относительно опорной поверхности. Мгновенный центр вращения диска находится в точке касания.

Задание 4. В целях приобретения навыков в определении работы и мощности сил решите следующие задачи, расчетные схемы для которых представлены на рис.19.

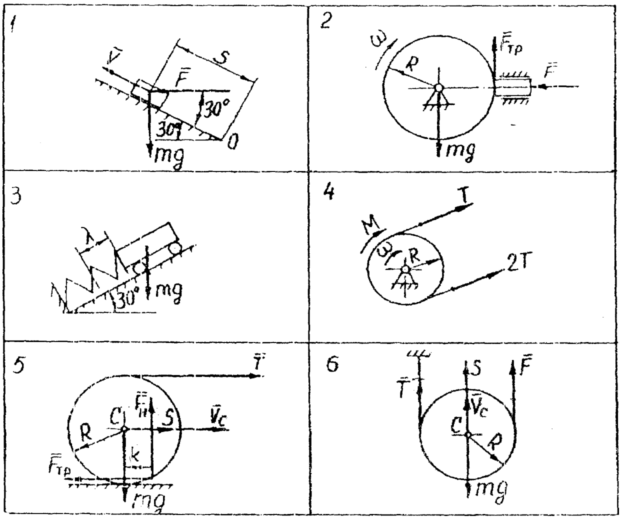


Рис. 19.

Номер задачи соответствует номеру схемы на рисунке. Ответы даны в скобках.

1. Груз массой m = 10 кг, расположенный на гладкой наклонной плоскости, перемещается вверх силой F = 200 Н. Определить полную работу, совершенную действующими на груз силами при его перемещении на s = 1 м. Определить также полную мощность сил, если скорость груза v = 2 м/с. (A = 124 Дж; N = 248 Вт).

2. Барабан радиусом R = 0.2 м вращается с угловой скоростью $\omega = 20$ с$^{-1}$. К ободу барабана прижимается тормозная колодка силой F = 100 Н. Коэффициент трения колодки о барабан f = 0,4. Определить

мощность от силы трения, а также работу при повороте барабана на 2 оборота. ($N = 160$ Вт; $A = 100{,}5$ Дж).

3. Тележка массой $m = 100$ кг, скатываясь по наклонной плоскости, упирается в пружинный буфер с коэффициентом упругости $c =$ $= 200$Н/см. Определить, какая работа совершена силой тяжести и силой упругости пружины при ее сжатии на 2 см. В момент касания тележки буфера пружина находилась в свободном состоянии. ($A_т = 10$ Дж; $A_у =$ $= -4$ Дж).

4. К валу радиусом $R = 0{,}2$ м ременной передачи приложен вращающий момент $M = 200$ Н·м, сила натяжения ремней $T = 2000$ Н. Определить работу, совершенную действующими силами, когда шкив совершит 10 оборотов, и мощность в момент времени, когда $\omega = 20$ с$^{-1}$. ($A = -12560$ Дж; $N = -4000$ Вт).

5. Цилиндрический каток радиусом $R = 0{,}4$ м и массой $m = 100$ кг приводится в движение силой $T = 1000$ Н. Каток катится по деформируемой поверхности с коэффициентом трения качения $k = 5$см. Определить полную работу и мощность сил, действующих на каток, когда он переместится на $s = 2$ м, а его скорость в этот момент $v = 2$ м/с. ($A =$ $= 3750$ Дж, $N = 3750$ Вт).

6. Блок массой $m = 20$ кг лежит на невесомой нити, один конец которой закреплен неподвижно, а к другому приложена сила $F = 400$ Н. Определить полную работу сил, действующих на блок, когда центр его переместится на расстояние $s = 1$ м. Определить также мощность сил, когда скорость $v_c = 2$ м/с. ($A = 600$ Дж, $N = 1200$ Вт).

В качестве примера решим задачу 6. Полную работу сил находим как алгебраическую сумму работ от каждой силы:

$$A = A(F) + A(mg) + A(T)\,.$$

Так как силы постоянны, то работу от каждой из них определяем по формуле (8.2):

$$A = Fs_A + mgs_C + Ts_B\,.$$

Здесь s_A, s_C, s_B – перемещения точек блока, к которым приложены соответствующие силы. Так как блок совершает плоское движение, катится по вертикальной нити, то его мгновенный центр вращения (скоростей) находится в точке B. Следовательно, $s_B = 0$, $s_A = 2s_C$.

Тогда имеем $A = F2s_C - mgs_C = 400\cdot2\cdot1 - 20\cdot10\cdot1 = 600$ Н·м.

Аналогично определяем и полную мощность сил, действующих на блок:

$$N = Fv_A - mgv_C + Tv_B = F2v_C - mgv_C = 400\cdot2\cdot2 - 20\cdot10\cdot2 = 1200 \text{ Вт.}$$

8.3. Определение кинетической энергии

Кинетическая энергия является мерой механического движения. Для материальной точки массой m, движущейся со скоростью v, она равна половине произведения массы точки на квадрат скорости ее движения:

$$T = mv^2/2. \tag{8.8}$$

Для механической системы кинетическую энергию можно определять двумя способами.

Первый способ. На основании теоремы *Кёнига*: **кинетическая энергия системы в абсолютном движении равна сумме кинетической энергии при ее поступательном движении со скоростью центра масс, если в нем сосредоточить всю массу системы, и кинетической энергии системы в ее движении относительно центра масс:**

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m_k v_{kc}^2. \tag{8.9}$$

Здесь $\sum m_k v_{kc}^2/2$ – кинетическая энергия системы в ее движении относительно центра масс.

Однако такой способ определения кинетической энергии не всегда удобен, так как он предполагает знание скорости центра масс системы и скоростей движения ее точек относительно центра масс. На практике более удобным является определение кинетической энергии системы как арифметической суммы кинетических энергий тел, входящих в нее (**второй способ**):

$$T = T_1 + T_2 + \ldots + T_n = \sum T_k. \tag{8.10}$$

Кинетическая энергия тел определяется в зависимости от вида их движения. При поступательном движении кинетическая энергия тела определяется, как для материальной точки – с помощью равенства (8.8).

При вращении тела вокруг неподвижной оси z

$$T = J_z\omega^2/2, \tag{8.11}$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения;

ω – угловая скорость вращения.

При плоском движении

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{1}{2}J_c\omega^2, \tag{8.12}$$

где v_c – скорость центра масс тела;

J_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс.

Задание 5. В целях приобретения навыков определите кинетическую энергию тел и механических систем, изображенных на рис.20. Необходимые условия приведены ниже.

1. Однородный диск массой m =10 кг вращается с угловой скоростью ω =100 c^{-1}. Радиус диска R =0,2 м. Вычислить значение кинетической энергии диска. (1000 Дж).

Сохраняя условие задачи, подсчитать кинетическую энергию тонкого кольца. (2000 Дж).

2. Однородный диск массой 100 кг катится по горизонтальному пути без скольжения со скоростью (скорость центра диска) v_c = 20 м/с. Вычислить значение кинетической энергии диска. (30000 Дж).

Сохраняя условие задачи, подсчитать кинетическую энергию тонкого кольца. (40000 Дж).

3. В четырехзвеннике OABD звено OA вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω =20 c^{-1}. OA = BD = 0,1 м. Вычислить кинетическую энергию четырехзвенника, если массы звеньев: $m_{OA} = m_{DB}$ = 30 кг, m_{AB} = 80 кг. (200 Дж).

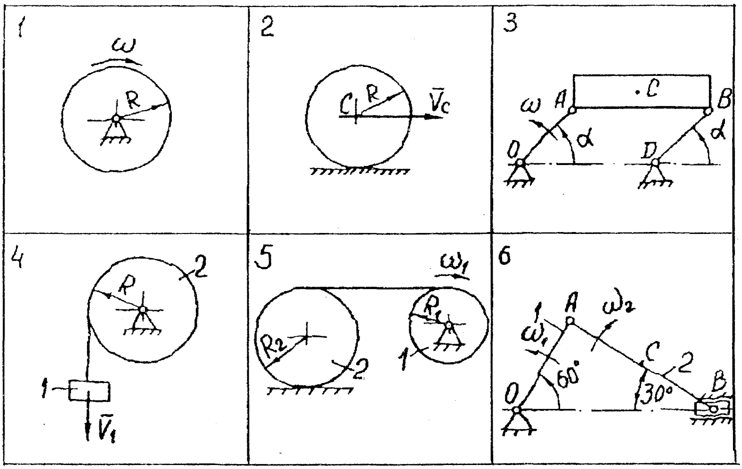


Рис. 20.

4. На однородный шкив массой m_1 = 10 кг и радиусом R = 0,5 м, вращающийся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω = 4 c^{-1}, намотана нить, к концу которой подвешен груз массой m_1=20 кг. Определить кинетическую энергию системы. Массой троса пренебречь. (50 Дж).

5. Диск массой m_1 = 10 кг и радиусом R_1 = 0,1 м вращается с угловой скоростью ω_1 = 20 c^{-1}. С помощью троса он перемещает цилиндр массой m_2 = 80 кг и радиусом R_2 = 0,5 м. Цилиндр катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Определить кинетическую энергию системы. Диск и цилиндр считать сплошными однородными телами. (70 Дж).

6. Кривошипно-шатунный механизм движется в вертикальной плоскости. В положении, указанном на чертеже, угловая скорость кривошипа ОА – $\omega_1 = 30\ c^{-1}$, угловая скорость шатуна АВ – $\omega_2 = 10\ c^{-1}$, скорость центра масс шатуна $v_c = 3{,}1$ м/с. Вычислить кинетическую энергию механизма, если масса кривошипа $m_1 = 6$ кг, масса шатуна $m_2 = 18$ кг, ОА = 0,1 м. Кривошип и шатун считать однородными стержнями. (97.65 Дж).

В качестве примера определим кинетическую энергию механизма схемы 6 (рис.20). Так как масса ползуна не задана, считаем, что она мала и пренебрегаем ей. Тогда кинетическую энергию механизма находим как сумму кинетических энергий кривошипа *1* и шатуна *2*, $T = T_1 + T_2$.

Кинетическая энергия вращающегося кривошипа $T_1 = J_{10}\omega_1^2/2$.

Момент инерции кривошипа (стержня) относительно его конца $J_{10} = m_1 l_1^2/3 = 6 \cdot 0{,}1^2/3 = 0{,}02$ кг·м^2.

Следовательно, $T_1 = 0{,}02 \cdot 30^2/2 = 9$ кг·м^2/с^2 = 9 Дж.

Кинетическая энергия шатуна *2*, совершающего плоское движение,

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{1}{2}J_c\omega^2 .$$

Момент инерции шатуна (однородного стержня) относительно его центра тяжести $J_c = m_2 l_2^2/12$.

Длину l_2 шатуна находим из треугольника ОАВ, l_2ОАtg60°=0.1·1,73 = 0,17 м. Тогда $J_c = 18 \cdot 0{,}17^2/12 = 0{,}043$ кг·м^2.

Следовательно, $T_2 = 18 \cdot 3{,}1^2/2 + 0{,}043 \cdot 10^2/2 = 88{,}65$ Дж.

Окончательно для механизма получаем Т = 9+88,65 = 97.65 Дж.

8.4. Формы теоремы об изменении кинетической энергии и основные выводы

Изучение теоремы об изменении кинетической энергии целесообразнее начинать для механической системы. Для материальной точки она может быть получена как частный случай движения системы.

В учебной литературе приводятся две формы теоремы – дифференциальная и конечная (интегральная). Дифференциальная форма теоремы устанавливает непосредственную связь между быстротой изменения (приращением) кинетической энергии системы и мощностью сил, действующих на ее тела.

Сущность её в следующем: **производная по времени от кинетической энергии механической системы равна сумме мощностей всех внешних $\sum N_k^e$ и внутренних $\sum N_k^i$ сил:**

$$\frac{dT}{dt}=\sum N_k^e+\sum N_k^i. \qquad (8.13)$$

Конечная форма теоремы устанавливает непосредственную связь между перемещениями точек или тел системы и их начальными и конечными скоростями. Формулируется она следующим образом: **разность между кинетической энергией механической системы в конце и в начале ее движения равна сумме работ всех внешних $\sum A_k^e$ и внутренних $\sum A_k^i$ сил, действующих на её тела:**

$$T-T_0=\sum A_k^e+\sum A_k^i. \qquad (8.14)$$

При изучении теоремы необходимо уяснить следующие основные её особенности:

1. В отличие от других общих теорем динамики механической системы теорема включает внутренние силы. Поэтому, если система изменяемая, или внутренние связи неидеальны, то в выражения работы или мощности необходимо включать работу и мощность внутренних сил и сил реакций неидеальных связей;

2. Теорема об изменении кинетической энергии в обеих формах описывает любое движение тела и системы. Поэтому она является наиболее универсальной по сравнению с другими общими теоремами динамики;

3. Дифференциальную форму теоремы целесообразно применять для нахождения ускорений точек и тел или же составления дифференциальных уравнений движения системы. Число получаемых при этом дифференциальных уравнений соответствует числу независимых переменных (координат), полностью определяющих положение всех точек системы. В свою очередь число независимых переменных соответствует числу независимых движений, которые могут совершать её тела, т.е. числу степеней свободы системы;

4. Конечную форму теоремы целесообразно применять, когда в число данных входят перемещения и скорости в начале и конце этого перемещения;

5. При применении теоремы механическую систему нецелесообразно расчленять на части.

8.5. Применение теоремы к решению задач

Двум формам теоремы об изменении кинетической энергии соответствуют два основных типа задач, решаемых с ее помощью. Первый тип представляют задачи на определение ускорений тел или точек системы или получения ее дифференциальных уравнений движения. Ко второму типу относятся задачи, в которых необходимо определить зависимость между конечным перемещением какого-либо тела или его точки и скоростями по концам этого перемещения.

Независимо от типа решаемой задачи рекомендуется поступать следующим образом:

1. Выбрать тело или систему тел, движение которых необходимо рассмотреть;

2. Установить направление движения тел, входящих в систему и число независимых движений, которые совершают тела системы;

3. Изобразить тела системы в положении, соответствующем произвольному моменту времени;

4. Освободить систему от связей, заменив их действие силами реакций, и приложить все активные силы;

5. Определить кинетическую энергию системы. Выразить скорости всех точек и тел, входящих в уравнение, через скорости точек или тел, ускорения (скорости) которых надо найти. При применении дифференциальной формы теоремы взять производную по времени от полученного выражения кинетической энергии системы;

6. Вычислить сумму мощностей (работ) всех внешних сил. Выразить все скорости (перемещения), входящие в полученное уравнение, через скорости (перемещения), которые необходимо определить;

7. Подставить полученные результаты в уравнения (8.13) или (8.14) и решить их относительно неизвестных величин.

Рассмотрим приведенную методику на конкретном примере.

Пример 8. Пустотелый цилиндр (рис.21) массой m_1 = 50 кг и радиусом r_1 = 0,4 м расположен на деформируемой наклонной плоскости. Цилиндр обмотан нерастяжимым тросом, второй конец которого закреплен на сплошном однородном барабане массой m_2 = 10 кг и радиусом r_2 = 0,2 м. Коэффициент трения качения цилиндра о наклонную плоскость k = 0,04 м. В начальный момент времени барабан заторможен и цилиндр находится в покое. Затем выключили тормоз и к барабану приложили постоянный вращающий момент $M_{дв}$ = 40 Н·м, достаточный для подъема цилиндра (включили электродвигатель).

Определить, пренебрегая массой троса и трением в подшипниках, время разгона цилиндра до скорости v_1 = 1 м/с, а также перемещение его центра тяжести за указанное время.

В рассматриваемой задаче необходимо найти зависимость между скоростью, временем и перемещением. Это можно получить только зная ускорение. Поэтому воспользуемся теоремой в дифференциальной форме:

$$\frac{dT}{dt} = \sum N_k^e + \sum N_k^i.$$

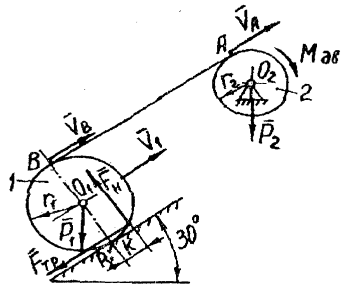


Рис. 21.

Решение. 1. Рассмотрим движение всей системы в целом. При таком выборе сила взаимодействия цилиндра и барабана (натяжение троса) будет внутренней, а так как трос жесткий, то она работы совершать не будет. В данном случае система неизменяемая, так как состоит из твердых тел.

2. Принимаем в качестве положительного вращение барабана *2* в направлении $M_{дв}$.

3. Изображаем систему в положении, соответствующем произвольному моменту времени (на рис. 21 это изображено).

4. Освобождаем систему от связей. Действие наклонной негладкой деформируемой плоскости заменяем нормальной силой $F_н$ и силой трения скольжения $F_{тр}$. Так как поверхность деформируемая, то нормальную реакцию необходимо сместить вперед по ходу движения на величину k – коэффициента трения качения. Реакции подшипников барабана показывать не будем, так как их мощность равна нулю, точка O_2 неподвижна.

Из активных внешних сил на тела действуют силы тяжести P_1 и P_2 и постоянный вращающий момент $M_{дв}$. Так как система неизменяемая, то работа внутренних сил равна нулю.

5. Определяем кинетическую энергию системы:

$$T = T_1 + T_2,$$

где T_1 – кинетическая энергия цилиндра;

T_2 – кинетическая энергия барабана.

Кинетическую энергию цилиндра определяем из условия, что он совершает плоскопараллельное движение:

$$T_1 = m_1 v_1^2/2 + J_1\omega_1^2/2,$$

где v_1 – скорость центра тяжести цилиндра;

J_1 – момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через его центр тяжести;

ω_1 – угловая скорость цилиндра, $\omega_1 = v_1/r_1$.

Момент инерции цилиндра определяем как для однородного кольца:

$$J_1 = m_1 r_1^2 .$$

Тогда (с учетом сказанного для T_1) получаем

$$T_1 = m_1 v_1^2 = 50 v_1^2 .$$

Кинетическую энергию барабана, совершающего вращательное движение, определяем по формуле

$$T_2 = J_2 \omega_2 / 2 .$$

Момент инерции барабана как сплошного диска

$$J_2 = m_2 r_2^2 / 2 .$$

Угловую скорость барабана выражаем через линейную скорость центра цилиндра следующим образом. Определяем скорость точки A:

$$v_A = \omega_2 r_2 .$$

Мгновенный центр скоростей P_v катящегося без скольжения цилиндра находится в точке касания его с плоскостью. Тогда $v_B/BP_v = v_1/O_1P_v$.

Так как $v_B = v_A$, $BP_v = 2r_1$, $O_1P_v = r_1$, то $\omega_2 = 2v_1/r_2$. Следовательно, кинетическая энергия барабана

$$T_2 = 4m_2 r_2^2 v_1^2 / 4r_2^2 = 10 v_1^2.$$

Полная же кинетическая энергия системы

$$T = 50v_1^2 + 10v_1^2 = 60v_1^2 .$$

Дифференцируя кинетическую энергию по времени, получаем

$$\frac{d(60v_1^2)}{dt} = 120 v_1 a_1 . \qquad (A)$$

6. Определяем полную мощность сил, действующих на систему, как алгебраическую сумму мощностей от каждой силы. Так как скорости точек O_2 и P_v равны нулю, то и мощность от сил P_2, $F_{тр}$ также равна нулю. Мощность же создают только силы P_1, $F_н$ и $M_{дв}$. Определяем их мощность: $N_1 = -m_1 g v_1 \sin 30° = -250v_1$; $N_2 = M_{дв}\omega_2 = 40\omega_2$;

$$N_3 = -F_н k \omega_1 = -0{,}04\ F_н \omega_1 .$$

Выражаем угловые скорости ω_1 и ω_2 через v_1:

$$\omega_1 = v_1/r_1 = 0{,}25v_1;\ \omega_2 = 2v_1/r_2 = 10v_1 .$$

Учитывая, что $F_н = m_1 g \cos 30° = 435$ Н, получаем:

$$N_2 = 40 \cdot 10 v_1 = 400 v_1;\ \ N_3 = -0{,}04 \cdot 435 \cdot 2{,}54 v_1 = -43{,}5 v_1 .$$

Тогда полная мощность сил

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = -250v_1 + 400v_1 - 43{,}5v_1 = 106{,}5v_1 . \qquad (B)$$

Подставим (A) и (B) в исходное уравнение:

$$120 v_1 a_1 = 106{,}5 v_1 .$$

Отсюда $a_1 = 0{,}89$ м/с^2 .

Ускорение постоянное. Следовательно, движение тел системы равноускоренное. При равноускоренном движении и при условии, что цилиндр в начальный момент времени неподвижен ($v_{01} = 0$), имеем $v_1 = a_1 t$. Отсюда получаем $t = v_1/a_1 = 1/0{,}89 = 1{,}12$ с.

Перемещение определяем также из условий равноускоренного движения с учетом начальных условий:

$$s = a_1 t^2/2 = 0{,}89 \cdot 1{,}12^2/2 = 0{,}56 \text{ м}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется работа постоянной силы на конечном перемещении?

2. Как определяется работа переменной силы на конечном перемещении?

3. Можно ли определить работу переменной силы, зависящей от времени или скорости?

4. Как определяется мощность силы?

5. Назовите единицы измерения работы и мощности сил.

6. В каких случаях работа и мощность силы положительны, а в каких – отрицательны?

7. Как определяются работа и мощность от момента силы (пары сил)?

8. Напишите формулы определения работы силы тяжести и силы упругости.

9. В каких случаях работа силы упругости положительна, а в каких – отрицательна?

10. Как определяются полная работа и мощность системы сил, действующих на твердое тело?

11. В чем состоит сущность теоремы Кёнига для кинетической энергии механической системы?

12. Как практически целесообразнее определять кинетическую энергию механической системы?

13. Как вычисляется кинетическая энергия твердого тела при его поступательном, вращательном и плоскопараллельном движениях?

14. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме.

15. Назовите основные критерии, по которым можно судить о целесообразности применения дифференциальной формы теоремы к решению задач.

16. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии системы в конечной (интегральной) форме.

17. По каким критериям можно судить о целесообразности применения конечной формы теоремы к решению задач?

18. В каких случаях работа и мощность внутренних сил, действующих в системе, равны нулю?

19. Какое движение тела по виду можно описать с помощью теоремы об изменении кинетической энергии?

20. Как целесообразнее поступать при решении задач: расчленять или не расчленять систему на части?

9. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА. МЕТОД КИНЕТОСТАТИКИ

9.1. Принцип Даламбера для материальной точки. Сила инерции

Подробно изучить вопрос можно в учебной литературе: [1, §16]; [2, гл. 1, §2]; [3, §106].

Принцип Даламбера для материальной точки можно получить, воспользовавшись вторым законом динамики. Для несвободной материальной точки массой m, движущейся с ускорением a, под действием активной силы F можно записать

$$m\overline{a} = \overline{F} + \overline{R}, \tag{9.1}$$

где $\overline{R}$ – сила реакции связи.

Так как $m\overline{a}$ имеет размерность силы, то, поступая формально, выражение (9.1) перепишем в следующем виде:

$$\overline{F} + \overline{R} + (-m\overline{a}) = 0.$$

Произведение $(-m\overline{a})$ обозначают буквой $\overline{\Phi}$ и называют силой инерции. Тогда окончательно получаем

$$\overline{F} + \overline{R} + \overline{\Phi} = 0. \tag{9.2}$$

Уравнение (9.2) выражает собой принцип Даламбера для несвободной материальной точки, который формулируется следующим образом: **если в любой момент времени к материальной точке наряду с активной силой и силой реакции связи условно приложить силу инерции, то геометрическая сумма этих сил равна нулю.**

Из сказанного следует, что сила инерции материальной точки при ее движении как бы «уравновешивает» активную силу и силу реакции связи. И действительно, уравнение (9.2) по форме аналогично уравнению равновесия системы сходящихся сил в статике. Однако отмеченное равновесие условное, так как в действительности сила инерции к точке не приложена. Она приложена к телу, которое сообщает точке ускорение.

Итак, сила инерции является силой действия материальной точки на тело, сообщающее ей ускорение. По величине сила инерции равна массе материальной точки, умноженной на ее ускорение, а вектор (рис. 22,а) силы инерции всегда направлен в сторону, противоположную вектору ускорения.

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}.$$

Если точка движется по заданной криволинейной траектории, то ее ускорение удобнее определять как сумму двух слагаемых – нормального $\bar{a}^n$ и касательного $\bar{a}^\tau$. Тогда и силу инерции также необходимо представить в виде двух составляющих (рис.22,б) – нормальной $\bar{\Phi}^n = -m\bar{a}^n$ и касательной $\bar{\Phi}^\tau = -m\bar{a}^\tau$. Направляют эти векторы противоположно векторам соответствующих ускорений.

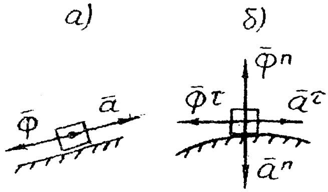


Рис. 22.

Следует иметь в виду, что введение силы инерции и, как результат, получение уравнения (9.2), аналогичного уравнению равновесия, не сводит динамический характер движения к статическому. При ускоренном движении материальной точки равновесия ее не может быть. Такой прием позволяет лишь записать уравнения динамики в форме уравнений статики. А это, в свою очередь, дает возможность формально решать задачи динамики методами статики. Рассмотрим сказанное на примере.

Пример 9. Ленточный транспортер (рис. 23), наклоненный под углом α к горизонту, используется для загрузки зерна. Определить минимальную угловую скорость вращения ведущего шкива радиуса R, при которой частица зерна массой m отделяется от ленты в месте набегания ленты на шкив.

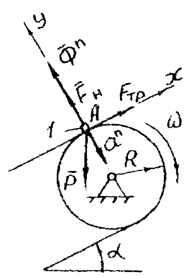


Рис. 23.

Решение. 1. Рассматриваем движение частицы зерна, изобразив ее в точке A набегания ленты барабана.

2. Освобождаем частицу от связи (ленты) и прикладываем к ней реакции: нормальную $\overline{F}_н$ и силу трения $\overline{F}_{тр}$. Из активных сил на частицу действует сила тяжести $\overline{P}$.

3. Прикладываем силы инерции к частице. Так как угловая скорость шкива постоянна, то в точке начала перегиба ленты частица имеет только нормальное ускорение $\overline{a}^n$, поэтому к частице прикладываем только нормальную силу инерции $\overline{\Phi}^n$, направив ее противоположно ускорению.

4. Выбираем оси координат, как показано на рисунке.

5. Так как отрыв частицы произойдет в направлении оси y, то составляем уравнение проекций всех сил на эту ось.

$$\Sigma F_y = 0, \; F_н + \Phi^n - P\cos\alpha = 0,$$

где $\Phi^n = ma^n = m\omega^2 R$.

В момент отделения частицы от ленты нормальная реакция $F_н=0$. Следовательно, с учетом сказанного, уравнение примет вид:

$$m\omega^2 R - mg\cos\alpha = 0.$$

Отсюда находим

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}\cos\alpha}\,.$$

Из полученного результата вытекает вывод: скорость, необходимая для отрыва частицы, не зависит от ее массы, т.е. при вращении шкива с полученной угловой скоростью частица любой массы будет отрываться в точке набегания ленты на шкив.

9.2. Принцип Даламбера для механической системы (метод кинетостатики)

Вопрос достаточно полно изложен в учебной литературе:[1, §166, 168]; [2, гл. 5, §1]; [3, §106, 108].

Распространение принципа Даламбера на механическую систему сводится к применению его к каждой материальной точке.

Выделим из системы какую-нибудь материальную точку массой m_k и обозначим равнодействующую всех внешних сил, активных сил и реакций, действующих на нее, – $\overline{F}_k$, а равнодействующую внутренних сил – $\overline{F}_k^i$. Тогда, если к точке приложить силу инерции $\overline{\Phi}_k = -m_k\overline{a}_k$, на основании принципа Даламбера будем иметь

$$\overline{F}_k + \overline{F}_k^i + \overline{\Phi}_k = 0. \qquad (9.3)$$

Число таких уравнений будет соответствовать числу точек системы. Если их n, то k = 1,2, ..., n. Следовательно, для несвободной механической системы принцип Даламбера может быть сформулирован следующим образом: **в любой момент времени геометрическая сумма внешних, внутренних и условно приложенных сил инерции к каждой материальной точке несвободной механической системы равна нулю.**

Однако для практического использования принцип Даламбера в форме (9.3) неудобен из-за большого числа уравнений (по числу точек системы). Более приемлемую форму уравнений можно получить, если системы сил привести к простейшему виду, как это выполнялось в статике.

С учетом сказанного систему уравнений (9.3) можно заменить следующими двумя:

$$\Sigma\overline{F}_k + \Sigma\overline{\Phi}_k = 0;$$
$$\Sigma\overline{M}_0(F_k) + \Sigma\overline{M}_0(\Phi_k) = 0 . \qquad (9.4)$$

Уравнения (9.4) показывают, что в любой момент времени для несвободной механической системы **геометрические суммы внешних (активных и реакций связей) сил и сил инерции равны нулю и геометрические суммы моментов внешних сил и сил инерции относительно любого неподвижного центра также равны нулю.**

Векторным уравнениям (9.4) соответствуют шесть алгебраических уравнений, представляющих собой суммы проекций сил на координатные оси и суммы моментов сил относительно каждой из координатных осей:

$$\Sigma F_{kx} + \Sigma\Phi_{kx} = 0;$$
$$\Sigma F_{ky} + \Sigma\Phi_{ky} = 0;$$
$$\Sigma F_{kz} + \Sigma\Phi_{kz} = 0;$$
$$\Sigma M_x(\overline{F}_k) + \Sigma M_x(\overline{\Phi}_k) = 0; \qquad (9.5)$$
$$\Sigma M_y(\overline{F}_k) + \Sigma M_y(\overline{\Phi}_k) = 0;$$
$$\Sigma M_z(\overline{F}_k) + \Sigma M_z(\overline{\Phi}_k) = 0.$$

Уравнения (9.5) называют основными уравнениями кинетостатики. Метод же решения задач, основанный на их применении, называют методом кинетостатики.

Если активные силы, реакции связей и силы инерции, образуют произвольную плоскую систему сил, то число уравнений (9.5) уменьшится до трех: два уравнения проекций сил на координатные оси и одно уравнение моментов сил относительно любой точки плоскости.

$$\Sigma F_{kx} + \Sigma\Phi_{kx} = 0;$$
$$\Sigma F_{ky} + \Sigma\Phi_{ky} = 0; \qquad (9.6)$$
$$\Sigma M_o(F_k) + \Sigma M_o(\Phi_k) = 0.$$

Уравнения (9.5) или (9.6) по своей форме аналогичны уравнениям равновесия статики. Отсюда и вытекает общность методики решения задач динамики системы на основании принципа Даламбера с методикой решения задач статики.

9.3. Приведение сил инерции точек твердого тела к простейшему виду

Приведение системы сил инерции точек твердого тела к простейшему виду можно выполнять так же, как в статике приводились физические силы к главному вектору и к главному моменту. В динамике в качестве центра приведения сил инерции удобно выбирать центр масс тела. При приведении сил инерции точек твердого тела к центру масс или к любой другой точке O получается главный вектор $\overline{\Phi}_O$, называемый в дальнейшем силой инерции тела, и главный вектор-момент $\overline{M}_O^{и}$, называемый моментом сил инерции относительно центра приведения.

Сила инерции тела определяется как произведение массы тела на ускорение a_c центра масс и направляется всегда в сторону, противоположную вектору ускорения.

$$\overline{\Phi} = -m\overline{a}_c. \qquad (9.7)$$

Величина силы инерции не зависит от центра приведения и всегда равна $\Phi = ma_c$.

Момент сил инерции зависит от центра приведения и равен производной от вектора момента количества движения относительно центра, взятой с обратным знаком.

$$\overline{M}_O^{и} = -\frac{d\overline{K}_O}{dt}. \qquad (9.8)$$

Формулы (9.7) и (9.8) дают общий метод определения сил и моментов сил инерции твердого тела. В частных случаях движения твердого тела его силы инерции определяются более просто. Методика их определения зависит от вида движения тела. Рассмотрим эти случаи при условии приведения сил инерции к центру масс тела.

1. Тело движется поступательно. В этом случае угловая скорость тела равна нулю. Тогда $\overline{K}_C = 0$, а следовательно, и $\overline{M}_C^{и} = 0$. Сила же инерции тела, если оно движется прямолинейно, равна $\Phi = ma_c$ и приложена в центре масс. Если центр масс описывает криволинейную траекторию, то силу инерции удобно представлять в виде двух составляющих – касательной $\Phi^{\tau} = ma_c^{\tau}$ и нормальной $\Phi^{n} = ma_c^{n}$.

Векторы $\overline{\Phi}^{\tau}$ и $\overline{\Phi}^{n}$ направляют противоположно соответствующим ускорениям.

2. Тело вращается с переменной угловой скоростью вокруг неподвижной оси, параллельной оси симметрии и не проходящей через его центр масс. При таком движении (рис.24,а) в центре масс тела необходимо приложить касательную и нормальную силы инерции. Кроме того, так как угловое ускорение $\varepsilon \neq 0$, то необходимо приложить момент сил инерции, равный по модулю

$$M^{и} = I_{xc}\varepsilon, \tag{9.9}$$

где I_{xc} – момент инерции тела относительно оси x, проходящей через центр масс. Направляют $M^{и}$ противоположно угловому ускорению (рис.24,а).

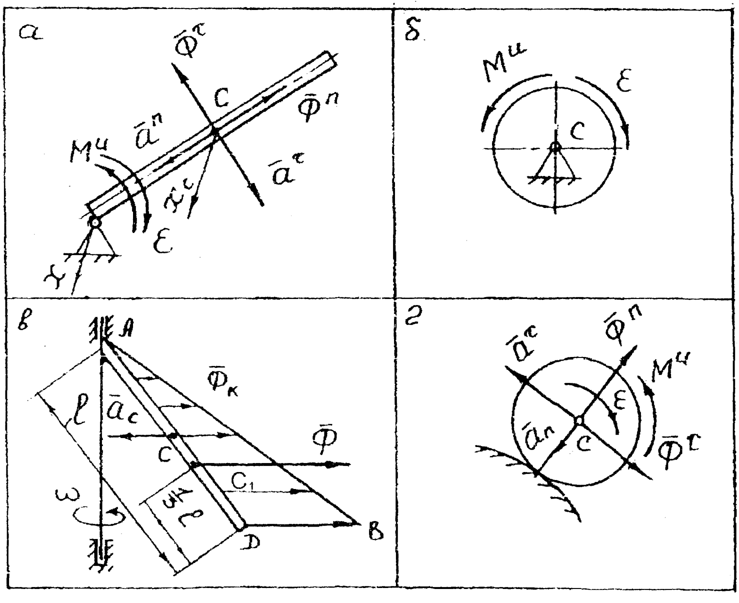


Рис. 24.

3. Тело вращается вокруг оси симметрии, проходящей через центр масс (рис.24, б). К нему необходимо приложить момент сил инерции $M^{и}$, величина которого определяется по формуле (9.9).

Сила инерции в рассматриваемом случае равна нулю, так как ускорение центра масс равно нулю.

4. Однородный стержень равномерно вращается вокруг неподвижной оси (рис.24, в). В этом случае к стержню необходимо приложить

нормальную силу инерции, по величине равную произведению массы стержня на ускорение центра масс. Но линия действия силы должна проходить не через центр масс стержня, а через геометрический центр фигуры, образованной силами инерции точек стержня. В приведенном примере – через центр C_1 треугольника ABD.

Если стержень вращается ускоренно, то к нему надо приложить еще и касательную силу инерции, определяемую по тем же правилам, что и нормальную.

5. Тело движется плоскопараллельно (рис.24,г). При таком движении к нему необходимо приложить силу инерции в центре масс и момент сил инерции. Величины и направления их определяются, как и в случае вращения тела вокруг оси, не проходящей через центр масс.

Из рассмотренных частных случаев видно, что силы инерции сравнительно просто определяются для симметричных тел, а моменты сил инерции – для тел, вращающихся относительно осей, параллельных оси симметрии.

Задание 6. В целях приобретения практических навыков по определению сил инерции тел в случаях простейших движений выполните задание 6, расчетные схемы для которого приведены на рис. 25. Порядковые номера условий к расчетным схемам, приведенные ниже, соответствуют их номерам на рис. 25.

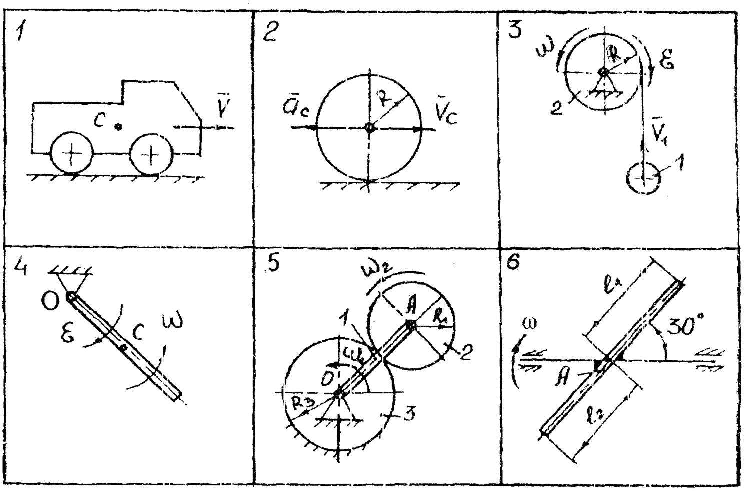


Рис. 25.

1. Автомобиль массой m = 1т в момент торможения движется с замедлением a = 2 м/с^2. Определить величину и показать направление

вектора силы инерции автомобиля. ($\Phi = 2000$ Н, $M^{и} = 0$).

2. Колесо массой $m = 100$ кг и радиусом $R = 0{,}6$ м катится без проскальзывания по ровной поверхности замедленно. Считая колесо сплошным однородным диском, приложить к нему необходимые силы инерции и определить их величины, если $a_c = 2$ м/с^2. ($\Phi = 200$ Н; $M^{и} = 60$ Н·м).

3. Груз массой $m_1 = 100$ кг подвешен на нерастяжимом тросе, второй конец которого намотан на барабан *2* массой $m_2 = 10$ кг и радиусом $R = 0{,}2$ м. Направление вращения барабана показано на рисунке. Массой троса пренебречь, а барабан считать сплошным однородным диском. Приложить к грузу и барабану необходимые силы инерции и определить их величины при условии, что $\varepsilon = 10$ с$^{-2}$. ($M^{и}_2 = 2$ Н·м; $\Phi_1 = 200$ Н; $\Phi_2 = 0$).

4. Однородный стержень массой $m = 12$ кг и длиной $l = 1$ м вращается вокруг горизонтальной оси O так, что в изображенном на схеме положении его угловая скорость и угловое ускорение соответственно равны: $\omega = 10$ с$^{-1}$, $\varepsilon = 10$ с$^{-2}$. Приложить к стержню необходимые силы инерции и определить их величины. ($\Phi^{\tau}_c = 60$ Н; $\Phi^{n}_c = 600$ Н; $M^{и} = 10$ Н·м).

5. Планетарный механизм состоит из кривошипа ОА длиной $l = 0{,}6$м и массой $m_1 = 4$ кг. В точке А кривошип шарнирно соединен с зубчатым колесом *2* массой $m_2 = 3$ кг и радиусом $R_2 = 0{,}2$ м. Колесо *2* может обкатываться по неподвижному колесу *3*. Кривошип вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 100$ с$^{-1}$. Считая кривошип тонким однородным стержнем, а колесо *2* сплошным однородным диском, определить величины и приложить необходимые силы инерции к движущимся телам. ($\Phi^{n}_1 = 8$ кН; $\Phi^{\tau}_1 = 0$; $M^{и}_1 = 0$; $\Phi^{\tau}_2 = 0$; $M^{и}_2 = 0$).

6. Тонкий однородный стержень массой 6 кг жестко прикреплен к горизонтальному валу в точке А. Вал вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 40$ с$^{-1}$. Определить величины и направления сил инерции стержня, если $l_1 = 0{,}2$ м, $l_2 = 0{,}4$ м (так как ускорения частей стержня направлены в разные стороны, то силы инерции необходимо прикладывать к каждой из них). ($\Phi_1 = 320$ Н; $\Phi_2 = 1280$ Н; $M^{и} = 0$).

В качестве примера определим силы инерции звеньев механизма, изображенного на схеме 5 (рис. 25). Так как кривошип *1* равномерно вращается вокруг шарнира *0*, то касательные ускорения всех его точек равные нулю ($\varepsilon_1 = 0$), будут только нормальные ускорения. Следовательно: $\Phi^{\tau}_1 = 0$; $M^{и}_1 = 0$; $\Phi^{n}_1 = m_1 a^{n}_c = m_1\omega^2 l/2 = 4\cdot100^2\cdot0{,}6/2 = 12000$Н.

Сила инерции Φ^{n}_1 должна быть приложена в центре масс кривошипа (на расстоянии $l/2$ от точки 0) и направлена в сторону точки А.

Колесо *2* совершает плоское движение с постоянной угловой скоростью. Так как касательное ускорение точки А равно нулю, то: $\Phi_A^\tau = 0$; $M_2^и = 0$; $\Phi_A^n = m_2 a_A^n = m_2\omega_1^2 l = 3 \cdot 100^2 \cdot 0,6 = 18000$ Н.

9.4. Методика решения задач

Методика решения задач с помощью принципа Даламбера требует расчленения системы на части или отдельные тела. Особенно удобен метод кинетостатики при определении реакций связей.

Решать задачи с помощью принципа Даламбера рекомендуется в такой последовательности.

1. Выбрать тело или механическую систему, движение которых необходимо рассмотреть. Сложные системы целесообразно расчленять на части.

2. Изобразить тело или систему в необходимом положении. Если определяется закон движения или закон изменения каких-то величин в функции времени, то систему необходимо изображать в произвольном промежуточном положении. Если же необходимо определить какие-то параметры (ускорение, скорость, силу и др.) в определенный момент времени, то систему необходимо изображать в положении, соответствующем этому моменту времени. Указать направления осей координат.

3. Освободить выбранное тело или систему тел от связей, заменив их действие силами реакций связей, и приложить активные силы.

4. Установить направление ускорений тел и приложить соответствующие силы инерции к каждому из них.

5. Составить необходимые уравнения кинетостатики в форме (9.5) или (9.6) для системы в целом или для каждого тела, если она расчленялась.

6. Выразить все ускорения точек или тел, входящие в записанные уравнения, через какое-нибудь одно ускорение (как правило, которое задано или требуется определить) и решить полученную систему уравнений относительно неизвестных величин. При этом необходимо иметь в виду, что число неизвестных не должно превышать число уравнений.

Рассмотрим приведенную методику решения задач на конкретном примере.

Пример 10.

Сплошной цилиндр *1* (рис. 26) массой $m_1 = 200$ кг и радиусом $r_1 = 0.4$ м может подниматься вверх по наклонной ($\alpha = 30°$) деформируемой и шероховатой плоскости лебедкой, на барабан *2* которой намотан невесомый трос. Лебедка представляет собой электродвигатель с закрепленным на его валу барабаном радиусом $r_2 = 0,2$ м. Барабан считать сплошным однородным диском массой $m_2 = 50$ кг. В начальный момент времени барабан был заторможен. Затем выключили тормоз и к барабану приложили постоянный вращающий момент $M_{дв}$ (включили электродвигатель).

Пренебрегая трением в подшипниках, определить величину момента двигателя, при которой цилиндр будет катиться без проскальзывания. При этом учесть, что в пределах разгона величина коэффициента трения скольжения f = 0,3, коэффициента трения качения – k = 0,01 м. Найти также давление барабана *2* на подшипники (реакцию точки 0).

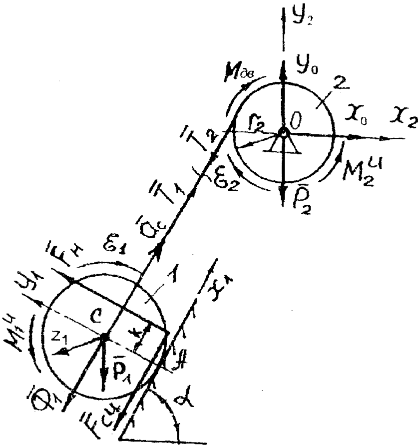


Рис. 26.

Решение. 1. Так как движения барабана и цилиндра взаимосвязаны, то необходимо рассмотреть движение всей системы.

2. Освобождаем выбранную систему от связей, заменяя их действие силами реакций. Связями для системы являются неподвижный шарнир О и шероховатая деформируемая поверхность, по которой катится цилиндр. Реакцию шарнира О заменяем двумя взаимно перпендикулярными составляющими $R_г$ и $R_в$, а реакцию наклонной поверхности – нормальной составляющей $F_Н$, сдвинутой в направлении движения на величину k, и силой сцепления $F_{сц}$.

3. Прикладываем к телам системы активные силы. Из активных сил к барабану приложен момент двигателя $M_{дв}$ и сила тяжести P_2, а к цилиндру – только сила тяжести P_1.

К телам системы, учитывая их вид движения, прикладываем силы инерции. Барабан совершает ускоренное вращательное движение вокруг неподвижной оси О, проходящей через центр масс. Следовательно, к нему приложим только момент сил инерции $M_2^{и}$, направив его в сторону, противоположную угловому ускорению ε_2. Цилиндр движется плоскопараллельно, поэтому к его центру масс приложим силу инерции $\overline{\Phi}_1$, направив в сторону, противоположную ускорению a_c точки C, а также момент сил инерции $M_1^{и}$, направленный в сторону, противоположную ускорению ε_1.

Система сил, приложенных к телам, как бы «уравновешена», поэтому дальнейшее решение задачи выполняем так, как это делалось в статике.

4. Расчленяем систему на две части – барабан и цилиндр – и рассматриваем «равновесие» каждой из них. Расчленение производим мысленным разрезом троса, показав его реакцию как для барабана T_2, так и для цилиндра T_1.

5. Выбираем, как показано на рисунке, оси координат отдельно для барабана и цилиндра и составляем уравнения кинетостатики.

Для барабана:

$$1.\ \Sigma F_{kx_2} = 0,\ x_o - T_2 \cos 30° = 0;$$

$$2.\ \Sigma F_{ky_2} = 0,\ y_o - P_2 - T_2 \sin 30° = 0;$$

$$3.\ \Sigma M_o(F_k) = 0,\ M_{дв} - M_2^{и} - T_2 r_2 = 0.$$

Для цилиндра:

$$4.\ \Sigma F_{kx_1} = 0,\ T_1 - \Phi_1 - P_1 \sin 30° - F_{сц} = 0;$$

$$5.\ \Sigma F_{ky_1} = 0,\ F_н - P_1 \cos 30° = 0;$$

$$6.\ \Sigma M_c(\overline{F}_k) = 0,\ F_{сц} r_1 - F_н k - M_1^{и} = 0.$$

Так как $T_1 = T_2 = T$ – натяжение троса. Силы инерции и моменты сил инерции соответственно равны:

$$\Phi_1 = m_1 a_c = 200\ a_c;\quad M_1^{и} = 0{,}5 m_1 r_1^2\ \varepsilon_1 = 16\ \varepsilon_1;$$

$$M_2^{и} = I_2\varepsilon_2 = 0{,}5 m_2 r_2^2\ \varepsilon_2 = 1\varepsilon_2.$$

6. Ускорения, входящие в записанные равенства, взаимосвязаны и могут быть выражены через одно, например a_c. Так, угловое ускорение цилиндра, катящегося без скольжения, $\varepsilon_1 = a_c / r_1 = 2{,}5a_c$.

Из условия равенства касательного ускорения точки обода барабана *2* ускорению a_c находим $\varepsilon_2 = a_c / r_2 = 5a_c$.

Сила сцепления барабана с поверхностью $F_{сц} = fF_н = 0{,}3\ F_н$.

Учитывая, что $P_1 = m_1 g = 2000$ Н, $P_2 = m_2 g = 500$ Н, и подставив значения всех найденных выше величин в исходные уравнения, получаем:

$$x_o - 0{,}86T = 0;\ y_o = -500 - 0{,}5T = 0;$$
$$M_{дв} - 5a_c - 0{,}2T = 0;\ T - 200a_c - 1000 - 0{,}3F_н = 0;$$

$$F_н - 1720 = 0; \; 0{,}12\,F_н - 0{,}01\,F_н - 40a_c = 0.$$

Решая полученную систему уравнений, находим неизвестные величины. Из пятого уравнения имеем $F_н$ = 1720 Н. Из шестого уравнения определим a_c и, подставив в четвертое, находим Т:

$$a_c = 4{,}73 \text{ м/с}, \quad T = 2462 \text{ Н}.$$

Подставляя полученные значения в первые три уравнения, находим:

$$x_o = 1217 \text{ Н}, \quad y_o = 1231 \text{ Н}, \quad M_{дв} = 516 \text{ Н·м}.$$

Полученное значение момента двигателя при данных условиях задачи является наибольшим, при котором цилиндр будет еще катиться без проскальзывания. Наименьшее же значение момента двигателя, при котором возможно движение цилиндра вверх, можно получить из условия равновесия системы, т.е. когда ас = 0. Тогда из четвертого уравнения имеем Т = 1516 Н, из третьего уравнения – $M_{дв}$ = 303,2 Н·м.

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяются величина и направление силы инерции материальной точки?

2. Какие силы инерции необходимо приложить к твердому телу при поступательном движении; при вращении вокруг оси симметрии, проходящей через центр масс; при вращении вокруг произвольной оси, параллельной оси симметрии; при плоском движении твердого тела?

3. Как определяются величина и направление момента силы инерции вращающегося тела?

4. В чем заключается суть принципа Даламбера для твердого тела и механической системы?

5. Сколько и какие уравнения необходимо составлять при применении принципа Даламбера для плоской произвольной системы сил; для системы сил, расположенных в пространстве?

6. Как поступать с механической системой при применении принципа Даламбера (расчленять или не расчленять на части)?

7. От чего в первую очередь зависят силы инерции тела при его движении?

10. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

10.1. Основные понятия, виды связей

Принцип возможных перемещений дает общий метод решения задач статики. Особенно он эффективен при решении задач о равновесии механических систем, состоящих из большого количества тел. В статике такие системы назывались сочлененными и рассчитывались методом расчленения на отдельные тела. Метод расчленения приводит к необходимости составления и решения большого числа уравнений равновесия. Принцип возможных перемещений позволяет избегать указанных недостатков и облегчает решение задач на равновесие механизмов и машин.

Под свободной механической системой в аналитической механике понимают систему, состоящую из свободных материальных точек или тел, движение которых не ограничено связями. Примером свободной механической системы является солнечная система, так как все ее планеты движутся только под действием сил тяготения.

Если на движение точек системы наложены какие-то ограничения (связи), то она является несвободной. Примером несвободной механической системы является любой механизм, тела которого связаны между собой.

Силы в аналитической механике, как и в статике, классифицируются на активные и реакций связей. Понятие «связь» также более расширено, чем в статике. Под связью следует понимать любое ограничение, исключающее свободу перемещения точек системы. Конструктивно ограничения (связи) реализуются в виде опорных поверхностей, направляющих, подшипников, стержней, нитей и др.

Различают связи геометрические и кинематические, стационарные и нестационарные. Из перечисленных видов связей наиболее широкое распространение в технике имеют геометрические стационарные (неподвижные) связи.

10.2. Обобщенные координаты, число степеней свободы

В аналитической механике для определения положения механической системы вместо декартовых или других координат, обусловленных системами отсчета, используются обобщенные q координаты. В качестве обобщенных координат используются любые независимые параметры, однозначно определяющие положение системы. Ими могут быть: линейные размеры, угловые величины, декартовы координаты, площади и др.

Практически мы уже неоднократно пользовались обобщенными координатами. Так, положение вращающего тела определяли углом его поворота ($q = \varphi$), положение свободного тела, совершающего плоское движение, определялось двумя декартовыми координатами полюса – центра масс и углом поворота тела ($q_1 = x_c$; $q_2 = y_c$; $q_3 = \varphi$).

Число независимых обобщенных координат механической системы с геометрическими стационарными связями, однозначно определяющих ее положение, называют *числом степеней свободы*. Число степеней свободы механической системы зависит от количества и вида связей, накладываемых на ее тела. Связи, как правило, ограничивают степень свободы (подвижности) тела.

Большинство механизмов, встречающихся в практике, имеет одну степень свободы.

Механизмы с двумя степенями свободы и более встречаются гораздо реже. В качестве примера механизма с двумя степенями свободы можно привести дифференциальные механизмы приводов ведущих колес тракторов и автомобилей, а также центробежные регуляторы двигателей.

Более чем одну степень свободы могут иметь отдельные точки или тела. Например, материальная точка на плоскости имеет две степени свободы, так как однозначно задать ее положение можно с помощью двух независимых декартовых или полярных координат. Свободная материальная точка имеет три степени свободы. Свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы. Для определения его положения в пространстве необходимо задать положение какой-нибудь его точки (например, центра масс) тремя координатами, а положение тела по отношению к этой точке – тремя углами поворота.

Так как большинство механизмов и систем имеют одну-две степени свободы, то их число рекомендуется определять физическим методом. Сущность его заключается в следующем. Мысленно закрепляется одно из тел механической системы, совершающее простейшее движение (поступательное или вращательное). Этим исключается одна подвижность (обобщенная координата). Если при этом система станет неподвижной (жесткой), то она имеет одну степень свободы, если нет, то более чем одну. Чтобы установить, сколько именно, необходимо закрепить еще одно тело (исключить еще одну простейшую подвижность). Если система станет неподвижной после исключения двух движений, то она будет иметь две степени свободы и т. д. При таком подходе к определению числа степеней свободы необходимо иметь в виду, что проверка подвижности системы при закреплении ее точек или тел не должна сопровождаться нарушением связей, особенно если ими являются нити или опорные поверхности. Нити не должны сминаться, а тело покидать поверхность.

10.3. Возможные перемещения

В аналитической механике вместо действительных $d\bar{r}$ перемещений точек механической системы, происходящих под действием сил, рассматривают возможные перемещения $\delta\bar{r}$, часто называемые вариациями.

Возможными перемещениями (вариациями) $\delta\bar{r}$ точек механической системы называют всякие воображаемые малые перемещения, допускаемые связями в данный фиксированный момент времени. Иначе говоря, это перемещения точек системы, которые имели бы место в начальный момент времени, если бы система начала двигаться.

Из самого понятия возможных перемещений вытекают следующие их особенности:

1) они являются бесконечно малыми величинами;

2) так как это воображаемые малые перемещения, которые могли бы произойти в данный момент времени, то они не меняют начальную конфигурацию (геометрию) механической системы;

3) они не должны приводить к нарушению связей, а могут произойти только по направлениям, допускаемым связями;

4) возможные перемешения не зависят от действующих на систему сил.

Итак, возможные перемещения – это перемещения, которые допускают связи, точнее – это возможные движения точки по связи. Например, для ползуна В в кривошипно-шатунном механизме (рис. 27) возможно перемещение $\overline{\delta S}$ может быть как влево, так и вправо. Действительным его перемещением при вращении кривошипа против хода часовой стрелки будет являться $\overline{dS}$. Аналогично и для вращающего кривошипа действительное перемещение $d\varphi$, возможные – $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$. Как видим, действительное перемещение в данном случае совпадает с одним из возможных. Это имеет место, если связь, наложенная на точку, стационарна (неподвижна).

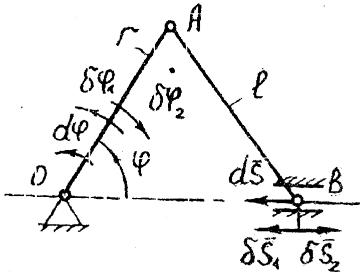


Рис. 27.

Практическое определение возможных перемещений точек тел, входящих в механическую систему, аналогично методике определения действительных перемещений и зависит, прежде всего, от вида возможного движения тела.

При вращательном движении тела:

1) возможные перемещения точек тела перпендикулярны линиям, представляющим собой расстояния от точек до оси вращения (рис.28,

кривошип ОА и коромысло O_1B);

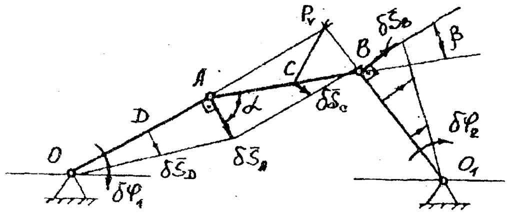


Рис. 28.

2) величины возможных перемещений точек тела пропорциональны расстояниям от точек до оси вращения $\delta S_A / AO = \delta S_D / DO$;

3) связь между угловыми возможными перемещениями тела и линейными перемещениями его точек аналогична, как и для действительных перемещений, а именно: $\delta S_A = \delta\varphi_1 AO$; $\delta S_D = \delta\varphi_1 DO$ и т. д.

При плоскопараллельном движении тела необходимо руководствоваться следующим:

1) возможные перемещения точек тела пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра вращения, который совпадает с мгновенным центром скоростей P_v (рис. 28, шатун АВ):

$$\frac{\delta S_A}{AP_v} = \frac{\delta S_C}{CP_v} = \ldots = \frac{\delta S_B}{BP_v};$$

2) проекции возможных перемещений точек тела на линию, их соединяющую, равны между собой:

$$\delta S_A \cos\alpha = \delta S_C \cos\gamma = \ldots = \delta S_B \cos\beta.$$

Механическая система может иметь сколь угодно большое число точек, а следовательно, и возможных перемещений. Причем возможные перемещения одних точек могут быть зависимыми от других, выражаться через них. Число независимых возможных перемещений равно числу независимых обобщенных координат, по которым, как указывалось ранее, определяется число степеней свободы системы. Следовательно, число независимых возможных перемещений точек механической системы определяет также ее число степеней свободы.

10.4. Работа силы на возможном перемещении. Идеальные связи

Определение элементарной работы силы на возможном перемещении производится исходя из предпосылки, что это перемещение произошло. Тогда элементарная работа силы определяется, как и на действительном перемещении:

$$\delta A_k = F_k \cdot \delta r_k \cdot \cos(\overline{F}_k, \delta\overline{r}_k). \qquad (10.1)$$

Следовательно, элементарная работа силы на возможном перемещении равна произведению величины силы на величину возможного перемещения точки, к которой она приложена, и на косинус угла между направлением векторов силы и перемещения.

Если положение точки задано в координатной форме, то вектор силы и вектор возможного перемещения целесообразно представлять в виде разложения по осям:

$$\overline{F} = F_x \cdot \tau + F_y \cdot \overline{j} + F_z \cdot \overline{k}; \ \delta\overline{r} = \delta x \cdot \overline{i} + \delta y \cdot \overline{j} + \delta z \cdot \overline{k}$$

Тогда элементарную работу силы определяют следующим образом:

$$\delta A = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z. \qquad (10.2)$$

Все особенности определения элементарной работы силы на действительном перемещении, установленные при рассмотрении теоремы об изменении кинетической энергии, остаются в силе и в случае возможных перемещений.

Связи называются идеальными, если сумма работ их реакций на любом возможном перемещении точек системы равна нулю:

$$\Sigma R_k \cdot \delta r_k \cdot \cos = 0. \qquad (10.3)$$

Условие (10.3) есть общий оценочный критерий идеальности связей. Практически это связи, трением которых можно пренебречь. Это хорошо смазанные подшипники и поверхности скольжения, гибкие нерастяжимые нити, стержни с идеальными шарнирами, идеально гладкие поверхности. Особенностью таких связей является то, что их силы реакции перпендикулярны возможным перемещениям точек приложения.

10.5. Принцип возможных перемещений

Сущность принципа заключается в следующем: **для равновесия механической системы с геометрическими, стационарными идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил, приложенных к точкам системы на любом возможном перемещении из рассматриваемого положения, равнялась нулю.**

$$\Sigma\delta A_k = \Sigma F_k \cdot \delta S_k \cdot \cos(\overline{F}_k, \widehat{\delta\overline{s}_k}) = 0. \qquad (10.4)$$

Равенство (10.4) представляет собой новую, по сравнению со статикой, форму условий равновесия механической системы с идеальными связями. Принцип одинаково удобен как при рассмотрении равновесия одного тела, так и системы тел – различных механизмов и машин. Он не требует расчленения системы на части. Во-вторых, количество уравнений равновесия вида (10.4) равно числу степеней свободы системы, а следовательно, и числу независимых обобщенных координат, и не зависит от количества тел. В-третьих, реакции идеальных связей не входят в уравнения равновесия, что облегчает определение активных сил, действующих на механическую систему.

Из приведенной формулировки принципа может возникнуть мнение об ограниченности его возможностей лишь механическими системами с идеальными связями, связями без трения. Однако и при наличии в системе связей с трением можно применять принцип возможных перемещений. Для этого достаточно **силы трения отнести к активным силам** и определять их работу на возможных перемещениях соответствующих точек.

Математической форме записи принципа возможных перемещений (10.4) можно придать и другую структуру. Если учесть, что при геометрических стационарных связях действительное перемещение точки совпадает с одним из возможных, то, поступая формально, разделив последнее на малую величину времени δt, получим векторную величину возможной скорости точки:

$$\overline{v}'_k = \delta S_k / \delta t .$$

Для возможного перемещения, совпадающего с действительным, вектор $\overline{v}'_k$ совпадает с вектором действительной скорости точки и вектором $\overline{\delta S_k}$.

Разделив равенство (10.4) на δt, получаем

$$\Sigma N'_k = \Sigma F_k \cdot v'_k \cdot \cos(\overline{F}_k, \overline{v}'_k) = 0. \qquad (10.5)$$

Равенство (10.5) представляет собой запись принципа возможных перемещений в форме возможных мощностей, поэтому в специальной литературе его называют принципом возможных скоростей. По содержанию он аналогичен принципу возможных перемещений, однако по структуре отличается от последнего. Величина возможной скорости не является бесконечно малой и при решении задач для случая геометрических стационарных связей может заменяться действительной скоростью точки. Оперирование же скоростями при решении задач более привычно, чем бесконечно малыми возможными перемещениями.

10.6. Применение принципа возможных перемещений к решению задач

Трудоемкость решения задач с помощью принципа возможных перемещений зависит от числа степеней свободы системы. Поэтому прежде всего необходимо одним из указанных ранее способов определить число степеней свободы механической системы. Рекомендуется следующий порядок решения задач.

1. Выбрать тело или систему тел, равновесие которых необходимо

рассмотреть. При этом расчленять систему на части нет необходимости, так как при расчленении появятся внутренние силы – силы взаимодействия тел между собой, которые неизвестны.

2. Освободить систему от внешних неидеальных связей, если такие есть, и заменить их действие силами реакций. Это, как правило, силы трения, а иногда и силы упругости пружин. От идеальных связей освобождать систему не имеет смысла, так как их реакции работы не совершают.

3. Сообщить какой-нибудь точке или телу, совершающему простейшее движение (поступательное или вращательное) возможное перемещение (скорость). Далее показать на схеме возможные перемещения (скорости) всех точек системы, к которым приложены силы, а также точек связи тел между собой.

4. Вычислить элементарную работу всех сил, действующих на систему на возможных перемещениях, и составить уравнения по форме (10.4) или (10.5).

5. Выразить возможные перемещения (скорости) всех точек системы, входящих в уравнение, через какое-нибудь одно принимаемое в качестве независимого, и подставить полученные результаты в уравнение работ сил. В качестве независимого целесообразно принимать возможное перемещение (скорость) обобщенной координаты. Хотя в принципе это и необязательно.

6. Сократить полученное уравнение на оставшееся независимое возможное перемещение (скорость) и определить из него искомую величину.

Методику применения принципа рассмотрим на примере системы с одной степенью свободы.

Пример 11. Выжимной механизм муфты сцепления автомобиля (рис.29) состоит из рычага АОВ, стержня ВС, ползуна С и пружины А. Определить величину жесткости c пружины А, если при действии силы Р = 200 Н на ползун ее деформация должна составить 4 мм, а механизм займет положение, изображенное на рисунке. При этом ОА/ОВ = =3/4. Трением в подшипниках и направляющей пренебречь.

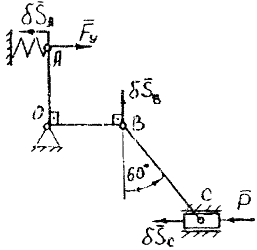


Рис. 29.

Решение. 1. В качестве системы, равновесие которой необходимо рассмотреть, выбираем весь механизм, включая рычаг АОВ, стержень ВС и ползун С. При таком выборе связями для нее будут являться пружина, опора О и направляющие С. Механизм имеет одну степень свободы.

2. Освобождаем систему от неидеальных связей. В рассматриваемом случае такой будет являться лишь пружина, реакцию которой заменяем силой упругости $F_v = c\lambda$.

3. Задаем возможное перемещение (рис.29) точке С и указываем на схеме возможное перемещение точки А, к которой приложена сила F_v, и точки В связи рычага и стержня.

4. Составляем уравнение работ сил на возможных перемещениях точек их приложения:

$$P\delta S_C - F_v\delta S_A = 0. \qquad (А)$$

5. Выражаем возможное перемещение δS_A через δS_C. При этом вначале установим связь между δS_A и δS_B исходя из того, что рычаг АОВ может совершать вращательное движение. Затем выражаем δS_B через δS_C , используя теорему о проекциях возможных перемещений двух точек звена ВС на линию, их соединяющую, так как оно может двигаться плоскопараллельно. При этом получаем:

$$\delta S_A / \delta S_B = 3/4,\ \delta S_B \cos 60° = \delta S_C \cos 30°,$$

$$\delta S_A = 3\delta S_C \cdot \sqrt{3/4}\ .$$

6. Подставляем полученные результаты в уравнение (А), сократив его на δS_C, и из оставшегося выражения определяем c = 384,6 Н/см .

10.7. Определение реакций связей неподвижных конструкций

Принцип возможных перемещений получен для механических систем – систем, обладающих подвижностью, и в уравнения равновесия, вытекающие из него, не входят реакции идеальных связей. Однако это не означает, что его невозможно применять к определению сил реакций внешних связей неподвижных конструкций, рассматриваемых в статике, систем, не обладающих ни одной степенью свободы. Делать это можно. Причем преимущества принципа над методами статики, отмеченные ранее, остаются в силе и для задач такого типа. Кроме того, он позволяет определять выборочно любую составляющую реакций связей независимо от других.

В основу методики применения принципа возможных перемещений к неподвижным конструкциям положен следующий прием: неподвижная, жесткая конструкция преобразовывается в механизм с одной степенью свободы, и уже к нему применяется принцип возможных перемещений.

Преобразование неподвижной конструкции в механизм с одной степенью свободы осуществляется путем «отбрасывания» связей или замены их более простыми. Если необходимо определить реакцию простой связи, ограничивающей одно простейшее перемещение тела или системы, ее «отбрасывают» и заменяют силой реакции. Далее эту силу относят к активной и к полученному механизму с одной степенью свободы применяют принцип возможных перемещений.

Если же необходимо определить реакцию более сложной связи, ограничивающей несколько независимых перемещений, то такую связь целесообразно заменять более простой. Замена должна производиться так, чтобы новая связь позволяла совершать системе или телу одно простейшее перемещение – поступательное или вращательное. Исключенное ограничение заменяют соответствующей составляющей силы реакции связи и, применяя принцип возможных перемещений, определяют ее. Так поступают столько раз, сколько простейших перемещений ограничивает интересуюшая нас связь.

Рекомендации по замене сложных плоских связей более простыми приведены на рис. 30.

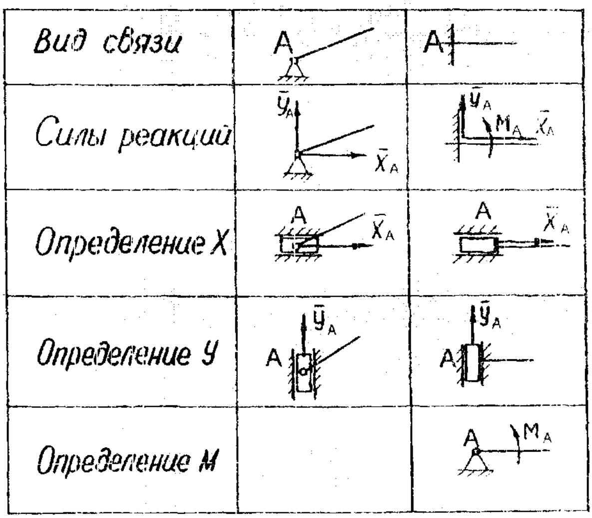


Рис.30.

Пример 12. Составная конструкция ABC (рис.31,а) состоит из двух невесомых балок AB и BC, шарнирно соединенных между собой в точке B, и находится в равновесии под действием сил P_1 и P_2, а также пары сил с моментом M. Определить реакцию в точке A, вертикальную составляющую реакции в заделке C и момент заделки. При расчетах принять $P_1 = 1$ кН; $P_2 = 8$ кН; $M = 8$ кН·м.

Решение. Определение указанных реакций начнем с точки А, для чего преобразуем конструкцию в механизм с одной степенью свободы, отбросив опору и заменив ее реакцией (рис.31,б).

Даем точке А возможное перемещение δS_A. В результате балка АВ повернется на угол $\delta\varphi_1$, а балка ВС останется неподвижной. Покажем возможные перемещения других точек системы – точек, к которым приложены силы, и точек связи тел между собой. В рассматриваемом случае возможное перемещение δS_1 получит только точка приложения силы P_1.

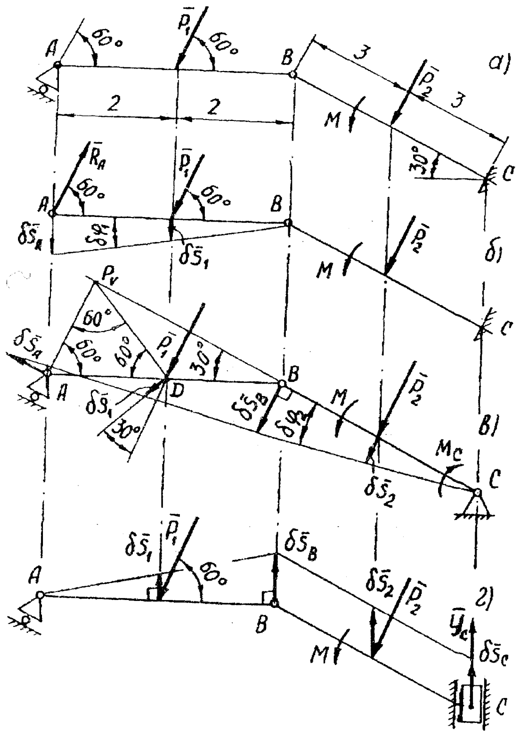


Рис. 31.

Составляем уравнение равновесия в форме работ:

$$P_1 \delta S_1 \cos 30° - R_A\, \delta S_A \cos 30° = 0\,.$$

Выражаем возможные перемещения, вошедшие в уравнение, через одно, например δS_A. Так как балка АВ может только вращаться, то имеем $\delta S_1/2 = \delta S_A/4$. Отсюда $\delta S_1 = 0{,}5 \cdot \delta S_A$. Тогда имеем $P_1 0{,}5 \cdot \delta S_A \times \cos 60° - R_A \delta S_A \cos 60° = 0$. Сократив полученное уравнение на δS_A, определяем $R_A = 0{,}5$ кН.

Определяем момент заделки в точке С, вновь преобразовав исходную конструкцию в механизм с одной степенью свободы.

Связь в точке С (заделка) сложная, исключает три независимых перемещения. Так как требуется определить момент заделки, то заменяем ее неподвижным шарниром (рис.31, в), который исключает два независимых поступательных перемещения балки ВС по взаимно перпендикулярным направлениям и позволяет ей вращаться.

Задаем возможное перемещение балке ВС, поворот на угол $\delta\varphi_2$, и показываем возможные перемешения точек. В рассматриваемом случае необходимо указать возможные перемещения точек приложения сил P_1 и P_2 и общей точки В для балок СВ и ВА. Так как балка СВ может совершать вращательное движение, то возможные перемещения точки В и точки приложения силы P_2 перпендикулярны балке. Возможное перемещение точки А параллельно наклонной плоскости. Возможное перемещение точки приложения силы P_2 укажем исходя из следующих соображений. Балка АВ может совершать плоскопараллельное движение. При этом известно направление возможных перемещений двух ее точек – δS_A и δS_B. Восстановив перпендикуляры из точек к их возможным перемещениям, определяем положение мгновенного центра вращения балки АВ – точку P_v. Возможное перемещение δS_1 точки D должно быть перпендикулярно ее расстоянию до мгновенного центра вращения и образует угол 30° с линией действия силы P_1.

Составляем уравнение работ всех сил на возможных перемещениях их точек приложения:

$$P_2\delta S_2 + M\delta\varphi_2 - M_C\delta\varphi_2 + P_1\delta S_1 \cos 30° = 0. \qquad (A)$$

Выражаем возможные перемещения, входящие в записанное уравнение, через какое-нибудь одно, например, угол $\delta\varphi_2$, $\delta S_2 = 3\delta\varphi_2$.

Возможное перемещение δS_1 вначале выражаем через δS_B, воспользовавшись основным соотношением перемещений точек при плоскопараллельном движении:

$$\delta S_1/DP_v = \delta S_B / BP_v.$$

Треугольник BP_vA прямоугольный, следовательно, $BP_v = AB\cos 30° = 2\sqrt{3}$ м, $AP_v = 0{,}5 \cdot AB = 2$ м.

Расстояние DP_v определяем из треугольника AP_vD. Так как $AP_v = AD = 2$ м, то углы при вершинах A, P_v и D также равны по 60° каждый. Тогда $DP_v = AD = AP = 2$ м. Следовательно, $\delta S_1 = \delta S_B\, DP_v/BP_v = \delta S_B \cdot \sqrt{3}/3$. В свою очередь $\delta S_B = 6\delta\varphi_2$. Окончательно имеем $\delta S_1 = 2\sqrt{3} \cdot \delta\varphi_2$.

Подставляя полученные соотношения для δS_1 и δS_2 в уравнение (А), имеем

$$3P_2\delta\varphi_2 + M\delta\varphi_2 - M_c\delta\varphi_2 + 3P_1\delta\varphi_2 = 0.$$

Разделив полученное уравнение на $\delta\varphi_2$ и решив его относительно M_C, находим величину момента заделки:

$$M_C = 3P_2 + M + 3P_1 = 24+8+3+35 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Определим, наконец, вертикальную составляющую реакцию в точке С, для чего заменим жесткую заделку скользящей (рис.31,г). При такой замене ползун вместе с жестко связанной с ним балкой ВС может перемещаться поступательно вертикально. Балка же АВ при этом может совершать плоскопараллельное движение.

Задаем возможное перемещение δS_C точке С и показываем перемещение остальных точек системы. Так как балка ВС может двигаться поступательно, то возможные перемещения точки приложения силы P_2 и точки В направляем параллельно, при этом $\delta S_B = \delta S_2 = \delta S_C$.

Балка АВ может двигаться плоскопараллельно, поэтому, прежде чем показать возможное перемещение точки приложения силы P_1, определим положение ее мгновенного центра вращения. Как видно из рис.31, г, он будет совпадать с точкой А. Следовательно, перемещение δS_1 точки приложения силы P_1 перпендикулярно ее расстоянию до мгновенного центра вращения, а следовательно, и балке АВ.

Составляем уравнение работ всех сил на возможных перемещениях:

$$У_C\delta S_C - P_2\delta S_C\cos 30° - P_1\delta S_1\cos 30° = 0.$$

Выражаем возможные перемещения всех точек через δS_C:

$$\delta S_2 = \delta S_C;\ \ \delta S_1/DA = \delta S_B/BA.$$

Отсюда $\delta S_1 = 0{,}5 \cdot \delta S_B$. Но так как $\delta S_B = \delta S_C$, то $\delta S_1 = 0{,}5 \cdot \delta S_C$. Подставляем полученные результаты в уравнение работ:

$$У_C\delta S_C - 0{,}87 \cdot P_2\delta S_C - 0{,}43 \cdot P_1 \cdot \delta S_C = 0. \qquad (B)$$

Сократив уравнение (В) δS_C, определяем $У_C$:

$$У_C = 0{,}87 \cdot 8 + 0{,}43 \cdot 1 = 7{,}36 \text{ кН}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как классифицируются силы в аналитической механике?
2. Что следует понимать под свободной и несвободной механическими системами?
3. Связь, что это такое?
4. Какие вы знаете виды связей и в чем их особенности?
5. Как можно задать связи?
6. Что понимается под обобщенными координатами?
7. Что называют числом степеней свободы механической системы?
8. Как можно определить степень свободы механической системы?

9. Что следует понимать под возможными перемещениями точки?

10. Назовите отличительные особенности возможных перемещений.

11. Какова связь между возможными перемещениями точек вращающегося тела?

12. Какова связь между возможными перемещениями точек тела, совершающего плоскопараллельное движение?

13. Сформулируйте принцип возможных перемещений.

14. Как определяется возможная работа силы?

15. Почему при применении принципа возможных перемещений систему нецелесообразно расчленять на части?

16. Назовите преимущества принципа возможных перемещений перед методами геометрической статики.

17. Сколько уравнений, характеризующих принцип возможных перемещений, можно составить для механической системы?

18. Чему равна работа сил реакций идеальных связей?

19. Как поступать с неидеальными шероховатыми связями при применении принципа возможных перемещений?

20. Назовите последовательность решения задач с помощью принципа возможных перемещений.

21. Какое состояние механической системы характеризует принцип возможных перемещений?

11. УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Задание для контрольной работы выдаётся каждому студенту индивидуально во время установочной лекции.

Студенты специальности **«Техническое обеспечение процессов сельскохозяйственного производства»** выполняют контрольную работу № 2 по разделу «Динамика», состоящую из пяти задач на следующие темы:

Задача 1. Дифференциальное уравнение абсолютного движения точки или Теорема о движении центра масс механической системы, или Теорема об изменении количества движения (см. разделы 3, 5 и 6 настоящих методических указаний);

Задача 2. Теорема об изменении момента количества движения (см. раздел 7 настоящих методических указаний);

Задача 3. Теорема об изменении кинетической энергии (см. раздел 8 настоящих методических указаний);

Задача 4. Принцип Даламбера (см. раздел 9 настоящих методических указаний);

Задача 5. Принцип возможных перемещений (см. раздел 10 настоящих методических указаний).

Студенты специальности **«Мелиорация и водное хозяйство»** выполняют одну контрольную работу, включающую разделы «Статика», «Кинематика» и «Динамика» и состоящую из шести задач по следующим темам:

Задача 1. Равновесие сочлененной системы тел под действием произвольной плоской системы сил (см. раздел «Статика»);

Задача 2. Равновесие тел при действии произвольной пространственной системы сил (см. раздел «Статика»);

Задача 3. Сложное движение точки (см. раздел «Кинематика»);

Задача 4. Плоскопараллельное движение тела (см. раздел «Кинематика»);

Задача 5. Теорема об изменении кинетической энергии (см. раздел 8 настоящих учебно-методических указаний);

Задача 6. Принцип Даламбера или Принцип возможных перемещений (см. разделы 9 и 10 настоящих методических указаний).

Студенты специальности **«Сельское строительство и обустройство территорий»** выполняют одну контрольную работу, включающую разделы «Статика», «Кинематика» и «Динамика» и состоящую из шести задач по следующим темам:

Задача 1. Равновесие сочлененной системы тел под действием произвольной плоской системы сил (см. раздел «Статика»);

Задача 2. Равновесие тел при действии произвольной пространственной системы сил (см. раздел «Статика»);

Задача 3. Приведение системы сил к центру (см. раздел «Статика»);

Задача 4. Плоскопараллельное движение тела (см. раздел «Кинематика»);

Задача 5. Теорема об изменении кинетической энергии (см. раздел 8 настоящих методических указаний);

Задача 6. Принцип возможных перемещений (см. раздел 10 настоящих методических указаний).

Контрольную работу необходимо выполнять в тетради или на листах формата А-4, подшитых в скоросшиватель. Необходимо переписать текст задачи и сделать относящийся к задаче чертеж, который выполняется в карандаше аккуратно и точно. На чертеже должны быть изображены оси координат и все векторы, которые встречаются в ходе решения данной задачи.

Ход решения каждой задачи должен сопровождаться краткими пояснениями, т. е. должно быть указано, какие теоремы, формулы или уравнения применяются при решении данной задачи. В противном случае работа не проверяется и не зачитывается.