Введение

Основной трудностью, с которой студент встречается при изучении темы «Простейшие движения твердого тела», заключается в умении применять теоретические положения к решению практических задач. Поэтому в методических указаниях рассмотрена подробная методика определения основных кинематических характеристик при сложном движении точки и приведены конкретные примеры.

С целью лучшего усвоения студентами этой темы им предлагается ознакомится с теорией, разобрать приведенные примеры и решить самостоятельно два задания из данных указаний.

С основными положениями кинематики сложного движения точки можно ознакомиться в соответствующей литературе.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг – Москва: Высшая школа, 2010. – 416 с.
2. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: в 2 т. /Н.В.Бутенин, Я.Л.Лунц, Д.Р.Меркин. – М.: Лань, 2009. – Т.1. – 736 с.
3. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики/ А. А. Яблонский – М.: Интегралл -Пресс, 2007. – 608 с.
4. Мещерский, И. В. Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. _ М.: Наука, 2008. – 448 с.

1. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА.

Поступательным движением твердого тела называют такое его движение, при котором любая прямая, неизменно связанная с телом, остается параллельна самой себе в любой момент времени. Простейшим примером поступательного движения является прямолинейное движение кузова автомобиля.

Необходимо иметь в виду, что из понятия поступательного движения тела не следует, что оно обязательно должно двигаться прямолинейно, как часто ошибочно считают. Точки тела могут описывать любую траекторию (рис. 1), в том числе и окружность, но если прямые линии, неразрывно связанные с телом, все время параллельны первоначальному положению, тело движется поступательно.

Примерами более сложного поступательного движения являются движение планки эксцентрикового мотовила комбайна, педали велосипеда, линейки чертежного прибора и некоторые другие. Есть специальные механизмы, обеспечивающие поступательное движение тел.

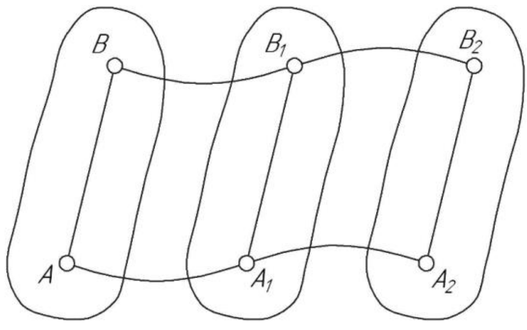


Рис. 1

На рис. 2 приведены два' из них. Первый – механизм так называемого шарнирного четырехзвенника. При параллельных и равных кривошипах *OA* и O_1B звено *AB* движется поступательно, хотя все его точки описывают окружности. Именно особенности движения такого механизма и положены в конструкцию мотовила комбайна, спарника тепловоза, чертежного прибора и др.

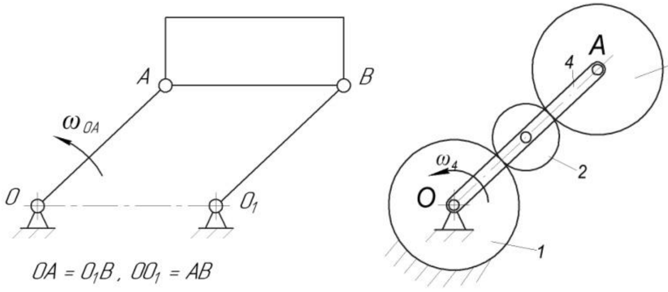


Рис.2

Во втором, планетарном механизме при вращении водила *OA* шестерня 3 движется поступательно.

При изучении поступательного движения необходимо твердо уяснить следующее:

1. При поступательном движении тела траектории всех точек тела одинаковые (при наложении совпадают);

2. Скорости и ускорения всех точек тела равны по величине и направлению.

Из сказанного следует, что для изучения поступательного движения тела достаточно изучить и определить кинематические характеристики какой-либо одной точки. Для остальных в рассматриваемый момент времени они будут такими же. Поэтому при практических расчетах размерами поступательно движущегося тела пренебрегают, а изображают его в виде точки. Изучение такого движения тела производится на основе формул, полученных для материальной точки.

Итак, тело, движущееся поступательно, можно считать материальной точкой.

2. ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

2.1. Основные понятия и особенности изучения

При изучении кинематики вращательного движения тела необходимо хорошо уяснить понятие вращательного движения.

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором все его точки, лежащие на некоторой неразрывно связанной с телом прямой, остаются неподвижными в течение всего времени движения. Неподвижная прямая называется осью вращения тела.

В технике вращательное движение тел – самый распространенный вид движения. Особенностью исследования кинематики вращательного движения является то, что всякий раз приходится решать, как бы две задачи: определять кинематические характеристики не только тела в целом, но и его отдельных точек. Причем, как будет показано далее, кинематические характеристики тела и его точек различны. Поэтому говорить, например, о скорости вращающегося тела, не оговаривая о какой именно скорости идет речь, нельзя и не имеет смысла.

Для оценки положения вращающегося тела в пространстве используется (рис. 3) угол его поворота φ. Заданием его величины и знака полностью определяется положение тела (угол поворота – угол между неподвижной плоскостью Π_0, проведенной через ось вращения Z, и плоскостью Π, неразрывно связанной с телом). Угол поворота φ принято считать положительным, если, глядя с конца оси Z мы видим его отложенным против движения часовой стрелки, и отрицательным – по движению часовой стрелки. Измеряют угол φ в радианах. Если за какой-то промежуток времени тело совершает Nоборотов, то при этом угол поворота:

$$\varphi = 2\pi N. \tag{1}$$

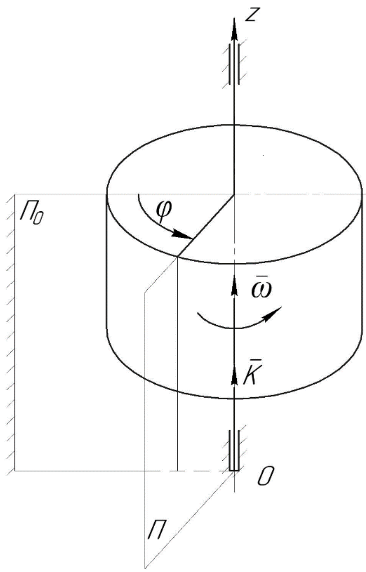


Рис.3

При вращении тела угол его поворота изменяется с течением времени, следовательно, он является функцией времени:

$$\varphi = f(t). \tag{2}$$

Равенство (2) называют уравнением, или законом вращательного движения тела вокруг неподвижной оси.

2.2. Угловая скорость и угловое ускорение вращающегося тела

Для характеристики вращательного движения тела используют понятие угловой скорости и углового ускорения.

Быстроту изменения угла поворота тела оценивают с помощью угловой скорости ω, величину которой определяют как производную от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (3)$$

Единицей измерения угловой скорости является радиан в секунду (рад/с или $с^{-1}$). Если ω > 0, поворот тела происходит в сторону увеличения угла φ, если ω < 0, то поворот происходит в сторону уменьшения угла. Таким образом, знак ω указывает направление вращения тела в данный момент времени.

В технике скорость равномерного ращения тела часто определяют числом оборотов в минуту, обозначая эту величину через *n* об/мин. Найдем зависимость между *n* об/мин и ω 1/с. При одном обороте тело повернется на угол 2π, а при *n* оборотах на $2\pi n$; этот поворот делается за время t = 1 мин = 60 с.

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi n}{60}. \qquad (4)$$

Угловую скорость вращающегося тела принято изображать вектором. Вектор угловой скорости со направляют вдоль оси вращения (рис. 3) так, чтобы, смотря навстречу этому вектору, вращение виделось происходящим против движения часовой стрелки. Модуль этого вектора равен величине угловой скорости тела.

Для характеристики быстроты изменения угловой скорости с течением времени используется угловое ускорение ε. Величина его в любой момент времени равна первой производной от угловой скорости по времени или второй производной от угла поворота по времени.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (5)$$

Как и угловую скорость, угловое ускорение изображают в виде вектора $\bar{\varepsilon}$. Направлен он также вдоль оси вращения в сторону вектора $\bar{\varpi}$, если величины $\bar{\varpi}$ и $\bar{\varepsilon}$ одинакового знака, и в сторону, противоположную ему, если знаки их величин разные (рис. 4).

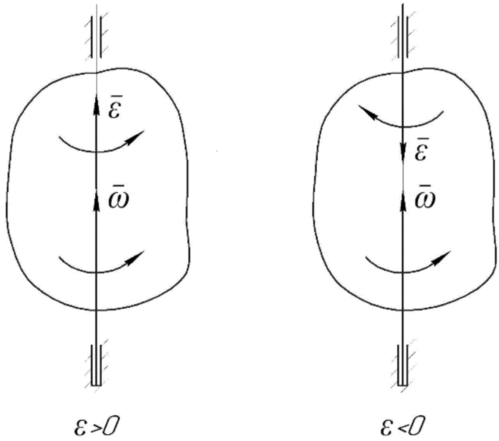


Рис.4

Размерность углового ускорения – радиан на секунду в квадрате (рад/с^2 или с$^{-2}$). Если $\omega > 0$, то при $\varepsilon > 0$ вращение ускоренное, а при $\varepsilon < 0$ – замедленное. Если $\omega < 0$, то при $\varepsilon < 0$ вращение ускоренное, а при $\varepsilon > 0$ – замедленное. Отсюда следует, что при одинаковых знаках ω и ε вращение ускоренное, а при разных – замедленное.

2.3 Частные случаи вращения твердого тела

1. $\omega \neq 0$, $\varepsilon = 0$. В этом случае угловая скорость постоянна, а вращение равномерное. Закон движения при этом определяется из следующего равенства:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t.$$

Здесь φ_0 – угол поворота в начальный момент времени ($t = 0$).

2. $\omega \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$. Вращение происходит с непостоянной угловой скоростью. Причем если $\varepsilon \neq const$, то угловую скорость и закон движения необходимо определять интегрированием, вначале выражения углового ускорения, а затем – угловой скорости.

$$\frac{d\omega}{dt} = \pm\varepsilon; \text{ откуда } \int_{\omega_n}^{\omega} d\omega = \pm\int_0^t \varepsilon dt \cdot$$

После интегрирования получаем:

$$\omega = \omega_0 \pm \int_0^t \varepsilon dt \cdot \tag{6}$$

Далее имея в виду, что $\omega = \frac{d\omega}{dt}$, получаем:

$$d\varphi = \omega dt;\ \text{или}\ \int_{\omega_n}^{\omega} d\omega = \int_0^t \omega_0 dt \pm \int_0^t \int \varepsilon dt,$$

откуда получаем:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \int_0^t \int \varepsilon dt \cdot \tag{7}$$

3. Если же ε = *const*, то движение равнопеременное, и из равенств (6) и (7) получаем:

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \tag{8}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{\alpha} \cdot \tag{9}$$

Следует иметь ввиду, что имеет место соответствие в формулах для определения кинематических характеристик криволинейного движения точки и вращательного движения тела. Наглядно сказанное представлено в табл. 1.

Таблица 1. **Кинематические аналоги**

Криволинейное движение точки	Вращение тела
Уравнение движения точки $S = f(t)$	Уравнения вращательного движения $\varphi = f(t)$
Величина скорости точки: $V = dS / dt$	Угловая скорость тела: $\omega = d\varphi / dt$
Величина касательного ускорения: $a_\tau = dV / dt = d^2S / dt^2$	Величина углового ускорения: $\varepsilon = d\omega / dt = d^2\varphi / dt^2$
Равномерное движение: $a_\tau = 0$; $V = const$	Равномерное движение тела: $\varepsilon = 0$; $\omega = const$

2.4 Скорости и ускорения точек вращающего тела

В основу определения скоростей и ускорений точек тела при его вращении положен тот факт, что траектории, описываемые точками, всегда известны. Это окружности радиуса h. Известно также положительное направление движения. Поэтому для определения скоростей и ускорений точек тела используются формулы, полученные при естественном способе задания движения точки.

Для криволинейного движения точки имеем:

$$V = \frac{dS}{dt}$$

Как видно из рис. 5, $S = h\varphi$.

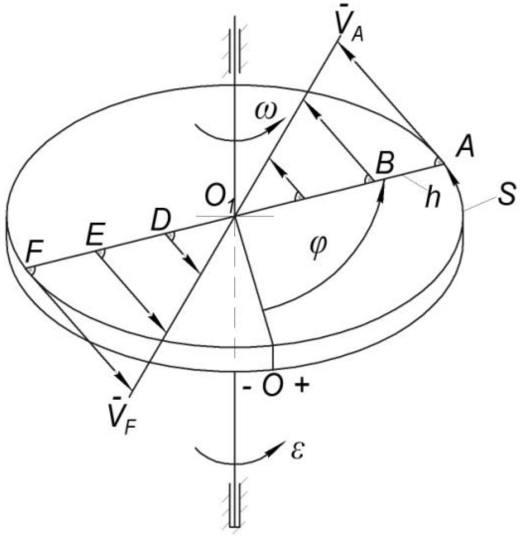


Рис.5

где S – длина дуги окружности, которую описывает точка;

h – расстояние от точки до оси вращения.

Тогда $V = \frac{d}{dt}(\varphi \cdot h) = \omega h \cdot$ (10)

Из полученной формулы видим, что скорость любой точки вращающегося тела равна его угловой скорости, помноженной на расстояние от точки до оси вращения. Следовательно, **величины скоростей точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям до оси вращения.** Направлены же векторы скоростей по касательным к окружностям, которые описывают точки, т.е. перпендикулярно расстояниям $h_к$ в сторону вращения тела, которое определяется направлением угловой скорости тела ω.

Величины ускорений точек тела определяют по его составляющим, касательному и нормальному.

Касательное находят по формуле:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \varepsilon \cdot h \cdot \qquad (11)$$

Нормальное по формуле:

$$a_n = \frac{V^2}{h} = \omega^2 \cdot h, \qquad (12)$$

Направляют вектор касательного ускорения, как и вектор скорости, по касательной к окружности, которую описывает точка, т.е. перпендикулярно радиусу этой окружности в сторону углового ускорения тела ε. При этом, если тело вращается ускоренно, то вектор касательного ускорения $\bar{a}_\tau$ и вектор скорости точки vнаправлены (рис. 6) в одну сторону по касательной к описываемой точкой окружности. При замедленном вращении векторы $\bar{a}_\tau$ и $\bar{V}$ направлены в противоположные стороны.

Вектор нормального ускорения $\bar{a}_n$ всегда направлен по радиусу окружности, описываемой точкой к ее центру, т.е вдоль h к оси вращения тела.

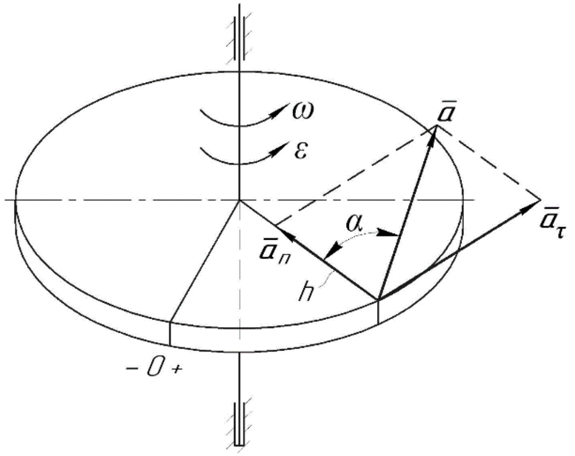


Рис.6

Из равенства (11)**видно, что** величина касательного ускорения точки, как и скорости, пропорциональна расстоянию от точки до оси вращения.

Величина вектора *a* полного ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = h\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}\,.$$

Направление вектора *a* можно определить по углу α между им и радиусом:

$$tg\alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}\,.$$

2.5 Указания к решению задач.

Методика решения задач на вращательное движение тела зависит от исходной информации об этом движении и правильного выбора формулы и их применения для определения кинематических характеристик тела. Например, если известны законы вращательного движения тела (2), то можно будет определить его угловую скорость и угловое ускорение по формулам 3 и 4, а затем, если нужно определить скорость и ускорение любой точки тела по формулам (10), (11), (12).

Если движение тела равномерное или равнопеременное, то определять его кинематические характеристики удобно, используя ранее полученные формулы (5), (8), (9). Если угловое ускорение тела переменное, то его угловую скорость и закон вращательного движения необходимо определять интегрированием углового ускорения, а затем угловой скорости по формулам (6) и (7).

Поскольку методика решения задач на вращательное движение тела достаточно проста, то рассмотрим ее на конкретных примерах.

Пример 1. Квадрат вращается в плоскости чертежа вокруг вертикальной оси, проходящей через точку *O*, по закону $\varphi = 5t - t^2$ рад. На дуге полуокружности радиуса $R = 10$ см, расположенной в плоскости квадрата, находится точка *M* (рис. 7, *а*). Для момента времени $t = 1$ с определить скорость и ускорение точки *M*.

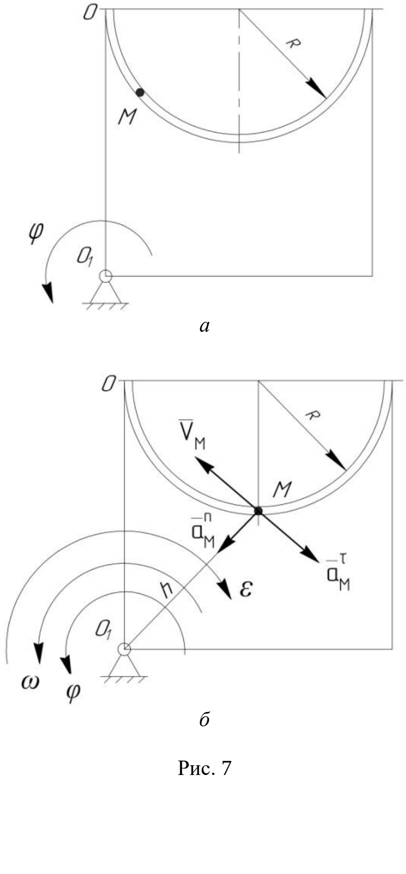


Рис. 7

Квадрат совершает вращательные движение, траекторий движения точки будет окружность радиуса $O_1M = h$. Для определения скорости и ускорения точки M используем формулы, по которым находятся эти кинематически для точки вращающегося тела.

Скорость точки M:

$$V_M = \omega_M \cdot h,$$

где h – расстояние от точки M до оси вращения, т.е.

$$h = O_1M = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} = 14{,}14 \text{ см},$$

где ω_M – модуль угловой скорости квадрата.

Величину угловой скорости найдем как первую производную от уравнения вращательного движения:

$$\omega_M = \frac{d\varphi_M}{dt} = \frac{d\left(5t - t^2\right)}{dt} = 5 - 2t \cdot$$

При $t = 1$ с, $\omega_M = 5 - 2 \cdot 1 = 3$ $с^{-1}$.

Положительный знак у величины ω_M показывает, что вращение квадрата происходит в направлении отсчета угла φ_M, изображаем на схеме направление круговой стрелкой (рис. 7б).

Вектор $\bar{\omega}_M$ направлен вдоль оси вращения квадрата вверх, чтобы с его конца вращение было видно против хода часовой стрелке.

Тогда скорость точки M.

$$V_M = 3 \cdot 14{,}14 = 42{,}42 \text{ см/с/}$$

Вектор $\bar{V}_M$ направлен по касательной к окружности в сторону вращения квадрата, т. е вектор $\overline{V_M}$ перпендикулярен h в сторону ω_M, $\bar{V}_M \perp h$ (рис. 7б).

Ускорение точки при вращении движения тела определяется как геометрическая сумма касательного и нормального ускорений, тогда:

$$a_M = \overline{a_M^{\tau}} + \overline{a_M^{n}}\,.$$

Модуль касательного ускорения точки *M:*

$$a_M^\tau = \varepsilon_M \cdot h,$$

где $\varepsilon_М$ – модуль углового ускорения квадрата.

Величину углового ускорения найдем как первую производную от закона изменения угловой скорости:

$$\varepsilon_M = \frac{d\omega_M}{dt} = \frac{d\left(5-2t\right)}{dt} = -2 \text{ с}^{-2}.$$

Отрицательный знак у величины $\varepsilon_М$ указывает на то, что вращение квадрата замедленное. Изображаем угловое ускорение на схеме круговой стрелкой в сторону противоположного положительному отсчету угла $\varphi_М$, тем самым учитываем отрицательный знак (рис. 7б)

Тогда

$$\overline{a_M^\tau} = \varepsilon_M \cdot h = 2 \cdot 14{,}14 = 28{,}28 \text{ см/с}^{-2}.$$

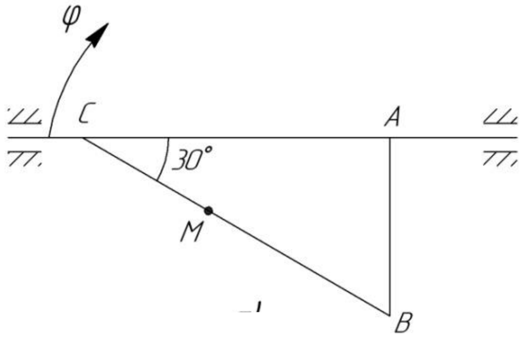
Вектор $\overline{a_M^\tau}$ направлен по касательной к окружности в сторону ε, т.е. вектор $\overline{a_M^\tau}$ перпендикулярен в сторону $\varepsilon_М$, $\overline{a_M^\tau} \perp h$ (рис. 7б).

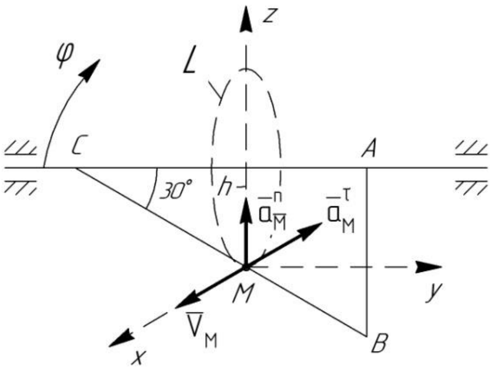
Модуль нормального ускорения в переносном движении.

$$\overline{a_M^\tau} = \omega_M^2 = 3^2 \cdot 14{,}14 = 127{,}26 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\overline{a_M^\tau}$ направлен к центру окружности, т.е. вдоль *h* к оси вращения квадрата (рис. 7, *б*).

Пример 2. Прямоугольный треугольник *ABC* (рис. 8, *а*) вращается вокруг горизонтальной оси по закону $\varphi = 5t - 3t^2$ рад. На гипотенузе находится точка *M*. Для момента времени t =1/6 с определить скорость и ускорение точки *M*.





б

Рис. 8

Учитывая, что треугольник *ABC* совершает вращательное движение, траекторией движения такой точки будет окружность *L* радиуса *h* (рис. 8, *б*), а для определения ее скорости ускорения используем формулы, по которым находятся эти кинематические характеристики для точек вращающегося тела.

Скорость точки *M*:

$$V_M = \omega_M \cdot h \cdot$$

где ω_M – модуль угловой скорости треугольника;

h – расстояние от точки М до оси вращения, определяемое следующим образом: $h = CM \cdot \sin 30^{\circ} = 10 \cdot 0{,}5 = 5$ см;

Величина угловой скорости:

$$\omega_M = \frac{d\varphi_M}{dt} = \frac{d\left(5t - 3t^2\right)}{dt} = 5 - 6t \cdot$$

При t = 1/6 с.

$$\omega_M = 5 - 6 \cdot \frac{1}{6} = 4 \text{ с}^{-1}/$$

Положительный знак у величины ω_M показывает, что вращение треугольника происходит в направлении отсчета угла ω_M. Изображаем на схеме (рис. 8б) направление φ_e круговой стрелкой. Тогда скорость точки M:

$$V_M = 4 \cdot 5 = 20 \text{ см/с.}$$

Вектор $\bar{V}_M$, направлен по касательной к окружности L в сторону вращения треугольника, т.е. вектор $\bar{V}_M$ перпендикулярен плоскости чертежа. Для удобства его изображения на схеме выберем пространственную систему осей координат $Mxyz$ (рис. 8б). Тогда вектор $\bar{V}_M$ показываем вдоль оси Mx.

Ускорение точки при вращательном движении тела определяется как геометрическая сумма касательного и нормального ускорений.

Тогда

$$\overline{a_M} = \overline{a_M^\tau} + \overline{a_M^n} \cdot$$

Модуль касательного ускорения в переносном движении:

$$a_M^\tau = \varepsilon_M \cdot h,$$

где ε_M – модуль углового ускорения треугольника.

Величина его:

$$\varepsilon_M = \frac{d\omega_M}{dt} = \frac{d\left(5 - 6t\right)}{dt} = -6 \text{ с}^{-2}$$

Разные знаки ω_M и ε_M указывают на то, что вращение треугольника замедленное. Изображаем угловое ускорение на схеме круговой стрелкой в сторону, противоположную положительному направлению отсчета угла φ_e и тем самым учитываем отрицательный знак ε_M.

Тогда:

$$a_M^\tau = 6 \cdot 5 = 30 \text{ см/с}^{-2}$$

Вектор a_M^τ направлен по касательной к окружности *L* в сторону ε_M, т. е. в сторону, противоположную вектору $\bar{V}_M$.

Модуль нормального ускорения в переносном движении

$$a_M^n = \omega_M^2 \cdot h = 4^2 \cdot 5 = 80 \text{ см/с}^{-2}$$

Вектор $\overline{a_M^n}$. направлен к центру окружности *L*, т. е. вдоль *h* к оси вращения треугольника (параллелен оси *Mz*).

Задания

По уравнению движения тела *D* для момента времени *t* определить скорость и ускорение точки *M*.

Задание 1. Данные для расчетов приведены в табл. 2., схемы механизмов показаны на рисунках в прил. 1.

Задание 2. Данные для расчетов приведены в табл. 3, схемы механизмов показаны на рисунках в прил. 2.

Таблица 2. **Исходные данные для задания 1**

№ схемы	№ варианта	Уравнение движения тела *D*, рад: $\varphi_1 = f(t)$	t, с	*R*, см	ℓ, см	α, град
1	2	3	4	5	6	7
1	1	$\varphi_1 = 7t - 3t^2$	2	16		
	2	$\varphi_1 = 6t - t^2$	1	10		
2	1	$\varphi_1 = 8t - 3t^2$	2			30
	2	$\varphi_1 = 2t^2$	2			60
3	1	$\varphi_1 = t^2$	1	10		
	2	$\varphi_1 = 5t - t^2$	2	20		
4	1	$\varphi_1 = 4t - t^2$	1	30		
	2	$\varphi_1 = 2t^2$	1	12		

Продолжение табл. 2

1	2	3	4	5	6	7
5	1 2	$\varphi_1 = 10t - 3t^2$ $\varphi_1 = 2t^3$	1 1			30 30
6	1 2	$\varphi_1 = 5t - t^2$ $\varphi_1 = 3t - 2t^2$	1 1	8 6	14 7	
7	1 2	$\varphi_1 = 7t - t^2$ $\varphi_1 = 2t^2$	1 1	10 20	8 5	
8	1 2	$\varphi_1 = 2t^2$ $\varphi_1 = 7t - t^2$	2 1	8 30		
9	1 2	$\varphi_1 = 2t^3$ $\varphi_1 = t^3$	2 1			60 30
10	1 2	$\varphi_1 = 10t - 3t^2$ $\varphi_1 = 7t - 2t^2$	1 1		10 20	
11	1 2	$\varphi_1 = 7t - 2t^2$ $\varphi_1 = 2t^3$	2 1			30 30
12	1 2	$\varphi_1 = 2t^2$ $\varphi_1 = 7t - 2t^2$	1 2	30 48		
13	1 2	$\varphi_1 = 8t - 2t^2$ $\varphi_1 = 2t^2$	1 1	10 24		
14	1 2	$\varphi_1 = 12t - 2t^2$ $\varphi_1 = 8t - t^2$	1 1			
15	1 2	$\varphi_1 = 6t - 2t^2$ $\varphi_1 = 2t^2$	2 1			30 60
16	1 2	$\varphi_1 = 10t - 3t^2$ $\varphi_1 = 5t - 2t^2$	1 1	8 10		
17	1 2	$\varphi_1 = 6t - 2t^2$ $\varphi_1 = 2t^2$	1 1	9 24		
18	1 2	$\varphi_1 = 4t - t^2$ $\varphi_1 = 6t - 2t^2$	1 1	12 10	20 15	
19	1 2	$\varphi_1 = 5t - t^2$ $\varphi_1 = 2t^3$	2 1		12 10	60 60
20	1 2	$\varphi_1 = t^2$ $\varphi_1 = 4t^2$	2 1		50 20	60 60
21	1 2	$\varphi_1 = 2t^2$ $\varphi_1 = 5t - t^2$	2 1	20 12		
22	1 2	$\varphi_1 = t^3$ $\varphi_1 = 10t - t^2$	1 2	10 32		
23	1 2	$\varphi_1 = 6t - t^2$ $\varphi_1 = 5t - 2t^2$	1 2	10 40	5 10	
24	1 2	$\varphi_1 = 4t - t^2$ $\varphi_1 = 3t^2$	1 1		10 20	
25	1 2	$\varphi_1 = 6t - t^2$ $\varphi_1 = 2t^3$	1 1	15 16		
26	1 2	$\varphi_1 = t^2$ $\varphi_1 = 5t - t^2$	1 1	16 15		

Окончание табл. 2

1	2	3	4	5	6	7
27	1 2	$\varphi_1 = 2t^2$ $\varphi_1 = 7t - 3t^2$	1 1	10 15		
28	1 2	$\varphi_1 = 2t^2$ $\varphi_1 = 7t - 2t^2$	1 1	16 20		
29	1 2	$\varphi_1 = 3t^2$ $\varphi_1 = 5t - t^2$	1 2	8 48	18 50	
30	1 2	$\varphi_1 = 2t - 3t^2$ $\varphi_1 = t^2 + 2t^3$	1 1	30 12		

Таблица 3. **Исходные данные для задания 2**

№ схемы	№ варианта	Уравнение движения тела D, рад: $\varphi_1 = f(t)$	t , с	R, см	ℓ, см	α, град
1	2	3	4	5	6	7
1	1 2	$\varphi_2 = 5t - 2t^2$ $\varphi_2 = 2t^2$	1 2	9 20		
2	1 2	$\varphi_2 = 2t^2 - 3t$ $\varphi_2 = 7t - 2t^2$	2 1			30 60
3	1 2	$\varphi_2 = 7t - t^2$ $\varphi_2 = t^3$	1 1	30 12		
4	1 2	$\varphi_2 = 3t - 2t^2$ $\varphi_2 = 7t - t^2$	1 1	60 30		
5	1 2	$\varphi_2 = t^3$ $\varphi_2 = 5t - t^2$	1 1			30 30
6	1 2	$\varphi_2 = 10t - 2t^2$ $\varphi_2 = 15t^2$	1 1	12 9	10 5	
7	1 2	$\varphi_2 = 3t^2$ $\varphi_2 = 5t - t^2$	1 1	5 18	8 10	
8	1 2	$\varphi_2 = 4t^2$ $\varphi_2 = 5t - 2t^2$	1 1	30 12		
9	1 2	$\varphi_2 = 5t - t^2$ $\varphi_2 = 12\,t^2 - 29t$	1 1			30 60
10	1 2	$\varphi_2 = 6t - t^2$ $\varphi_2 = 3t^2$	1 1		6 10	
11	1 2	$\varphi_2 = 10t - 3t^2$ $\varphi_2 = 5t - 3t^2$	1 1			75 60
12	1 2	$\varphi_2 = 3t - t^2$ $\varphi_2 = 2t^3$	1 1	30 30		
13	1 2	$\varphi_2 = 10t - 2t^2$ $\varphi_2 = 5t - t^2$	1 1	9 8		
14	1 2	$\varphi_2 = 6t - 2t^2$ $\varphi_2 = 3t - 2t^2$	1 1			

Окончание табл. 3

1	2	3	4	5	6	7
15	1 2	$\varphi_2 = 2t^3$ $\varphi_2 = 7t - 3t^2$	1 1			60 30
16	1 2	$\varphi_2 = 2t^3$ $\varphi_2 = 2t^2$	1 1	8 15		
17	1 2	$\varphi_2 = 5t - t^2$ $\varphi_2 = 7t - 3t^2$	1 1	12 30		
18	1 2	$\varphi_2 = 8t - 3t^2$ $\varphi_2 = 10t - 4t^2$	1 1	24 16	30 20	
19	1 2	$\varphi_2 = 2t^2$ $\varphi_2 = 5t - 2t^2$	2 1		10 15	60 60
20	1 2	$\varphi_2 = 2t^2$ $\varphi_2 = 7t - 2t^2$	1 1		30 15	60 60
21	1 2	$\varphi_2 = 7t - 2t^2$ $\varphi_2 = 2t^3$	1 2	6 40		
22	1 2	$\varphi_2 = 3t^2$ $\varphi_2 = 6t - t^2$	1 1	12 20		
23	1 2	$\varphi_2 = 7t - 2t^2$ $\varphi_2 = 2t^2$	1 1	24 8	8 14	
24	1 2	$\varphi_2 = t^3$ $\varphi_2 = 6t - 2t^2$	1 1		40 28	
25	1 2	$\varphi_2 = 30t^2$ $\varphi_2 = 7t - 2t^2$	1 1	20 10		
26	1 2	$\varphi_2 = 6t - 2t^2$ $\varphi_2 = 2t^3$	1 2	12 48		
27	1 2	$\varphi_2 = t^3$ $\varphi_2 = 5t - t^2$	1 1	30 8		
28	1 2	$\varphi_2 = 2t^3$ $\varphi_2 = 3t^2$	1 1	30 24		
29	1 2	$\varphi_2 = 6t - t^3$ $\varphi_2 = 6t - 2t^2$	1 1	30 40	20 60	
30	1 2	$\varphi_2 = t - 2t^2$ $\varphi_2 = 4t - t^3$	1 1	32 18		

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Все механизмы, используемые в технике, предназначены практически для передачи и преобразования движений от двигателя к исполнительному звену. При этом широко используются тела (звенья) совершающие простейшие движения, вращательное и поступательное.

Соответственно распространены следующие варианты передачи и преобразования простейших движений тел: а) преобразование вращательного движения одного тела во вращательное движение другого со своей осью вращения; б) преобразование вращательного движения в поступательное и наоборот; в) преобразование поступательного движения одного тела в поступательное движение другого тела.

Широкое распространение получил первый вариант преобразования движений. Для этого используются (рис. 9) зубчатые передачи с внешним (а) и внутренним (б) зацеплением, фрикционные (в), ременные (г) и (д), цепные и тросовые (е) передачи.

Для преобразования вращательного движения в поступательное используются механизмы лебедок (схема ж), кривошипно-шатунные механизмы (з), механизм шарнирного четырехзвенника (рис. 2) и др.

Основной задачей кинематических исследований при преобразовании движений является установление связи между кинематическими характеристиками точек или тел, участвующих в движении, точнее определение закономерностей передачи перемещений, скоростей и ускорений от одного тела к другому.

Общие закономерности, отражающие связь между кинематическими характеристиками разных тел, имеют место в основном при преобразовании вращательных движений. В основе **их лежат формулы, приведенные при исследовании кинематики точки и вращательного движения тела.** Общей исходной предпосылкой при определении кинематических характеристик точек или тел в механизме является равенство перемещений, линейных скоростей и касательных ускорений точек связи отдельных звеньев между собой **(точки А на схеме рис.** 9).

В качестве оценочного параметра при передаче вращении используется передаточное отношение. Определение его рассмотрим на примере двух зубчатых колес (рис. 10). Переда точным отношением пары таких колес называется **отношение угловой скорости ведущего колеса к угловой скорости ведомого.** При ведущем первом колесе получаем

$$U_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \qquad (13)$$

Выразим его через размеры колес, воспользовавшись указанным ранее условием равенства линейных скоростей точек касания *A* обоих колес, $V_{A1} = V_{A2}$. Для колеса 1 $V_{A1} = \omega_1 r_1$, для колеса 2 $V_{A2} = \omega_2 r_2$. Следовательно, $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$.

Отсюда получаем^

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2} = U_{1,2}. \tag{14}$$

Таким образом, передаточное отношение равно также отношению радиуса (или числа зубьев *z)* ведомого колеса к радиусу ведущего. Передаточное отношение, выраженное через размеры колес, часто называют передаточным числом, так как размеры, как правило, – величины постоянные. Передаточное отношение (число) может быть выражено и через углы поворота колес и их угловые ускорения.

Из равенства линейных перемещений и касательных ускорений точек *A* колес получаем:

$$S_{A1} = r_1\varphi_1;\ S_{A2} = r_2\varphi_2;\ r_1\varphi_1 = r_2\varphi_2;$$
$$a_{\tau 1} = r_1\varepsilon_1;\ a_{\tau 2} = r_2\varepsilon_2;\ r_1\varepsilon_1 = r_2\varepsilon_2$$

Следовательно:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2} = U_{1,2}$$

Сказанное выше справедливо и для ременной передачи при неучете скольжения ремня относительно колес.

Решение задач на преобразование простейших движений рекомендуется производить в такой последовательности:

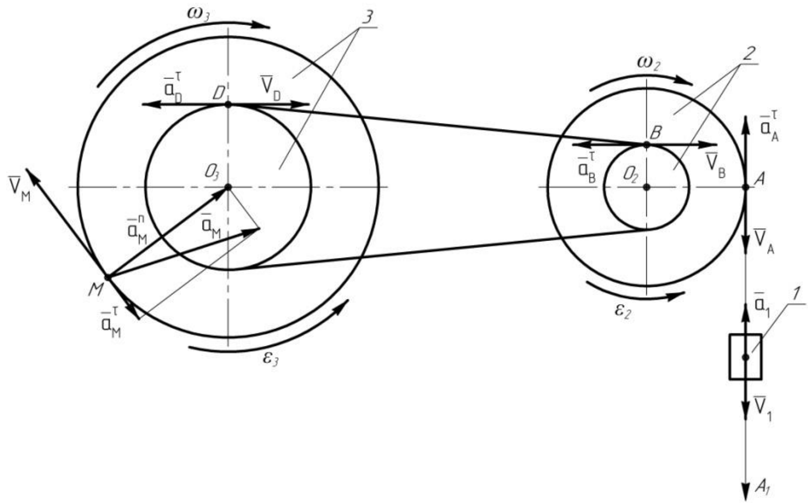
1) исходя из условия задач определить необходимые кинематические характеристики тела, принимаемого или заданного в качестве ведущего;

2) перемещаясь от ведущего тела к ведущему, составить равенства для определения необходимых кинематических характеристик (линейных перемещений, скоростей или касательных ускорений) точек связи

тел между собой, выражая их через кинематические характеристики каждого из тел;

3) выразить кинематические характеристики ведомого тела через заданные величины ведущего.

Рассмотрим на примере.



Условия задачи: По данному уравнению прямолинейного поступательного движения груза 1 $S_1 = f(t)$ определить скорость и ускорение груза 1, угловую скорость и угловое ускорение звеньев 2 и 3 механизма, а также скорость, нормальное, касательное и полное ускорение точки M в момент времени t_1.

Дано: $S_1 = 40t - 5t^2$ см; $t = 2$ с;

$R_2 = 2r_2 = 20$ см; $R_3 = 2r_3 = 30$ см.

Решение

Продифференцировать по времени уравнение движения, найдём скорость груза 1

$$V_1 = \frac{dS_1}{dt} = \frac{d\left(40t - 5t^2\right)}{dt} = 40 - 10t$$, закон изменения скорости груза 1.

При t = 2 с, V_1 =40 – 10 · 2 = 20 см/с.

Угловую скорость звена 2 находим из соотношения:

$$V_1 = V_2 = \omega_2 \cdot R_2 \text{, откуда } V_1 = \omega_2 R_2$$

Окончательно:

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{20}{20} = 1 \text{ с}^{-1}.$$

Угловую скорость звена 3 находим из соотношения

$$\omega_2 r_2 = V_B = V_D = \omega_3 \cdot r_3,$$

откуда, $\omega_2 r_2 = \omega_3 r_3$,
окончательно:

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{r_2}{r_3} = 1 \cdot \frac{10}{15} = 0{,}7 \text{ с}^{-1}.$$

Скорость точки М

$$V_M = \omega_3 \cdot R_3 = 0{,}7 \cdot 30 = 21 \text{ см/с}.$$

Продифференцировав по времени закон изменения скорости груза 1, найдём ускорение груза 1.

$$a_1 = \frac{d^2 S_1}{dt^2} = \frac{dV_1}{dt} = \frac{d\left(40 - 10t\right)}{dt} = -10 \text{ см/с}^2.$$

Знак минус указывает на то, что груз 1 движется с замедлением, т.е. ускорение a_1 направлено в сторону обратную скорости V_1.

Угловое ускорение звена 2 находим из соотношения $a_1 = a_A^\tau = \varepsilon_2 R_2$,

откуда $a_1 = \varepsilon_2 R_2$.

Окончательно $\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{R_2} = \dfrac{10}{20} = 0,5$ с$^{-2}$.

Угловое ускорение звена 2 ε_2 направляем в сторону обратную круговой стрелки угловой скорости ω_2.

Угловое ускорение звена 3 найдём из соотношения

$$\varepsilon_2 r_2 = a_B^\tau = a_D^\tau = \varepsilon_3 r_3,$$

откуда $\varepsilon_2 r_2 = \varepsilon_3 r_3$,

окончательно $\varepsilon_3 = \varepsilon_2 \dfrac{r_2}{r_3} = 0,5 \dfrac{10}{15} = 0,3$ с$^{-2}$.

Угловое ускорение звена 3 ε_3 направляем в сторону обратную круговой стрелки угловой скорости ω_3.

Ускорение точки M равно геометрической сумме нормального и касательного ускорений:

$$\overline{a_M} = \overline{a_M^\tau} + \overline{a_M^n}.$$

Нормальное ускорение точки M:

$$\overline{a_M^n} = \omega_3^2 \cdot R_3 = 0,7^2 \cdot 30 = 14,7 \text{ см/с}^{-2}.$$

Касательное ускорение точки M:

$$\overline{a_M^\tau} = \varepsilon_3 \cdot R_3 = 0,3 \cdot 30 = 9,0 \text{ см/с}^{-2}.$$

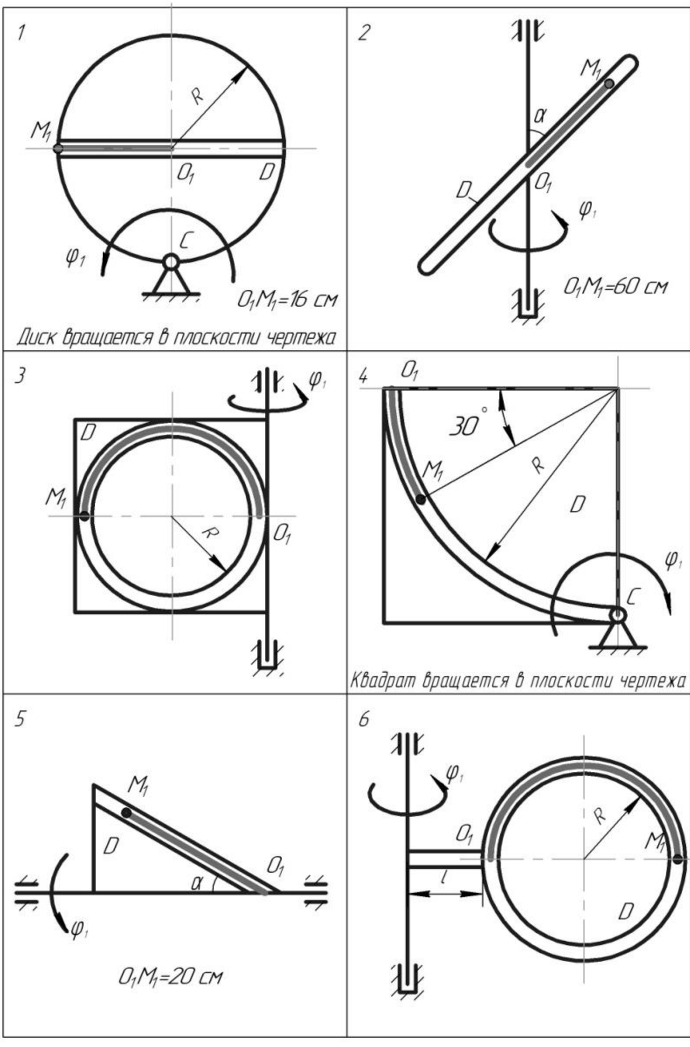
Полное ускорение точки M:

$$a_M = \sqrt{\left(a_M^n\right)^2 + \left(a_M^\tau\right)^2} = \sqrt{14,7^2 + 9^2} = 17,2 \text{ см/с}^2$$

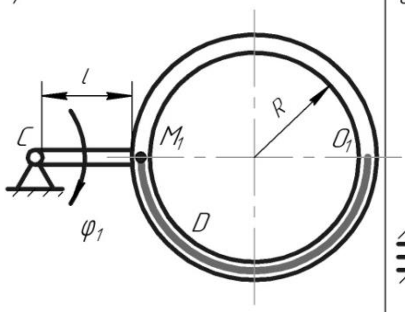
Приложения

Приложение1

Расчетные схемы для задания 1 вариант 1

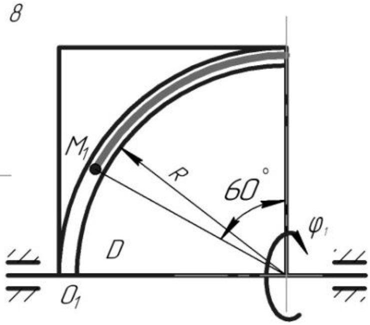


7

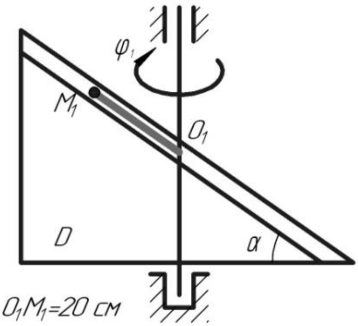


Кольцо вращается в плоскости чертежа

8

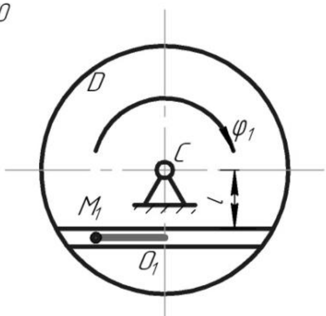


9



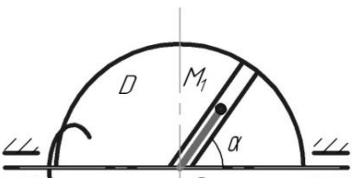
O_1M_1=20 см

10



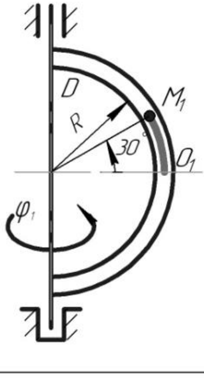
O_1M_1=10 см

11

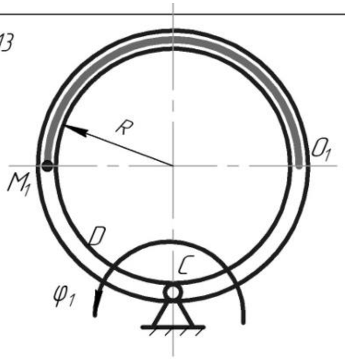


O_1M_1=20 см

12

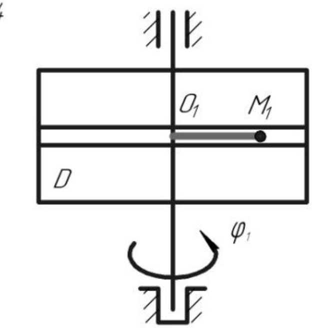


13



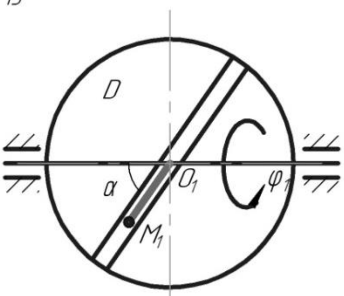
Кольцо вращается в плоскости чертежа

14



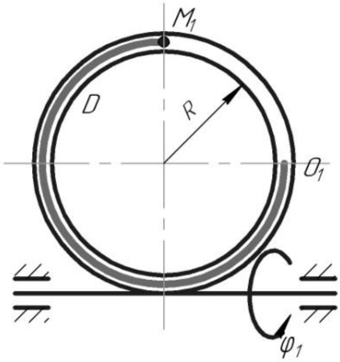
$O_1M_1=10$ см

15

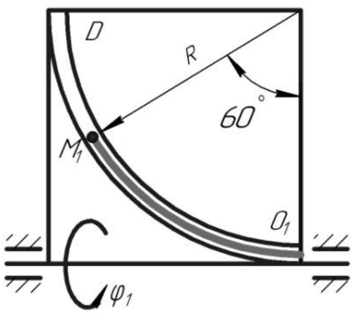


$O_1M_1=40$ см

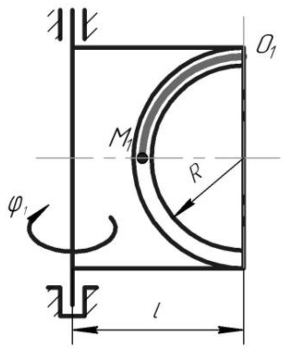
16

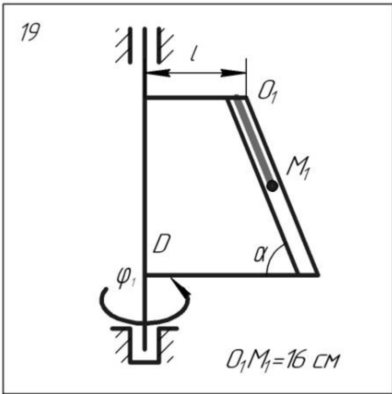


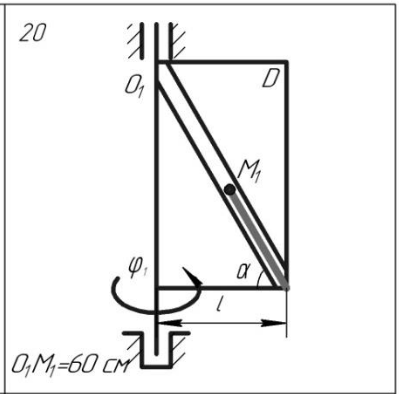
17

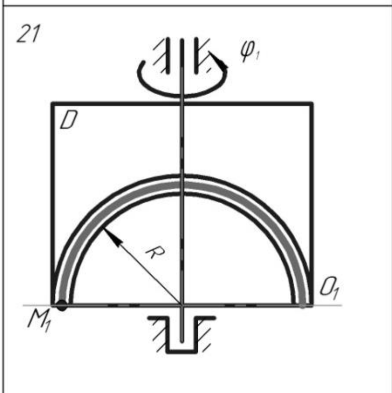


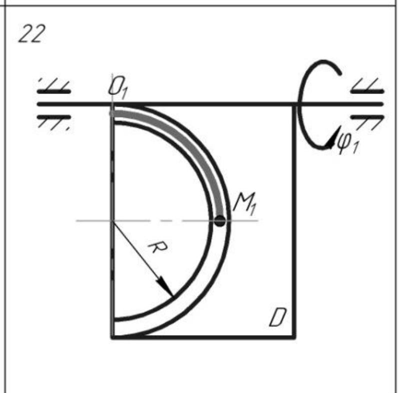
18

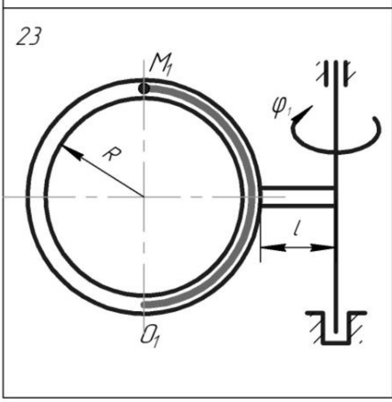


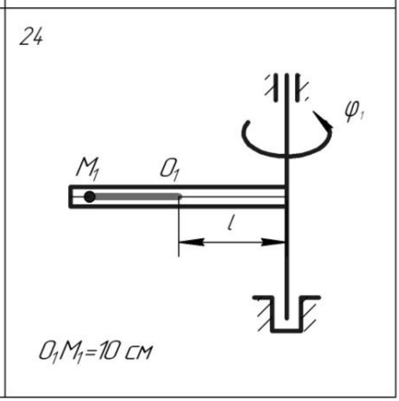

19
l
O_1
M_1
D
α
$φ_1$
O_1M_1=16 см

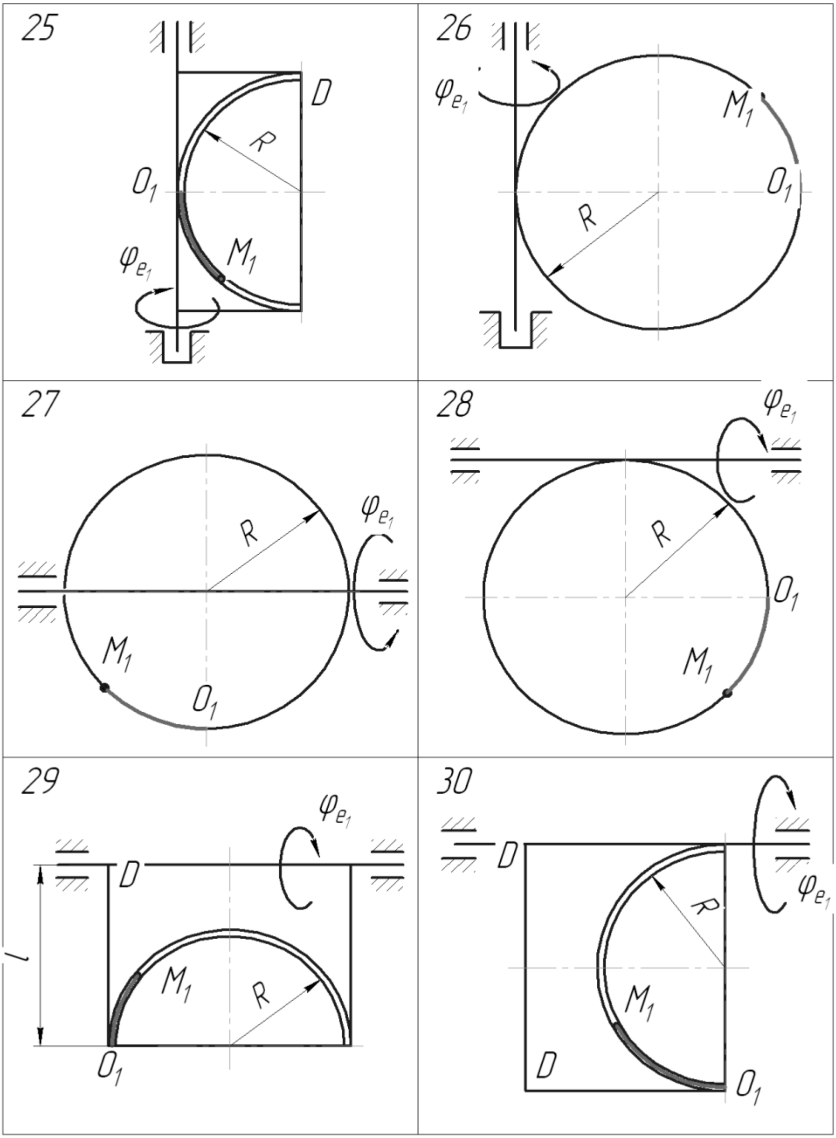

20
O_1
D
M_1
$φ_1$
α
l
O_1M_1=60 см


21
$φ_1$
D
R
O_1
M_1


22
O_1
$φ_1$
M_1
R
D


23
M_1
$φ_1$
R
l
O_1

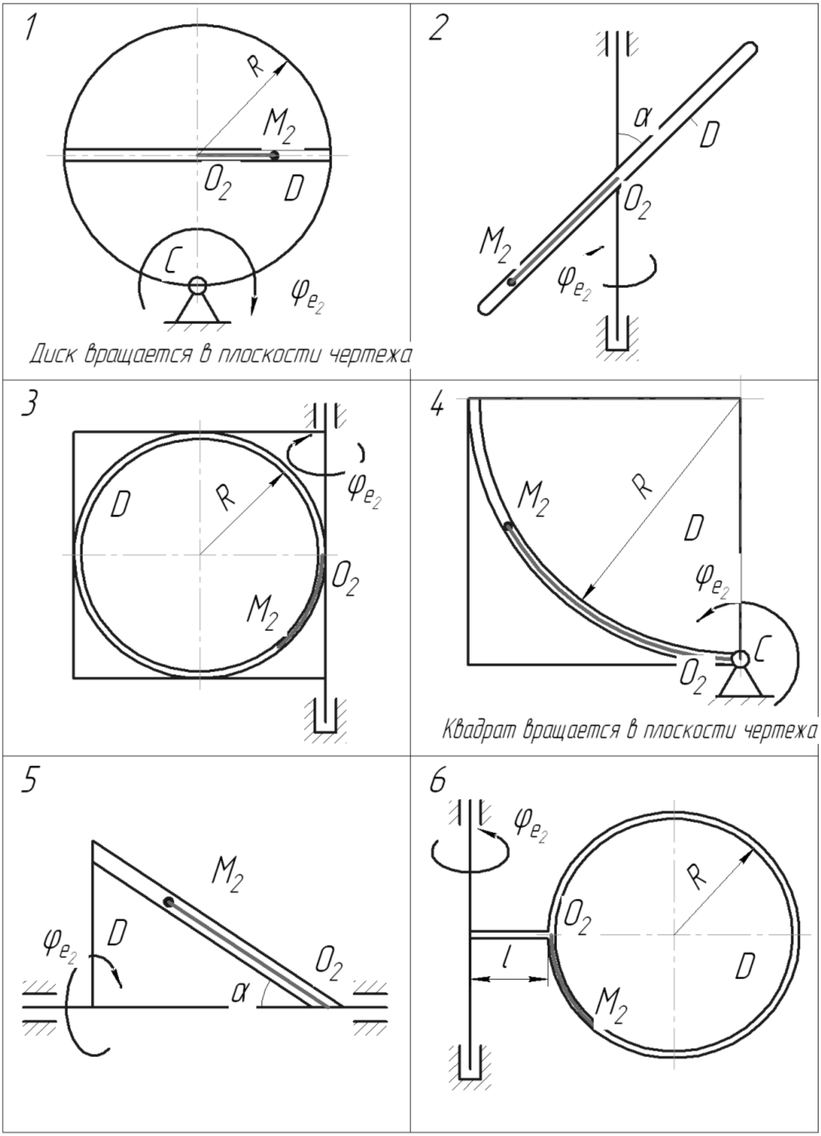

24
$φ_1$
M_1
O_1
l
O_1M_1=10 см



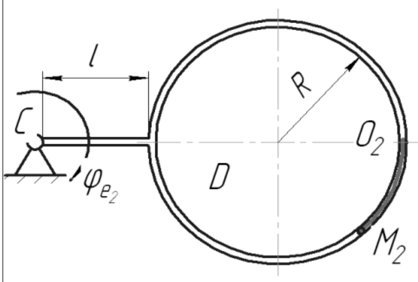
25
D
R
O_1
M_1
φ_{e_1}
26
φ_{e_1}
M_1
O_1
R
27
R
φ_{e_1}
M_1
O_1
28
φ_{e_1}
R
O_1
M_1
29
φ_{e_1}
D
l
M_1
R
O_1
30
D
R
φ_{e_1}
M_1
D
O_1

Приложение 2

Расчетные схемы для задания 2

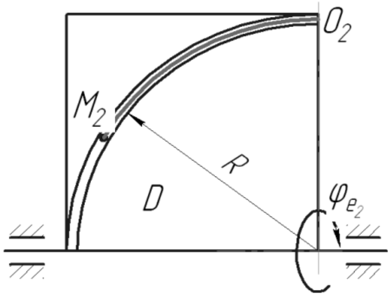


7

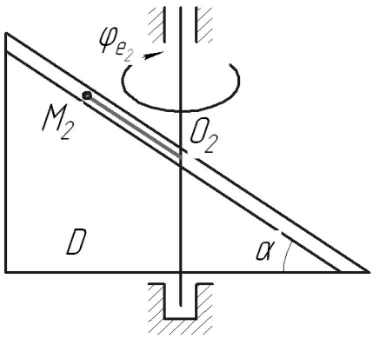


Кольцо вращается в плоскости чертежа

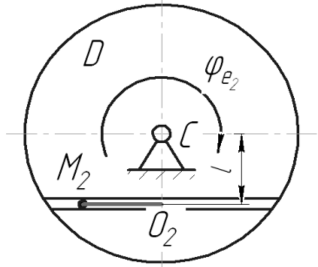
8



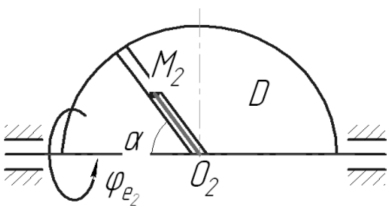
9



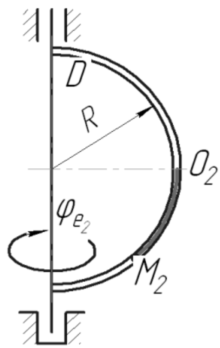
10



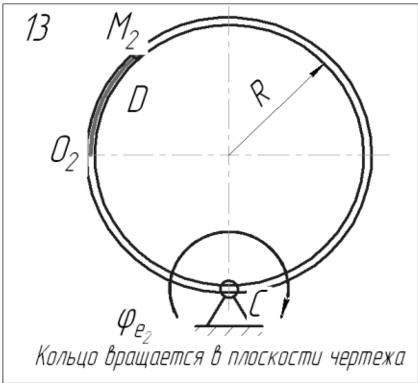
11

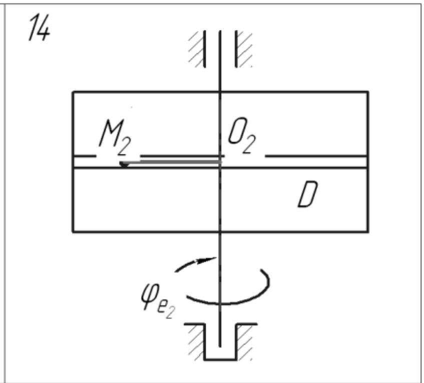


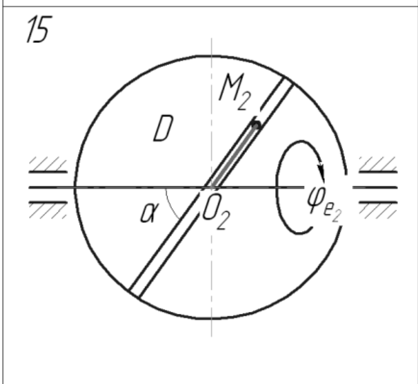
12

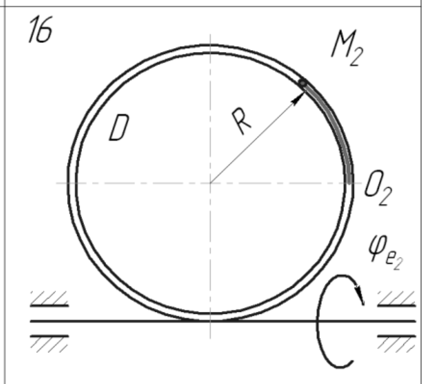


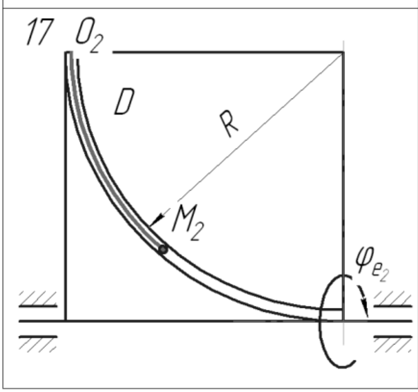
Продолжение прил. 2

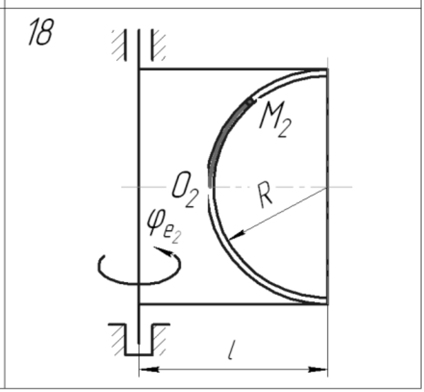


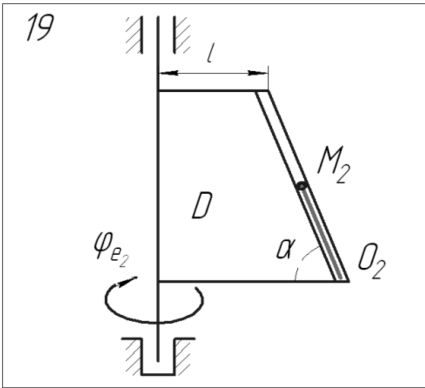


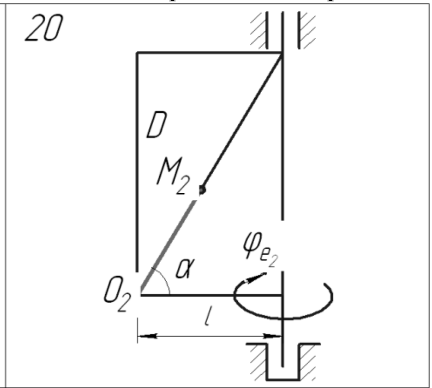


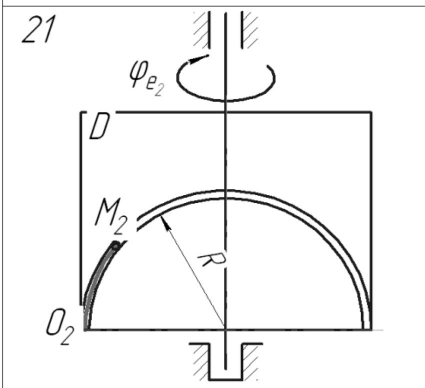


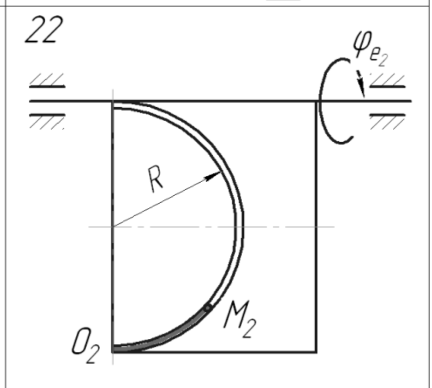


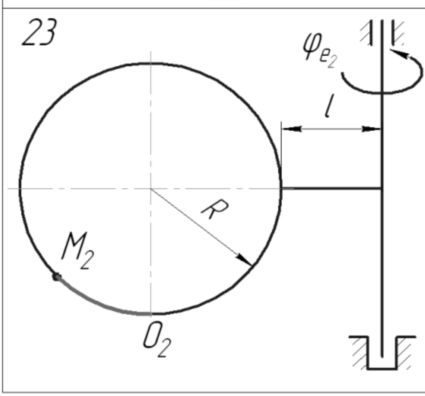


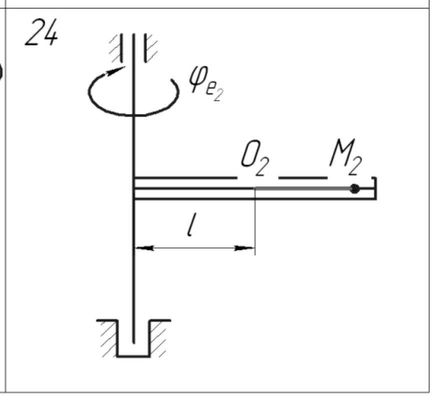

19
l
M2
D
φe2
α
O2


20
D
M2
φe2
α
O2
l

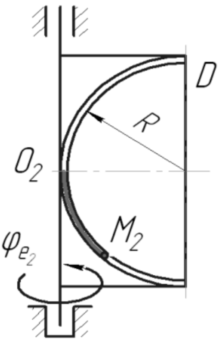

21
φe2
D
M2
R
O2


22
φe2
R
M2
O2

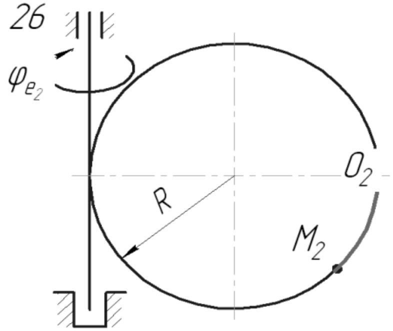

23
φe2
l
R
M2
O2


24
φe2
O2
M2
l

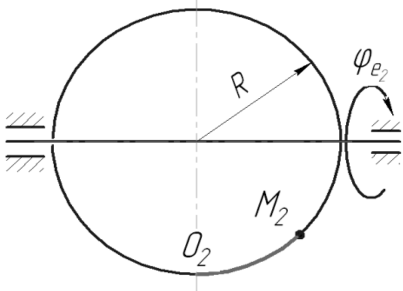
25



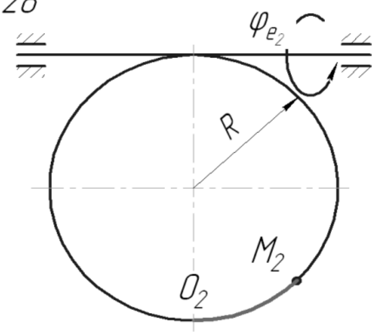
26



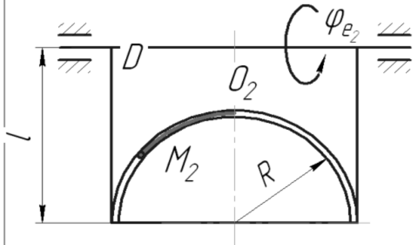
27



28



29



30