ВВЕДЕНИЕ

Основная трудность, с которой студент встречается при изучении темы «Сложное движение точки», заключается в умении применять теоретические положения к решению практических задач. Поэтому в методических указаниях рассмотрена подробная методика определения основных кинематических характеристик при сложном движении точки и приведены конкретные примеры.

С целью лучшего усвоения студентами этой темы им предлагается ознакомиться с теорией, разобрать приведенные примеры и решить самостоятельно два задания из данных указаний.

С основными положениями кинематики сложного движения точки можно ознакомиться в соответствующей литературе.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – Москва: Высшая школа, 2010. – 416 с.

2. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики: в 2 ч. / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – 5-е изд., испр. – Москва: Высшая школа, 1977. – Ч. 1: Статика. Кинематика. – 367 с.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Приступая к изучению данной темы, особо следует обратить внимание на то, что теория сложного движения точки используется для упрощения решения некоторых задач механики. Она применяется в случаях, когда движение точки (или тела, размерами которого можно пренебречь) можно рассматривать одновременно по отношению к двум системам отсчета, одна из которых считается условно неподвижной, а другая определенным образом движется по отношению к первой. Движение, совершаемое при этом точкой (или телом), называется составным, или сложным.

Например, требуется определить скорость шара, катящегося по палубе движущегося теплохода в направлении его движения относительно берега. Решая данную задачу, удобно вначале установить скорость, с какой шар катится по отношению к палубе теплохода. При этом с теплоходом, как с телом относительно которого изучается это движение, жестко связывают какую-нибудь систему координат, которая неремещается вместе с ним (подвижная система отсчета). Далее необходимо определить скорость движения теплохода, т. е. подвижной системы отсчета, относительно берега, с которым связывают неподвижную систему отсчета. Затем остается сложить полученные скорости. Таким путем сложное движение шара разлагается на два более простых и более легко исследуемых. Возможность разложить, путем введения дополнительной (подвижной) системы отсчета, более сложное движение точки или тела на более простые широко используется при кинематических расчетах и определяет практическую ценность теории сложного движения.

Практика показывает, что наибольшую трудность при изучении данной темы вызывают понятия относительного, переносного и абсолютного движений и скоростей и ускорений точки в этих движениях. Для уяснения этих понятий рассмотрим сложное движение точки M, перемещающейся по отношению к подвижной системе отсчета $Oxyz$, которая в свою очередь как-то движется относительно другой системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$, условно названной нами неподвижной (рис. 1).

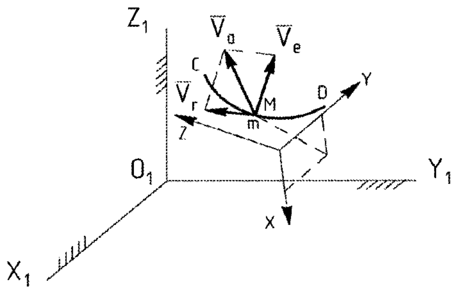


Рис. 1

Движение точки M по отношению к подвижным осям координат называется относительным движением. Эту систему осей координат обычно жестко связывают с движущимся твердым телом, по поверхности или внутри которого (например, по траектории CD) движется точка, не принадлежащая данному телу.

Следовательно, это движение точки относительно движущегося тела. Скорость и ускорение точки по отношению к подвижным осям (движущемуся телу) называются относительной скоростью и относительным ускорением.

Движение, совершаемое подвижной системой отсчета $Oxyz$ и всеми неизменно связанными с ней точками пространства (подвижного тела), по отношению к неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$, является для точки M **переносным движением**. Скорость и ускорение той, неизменно связанной с подвижными осями $Oxyz$ точки m (точки подвижного тела), с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка M, называются ее переносной скоростью и переносным ускорением.

Движение, совершаемое точкой M по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$ называется **абсолютным, или сложным**. Скорость и ускорение в этом движении называются абсолютной скоростью и абсолютным ускорением.

Величины, относящиеся к абсолютному движению точки, будем снабжать индексом «a», к относительному – индексом «r», к переносному – индексом «e». Например, $\bar{V}_a$ – абсолютная скорость точки; $S_r = f(t)$ – уравнение относительного движения точки; $\bar{a}_e$ – ускорение точки в переносном движении.

2. СВЯЗЬ МЕЖДУ СКОРОСТЯМИ ТОЧКИ В АБСОЛЮТНОМ, ОТНОСИТЕЛЬНОМ И ПЕРЕНОСНОМ ДВИЖЕНИЯХ

Зависимость между абсолютной, относительной и переносной скоростями точки, совершающей сложное движение, определяется теоремой сложения скоростей, согласно которой абсолютная скорость равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей.

$$\overline{V}_a = \overline{V}_e + \overline{V}_r. \tag{1}$$

С помощью уравнения (1) величину абсолютной скорости можно определить геометрически и аналитически. При выполнении курсовой работы необходимо пользоваться вторым способом. При этом величину скорости определяют через проекции на оси координат, а именно:

$$V_a = \sqrt{V_{ax}^2 + V_{ay}^2 + V_{az}^2}. \tag{2}$$

Величины же проекций скорости в абсолютном движении определяют, проецируя уравнение (1) на оси координат:

$$\left.\begin{aligned} V_{ax} &= V_{ex} + V_{rx}; \\ V_{ay} &= V_{ey} + V_{ry}; \\ V_{az} &= V_{ez} + V_{rz}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Направление вектора абсолютной скорости устанавливают с помощью углов, которые вектор $\overline{V_a}$ образует с осями координат:

$$\cos(\overline{V_a}{}^\wedge x) = \frac{V_{ax}}{V_a}, \cos(\overline{V_a}{}^\wedge y) = \frac{V_{ay}}{V_a}, \cos(\overline{V_a}{}^\wedge z) = \frac{V_{az}}{V_a}. \qquad (4)$$

Если угол между направлениями $\overline{V_e}$ и $\overline{V_r}$ известен и равен α, то имеем

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_e V_r \cos\alpha}. \qquad (5)$$

2.1. Частные случаи определения модуля абсолютной скорости

1. Если $\alpha = 0$, векторы скоростей относительного и переносного движений совпадают по направлению.
Тогда

$$V_a = V_e + V_r. \qquad (6)$$

2. При $\alpha = 180°$ векторы скоростей относительного и переносного движений направлены по одной прямой в противоположные стороны.
Тогда

$$V_a = \left|V_e - V_r\right|. \qquad (7)$$

3. Если $\alpha = 90°$, вектор скорости относительного движения перпендикулярен вектору скорости переносного движения. В этом случае

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2}. \qquad (8)$$

3. СВЯЗЬ МЕЖДУ УСКОРЕНИЯМИ ТОЧКИ В АБСОЛЮТНОМ, ОТНОСИТЕЛЬНОМ И ПЕРЕНОСНОМ ДВИЖЕНИЯХ

Зависимость между ускорениями точки в абсолютном, относительном и переносном движениях определяется теоремой сложения ускорений (теоремой Кориолиса), суть которой заключается в следующем: в самом общем случае ускорение точки в абсолютном движении равно геометрической сумме ускорений точки в переносном $\bar{a}_e$, относительном $\bar{a}_r$ движениях и ускорения Кориолиса $\bar{a}_k$.

$$\overline{a_a} = \overline{a_e} + \overline{a_r} + \overline{a_k}. \qquad (9)$$

Кориолисово ускорение как вектор вычисляется по формуле

$$\overline{a_k} = 2(\overline{\omega_e}\,\overline{V_r}), \qquad (10)$$

где $\overline{\omega_e}$ – вектор угловой скорости переносного движения.

Модуль этого вектора равен величине угловой скорости тела, а сам вектор направлен вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение тела видно происходящим против хода часовой стрелки.

Модуль кориолисова ускорения определяется по формуле:

$$a_k = 2\omega_e V_r \sin(\overline{\omega_e} \,\hat{}\, \overline{V_r}). \qquad (11)$$

Направление кориолисова ускорения можно установить, руководствуясь одним из двух правил: правилом векторного произведения или правилом Н. Е. Жуковского.

Согласно правилу векторного произведения вектор $\bar{a}_k$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\bar{\omega}_e$ и $\bar{V}_r$ в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение $\bar{\omega}_e$ (первый вектор) с $\bar{V}_r$ (второй вектор) видно происходящим против хода часовой стрелки (рис. 2, *а*).

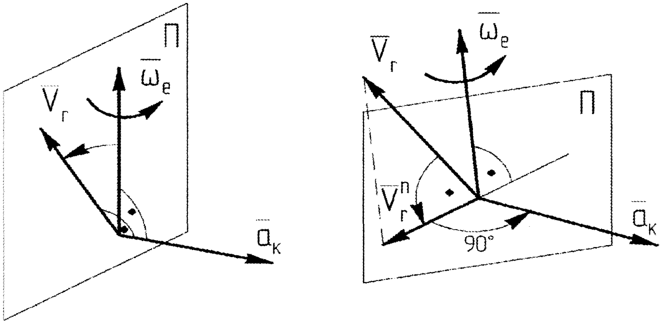
Согласно правилу Н. Е. Жуковского для определения направления кориолисова ускорения необходимо спроецировать вектор относительной скорости $\bar{V}_r$ на плоскость, перпендикулярную к вектору угловой скорости $\bar{\omega}_e$ (оси вращения тела), и повернуть полученную проекцию в этой плоскости на угол 90° в сторону переносного вращения (вращения тела) (рис. 2, *б*).

Из выражения (11) следует, что кориолисово ускорение обращается в нуль в случаях:

1) если $\omega_e = 0$, т. е. когда переносное движение является поступательным или если угловая скорость переносного вращения в данный момент времени обращается в нуль;

2) если $V_r = 0$, т. е. когда относительная скорость в данный момент времени обращается в нуль;

3) векторы относительной скорости точки и переносной угловой скорости параллельны между собой, т. е. $\overline{V_r} \| \overline{\omega_e}$, тогда $\sin(\overline{\omega_e} \,\hat{}\, \overline{V_r}) = 0$.



а *б*

Рис. 2

В самом общем случае переносное и относительное движения точки могут быть криволинейными, а, следовательно, ускорения точки в этих движениях будут распадаться на два, нормальное и касательное, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \overline{a_e} &= \overline{a_e^n} + \overline{a_e^\tau}, \\ \overline{a_r} &= \overline{a_r^n} + \overline{a_r^\tau}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Тогда уравнение (9) записывается в следующем виде:

$$\overline{a_a} = \overline{a_e^n} + \overline{a_e^\tau} + \overline{a_r^n} + \overline{a_r^\tau} + \overline{a_k}. \tag{13}$$

Величину ускорения в абсолютном движении можно определить через его проекции на оси неподвижной системы координат:

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2}. \tag{14}$$

Проекции же $\overline{a}_a$ на оси координат определим, спроецировав равенство (13) на соответствующие оси:

$$\left.\begin{aligned} a_{ax} &= a_{ex}^n + a_{ex}^\tau + a_{rx}^n + a_{rx}^\tau + a_{kx}, \\ a_{ay} &= a_{ey}^n + a_{ey}^\tau + a_{ry}^n + a_{ry}^\tau + a_{ky}, \\ a_{az} &= a_{ez}^n + a_{ez}^\tau + a_{rz}^n + a_{rz}^\tau + a_{kz}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Направление вектора абсолютного ускорения устанавливается с помощью углов, которые образуют вектор $\overline{a_a}$ с осями координат:

$$\cos(\overline{a_a}\,\hat{}\,x) = \frac{a_{ax}}{a_a},\quad \cos(\overline{a_a}\,\hat{}\,y) = \frac{a_{ay}}{a_a},\quad \cos(\overline{a_a}\,\hat{}\,z) = \frac{a_{az}}{a_a}. \tag{16}$$

4. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задачи по определению абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки, в случае если известны уравнения ее относительного и переносного движений, сводятся к векторному сложению скоростей и ускорений точки в относительном и переносном движениях.

При их решении рекомендуется следующая последовательность.

1. Разложить движение точки на составляющие, установив относительное, переносное и абсолютное движения.

2. По уравнениям относительного и переносного движений определить положение точки и тела в заданный момент времени.

При выполнении этого пункта следует иметь в виду, что определение положения точки в относительном движении практически всегда обязательно.

Определение же положения тела, совершающего переносное движение, и изображение его в этом положении часто необязательно, а иногда нецелесообразно, так как получится громоздкая, неудобная для чтения расчетная схема. Руководствуются в этом случае такими соображениями: если взаимное положение векторов скоростей или ускорений в относительном и переносном движениях не изменяется с изменением положения тела в переносном движении, то его изображают в любом удобном, в смысле наглядности, положении. Как правило, это имеет место, если тело в переносном движении движется поступательно прямолинейно или вращается вокруг неподвижной оси.

3. Мысленно остановив переносное движение (движение тела) и рассматривая только лишь относительное движение точки (относительно тела), определить скорость и составляющие ускорений в относительном движении точки и изобразить векторы найденных величин на схеме.

При этом необходимо учитывать, каким способом задано относительное движение точки или тела, и использовать соответствующие формулы для определения скорости и ускорений.

4. Мысленно остановив относительное движение точки, и рассматривая переносное движение (движение тела), определить скорость и

ускорение той точки тела, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка, и изобразить векторы найденных величин на схеме. Это будут скорость и ускорение точки в переносном движении.

В этом случае точка рассматривается как бы принадлежащей телу, поэтому, определяя ее скорость и ускорение, необходимо учитывать вид движения тела и использовать соответствующие формулы.

5. По известным величинам угловой скорости переносного движения и скорости точки в относительном движении найти кориолисово ускорение точки и его вектор изобразить на схеме.

6. Составить векторные равенства (1) и (13) для определения абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки.

7. Выбрать удобным образом неподвижные оси координат и спроецировать векторные уравнения (1) и (13) на соответствующие оси, получим уравнения (3) и (15).

Удобство выбора координатных осей обусловлено простотой проецирования на них векторов скоростей и ускорений.

8. По формулам (2) и (14) вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки и установить их направление в пространстве, определив углы, которые образуют данные векторы с выбранными осями координат. Направления этих векторов можно установить и построением, зная их проекции на оси координат.

Помните!

1. Если движение точки задано координатным способом, т. е. известны уравнения ее движения в виде:

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t).$$

то скорость точки определяется по проекциям вектора скорости на оси координат, которые равны первым производным от соответствующих координат точки по времени:

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \ V_y = \frac{dy}{dt}, \ V_z = \frac{dz}{dt}.$$

Модуль и направление вектора скорости (т. е. углы, которые вектор образует с осями координат) определяются по следующим формулам:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2},$$

$$\cos(\overline{V}\,\hat{}\,x) = \frac{V_x}{V}, \ \cos(\overline{V}\,\hat{}\,y) = \frac{V_y}{V}, \ \cos(\overline{V}\,\hat{}\,z) = \frac{V_z}{V}.$$

Ускорение точки также определяется по проекциям вектора ускорения на оси координат, которые равны первым производным от проекций скоростей или вторым производным от соответствующих координат точки по времени:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \ \ a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \ \ a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Модуль и направление вектора ускорения находим по формулам

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$\cos(\overline{a}\,^\wedge x) = \frac{a_x}{a}, \ \ \cos(\overline{a}\,^\wedge y) = \frac{a_y}{a}, \ \ \cos(\overline{a}\,^\wedge z) = \frac{a_z}{a}.$$

2. Движение точки задано естественным способом, т. е. известны ее траектория движения, начало отсчета, с указанием положительного и отрицательного направлений отсчета, и закон движения вдоль этой траектории в виде

$$S = f(t).$$

Численная величина скорости точки определяется по формуле

$$V = \frac{ds}{dt}.$$

Направлен вектор скорости по касательной к траектории движения, и если величина $V > 0$, то вектор V направлен в положительном направлении отсчета расстояния S, а если $V < 0$, то в отрицательном. Ускорение точки в этом случае определяется как геометрическая сумма касательного и нормального ускорений

$$\overline{a} = \overline{a_t} + \overline{a_n},$$

причем

$$\overline{a_\tau} \perp \overline{a_n}.$$

Касательное ускорение (его численная величина) находится по формуле

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}.$$

Направляется вектор a_τ по касательной к траектории движения точки, и если $a_\tau > 0$, то в положительном направлении отсчета координаты S, а если $a_\tau < 0$, то в отрицательном.

Нормальное ускорение точки находится по формуле

$$a_n = \frac{V^2}{\rho},$$

где ρ – радиус кривизны траектории.

3. При определении скорости и ускорения точки тела, совершающего поступательное движение, необходимо учитывать, что в каждый момент времени скорости и ускорения всех точек этого тела равны по величине и направлению. В этом случае задача сводится к определению скорости и ускорения какой-нибудь одной точки тела.

4. При вращательном движении тела скорость какой-нибудь его точки находится по формуле

$$V = \omega h,$$

где ω – модуль угловой скорости тела;

h – расстояние от рассматриваемой точки до оси вращения тела.

Направлен вектор скорости точки $\overline{V}$ по касательной к описываемой точкой окружности в сторону вращения тела.

Величина угловой скорости тела определяется по формуле

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Если $\omega > 0$, то вращение происходит в сторону возрастания угла φ, если $\omega < 0$, то в сторону уменьшения угла φ. На расчетной схеме ω изображается круговой стрелкой, направленной в соответствующую сторону.

Ускорение точки определяется как геометрическая сумма касательного и нормального ускорений:

$$\overline{a} = \overline{a_\tau} + \overline{a_n}, \text{ причем } \overline{a_\tau} \perp \overline{a_n}.$$

Касательное ускорение определяется по формуле

$$a_\tau = \varepsilon h,$$

где ε – модуль углового ускорения.

Величина ε находится по формуле

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

На расчетной схеме ε изображают круговой стрелкой, которую направляют в сторону ω, если ω и ε одного знака (вращение ускоренное), или в сторону, противоположную ω, если ω и ε равного знака (вращение замедленное).

Вектор касательного ускорения $\overline{a_\tau}$ направлен по касательной к траектории точки в сторону движения, если тело вращается ускоренно, или в обратную сторону, если тело вращается замедленно, т. е. в сторону ε.

Нормальное ускорение точки определяется по формуле

$$a_n = \omega^2 h.$$

Вектор $\overline{a_n}$ всегда направлен по радиусу h к оси вращения тела.

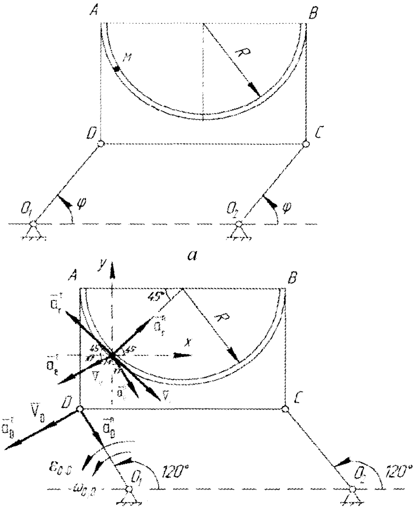
Методику решения задач по определению абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки рассмотрим на примерах.

Пример 1. Прямоугольник $ABCD$ (рис. 3, *а*) приводится в движение посредством двух кривошипов O_1D и O_2C равной длины, вращающихся по закону $\varphi = 1/6\pi t^2$ рад. По дуге полуокружности радиуса R, расположенной в плоскости прямоугольника, от точки A движется точка M согласно уравнению

$$AM = 10\pi t - 2\pi t^2.$$

Для момента времени $t = 2$ с определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M, если $O_1D = O_2C = 30$ см, $O_1O_2 = DC$, $R = 48$ см.

Решение. 1. Рассмотрим абсолютное движение точки M как составное: переносное – движение вместе с прямоугольником $ABCD$ и относительное – движение точки M по дуге полуокружности радиуса $R = 48$ см согласно уравнению $AM = S_r = 10\pi t - 2\pi t^2$.



а

б

Рис. 3

2. Определим положение прямоугольника $ABCD$ и точки M на дуге полуокружности в момент времени $t = 2$ с после начала движения.

Положение прямоугольника определяется углом φ, который образуют кривошипы O_1D и O_2C с прямой O_1O_2.

При $t = 2$ с, $\varphi = 1/6,\ \pi \cdot 2^2 = 2/3\pi$ рад, или $\varphi = 120°$ (см. рис. 3, *б*).

Положение точки M на прямоугольнике $ABCD$ определяется длиной дуги, которую опишет точка M, начав двигаться от точки A за время $t = 2$ с. Определим ее, подставив значение времени $t = 2$ с в закон относительного движения

$$AM = \breve{S}_r = 10\pi \cdot 2 - 2\pi \cdot 2^2 = 12\pi, \text{ см.}$$

Длина этой дуги определяется величиной центробежного угла α и радиуса R полуокружности:

$$\alpha = \frac{\breve{S}_r}{R} = \frac{12\pi}{48} = \frac{\pi}{4} = 45°.$$

Следовательно, точка будет находиться в положении M_1 (см. рис. 3, *б*).

3. Мысленно остановив переносное движение (движение прямоугольника $ABCD$) и рассматривая относительное движение точки (относительно прямоугольника), определим скорость и ускорение точки в этом движении.

В данном случае относительное движение точки задано естественным способом, так как известны траектория этого движения (полуокружность), начало отсчета криволинейной координаты, определяющей положение движущейся точки (точки A), с указанием положительного направления ее отсчета (в сторону увеличения дуги AM) и закон движения точки вдоль этой траектории в виде $AM = S_r = 10\pi t - 2\pi t^2$, см. Поэтому воспользуемся формулами, присущими этому способу задания движения точки для определения ее относительной скорости и относительного ускорения.

Величину относительной скорости найдем как первую производную от уравнения движения:

$$V_r = \frac{dS_r}{dt} = \frac{d(10\pi t - 2\pi t^2)}{dt} = 10\pi - 4\pi t,$$

при $t = 2$ с

$$V_r = 10\pi - 4\pi \cdot 2 = 2\pi = 6,28 \text{ см/с}.$$

Положительный знак V_r показывает, что относительное движение точки происходит в направлении положительного отсчета координаты AM, поэтому и вектор относительной скорости V_r показывает в этом направлении по касательной к траектории движения (см. рис. 3, *б*).

Ускорение точки в относительном движении равно геометрической сумме касательного и нормального ускорений:

$$\overline{a}_r = \overline{a}_r^\tau + \overline{a}_r^n.$$

Величина касательного ускорения в относительном движении определяется

$$a^\tau{}_r = \frac{dv_r}{dt} = \frac{d(10\pi - 4\pi t)}{dt} = -4\pi = -12,56 \text{ см/с}^2.$$

Отрицательный знак у a_r^τ показывает, что вектор $\overline{a}_r^\tau$ направлен в сторону отрицательных значений координаты AM. На схеме (см. рис. 3, *б*) изображаем его направленным в сторону, противоположную вектору $\overline{V}_r$, и тем самым учитываем направление вектора (отрицательный знак a_r^τ). Так как векторы $\overline{V}_r$ и $\overline{a}_r^\tau$ направлены в противоположные стороны (величины их разного знака), то относительное движение точки замедленное. Если бы величина a_r^τ была с положительным знаком, то вектор $\overline{a}_r^\tau$ направили бы в сторону вектора $\overline{V}_r$ (величины их были бы одного знака) и относительное движение было бы ускоренным. Нормальное ускорение в относительном движении определяем по формуле

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{R} = \frac{6{,}28^2}{48} = 0{,}82 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\overline{a}_r^n$ направлен по радиусу к центру полуокружности (центру кривизны), описываемой точкой M в относительном движении (см. рис. 3, *б*).

4. Определим скорость и ускорение точки M в переносном движении, для чего мысленно остановим ее относительное движение (относительно прямоугольника $ABCD$) и, рассматривая движение прямоугольника, определим скорость и ускорение той его точки, с которой совпадает точка M. В этом случае точка M рассматривается как бы принадлежащей прямоугольнику.

Прямоугольник же совершает поступательное движение, а по свойству этого движения скорости и ускорения всех точек прямоугольника равны по величине и направлению в каждый момент времени.

Поэтому, чтобы определить скорость ускорение точки M в переносном движении, достаточно определить скорость и ускорение какой-нибудь одной точек прямоугольника $ABCD$. Согласно условию задачи можно определить и ускорение точек D и C прямоугольника, так как они принадлежат одновременно и кривошипам O_1D и O_2C, которые совершают вращательное движение по известному закону $\varphi = 1/6\pi t^2$ рад.

Рассмотрим, например, вращательное движение кривошипа O_1D. Тогда скорость точки M в переносном движении равна скорости точки D:

$$\overline{V}_e = \overline{V}_D.$$

Величину этой скорости при вращательном движении кривошипа определяем по формуле:

$$V_e = V_D = \omega_{O_1D} O_1D,$$

где ω_{O_1D} – модуль угловой скорости звена O_1D.

Величину угловой скорости находим по формуле:

$$\omega_{O_1D} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(\frac{1}{6}\pi t^2)}{dt} = \frac{1}{3}\pi t,$$

где $t = 2$ с,

$$\omega_{O_1D} = 1/3\pi \cdot 2 = 2{,}10\ \text{с}^{-1}.$$

Положительный знак у величины ω_{O_1D} показывает, что вращение звена O_1D происходит в направлении возрастания угла φ. Изображаем на схеме (см. рис 3, *б*) направление ω_{O_1D} круговой стрелкой.

Модуль переносной скорости определяем по формуле

$$V_e = V_D = 2{,}10 \cdot 30 = 63{,}00\ \text{см/с}.$$

Вектор $\overline{V}_e$ как и вектор $\overline{V}_D$ направлен перпендикулярно звену O_1D в сторону его вращения (см. рис. 3, *б*).

Аналогично ускорение точки M в переносном движении равно ускорению точки D кривошипа:

$$\overline{a}_e = \overline{a}_D.$$

Так как кривошип O_1D совершает вращательное движение, то ускорение точки D определяется как сумма касательного и нормального ускорений:

$$\overline{a}_D = \overline{a}_D^{\tau} + \overline{a}_D^{n}.$$

Величина касательного ускорения в переносном движении

$$a_e^{\tau} = a_D^{\tau} = \varepsilon_{O_1D} O_1D,$$

где ε_{O_1D} – угловое ускорение кривошипа O_1D.

$$\varepsilon_{O_1D} = \frac{d\omega_{O_1D}}{dt} = \frac{d(\frac{1}{3}\pi t)}{dt} = \frac{1}{3}\pi = 1{,}05\ \text{с}^{-2},\ \ \pi = 1{,}05\ \ \text{с}^{-2}.$$

Совпадение знаков у величин ω_{O_1D} и ε_{O_1D} показывает, что вращение кривошипа O_1D ускоренное. Изображаем направление углового ускорения на схеме (см. рис. 3, *б*) круговой стрелкой в ту же сторону, что и ω_{O_1D}.

Тогда

$$a_{\varepsilon}^{\tau} = a_D^{\tau} = 1{,}05 \cdot 30 = 31{,}50\ \text{см/с}^2.$$

Вектор $\overline{a}_e^{\tau}$ как и вектор $\overline{a}_D^{\tau}$ направлен перпендикулярно кривошипу O_1D в сторону углового ускорения и совпадает с вектором $\overline{V}_e$, так как движение кривошипа ускоренное.

Нормальное ускорение точки M в переносном движении определяем по формуле

$$a_e^n = a_D^n = \omega^2_{O_1D} O_1D = 2{,}10^2 \cdot 30 = 132{,}30\ \text{см/с}^2.$$

Вектор $\overline{a}_D^n$ направлен от точки D к точке O_1, а вектор $\overline{a}_e^n$ имеет одинаковое с ним направление (см. рис. 3, *б*).

5. Так как переносное движение в данной задаче поступательное, то кориолисово ускорение равно нулю (ибо $\omega_e = 0$):

$$\overline{a}_к = 0.$$

6. Абсолютную скорость точки M определяем как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей:

$$\overline{V}_a = \overline{V}_r + \overline{V}_e.$$

Модуль абсолютной скорости найдем способом проекции. Для этого выбираем удобные оси координат x и y (см. рис. 3, *б*), которых достаточно, так как векторы расположены в плоскости чертежа.

Тогда

$$V_{ax} = V_r \cos 45^\circ - V_e \cos 30^\circ = 6{,}28 \cdot 0{,}71 - 63{,}0 \cdot 0{,}87 = -50{,}35 \text{ см/с};$$

$$V_{ay} = -V_r \sin 45^\circ - V_e \sin 30^\circ = -6{,}28 \cdot 0{,}71 - 63{,}0 \cdot 0{,}5 = -35{,}96 \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютной скорости

$$V_a = \sqrt{V_a^{2x} + V_{ay}^{2}} = 61.87 \text{ см/с}.$$

Направление вектора $\overline{V}_a$ можно определить диагональю прямоугольника, построенного на проекциях V_{ax} и V_{ay} или по направляющим косинусам.

7. Абсолютное ускорение точки M при поступательном переносном движении определяем как геометрическую сумму относительного и переносного ускорений:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e.$$

Учитывая, что в относительном и в переносном движениях ускорения определялись как сумма двух, нормального и касательного, то вышеприведенное равенство примет следующий вид:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r^\tau + \overline{a}_r^n + \overline{a}_e^\tau + \overline{a}_e^n.$$

Модуль абсолютного ускорения также находим проекцией:

$$a_{ax} = -a_r^\tau \cos 45^\circ + a_r^n \cos 45^\circ - a_e^\tau \cos 30^\circ + a_e^n \sin 30^\circ = -12{,}56 \cdot 0{,}71 +$$
$$+ 0{,}82 \cdot 0{,}71 - 31{,}50 \cdot 0{,}87 + 132{,}30 \cdot 0{,}5 = 30{,}41 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{ya} = a_r^\tau \sin 45^\circ + a_r^n \sin 45^\circ - a_e^\tau \sin 30^\circ - a_e^n \cos 30^\circ = 12{,}56 \cdot 0{,}71 +$$
$$+ 0{,}82 \cdot 0{,}71 - 31{,}50 \cdot 0{,}5 - 132{,}30 \cdot 0{,}87 = -121{,}35 \text{ см/с}^2,$$

тогда

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = 125{,}10 \text{ см/с}^2.$$

Направление вектора $\overline{a}_a$ определяется диагональю прямоугольника, построенного на проекциях a_{ax} и a_{ay} или по направляющим косинусам.

Пример 2. Квадрат вращается в плоскости чертежа вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O_1, по закону $\varphi = 5t - t^2$ рад. По дуге полуокружности радиуса $R = 10$ см, расположенной в плоскости квадрата, от точки O движется точка M согласно уравнению $\widetilde{\mathrm{OM}} = S = 5\pi t^2$. Для момента времени $t = 1$ с определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M.

Решение. 1. Рассмотрим абсолютное движение точки M как составное: переносное – движение вместе с квадратом, совершающим вращательное движение по закону $\varphi_e = 5t - t^2$ рад, и относительное – движение точки M по дуге полуокружности согласно уравнению $\widetilde{OM} = S_r = 5\pi t^2$.

2. Для момента времени $t = 1$ с после начала движения определяем положения квадрата и точки M на дуге окружности.

Так как квадрат совершает вращательное движение, при котором взаимное положение векторов скоростей и ускорений в относительном и переносном движениях не изменяются при его движении, будем считать, что в расчетный момент времени плоскость чертежа совпадает с плоскостью квадрата (рис. 4, *а*). Это упростит в дальнейшем построение векторов на схеме.

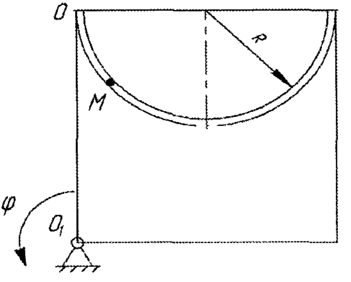
Положение точки M на квадратной пластинке определяется длиной дуги, которую опишет точка M, начав двигаться от точки O за время $t = 1$ с. Подставив значение времени в закон относительного движения, получим длину дуги:

$$\widetilde{\mathrm{OM}} = S_r = 5\pi 1^2 = 5\pi, \text{ см}.$$

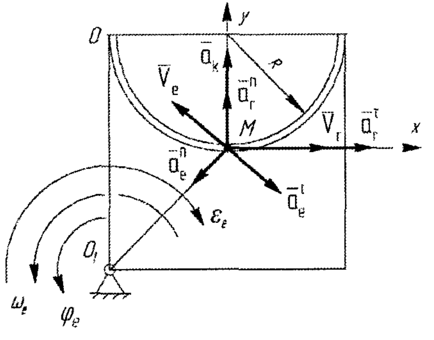
Для этой дуги определяется величина центрального угла α по радиусу R полуокружности

$$\alpha = \frac{S_r}{R} = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \text{ рад или } \alpha = 90°.$$

Разместим точку M в заданном положении.



а



б

Рис. 4

3. Мысленно остановив переносное движение (вращательное движение квадрата) и рассматривая относительное движение точки M (относительно квадрата), определим скорость и ускорение точки в этом движении.

В данном случае относительное движение точки задано естественным способом, так как известны траектория этого движения (полуокружность), начало отсчета криволинейной координаты, определяющей положение движущейся точки (точка O), с указанием положительного направления ее отсчета (в сторону увеличения дуги $\overset{\frown}{OM}$) и закон движения точки вдоль этой траектории в виде

$$\overset{\frown}{\mathrm{OM}} = S = 5\pi t^2 .$$

Поэтому воспользуемся формулами, присущими естественному способу задания движения точки для определения относительной скорости и относительного ускорения.

Величину относительной скорости найдем как первую производную от уравнения движения:

$$V_r = \frac{dS_r}{dt} = \frac{d(5\pi t^2)}{dt} = 10\pi t,$$

при $t = 1$ с

$$V_r = 10\pi 1 = 10\pi = 31{,}41 \text{ см/с}.$$

Положительный знак V_r показывает, что относительное движение точки происходит в направлении положительного отсчета координаты OM, поэтому и вектор относительной скорости показываем в этом направлении по касательной траектории движения (см. рис. 4, *б*).

Ускорение точки в относительном движении, при естественном способе задания этого движения, равно геометрической сумме касательного и нормального ускорений:

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^{\tau} + \bar{a}_r^{c}.$$

Величина касательного ускорения в относительном движении определяется как первая производная от закона изменения скорости по времени

$$a_r^{\tau} = \frac{dV_r}{dt} = \frac{d(10\pi t)}{dt} = 10\pi = 31{,}41 \text{ см/с}^2.$$

Положительный знак a_r показывает, что вектор $\bar{a}_r^{\tau}$ совпадает по направлению с вектором $\bar{V}_r$, поэтому относительное движение точки ускоренное (см. рис. 4, *б*).

Нормальное ускорение в относительном движении рассчитаем таким образом:

$$a_r^{n} = \frac{V_r}{R} = \frac{31{,}41^2}{10} = 98{,}65 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_r^{n}$ направлен к центру полуокружности (центру кривизны), описываемой точкой M в относительном движении (см. рис. 4, *б*).

4. Мысленно остановив относительное движение (относительно квадрата) и рассматривая переносное движение (вращательное движение квадрата), определим скорость и ускорение той точки квадрата, с которой она совпадает в данный момент времени.

Квадрат совершает вращательные движения, траекторией движения точки M будет окружность радиуса $O_1M = h$. Для определения скорости и ускорения точки M используем формулы, по которым находятся эти кинематические характеристики для точки вращающегося тела.

Скорость точки в переносном движении:

$$V_e = \omega_e h,$$

где h – расстояние от точки M до оси вращения, т. е.

$$h = O_1M = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} = 14{,}14 \text{ см};$$

ω_e – модуль угловой скорости квадрата.

Величину угловой скорости найдем как первую производную от уравнения вращательного движения:

$$\omega_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = \frac{d(5t - t^2)}{dt} = 5 - 2t,$$

при $t = 1$ с

$$\omega_e = 5 - 2 \cdot 1 = 3 \text{ с}^{-1}.$$

Положительный знак у величины ω_e показывает, что вращение квадрата происходит в направлении отсчета угла φ_e, изображаем на схеме направление круговой стрелкой (см. рис. 4, *б*).

Вектор $\overline{\omega}_e$ направлен вдоль оси вращения квадрата вверх, чтобы с его конца вращение было видно против хода часовой стрелки.

Тогда переносная скорость

$$V_e = 3 \cdot 14{,}14 = 42{,}42 \text{ см/с}.$$

Вектор $\overline{V}_e$ направлен по касательной к окружности в сторону вращения квадрата, т. е. вектор $\overline{V_e}$ перпендикулярен h в сторону ω_e, $\overline{V_e} \perp h$ (см. рис. 4, *б*).

Ускорение точки при вращении движения тела определяется как геометрическая сумма касательного и нормального ускорений.

Тогда

$$a_e = \overline{a_r^\tau} + \overline{a_r^n}.$$

Модуль касательного ускорения в переносном движении определим по формуле

$$a_e^{\tau} = \varepsilon_e h,$$

где ε_e – модуль углового ускорения квадрата.

Величину углового ускорения найдем как первую производную от закона изменения угловой скорости:

$$\varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = \frac{d(5-2t)}{dt} = -2 \text{ с}^{-2}.$$

Отрицательный знак у величины S_e указывает на то, что вращение квадрата замедленное. Изображаем угловое ускорение на схеме круговой стрелкой в сторону противоположного положительному отсчету угла φ_e, тем самым учитываем отрицательный знак (см. рис. 4, *б*).

Тогда

$$\overline{a_e^{\tau}} = \varepsilon_e h = 2 \cdot 14{,}44 = 28{,}28 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\overline{a_e}$ направлен по касательной к окружности в сторону ε_e, т. е. вектор $\overline{a_e^{\tau}}$ перпендикулярен в сторону ε_e, $\overline{a_e^{\tau}} \perp h$ (см. рис. 4, *б*).

Модуль нормального ускорения в переносном движении определим следующим образом:

$$a_e^n = \omega_e^2 h = 3^2 \cdot 14{,}14 = 127{,}26 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\overline{a_e^{\tau}}$ направлен к центру окружности, т. е. вдоль h к оси вращения квадрата (см. рис. 4, *б*).

5. Определим кориолисово ускорение.

Формула нахождения его модуля

$$a_к = 2\omega_e V_r \sin(\overline{\omega}_e \wedge \overline{V}_r).$$

Так как угол между вектором $\overline{\omega_e}$ и вектором $\overline{V}_r$ равен 90°, находим значение $a_к$ в момент времени $t = 1$ с:

$$a_к = 2 \cdot 3 \cdot 31{,}41 \cdot 1 = 188{,}46 \text{ см/с}^2.$$

Направление вектора $\overline{a_k}$ установим по правилу Жуковского. Для этого спроецируем вектор относительной скорости $\overline{V_r}$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения квадрата (вектору $\overline{\omega_e}$).

Вектор $\overline{V}_r$ лежит в этой плоскости, т. е. совпадает со своей проекцией. Затем поворачиваем полученную проекцию в той плоскости на угол 90° в сторону вращения квадрата. Получается, что вектор $a_к$ расположен в плоскости квадрата (см. рис. 4, *б*).

6. Определим абсолютную скорость точки M как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей:

$$\overline{V}_a = \overline{V}_r + \overline{V}_e.$$

Модуль абсолютной скорости определим способом проекций:

$$V_{ax} = V_r - V_e \cos 45° = 31{,}41 - 42{,}42 \cdot 0{,}707 = 1{,}42 \text{ см/с};$$

$$V_{ay} = V_e \cos 45° = 29{,}99 \text{ см/с};$$

$$V_{az} = 0,$$

тогда

$$V = \sqrt{V_{ax}^2 + V_{ay}^2 + V_{az}^2} = \sqrt{V_{ax}^2 + V_{ay}^2} = \sqrt{1,42^2 + 29,99^2} = 30{,}02 \text{ см/с}.$$

Направление вектора $\overline{V}_a$ можно определить диагональю параллелепипеда, построенного на проекциях V_{ax}, V_{ay}, V_{az} или по направляющим косинусам.

7. Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений:

$$\overline{a^a} = \overline{a_a} + \overline{a_e^\tau} + \overline{a_k}.$$

Так как ускорение в относительном и переносном движениях состоит из двух составляющих, равенство примет вид:

$$\overline{a^a} = \overline{a_r^\tau} + \overline{a_r^n} + \overline{a_e^\tau} + \overline{a_a} + \overline{a_e^n} + \overline{a_k}.$$

Модуль абсолютного ускорения точки M находим способом проекций:

$$a_{ay} = a_r^n + a_k - a_e^\tau \cos 45° - a_e^n \cos 45° = 98{,}65 + 188{,}46 -$$
$$-(28{,}28 + 127{,}26) \cdot 0{,}707 = 177{,}14 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{az} = 0,$$

тогда

$$a_a = \sqrt{a^2_{ax} + a^2_{ay} + a^2_{az}} = \sqrt{a^2_{ax} + a^2_{ay}} = \sqrt{(-38{,}57)^2 + 177{,}14^2} = 181{,}29 \text{ см/с}^2.$$

Направление вектора $\overline{a}_a$ определяется диагональю параллелепипеда, построенного на проекциях a_{ax}, a_{ay}, a_{az} или по направляющим косинусам.

Пример 3. Прямоугольный треугольник ABC (рис. 5, *а*) вращается вокруг горизонтальной оси по закону $\varphi = 5t - 3t^2$ рад. Вдоль его гипотенузы от точки C движется точка M по закону $CM = 20\sin\pi t$, см. Для момента времени $t = 1/6$ с определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M.

Решение.

1. Рассмотрим абсолютное движение точки M как составное: переносное – движение вместе с треугольником ABC, совершающим вращательное движение по закону $\varphi_e = 5t - 3t^2$ рад, и относительное – движение точки M по гипотенузе треугольника согласно уравнению $CM = S_r = 20\sin\pi t$.

2. Для момента времени $t = 1/6$ с после начала движения определим положение треугольника ABC и точки M на нем.

Так как треугольник совершает вращательное движение, при котором взаимное положение векторов скоростей и ускорений в относительном и переносном движениях не изменяется при его движении, будем считать, что в расчетный момент времени плоскость чертежа совпадает с плоскостью треугольника (рис. 5, *б*). Это упростит в дальнейшем построение вектора на схеме.

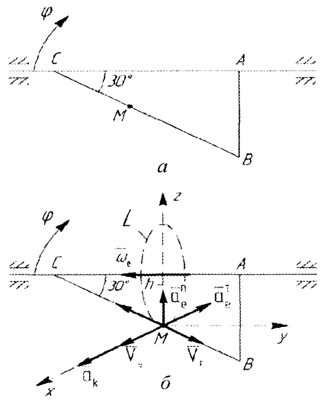


Рис. 5

Положение точки на треугольнике определяется расстоянием $CM = S_r$. При $t = 1/6$ с

$$CM = S_r = 20\sin\pi/6 = 10 \text{ см}.$$

3. Определим скорость и ускорение точки M в относительном движении, для чего мысленно остановим переносное движение (движение треугольника ABC) и будем рассматривать движение точки по гипотенузе. Это относительное движение точки задано естественным способом и происходит по закону $CM = S_r = 20\sin\pi t$, см. Поэтому используем соответствующие формулы для определения скорости и ускорения в данном движении.

Величина относительной скорости:

$$V_r = \frac{dS_r}{dt} = \frac{d(20\sin\pi t)}{dt} = 20\pi\cos\pi t,$$

при $t = 1/6$ с

$$V_r = 20\pi\cos\pi/6 = 20\cdot 3{,}14\cdot 0{,}87 = 54{,}39 \text{ см/с}.$$

Положительный знак у величины V_r показывает, что вектор $\overline{V}_r$ направлен в сторону возрастания координаты CM, т. е. в сторону ее положительных значений (см. рис. 5, *б*).

Относительное ускорение точки, если учесть, что ее движение задано естественным способом, определяем как геометрическую сумму касательного и нормального ускорений:

$$\overline{a}_r = \overline{a}_r^\tau + \overline{a}_r^n.$$

Величину относительного касательного ускорения определяем по формуле

$$a^\tau{}_r = \frac{dV_r}{dt} = \frac{d(20\pi\cos\pi t)}{dt} = 20\pi^2\sin\pi t,$$

при $t = 1/6$ с

$$a_r^\tau = -20\pi^2\sin\pi/6 = -20\cdot 3{,}14^2\cdot 0{,}5 = -98{,}60 \text{ см/с}^2.$$

Отрицательный знак a_r^τ показывает, что вектор $\overline{a}_r^\tau$ направлен в сторону отрицательных значений координаты CM. Изображаем его направленным в сторону, противоположную вектору $\overline{V}_r$, и учитываем этим отрицательный знак a_r^τ. Относительное движение точки M замедленное, так как величины V_r и a_r^τ разного знака.

Относительное нормальное ускорение находим по формуле

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho} = 0,$$

так как траектория относительного движения – прямая $(\rho = \infty)$.

4. Для определения скорости и ускорения точки M в переносном движении мысленно остановим ее относительное движение и, рассматривая уже движение треугольника, определим скорость и ускорение той его точки, с которой совпадает в данный момент времени точка M.

Учитывая, что треугольник ABC совершает вращательное движение, траекторией движения такой точки будет окружность L радиуса h (см. рис. 5, *б*), а для определения ее скорости ускорения используем формулы, по которым находятся эти кинематические характеристики для точек вращающегося тела.

Скорость точки в переносном движении определяется по формуле

$$V_e = \omega_e h,$$

где $h = CM \sin 30^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5$ см;

ω_e – модуль угловой скорости треугольника.

Величину угловой скорости находим следующим образом:

$$\omega_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = \frac{d(5t - 3t^2)}{dt} = 5 - 6t,$$

при $t = 1/6$ с

$$\omega_e = 5 - 6 \cdot 1/6 = 4 \text{ с}^{-1}.$$

Положительный знак у величины ω_e показывает, что вращение треугольника происходит в направлении отсчета угла ω_e. Изображаем на схеме (см. рис. 5, *б*) направление φ_e круговой стрелкой. Поэтому вектор $\overline{\omega_e}$ направлен вдоль оси вращения треугольника влево, чтобы с его конца вращение треугольника было видно против хода часовой стрелки. Тогда переносная скорость

$$V_e = 4 \cdot 5 = 20 \text{ см/с.}$$

Вектор $\overline{V_e}$ направлен по касательной к окружности L в сторону вращения треугольника, т. е. вектор $\overline{V_e}$ перпендикулярен плоскости чертежа и направлен вверх.

Для удобства его изображения на схеме выберем пространственную систему осей координат $Mxyz$ (см. рис. 5, *б*). Тогда вектор $\overline{V_e}$ показываем вдоль оси Mx.

Ускорение точки при вращательном движении тела определяется как геометрическая сумма касательного и нормального ускорений, тогда

$$\overline{a_e} = \overline{a_e^\tau} + \overline{a_e^n}.$$

Модуль касательного ускорения в переносном движении вычислим по формуле

$$a_e^\tau = \varepsilon_e h,$$

где ε_e – модуль углового ускорения треугольника.

Величину углового ускорения определим следующим образом:

$$\varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = \frac{d(5-6t)}{dt} = -6 \text{ с}^{-2}.$$

Разные знаки ω_e и ε_e указывают на то, что вращение треугольника замедленное. Изображаем угловое ускорение на схеме круговой стрелкой в сторону, противоположную положительному направлению отсчета угла φ_e и тем самым учитываем отрицательный знак ε_e.

Тогда

$$a_e^\tau = 6 \cdot 5 = 30 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\overline{a_e^\tau}$ направлен по касательной к окружности L в сторону ε_e, т. е. в сторону, противоположную вектору $\overline{V_e}$.

Модуль нормального ускорения в переносном движении вычислим по формуле:

$$a_e^n = \omega_e^2 h = 4^2 \cdot 5 = 80 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\overline{a_e^n}$ направлен к центру окружности L, т. е. вдоль h к оси вращения треугольника (параллелен оси M_z).

5. Определим кориолисово ускорение. Его модуль

$$a_k = 2\omega_e V_r \sin(\overline{\omega_e} \hat{\ } \overline{V_r}).$$

Так как угол между вектором $\overline{\omega_e}$ и вектором $\overline{V_r}$ равен 150°, находим значение a_k в момент времени $t = 1/6$ с.

$$a_k = 2 \cdot 4 \cdot 54{,}39 \sin 150° = 217{,}56 \text{ см/с}^2.$$

Направление вектора $\overline{a_k}$ установим по правилу Жуковского. Для этого спроецируем вектор относительной скорости на плоскость, перпендикулярную оси вращения треугольника (вектору $\overline{\omega_e}$). Проекция будет параллельна оси M_z и направлена вниз. Затем поворачиваем полученную проекцию в этой плоскости на угол 90° в сторону вращения треугольника. Получается, что вектор $\overline{a_k}$ направлен перпендикулярно плоскости чертежа на нас. Изображаем его вдоль оси M_x.

6. Абсолютную скорость точки M определим как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей:

$$\overline{V_a} = \overline{V_r} + \overline{V_e}.$$

Хотя векторы $\overline{V_r}$ и $\overline{V_e}$ взаимно перпендикулярны, для удобства определения направления вектора абсолютной скорости $\overline{V_a}$ в пространстве определим его модуль способом проекций:

$$V_{ax} = V_e = 20 \text{ см/с}.$$

$$V_{ay} = V_r \cos 30° = 54{,}39 \cdot 0{,}87 = 47{,}92 \text{ см/с};$$

$$V_{az} = -V_r \sin 30° = -54{,}39 \cdot 0{,}5 = -27{,}20 \text{ см/с},$$

тогда

$$V_a = \sqrt{V_{ax}^2 + V_{ay}^2 + V_{az}^2} = 58{,}62 \text{ см/с}.$$

Направление вектора $\overline{V_a}$ можно определить диагональю параллелепипеда, построенного на проекциях V_{ax}, V_{ay}, V_{az} или по направляющим косинусам.

7. Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений:

$$\overline{a_a} = \overline{a_r} + \overline{a_e} + \overline{a_k}.$$

Так как ускорение в переносном движении состоит из двух составляющих, равенство примет вид

$$\overline{a_a} = \overline{a_r^\tau} + \overline{a_e^\tau} + \overline{a_e^n} + \overline{a_k}.$$

Модуль абсолютного ускорения точки M находим способом проекций:

$$a_{ax} = a_k - a_e^\tau = 217{,}56 - 30 = 187{,}56 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{ay} = -a_r^\tau \cos 30° = -98{,}60 \cdot 0{,}87 = -85{,}78 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{az} = a_r^\tau \sin 30° + a_e^n = 98{,}60 \cdot 0{,}5 + 80 = 129{,}30 \text{ см/с}^2;$$

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = 243{,}42 \text{ см/с}^2.$$

Направление вектора $\overline{a}_a$ определяется диагональю параллелепипеда, построенного на проекциях a_{ax}, a_{ay}, a_{az} или по направляющим косинусам.

Задания

По данным уравнениям относительного движения точки M и переносного движения тела D для момента времени t определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M.

Задание 1. Данные для расчетов приведены в табл. 1, схемы механизмов показаны на рисунках в прил. 1.

Задание 2. Данные для расчетов приведены в табл. 2, схемы механизмов показаны на рисунках в прил. 2.

Таблица 1. **Исходные данные для задания 1**

№ схемы	№ варианта	Уравнение движения тела D $\varphi_{e_1} = f(t)$, рад	Уравнение относительного движения точки M $O_1M_1 = S_{r_1} = f(t)$, см	t, с	R, см	ℓ, см	α, град
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	$\varphi_{e_1} = 7t - 3t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 4t^2$	2	16		
	2	$\varphi_{e_1} = 6t - t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 10t^2$	1	10		
2	1	$\varphi_{e_1} = 8t - 3t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 15t^2$	2			30
	2	$\varphi_{e_1} = 2t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 10t - t^2$	2			60
3	1	$\varphi_{e_1} = t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 10\pi t^2$	1	10		
	2	$\varphi_{e_1} = 5t - t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 5\pi t^2$	2	20		
4	1	$\varphi_{e_1} = 4t - t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 5\pi t^2$	1	30		
	2	$\varphi_{e_1} = 2t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 4\pi t^2$	1	12		
5	1	$\varphi_{e_1} = 10t - 3t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 20t^2$	1			30
	2	$\varphi_{e_1} = 2t^3$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 20t - 5t^2$	1			30
6	1	$\varphi_{e_1} = 5t - t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 8\pi t^2$	1	8	14	
	2	$\varphi_{e_1} = 3t - 2t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 5\pi t - 3\pi t^2$	1	6	7	
7	1	$\varphi_{e_1} = 7t - t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 10\pi t^2$	1	10	8	
	2	$\varphi_{e_1} = 2t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 12\pi t - 2\pi t^2$	1	20	5	
8	1	$\varphi_{e_1} = 2t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 2\pi t^2$	2	8		
	2	$\varphi_{e_1} = 7t - t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 5\pi t^2$	1	30		
9	1	$\varphi_{e_1} = 2t^3$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 5t^2$	2			60
	2	$\varphi_{e_1} = t^3$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 15t - 5t^2$	1			30

1	2	3	4	5	6	7	8
10	1	$\varphi_{e_1} = 10t - 3t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 10t^2$	1		10	
	2	$\varphi_{e_1} = 7t - 2t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 20t^2$	1		20	
11	1	$\varphi_{e_1} = 7t - t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 5t^2$	2			30
	2	$\varphi_{e_1} = 2t^3$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 20t - 4t^2$	1			30
12	1	$\varphi_{e_1} = 2t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 5\pi t^2$	1	30		
	2	$\varphi_{e_1} = 7t - t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 4\pi t^2$	2	48		
13	1	$\varphi_{e_1} = 8t - 2t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 10\pi t^2$	1	10		
	2	$\varphi_{e_1} = 2t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 16\pi t - 4\pi t^2$	1	24		
14	1	$\varphi_{e_1} = 12t - 2t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 11t - t^2$	1			
	2	$\varphi_{e_1} = 8t - t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 20t - 5t^2$	1			
15	1	$\varphi_{e_1} = 6t - 2t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 10t^2$	2			30
	2	$\varphi_{e_1} = 2t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 20t - 5t^2$	1			60
16	1	$\varphi_{e_1} = 10t - 2t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 12\pi t^2$	1	8		
	2	$\varphi_{e_1} = 5t - 2t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 10\pi t^2$	1	10		
17	1	$\varphi_{e_1} = 6t - 2t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 6\pi t - 3\pi t^2$	1	9		
	2	$\varphi_{e_1} = 3t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 10\pi t - 2\pi t^2$	1	24		
18	1	$\varphi_{e_1} = 4t - t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 6\pi t^2$	1	12	20	
	2	$\varphi_{e_1} = 6t - 2t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 10\pi t^2$	1	10	15	
19	1	$\varphi_{e_1} = 5t - t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 4t^2$	2		12	60
	2	$\varphi_{e_1} = 2t^3$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 30t - 10t^2$	1		10	60
20	1	$\varphi_{e_1} = t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 15t^2$	2		50	60
	2	$\varphi_{e_1} = 4t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 20t - 4t^2$	1		20	60
21	1	$\varphi_{e_1} = 2t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 5\pi t^2$	2	20		
	2	$\varphi_{e_1} = 5t - t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 8\pi t^2$	1	12		

Окончание табл. 1

1	2	3	4	5	6	7	8
22	1	$\varphi_{e_1} = t^3$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 5\pi t^2$	1	10		
	2	$\varphi_{e_1} = 10t - t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 8\pi t^2$	2	32		
23	1	$\varphi_{e_1} = 6t - t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 10\pi t^2$	1	10	5	
	2	$\varphi_{e_1} = 5t - 2t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 5\pi t^2$	2	40	10	
24	1	$\varphi_{e_1} = 4t - t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 10t^2$	1		10	
	2	$\varphi_{e_1} = 3t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 15t - 5t^2$	1		20	
25	1	$\varphi_{e_1} = 6t - 2t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 5\pi t^2$	1	15		
	2	$\varphi_{e_1} = 2t^3$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 8\pi t^2$	1	16		
26	1	$\varphi_{e_1} = t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 24\pi t^2$	1	16		
	2	$\varphi_{e_1} = 5t - t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 10\pi t^2$	1	15		
27	1	$\varphi_{e_1} = 2t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 10\pi t^2$	1	10		
	2	$\varphi_{e_1} = 7t - 3t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 5\pi t^2$	1	15		
28	1	$\varphi_{e_1} = 2t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 8\pi t^2$	1	16		
	2	$\varphi_{e_1} = 7t - 2t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 10\pi t^2$	1	20		
29	1	$\varphi_{e_1} = 3t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 4\pi t^2$	1	8	18	
	2	$\varphi_{e_1} = 5t - t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 2\pi t^2$	2	48	50	
30	1	$\varphi_{e_1} = 2t - 3t^2$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 15\pi t - 5\pi t^2$	1	30		
	2	$\varphi_{e_1} = t^2 - 2t^3$	$O_1M_1 = S_{r_1} = 12\pi t - 6\pi t^2$	1	12		

Таблица 2. **Исходные данные для задания 2**

№ схемы	№ варианта	Уравнение движения тела D $\varphi_{e_2} = f(t)$, рад	Уравнение относительного движения точки M $O_2M_2 = S_{r_2} = f(t)$, см	t, с	R, см	l, см	α, град
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	$\varphi_{e_2} = 5t - 2t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 10t - t^2$	1	9		
	2	$\varphi_{e_2} = 2t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 5t^2$	2	20		

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	$\varphi_{e_2} = 2t^2 - 3t$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 20t - 2t^2$	2			30
	2	$\varphi_{e_2} = 7t - 2t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 10t^2$	1			60
3	1	$\varphi_{e_2} = 7t - t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 15pt^2$	1	30		
	2	$\varphi_{e_2} = t^3$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 4\pi t^2$	1	12		
4	1	$\varphi_{e_2} = 3t - 2t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 12\pi t - 2\pi t^2$	1	60		
	2	$\varphi_{e_2} = 7\mathrm{t} - t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 10\mathrm{p}t^2$	1	30		
5	1	$\varphi_{e_2} = t^3$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 10t - t^2$	2			30
	2	$\varphi_{e_2} = 5t - t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 8t^2$	1			30
6	1	$\varphi_{e_2} = 10t - 2t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 6\pi t^2$	1	12	10	
	2	$\varphi_{e_2} = 15t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 9\pi t - 3\pi t^2$	1	9	5	
7	1	$\varphi_{e_2} = 3t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 15\pi t - 5\pi t^2$	1	5	8	
	2	$\varphi_{e_2} = 5t - t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 6\pi t^2$	1	18	10	
8	1	$\varphi_{e_2} = 4t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 12\pi t - 2\pi t^2$	1	30		
	2	$\varphi_{e_2} = 5t - 2t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 4\pi t^2$	1	12		
9	1	$\varphi_{e_2} = 5t - t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 15t^2$	1			30
	2	$\varphi_{e_2} = 12t^2 - 29t$	$O_2M_2 = S_{r_2} = t^2 + 2$	1			60
10	1	$\varphi_{e_2} = 6t - t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 10t - 4t^2$	1		6	
	2	$\varphi_{e_2} = 3t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 15t - 5t^2$	1		10	
11	1	$\varphi_{e_2} = 10t - 3t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 30t - 10t^2$	1			75
	2	$\varphi_{e_2} = 5t - 3t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 10t^2$	1			60
12	1	$\varphi_{e_2} = 3t - t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 15\pi t - 5\pi t^2$	1	30		
	2	$\varphi_{e_2} = 2t^3$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 10\pi t^2$	1	30		
13	1	$\varphi_{e_2} = 10t - 2t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 9\pi t - 3\pi t^2$	1	9		
	2	$\varphi_{e_2} = 5t - t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 4\pi t^2$	1	8		
14	1	$\varphi_{e_2} = 6t - 2t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 15t - 10t^2$	1			
	2	$\varphi_{e_2} = 3t - 2t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 8t - 2t^2$	1			

Продолжение табл. 2

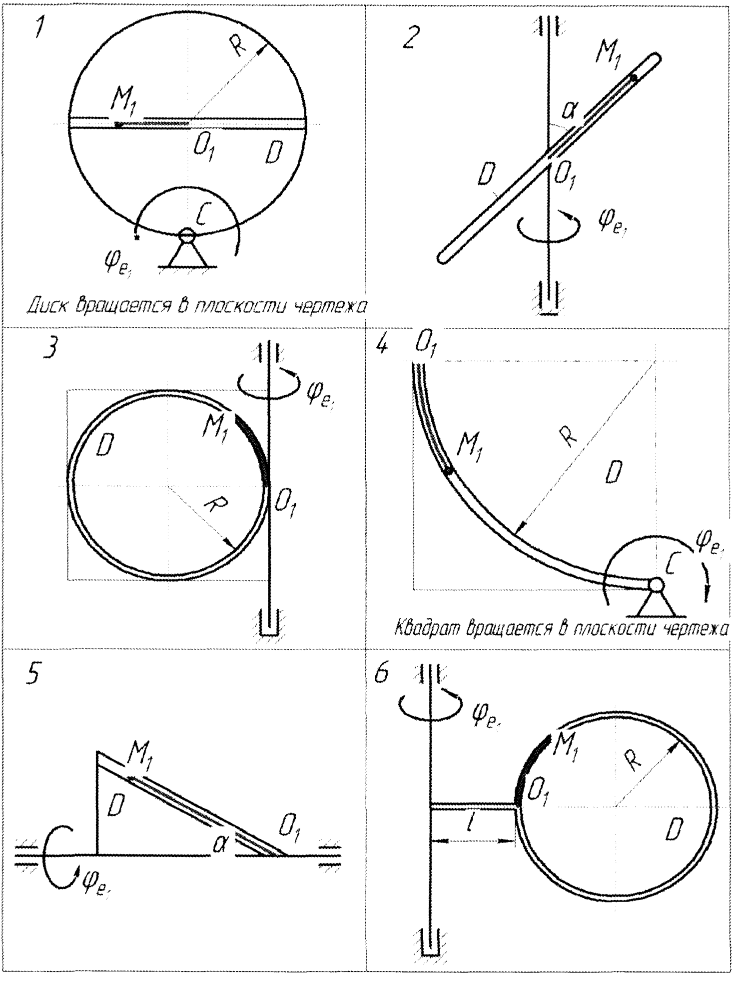
1	2	3	4	5	6	7	8
15	1	$\varphi_{e_2} = 2t^3$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 30t - 10t^2$	1			60
	2	$\varphi_{e_2} = 7t - 3t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 80t^2$	1			30
16	1	$\varphi_{e_2} = 2t^3$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 8\pi t^2$	1	8		
	2	$\varphi_{e_2} = 2t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 20\pi t - 5\pi t^2$	1	15		
17	1	$\varphi_{e_2} = 5t - t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 4\pi t^2$	1	12		
	2	$\varphi_{e_2} = 7t - 3t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 5\pi t^2$	1	30		
18	1	$\varphi_{e_2} = 8t - 3t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 4\pi t^2$	1	24	30	
	2	$\varphi_{e_2} = 10t - 4t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 8\pi t^2$	1	16	20	
19	1	$\varphi_{e_2} = 2t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 20t - t^2$	2		10	60
	2	$\varphi_{e_2} = 5t - 2t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 4\pi t^2$	1		15	60
20	1	$\varphi_{e_2} = 2t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 15t - 5t^2$	1		30	60
	2	$\varphi_{e_2} = 7t - 2t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 10t^2$	1		15	60
21	1	$\varphi_{e_2} = 7t - 2t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 4\pi t^2$	1	6		
	2	$\varphi_{e_2} = 2t^3$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 10\pi t^2$	2	40		
22	1	$\varphi_{e_2} = 3t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 4\pi t^2$	1	12		
	2	$\varphi_{e_2} = 6t - t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 10\pi t^2$	1	20		
	3	$\varphi_{e_2} = 2t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 12\pi t^2$	1	8	14	
23	1	$\varphi_{e_2} = 7t - 2t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 4\pi t^2$	1	24	8	
	2	$\varphi_{e_2} = 2t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 12\pi t^2$	1	8	14	
24	1	$\varphi_{e_2} = t^3$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 20t - 4t^2$	1		40	
	2	$\varphi_{e_2} = 6t - 2t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 8t^2$	1		28	
25	1	$\varphi_{e_2} = 3t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 15\pi t - 5\pi t^2$	1	20		
	2	$\varphi_{e_2} = 7t - 2t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 5\pi t^2$	1	10		
26	1	$\varphi_{e_2} = 6t - 2t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 6\pi t^2$	1	12		
	2	$\varphi_{e_2} = 2t^3$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 4\pi t^2$	2	48		

1	2	3	4	5	6	7	8
27	1	$\varphi_{e_2} = t^3$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 15\pi t - 5\pi t^2$	1	30		
	2	$\varphi_{e_2} = 5t - t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 8\pi t^2$	1	8		
28	1	$\varphi_{e_2} = 2t^3$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 20\pi t - 5\pi t^2$	1	30		
	2	$\varphi_{e_2} = 3t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 4\pi t^2$	1	24		
29	1	$\varphi_{e_2} = 6t - t^3$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 15\pi t^2$	1	30	20	
	2	$\varphi_{e_2} = 6t - 2t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 30\pi t - 10\pi t^2$	1	40	60	
30	1	$\varphi_{e_2} = t - 2t^2$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 20\pi t - 4\pi t^2$	1	32		
	2	$\varphi_{e_2} = 4t - t^3$	$O_2M_2 = S_{r_2} = 6\pi t^2$	1	18		

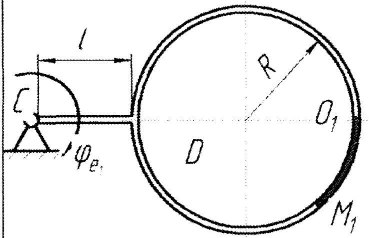
ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Расчетные схемы для задания 1

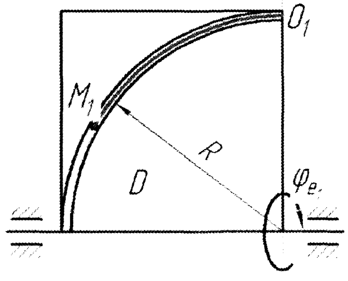


7

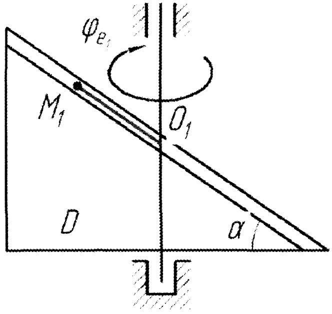


Кольцо вращается в плоскости чертежа

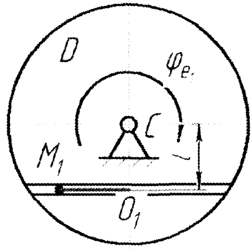
8



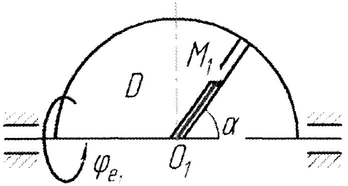
9



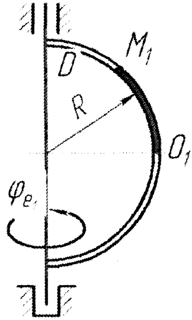
10

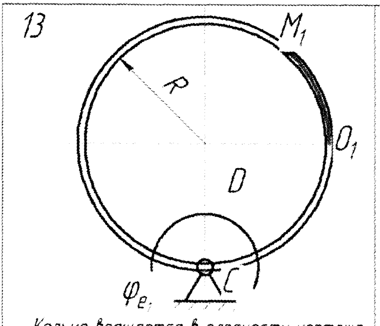


11

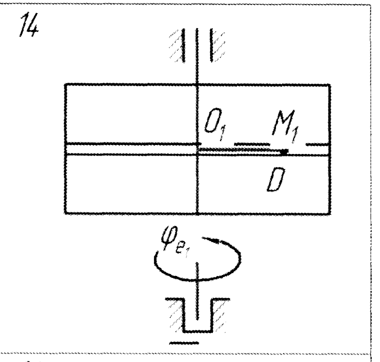


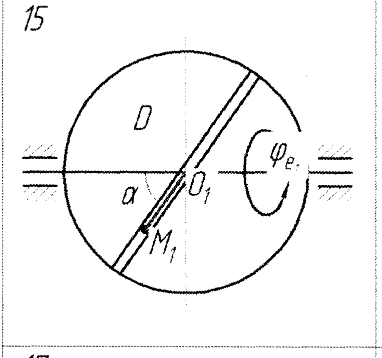
12

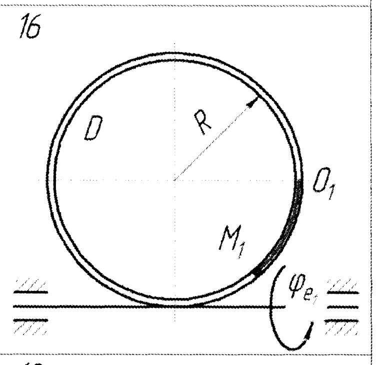


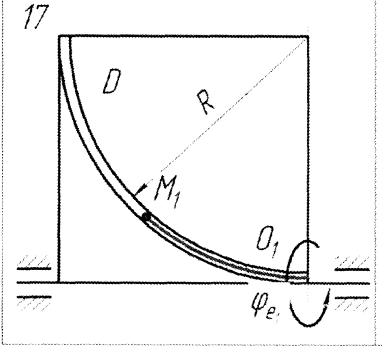


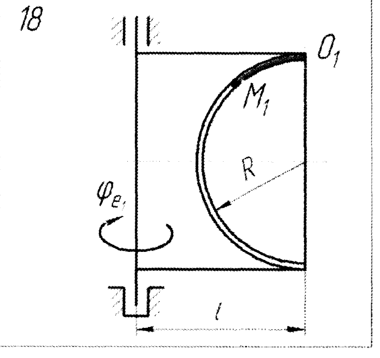
Кольцо вращается в плоскости чертежа



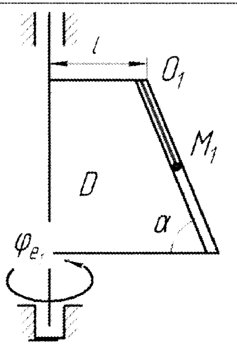




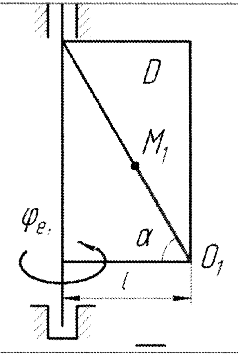




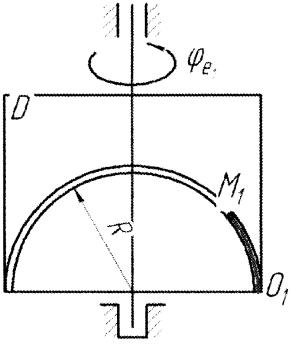
19



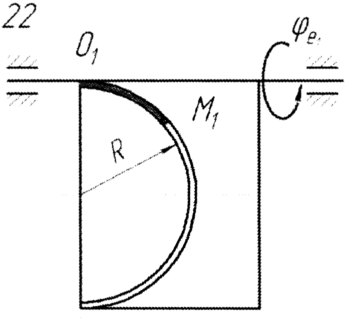
20



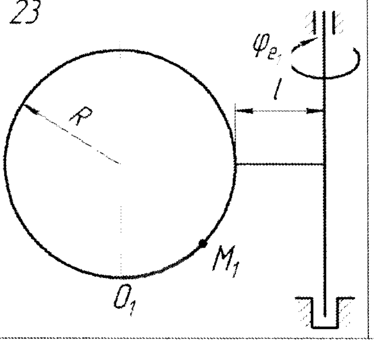
21



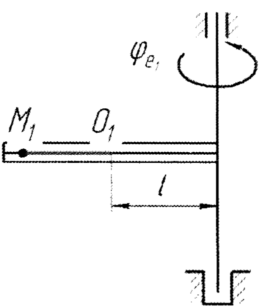
22



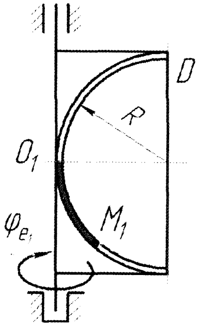
23



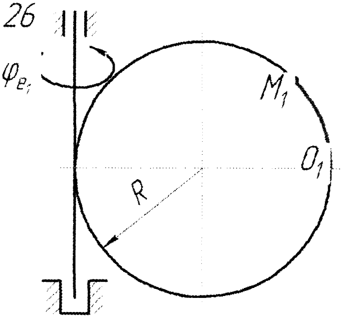
24



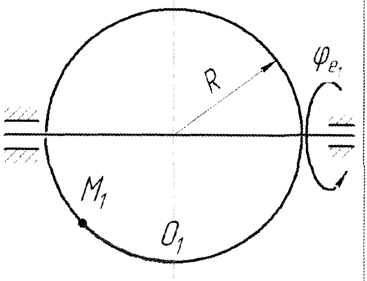
25



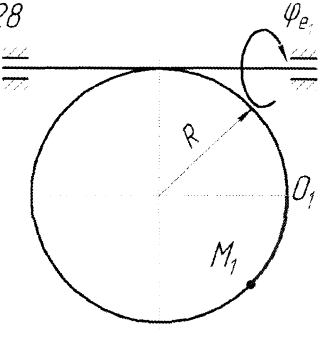
26



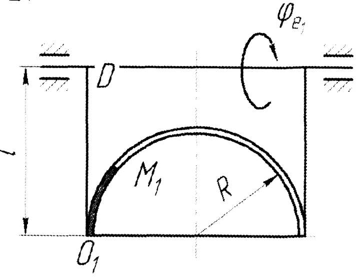
27



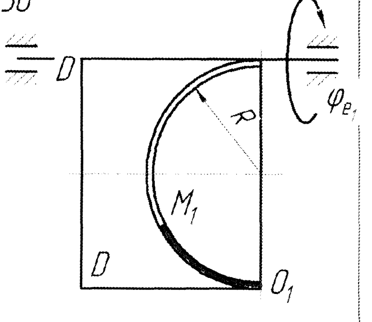
28



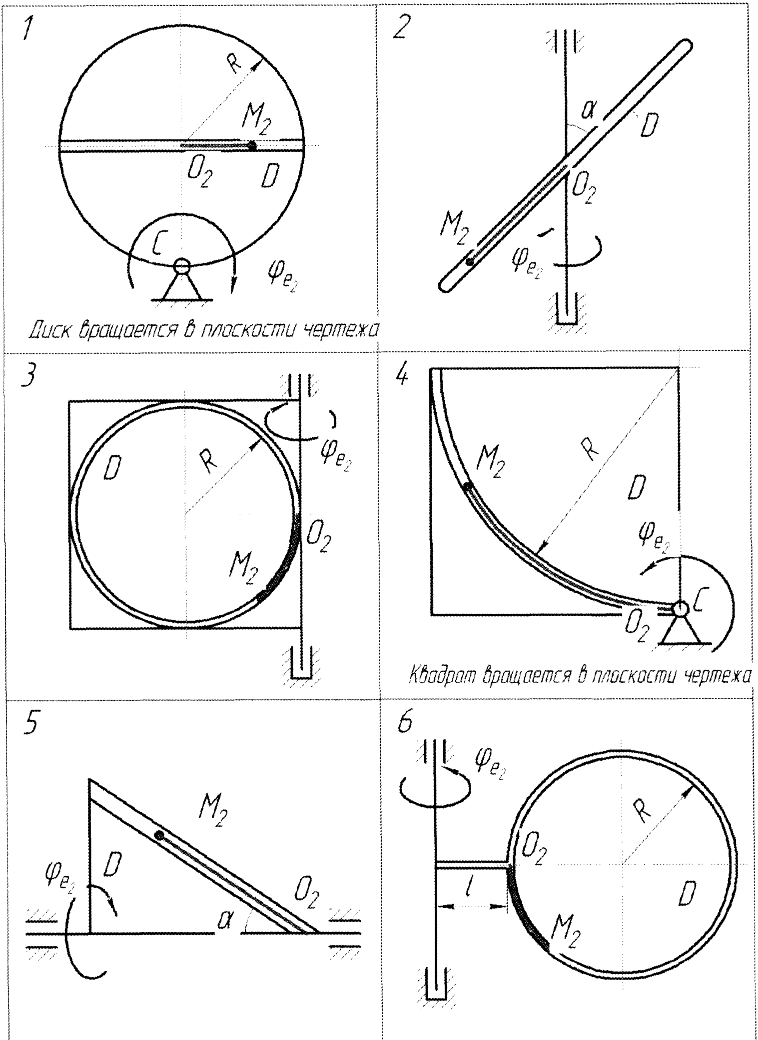
29



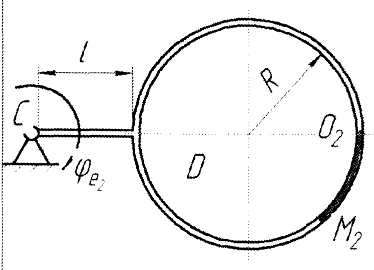
30



Расчетные схемы для задания 2

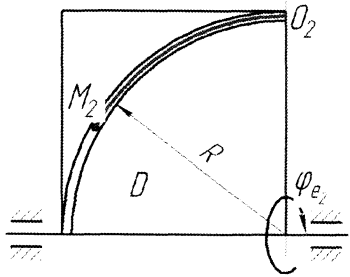


7

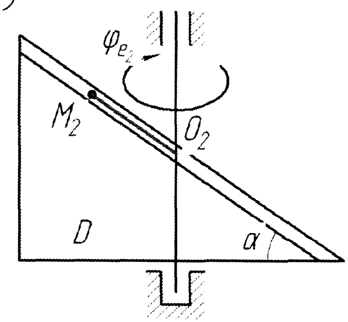


Кольцо вращается в плоскости чертежа

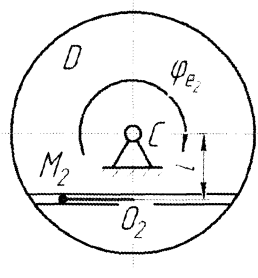
8



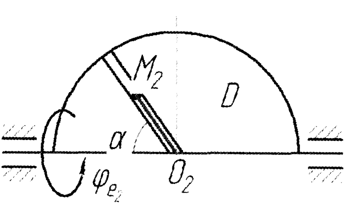
9



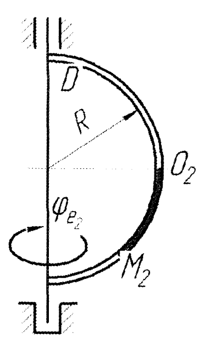
10

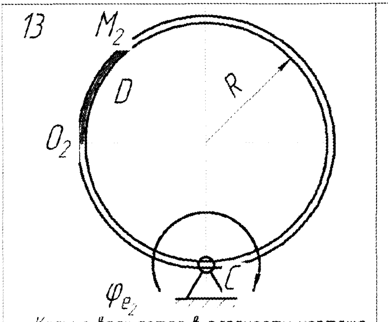


11

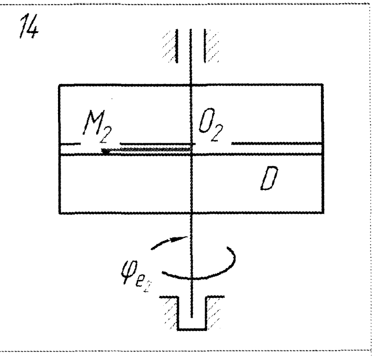


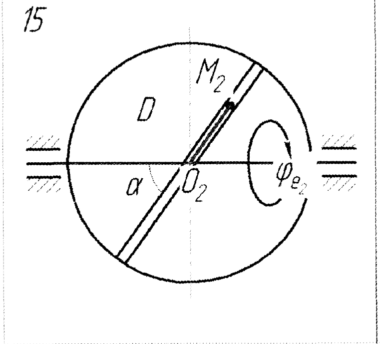
12

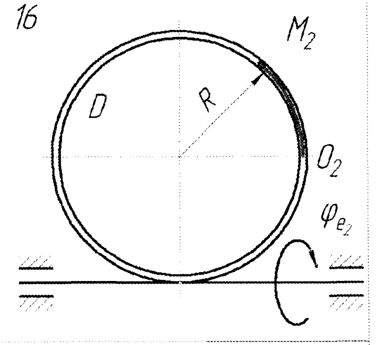


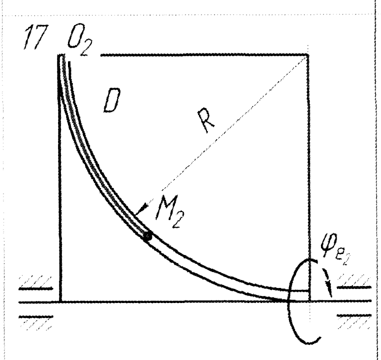


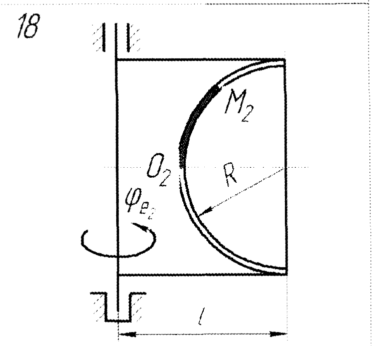
Кольцо вращается в плоскости чертежа



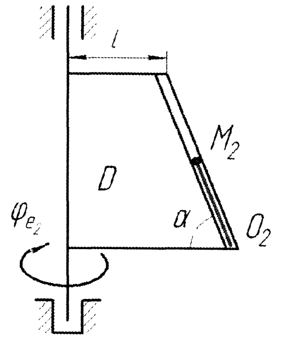




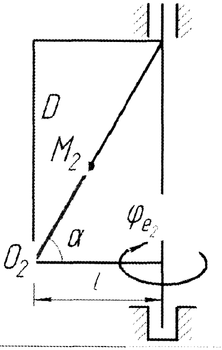




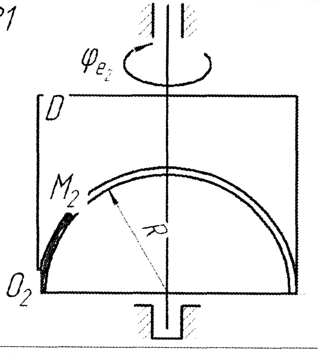
19



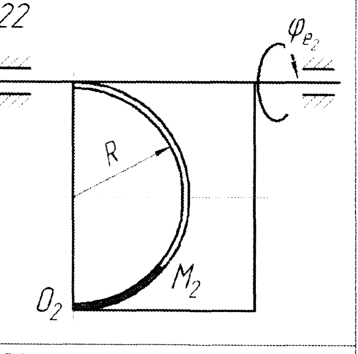
20



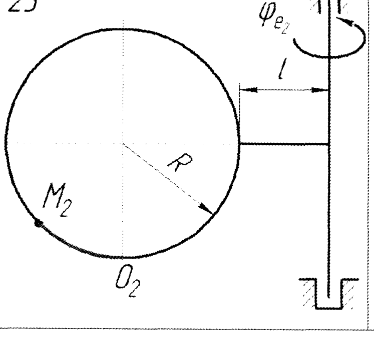
21



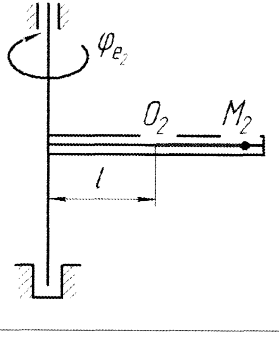
22



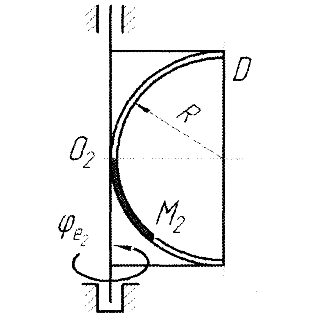
23



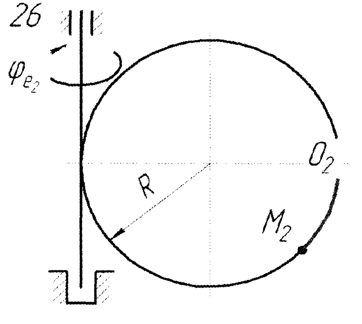
24



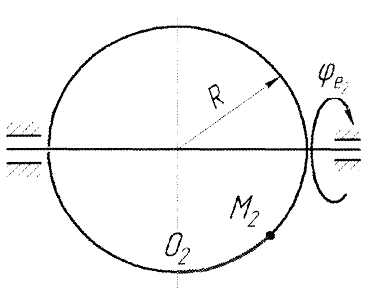
25



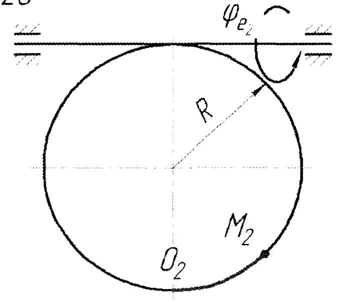
26



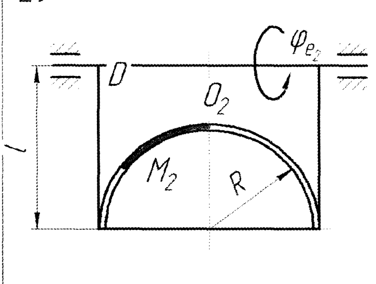
27



28



29



30