ВВЕДЕНИЕ

Задачей данного издания является оказание помощи студентам при самостоятельном изучении темы «Кинематика. Простейшие движения точки» раздела «Кинематика» дисциплины «Теоретическая механика».

Материал дан в концентрированной форме, без сложных выводов и доказательств, он позволяет понять, что такое кинематические характеристики.

При изучении данной темы особое внимание следует уделить приобретению навыков решения задач. Для этого, изучив теоретическую часть, надо обязательно разобраться в решениях приведенных задач, обратив особое внимание на методические указания к их решению. Примеры для самостоятельного решения подобраны таким образом, чтобы их мог решить любой студент, начинающий самостоятельное изучение данной темы.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – Москва: Высш. шк., 2010. – 416 с.

2. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики: в 2 ч. / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – 5-е изд., испр. – Москва: Высш. шк., 1997. – Ч. 1: Статика. Кинематика. – 367 с.

3. Мещерский, И. В. Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. – Москва: Наука, 2008. – 448 с.

4. Митюшов, Е. А. Теоретическая механика / Е. А. Митюшов, С. А. Берестова. – Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2006. – 175 с.

5. Лачуга, Ю. Ф. Теоретическая механика / Ю. Ф. Лачуга, В. А. Ксендзов. Москва: КолосС, 2010. – 575 с.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КИНЕМАТИКИ

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучается механическое движение материальных тел в пространстве с геометрической стороны, без учета их масс и действующих на них сил.

Под механическим движением понимается происходящее с течением времени изменение положения в пространстве одного тела относительно другого, с которым неизменно связана система отсчета. Пространство в механике рассматривается как трехмерное, с одинаковыми свойствами во всех точках и направлениях.

Непрерывная линия, которую описывает движущаяся в пространстве точка относительно выбранной системы отсчета, называется траекторией точки.

Время в теоретической механике рассматривается как непрерывно изменяющаяся скалярная величина, принимаемая в качестве независимой переменной (аргумента). Отсчет времени ведется от некоторого начального момента $t_0 = 0$. Все кинематические величины (траектория, скорость, ускорение), характеризующие движение тела или его точек, рассматриваются как функции времени.

Задачами кинематики точки являются:

1) задание закона (уравнения) движения точки;

2) определение основных кинематических характеристик движения точки (траектории, скорости, ускорения) по заданным уравнениям ее движения.

Задать движение точки – это значит указать способ, позволяющий определить ее положение в пространстве относительно выбранной системы отсчета в любой момент времени.

Для характеристики движения точки не только в пространстве, но и во времени существуют такие понятия, как скорость и ускорение.

Скоростью точки (V) называется вектор, характеризующий в любой момент времени быстроту и направление движения точки.

Величина, характеризующая быстроту изменения скорости точки во времени как по модулю, так и по направлению, называется ускорением точки (a).

Существуют три наиболее распространенных способа задания движения точки: векторный, координатный и естественный.

2. ВЕКТОРНЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Положение движущейся точки M по отношению к прямоугольной системе осей координат $Oxyz$ (рис. 1) в каждый данный момент времени можно определить при помощи вектора r, проведенного из неподвижной точки O в точку M. Этот вектор называется радиусом-вектором точки M. Каждому моменту времени соответствует свое значение радиуса-вектора. Следовательно, радиус-вектор – функция времени:

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \tag{1}$$

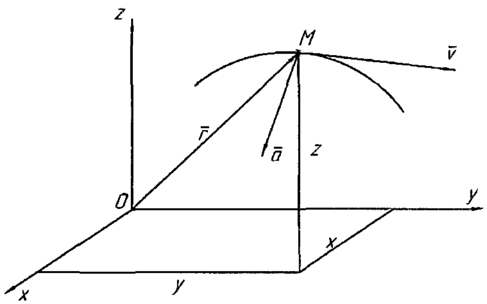


Рис. 1. Векторный способ задания движения точки

Уравнение (1) называют *уравнением движения точки M в векторной форме.*

Если $\bar{r}$ изменяется в зависимости от времени t, то точка M будет двигаться по некоторой траектории.

Траектория точки есть геометрическое место концов вектора $\bar{r}$, построенного для различных моментов времени.

Вектор скорости точки определяется как первая производная от радиуса-вектора по времени. Направлен вектор скорости по касательной к траектории точки в сторону ее движения.

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{r}. \tag{2}$$

Вектор ускорения точки определяется как первая производная от вектора скорости или вторая производная от радиуса-вектора точки по времени.

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = \ddot{r}. \tag{3}$$

Вектор ускорения направлен в сторону вогнутости траектории и расположен в соприкасающейся к траектории точки плоскости в данном месте.

3. КООРДИНАТНЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Положение точки в декартовой системе координат $Oxyz$ (рис. 2) определяется ее координатами x, y, z, которые с течением времени изменяются, т. е. являются функциями времени:

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t). \quad (4)$$

Эти уравнения называют уравнениями движения точки в прямоугольных декартовых координатах или законом движения точки при координатном способе задания движения. Они одновременно являются уравнениями ее траектории в параметрической форме.

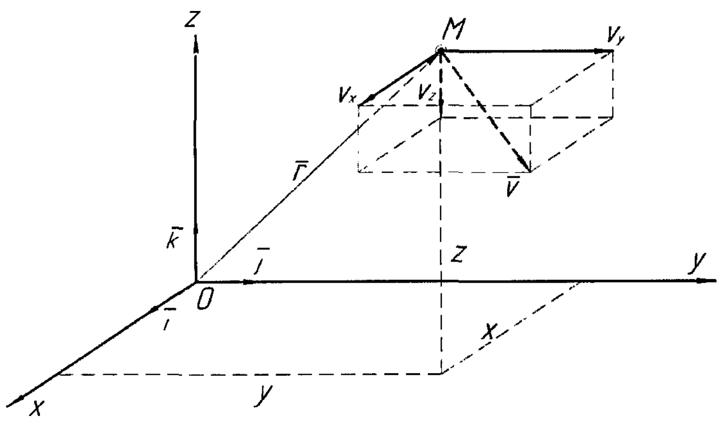


Рис. 2. Направление вектора скорости при координатном способе задания движения точки

Для определения скорости точки при координатном способе задания движения необходимо:

1) определить ее проекции на координатные оси, которые равны первым производным от соответствующих координат движущейся точки по времени:

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \; V_y = \frac{dy}{dt}, \; V_z = \frac{dz}{dt}; \quad (5)$$

2) зная проекции скорости, можно построить вектор скорости точки как диагональ параллелепипеда, построенного на этих проекциях, как на сторонах (рис. 2), и найти величину скорости по теореме Пифагора:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}\ ; \tag{6}$$

3) по направляющим косинусам найти углы α, β, γ, которые вектор скорости образует с осями координат x, y, z:

$$\cos\alpha = \frac{V_x}{V},\ \cos\beta = \frac{V_y}{V},\ \cos\gamma = \frac{V_z}{V}. \tag{7}$$

Вектор скорости точки направлен по касательной к ее траектории в сторону движения.

Для определения ускорения точки при координатном способе необходимо:

1) определить проекции ускорения точки на оси координат, которые равны первым производным от проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат движущейся точки по времени:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},\ a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}\ ; \tag{8}$$

2) по проекциям ускорения построить вектор ускорения точки, как и вектор скорости, и найти его модуль по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ ; \tag{9}$$

3) по направляющим косинусам найти углы α_1, β_1, γ_1, которые вектор ускорения образует с осями координат x, y, z:

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_x}{a},\ \cos\beta_1 = \frac{a_y}{a},\ \cos\gamma_1 = \frac{a_z}{a}. \tag{10}$$

4. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НА КООРДИНАТНЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

По заданным уравнениям движения точки M:

$$x = \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) - 1 \ (\text{м}),\ \ y = 4\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) \ (\text{м}), \tag{11}$$

установить вид ее траектории и для момента времени $t = 1$ с найти положение точки на траектории, ее скорость и ускорение.

Решение:

1. Уравнение траектории получим, исключив время t из уравнений (11), для чего возведем эти уравнения в квадрат.

$$(x+1)^2 = 16\cos^2\left(\frac{\pi t}{3}\right),\ \ y^2 = 16\sin^2\left(\frac{\pi t}{3}\right). \tag{12}$$

Сложением правых и левых частей этих уравнений получим:

$$(x + 1)^2 + y^2 = 4^2. \tag{13}$$

Траекторией точки является окружность радиусом $R = 4$ м с центром, смещенным вдоль оси x на 1 м влево (рис. 3).

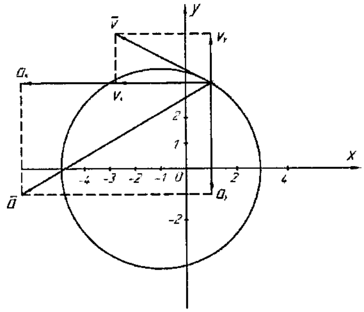


Рис. 3. Траектория движения и направление векторов скорости и ускорения

2. Положение точки на траектории определяем подстановкой в уравнения (11) значения времени $t = 1$ с. Координаты точки M равны: $x = 1$ м, $y = 3{,}44$ м.

Определяем модуль скорости по проекциям точки на координатные оси, продифференцировав уравнения движения (11) по времени.

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{4\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right), \tag{14}$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{4\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right). \tag{15}$$

При $t = 1$ с $V_x = -3{,}6$ м/с, $V_y = 2{,}09$ м/с.

От точки M параллельно оси x в сторону отрицательного направления оси x откладываем $V_x = -3{,}6$ м/с. Параллельно оси y в сторону положительного направления оси y откладываем $V_y = 2{,}09$ м/с.

Вектор скорости V (см. рис. 3) изображается диагональю прямоугольника, сторонами которого являются V_x и V_y.

Модуль скорости точки M вычисляем по формуле (6).

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 4{,}16 \text{ м/с.}$$

Вектор скорости точки направлен по касательной к траектории в сторону ее движения.

3. Модуль ускорения точки M вычисляем по формулам (8), (9):

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -\frac{4\pi^2}{9}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right),$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = -\frac{4\pi^2}{9}\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

При $t = 1$ с $a_x = -3{,}76$ м/с, $a_y = -2{,}19$ м/с.

От точки M (см. рис. 3) параллельно оси x в сторону отрицательного отсчета отложим $a_x = -3{,}76$ м/с^2, параллельно оси y отложим $a_y = -2{,}19$ м/с^2. Вектор ускорения $\overline{a}$ изображен диагональю прямоугольника, сторонами которого являются a_x и a_y. По модулю он равен:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 4{,}35 \text{ м/с}^2.$$

Направлен вектор ускорения в сторону вогнутости траектории.

5. ЕСТЕСТВЕННЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Естественным способом задания движения точки удобно пользоваться, когда траектория движущейся точки известна заранее.

Для изучения движения точки естественным способом необходимо:

1) выбрать на траектории начало отсчета O (рис. 4) с указанием положительного и отрицательного направлений движения точки M;

2) определить положение точки M на траектории с помощью криволинейной координаты S, которая равна расстоянию от точки O до точки M, измеренному вдоль дуги траектории и взятому с соответствующим знаком. При движении точки расстояние S будет с течением времени изменяться, и оно является функцией времени:

$$S = f(t). \tag{16}$$

Уравнение (16) выражает закон движения точки M вдоль траектории.

Таким образом, чтобы считать, что движение точки задано естественным способом, надо знать:

1) траекторию движения точки;

2) начало отсчета на траектории с указанием положительного и отрицательного направлений отсчета координаты S;

3) закон движения точки вдоль траектории в виде $S = f(t)$.

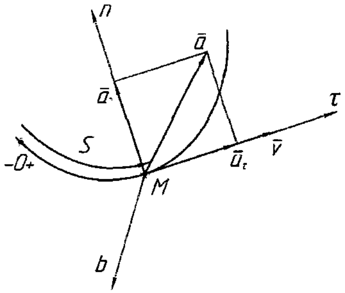


Рис. 4. Направление векторов скорости
и ускорений при естественном способе
задания движения точки

Скорость и ускорение в данном случае определяют по их проекциям на естественные оси.

Естественные оси – это три взаимно перпендикулярные оси: касательная τ, главная нормаль n и бинормаль b, имеющие начало в движущейся точке M и перемещающиеся вместе с ней. Касательная направлена по касательной к траектории движения в положительном направлении отсчета координаты S. Нормаль совпадает с главной нормалью к кривой в точке и направлена к центру кривизны траектории в точке M. Бинормаль перпендикулярна первым двум осям и направлена так, что все вместе они образуют правую систему координат (рис. 4).

Оси n и τ образуют соприкасающуюся плоскость к траектории в точке M.

Вектор скорости точки проецируется только на касательную ось τ, следовательно, полная скорость точки и ее проекция на касательную ось совпадают. Величина скорости равна первой производной от криволинейной координаты S по времени:

$$V = \frac{dS}{dt} = \dot{S}. \qquad (17)$$

Скорость точки является величиной алгебраической и может иметь знак плюс или минус в зависимости от того, в каком направлении от начала отсчета координаты S движется точка по траектории.

Если в некоторый момент времени $V > 0$, то в этот момент функция S возрастает, т. е. точка движется в сторону увеличения координаты S и вектор скорости $\overline{V}$ точки на расчетной схеме направляется по касательной к траектории точки в положительном направлении отсчета координаты S независимо от положения точки M относительно начала отсчета – точки O (рис. 5).

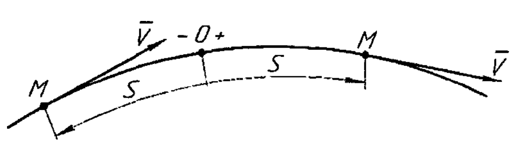


Рис. 5. Направление вектора скорости при $V > 0$

Если $V < 0$, то в этот момент времени функция S убывает, т. е. точка M движется в сторону отрицательных значений координаты S и в этом же направлении по касательной к траектории точки направляется вектор скорости $\overline{V}$ (рис. 6).

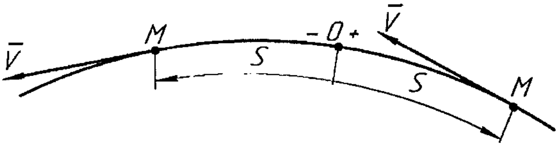


Рис. 6. Направление вектора скорости при $V < 0$

Таким образом, знак скорости указывает направление движения точки по траектории в данный момент времени.

Полное ускорение точки определяют по его проекциям на естественные оси (касательную τ, главную нормаль n и бинормаль b).

Вектор ускорения точки, как известно из векторного способа задания ее движения, всегда расположен в соприкасающейся к траектории плоскости, которую образуют оси n и τ, поэтому проекция вектора ускорения на бинормальную ось равняется нулю ($a_b = 0$). Тогда полное ускорение точки может быть представлено геометрической суммой двух векторов, один из которых направлен по главной нормали ($\overline{a_n}$), а другой – по касательной ($\overline{a_\tau}$) (см. рис. 4).

$$\overline{a} = \overline{a_n} + \overline{a_\tau}. \tag{18}$$

Проекция ускорения на ось n называется нормальным (центростремительным) ускорением точки и определяется по формуле

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}, \tag{19}$$

где ρ – радиус кривизны траектории в данной точке.

Нормальное ускорение точки всегда направлено к центру кривизны траектории перпендикулярно к касательному ускорению. Нормальное ускорение характеризует изменение вектора скорости по направлению.

Проекция ускорения на касательную ось τ называется касательным (тангенциальным) ускорением точки.

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}. \tag{20}$$

Направлен вектор касательного ускорения по касательной к траектории в сторону положительного направления отсчета координаты S (оси τ), если имеет знак плюс, и в противоположную сторону, если имеет знак минус. Касательное ускорение характеризует изменение скорости по величине.

Если скорость точки увеличивается по абсолютной величине, то скорость точки и касательное ускорение будут одного знака ($V > 0$, $a_\tau > 0$) или ($V < 0$, $a_\tau < 0$). Такое движение точки является ускоренным и проходит в положительном или отрицательном направлении отсчета криволинейной координаты S (оси τ). Векторы скорости и касательного ускорения в данном случае имеют одинаковые направления.

Если скорость точки по абсолютной величине уменьшается, такое движение точки является замедленным – скорость точки и касательное ускорение будут разного знака. При $V > 0$ и $a_\tau < 0$ вектор скорости направлен по касательной в положительном направлении отсчета координаты S, вектор касательного ускорения противоположен ему по направлению. Движение точки является замедленным в положительном направлении отсчета координаты S (оси τ). При $V < 0$ и $a_\tau > 0$ имеем замедленное движение точки в отрицательном направлении отсчета координаты S.

Знаки скорости и касательного ускорения точки на расчетных схемах удобно учитывать направлениями вектора скорости $\overline{V}$ и вектора касательного ускорения точки $\overline{a_\tau}$.

Вектор полного ускорения представляет собой диагональ прямоугольника, сторонами которого являются векторы $\overline{a_n}$ и $\overline{a_\tau}$, отложенные в определенном масштабе.

Зная проекции ускорения на естественные оси, можно найти величину полного ускорения по формуле

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}\,. \qquad (21)$$

6. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Движение точки может быть как равномерным, если скорость постоянная, так и неравномерным, если скорость изменяется. Также вид движения зависит от формы траектории точки.

1. ***Движение точки равномерное и прямолинейное***:

$$a_\tau = 0, a_n = 0.$$

Касательное ускорение $a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0$, т. е. скорость точки постоянная (V = const), нормальное ускорение $a_n = \frac{V^2}{\rho} = 0$, следовательно, радиус кривизны $\rho - \infty$ и траектория точки – прямая линия (рис. 7).

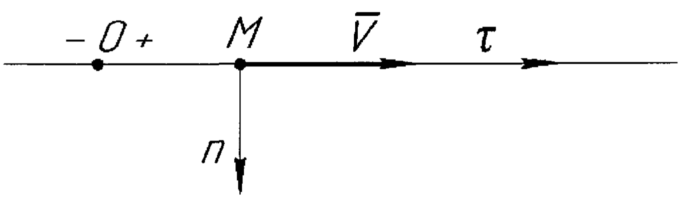


Рис. 7. Равномерное прямолинейное движение

Закон движения точки при равномерном прямолинейном или криволинейном движении (рис. 8) определяется по формуле

$$S = S_0 + Vt, \tag{22}$$

где S_0 – начальный путь.

Если $S_0 = 0$, то скорость точки можно определить по формуле

$$V = \frac{S}{t}. \tag{23}$$

2. ***Движение точки равномерное и криволинейное***:

$$a_\tau = 0, a_n \neq 0.$$

Скорость точки постоянная (V = const), нормальное ускорение $a_n \neq 0$, следовательно, радиус кривизны $\rho \neq \infty$, траектория точки кривая линия, скорость изменяется только по направлению (рис. 8). Соответственно, нормальное ускорение точки характеризует изменение вектора скорости точки по направлению.

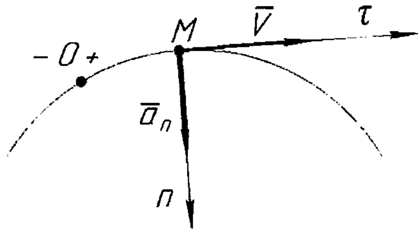


Рис. 8. Равномерное криволинейное движение

Закон движения точки определяется по формуле (22), скорость по формуле (23).

3. ***Движение точки неравномерное и прямолинейное***:

$$a_\tau \neq 0,\ a_n = 0.$$

В этом случае $a_\tau = \dfrac{dV}{dt} \neq 0 \quad (V \neq \text{const}),\ a_n = \dfrac{V^2}{\rho} = 0$, следовательно, $\rho = \infty$.

Если скорость $V > 0$ и касательное ускорение $a_\tau > 0$, а нормальное ускорение $a_n = 0$, то движение точки ускоренное (рис. 9).

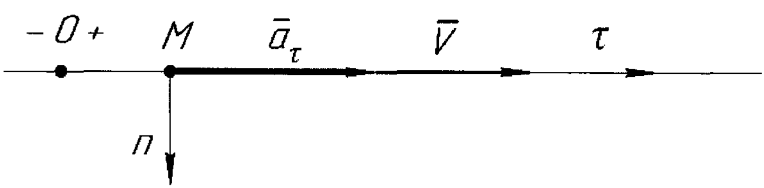


Рис. 9. Ускоренное прямолинейное движение

Скорость точки увеличивается только по величине, направление вектора скорости остается постоянным (рис. 9), следовательно, касательное ускорение характеризует изменение вектора скорости точки по величине.

Если скорость $V > 0$, касательное ускорение $a_\tau < 0$, нормальное ускорение $a_n = 0$, то движение точки замедленное (рис. 10).

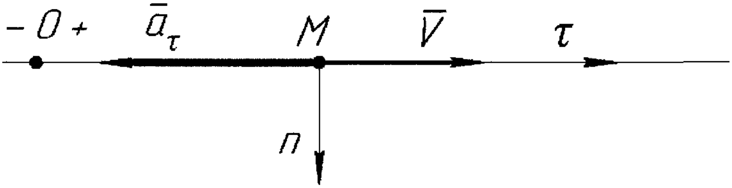


Рис. 10. Замедленное прямолинейное движение

Скорость точки уменьшается по модулю, направление вектора скорости не изменяется.

4. ***Движение точки криволинейное и неравномерное***:

$$a_\tau \neq 0,\ a_n \neq 0.$$

В данном случае $a_\tau = \dfrac{dV}{dt} \neq 0$ ($V \neq \text{const}$), $a_n = \dfrac{V^2}{\rho} \neq 0$, следовательно, $\rho \neq \infty$.

Если скорость $V > 0$ и касательное ускорение $a_\tau > 0$, то движение точки ускоренное и направлено в сторону увеличения криволинейной координаты S. Модуль скорости будет увеличиваться, вектор скорости будет изменять свое направление (рис. 11).

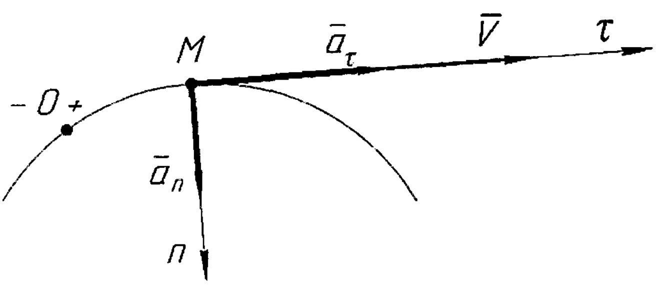


Рис. 11. Ускоренное криволинейное движение

Если скорость точки $V > 0$, а касательное ускорение $a_\tau < 0$, то движение точки замедленное, в положительном направлении отсчета координаты S (рис. 12).

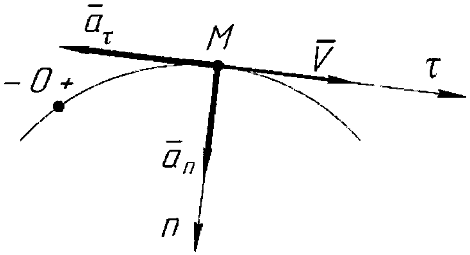


Рис. 12. Замедленное криволинейное движение

Скорость точки будет изменяться как по величине (уменьшаться) так и по направлению.

Если скорость точки $V < 0$ и касательное ускорение $a_\tau < 0$, то движение точки направлено в сторону уменьшения координаты S, но движение будет ускоренным. Скорость будет изменяться как по модулю (увеличиваться), так и по направлению (рис. 13).

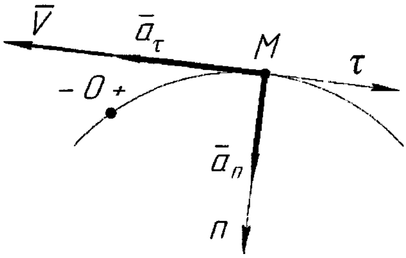


Рис. 13. Ускоренное криволинейное движение в отрицательном направлении движения

5. ***Движение точки равнопеременное***:

$$a_\tau = \text{const} \neq 0.$$

Такое движение точки может быть равноускоренным или равнозамедленным, прямолинейным или криволинейным.

Касательное ускорение a_τ постоянное и не равно 0, закон движения точки при равнопеременном движении определяется по формуле

$$S = S_0 + V_0 t \pm \frac{a_\tau}{2} t^2. \quad (24)$$

Скорость точки при равномерном движении определяется следующим образом:

$$V = V_0 t \pm a_\tau t. \qquad (25)$$

В формулах (24), (25) знак «+» будет при равноускоренном движении точки, а знак «–» – при равнозамедленном.

7. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НА ЕСТЕСТВЕННЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Точка M движется по окружности радиусом R = 2 м, уравнение движения точки задано:

$$S = OM = t^2 - 6{,}23t. \qquad (26)$$

Определить положение точки M на траектории, скорость, нормальное, касательное и полное ускорения этой точки в момент времени t = 1 с, а также классифицировать движение точки по ускорениям.

Решение:

1. Траектория движения точки M известна. Это окружность. Начало отсчета принимаем от точки O, положительное и отрицательное направления движения точки указаны на рис. 14.

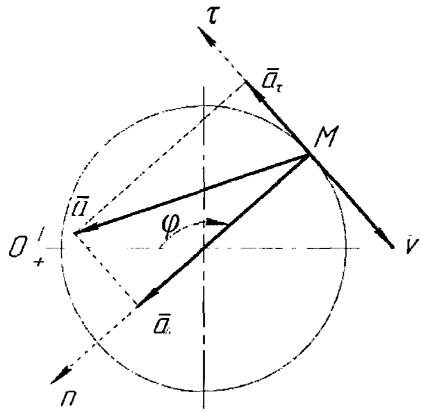


Рис. 14. Направление векторов скорости и ускорения при естественном способе задания движения точки

2. Находим координату $S = OM$, определяющую положение точки на траектории, подставив в уравнение (26) $t = 1$ с. $S = -5{,}23$ м.

Минус указывает на то, что точка M расположена в отрицательном направлении отсчета дуговой координаты, которой соответствует угол

$$\varphi^{\circ} = \frac{S \cdot 360^{\circ}}{2\pi \cdot R} = 150^{\circ}.$$

3. Определяем скорость точки, продифференцировав уравнение движения (26) по времени:

$$V = \frac{dS}{dt} = 2t - 6{,}23. \qquad (27)$$

При $t = 1$ с $V = -4{,}23$ м/с.

Учитывая знак минус, вектор скорости точки направляем по касательной к траектории, совпадающей с касательной осью M_τ, в отрицательную сторону отсчета координаты S.

4. Касательное ускорение определяем, продифференцировав уравнение изменения скорости точки (27) по времени:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = 2 \text{ м/с}^2.$$

Касательное ускорение получилось положительным, следовательно, его вектор направлен в положительном направлении отсчета координаты S, т. е. в ту же сторону, что и ось M_τ (см. рис. 14), но противоположно вектору скорости $\overline{V}$. Следовательно, движение точки замедленное и происходит в отрицательном направлении отсчета координаты S.

5. Нормальное ускорение находим по формуле (19):

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = 8{,}9 \text{ м/с}^2.$$

Вектор нормального ускорения направляется к центру кривизны траектории точки вдоль оси M_n (т. е. к центру окружности).

6. Полное ускорение точки M определяется по формуле (21):

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 9{,}12 \text{ м/с}^2.$$

Вектор полного ускорения представляет собой диагональ прямоугольника, сторонами которого являются векторы $\overline{a_n}$ и $\overline{a_\tau}$.

7. Так как касательное ускорение – величина постоянная, не зависящая от времени, следовательно, движение точки равнопеременное. Разные знаки скорости касательного ускорения указывают на то, что движение точки M равнозамедленное.

8. Наличие нормального ускорения $\overline{a_n}$ подтверждает то, что движение точки криволинейное.

8. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЕСТЕСТВЕННЫМ И КООРДИНАТНЫМ СПОСОБАМИ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Расстояние, пройденное точкой, определяется по зависимости

$$S=\int_0^t\sqrt{V_x^2+V_y^2+V_z^2}dt, \tag{28}$$

где V_x, V_y, V_z – проекции вектора скорости на координатные оси.

Касательное ускорение определяется по формуле

$$a_\tau=\frac{V_xa_x+V_ya_y+V_za_z}{V}, \tag{29}$$

где a_x, a_y, a_z – проекции вектора ускорения на координатные оси.

Нормальное ускорение определяется следующим образом:

$$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}\ . \tag{30}$$

Радиус кривизны траектории точки определяется по зависимости:

$$\rho=\frac{V^2}{a_n}. \tag{31}$$

9. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА КООРДИНАТНЫЙ И ЕСТЕСТВЕННЫЙ СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Точка M движется согласно уравнениям

$$x=t\ (\text{м}),\ y=t^2-4t\ (\text{м}). \tag{32}$$

Пример 1. Установить вид траектории точки, построить ее, для момента времени $t = 1$ с найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, радиус кривизны траектории, а также классифицировать движение точки по ускорениям.

Решение:

1. Определяем уравнение траектории точки, для чего из уравнений (32) исключаем время. Выражая t из первого уравнения и подставляя во второе, имеем

$$y = x^2 - 4x. \tag{33}$$

Траекторией точки является парабола, изображенная на рис. 15.

2. Определяем положение точки на траектории, для чего в уравнения (32) подставляем значение времени $t = 1$ с. В результате получим координаты точки M:

$$x = 1 \text{ м}, y = -3 \text{ м}.$$

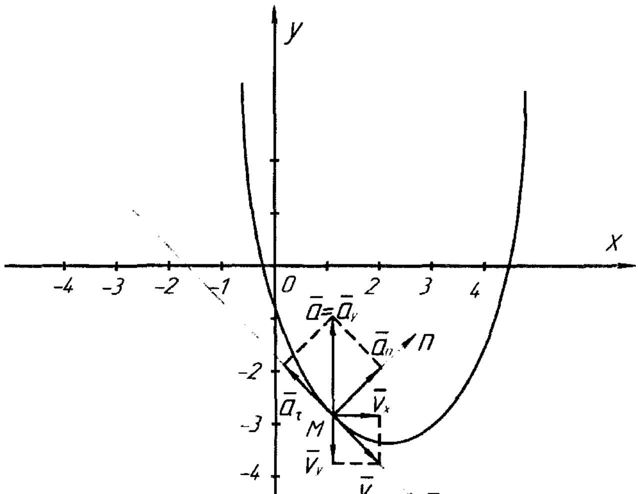


Рис. 15. Траектория движения точки, направление векторов скорости и ускорения при естественном и координатном способах задания движения точки

3. По уравнениям (5) и (6) определяем величину скорости точки.

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 1 \text{ м/с}, \; V_y = \frac{dy}{dt} = 2t - 4 \text{ м/с}.$$

При $t = 1$ с $V_y = -2$ м/с, $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 2,2$ м/с.

4. От точки M параллельно осям откладываем проекции вектора скорости, векторы $\overline{V_x}$ и $\overline{V_y}$. Вектор скорости направлен по касательной к параболе в точке M и является диагональю прямоугольника, сторонами которого являются векторы скорости $\overline{V_x}$ и $\overline{V_y}$.

5. По уравнениям (8) и (9) определяем величину ускорения точки M.

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = 0\,, \; a_y = \frac{dV_y}{dt} = 2 \text{ м/с;}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2 \text{ м/с}^2.$$

6. От точки M параллельно оси y откладываем вектор $\overline{a_y}$. В данном примере полное ускорение равно его проекции на ось y, так как $a_x = 0$.

7. По формуле (29) находим касательное ускорение точки:

$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V} = \frac{1 \cdot 0 + (-2) \cdot 2}{2,2} = -1,8 \text{ м/с}^2\,.$$

8. Определяем по формуле (30) нормальное ускорение:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = 0,8 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

9. Раскладываем вектор полного ускорения $\overline{a}$ по касательной оси $M\tau$ и нормальной оси Mn (см. рис. 13), проведя перпендикуляры с конца вектора a на естественные оси координат.

10. Определяем по формуле (31) радиус кривизны параболы в точке M:

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = 6,05 \text{ м.}$$

11. Классифицируем движение точки по ускорениям.

Вектор скорости и вектор касательного ускорения направлены в противоположные стороны, следовательно, движение точки M замедленное.

12. Нормальное ускорение не равно нулю, имеется радиус кривизны ρ, значит, движение точки M криволинейное.

Пример 2. По дуге полуокружности радиуса R = 10 см, расположенной в плоскости квадрата (рис. 16), от точки O движется точка M согласно закону $OM = S = 5\pi t^2$ (см). Для момента времени t = 1 с определить положение точки M на траектории, ее скорость, нормальное, касательное и полное ускорения $\bar{a}$.

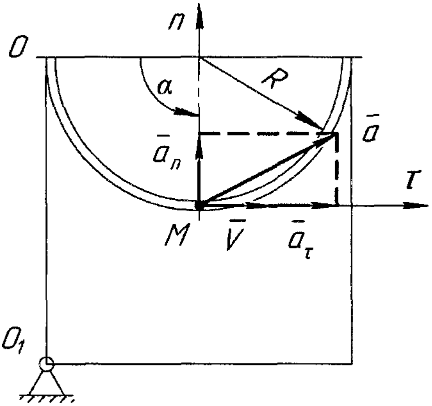


Рис. 16. Направления векторов скорости и ускорений

Положение точки M на квадратной пластинке определяется длиной дуги, которую опишет точка M, начав двигаться от точки O за время t = 1 с. Подставив значение времени в закон движения, получим длину дуги

$$OM = S = 5\pi t^2 = 5\pi \text{ (см)}.$$

Длина этой дуги определяется величиной центрального угла α и радиуса R полуокружности:

$$\alpha = \frac{S}{R} = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \text{ (рад) или } \alpha = 90^\circ.$$

Разместим точку M в заданном положении на траектории.

В данном случае движение точки задано естественным способом, так как известны траектория этого движения (полуокружность), начало отсчета криволинейной координаты (точка O), закон движения точки вдоль этой траектории (OM) с указанием положительного направления ее движения (в сторону увеличения дуги OM).

Поэтому воспользуемся формулами естественного способа задания движения точки для определения скорости и ускорений.

Величину скорости точки найдем как первую производную от закона движения:

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d\left(5\pi t^2\right)}{dt} = 10\pi t.$$

При $t = 1$ с

$$V = 10\pi \cdot 1 = 10\pi = 31{,}14 \text{ см/с}.$$

Положительный знак V указывает на то, что движение точки происходит в направлении положительного отсчета криволинейной координаты OM, поэтому и вектор скорости показываем в этом направлении по касательной к траектории движения (см. рис. 16).

Ускорение точки при естественном способе задания движения равно геометрической сумме касательного и нормального ускорений:

$$\overline{a} = \overline{a_\tau} + \overline{a_n}.$$

Величина касательного ускорения определяется как первая производная от закона изменения скорости по времени:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d\left(10\pi t\right)}{dt} = 10\pi = 31{,}14 \text{ см/с}^2.$$

Положительный знак касательного ускорения указывает на то, что вектор a_τ совпадает по направлению с вектором скорости V, поэтому движение точки ускоренное (см. рис. 16).

Нормальное ускорение

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{31{,}41^2}{10} = 98{,}66 \text{ см/с}^2.$$

Вектор a_n направлен к центру полуокружности (центру кривизны), описываемой точкой M (см. рис. 16).

Полное ускорение точки равно:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{31{,}14^2 + 98{,}66^2} = 103{,}54 \text{ см/с}^2.$$

Пример 3. Вдоль гипотенузы прямоугольного треугольника ABC (рис. 17) от точки C движется точка M по закону $CM = 20\sin \pi t$ (см). Для момента времени $t = {}^1/_6$ с определить скорость, касательное, нормальное и полное ускорения точки M.

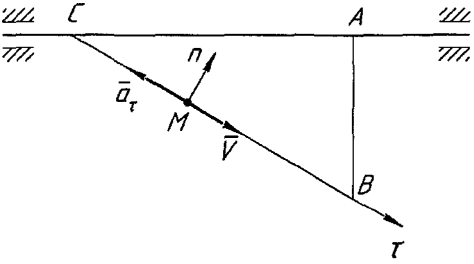


Рис. 17. Направление векторов скорости и ускорения

Решение:

1. Для момента времени $t = {}^1/_6$ с после начала движения определяем положение точки M на гипотенузе треугольной пластины $CM = S = 20 \sin \pi / 6 = 10$ см.

Определяем данную координату CM от точки C на гипотенузе CB в произвольном масштабе.

2. Движение точки задано естественным способом и происходит по закону $CM = S = 20 \sin \pi t$ (см), поэтому используем формулы (17), (19) и (20) для определения скорости и ускорения.

Величина скорости

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d(20 \sin \pi t)}{dt} = 20\pi \cos \pi t.$$

При $t = {}^1/_6$ с $V = 20\pi \cdot \cos \pi / 6 = 20 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}87 = 54{,}39$ см.

Положительный знак скорости указывает на то, что вектор V направлен в сторону возрастания координаты CM, т. е. в сторону ее положительных значений (см. рис. 17).

Полное ускорение точки определяем как геометрическую сумму касательного и нормального ускорений:

$$\overline{a} = \overline{a}_\tau + \overline{a}_n.$$

Величина касательного ускорения

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d(20\pi \cos \pi t)}{dt} = -20\pi^2 \sin \pi t\,.$$

При $t = {}^1/_6$ с $a_\tau = -20\pi^2 \sin \pi / 6 = -20 \cdot 3{,}14^2 \cdot 0{,}5 = -98{,}60$ см/с^2.

Отрицательный знак a_τ указывает на то, что вектор a_τ направлен в сторону отрицательных значений координаты CM. Изображаем его направленным в сторону, противоположную вектору V, и учитываем этим отрицательный знак a_τ. Движение точки M замедленное, так как величины V и a_τ разного знака.

Нормальное ускорение

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{\infty} = \frac{54{,}39^2}{\infty} = 0$$

Траектория точки прямая и радиус кривизны траектории равен бесконечности ($\rho = \infty$).

Полное ускорение точки равно: $\sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{98{,}66^2 + 0} = 96{,}66$ см/с.

10. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что представляет собой траектория точки?
2. Каким уравнением определяется движение точки при векторном способе задания ее движения?
3. Как определяется скорость точки при векторном способе задания ее движения?
4. Как направляется вектор скорости точки?
5. Что характеризует вектор скорости точки?

6. Как определяется ускорение точки при векторном способе задания ее движения?

7. В какой плоскости по отношению к траектории точки расположен вектор ее ускорения и как он направляется?

8. Что характеризует ускорение точки?

9. Как записываются уравнения движения точки в координатной форме?

10. Как определяются проекции скорости точки при координатном способе задания ее движения?

11. Как определяются проекции ускорения точки при координатном способе задания ее движения?

12. Каким уравнением определяется положение точки на траектории при естественном способе задания ее движения?

13. Как определяется скорость точки при естественном способе задания ее движения?

14. Как направляется вектор скорости точки, если значение скорости положительное?

15. Как направляется вектор скорости точки, если значение скорости отрицательное?

16. Как определяется ускорение точки при естественном способе задания ее движения?

17. По какой формуле определяется нормальное (центростремительное) ускорение точки?

18. Как направлен вектор нормального ускорения точки?

19. Когда нормальное ускорение точки равно нулю?

20. По какой формуле определяется касательное (тангенциальное) ускорение точки?

21. Как направлено касательное ускорение точки, если его значение положительное?

22. Как направлено касательное ускорение точки, если его значение отрицательное?

23. Какое движение точки называется равномерным?

24. По какой формуле определяется закон движения точки при равномерном движении?

25. Какое движение точки называется равнопеременным?

26. По какой формуле определяется закон изменения скорости точки при равнопеременном движении?

27. Каким уравнением выражается закон равнопеременного движения точки?

11. ЗАДАНИЯ

По заданному уравнению движения точки M относительно тела D для момента времени t определить положение точки на траектории, скорость, касательное, нормальное и полное ускорения точки M.

Задание 1. Данные для расчетов приведены в табл. 1, схемы показаны на рисунках в прил. 1. Начало отсчета движения точки M_1 принять от точки O_1.

Задание 2. Данные для расчетов приведены в табл. 2, схемы показаны на рисунках в прил. 2. Начало отсчета движения точки M_2 принять от точки O_2.

Таблица 1. **Исходные данные к заданию 1**

№ схемы	№ варианта	Уравнение движения точки M, см: $O_1M_1 = S_1 = f(t)$	t, с	R, см	α, град
1	2	3	4	5	6
1	1	$O_1M_1 = S_1 = 4t^2$	2	16	
	2	$O_1M_1 = S_1 = 10t^2$	1	10	
2	1	$O_1M_1 = S_1 = 15t^2$	2		30
	2	$O_1M_1 = S_1 = 10t - t^2$	2		60
3	1	$O_1M_1 = S_1 = 10\pi t^2$	1	10	
	2	$O_1M_1 = S_1 = 5\pi t^2$	2	20	
4	1	$O_1M_1 = S_1 = 5\pi t^2$	1	30	
	2	$O_1M_1 = S_1 = 4\pi t^2$	1	12	
5	1	$O_1M_1 = S_1 = 20t^2$	1		30
	2	$O_1M_1 = S_1 = 20t - 5t^2$	1		30
6	1	$O_1M_1 = S_1 = 8\pi t^2$	1	8	
	2	$O_1M_1 = S_1 = 5\pi t - 3\pi t^2$	1	6	
7	1	$O_1M_1 = S_1 = 10\pi t^2$	1	10	
	2	$O_1M_1 = S_1 = 12\pi t - 2\pi t^2$	1	20	
8	1	$O_1M_1 = S_1 = 2\pi t^2$	2	24	
	2	$O_1M_1 = S_1 = 5\pi t^2$	1	30	
9	1	$O_1M_1 = S_1 = 5t^2$	2		60
	2	$O_1M_1 = S_1 = 15t - 5t^2$	1		30
10	1	$O_1M_1 = S_1 = 10t^2$	1		
	2	$O_1M_1 = S_1 = 20t^2$	1		
11	1	$O_1M_1 = S_1 = 5t^2$	2		30
	2	$O_1M_1 = S_1 = 20t - 4t^2$	1		30
12	1	$O_1M_1 = S_1 = 5\pi t^2$	1	30	
	2	$O_1M_1 = S_1 = 4\pi t^2$	2	48	
13	1	$O_1M_1 = S_1 = 10\pi t^2$	1	10	
	2	$O_1M_1 = S_1 = 16\pi t - 4\pi t^2$	1	24	
14	1	$O_1M_1 = S_1 = 11t - t^2$	1		
	2	$O_1M_1 = S_1 = 20t - 5t^2$	1		
15	1	$O_1M_1 = S_1 = 10t^2$	2		30
	2	$O_1M_1 = S_1 = 20t - 5t^2$	1		60

Окончание табл. 1

1	2	3	4	5	6
16	1	$O_1M_1 = S_1 = 12\pi t^2$	1	8	
	2	$O_1M_1 = S_1 = 10\pi t^2$	1	10	
17	1	$O_1M_1 = S_1 = 6\pi t - 3\pi t^2$	1	9	
	2	$O_1M_1 = S_1 = 10\pi t - 2\pi t^2$	1	24	
18	1	$O_1M_1 = S_1 = 6\pi t^2$	1	12	
	2	$O_1M_1 = S_1 = 10\pi t^2$	1	10	
19	1	$O_1M_1 = S_1 = 4t^2$	2		60
	2	$O_1M_1 = S_1 = 30t - 10t^2$	1		60
20	1	$O_1M_1 = S_1 = 15t^2$	2		60
	2	$O_1M_1 = S_1 = 20t - 4t^2$	1		60
21	1	$O_1M_1 = S_1 = 5\pi t^2$	2	20	
	2	$O_1M_1 = S_1 = 8\pi t^2$	1	12	
22	1	$O_1M_1 = S_1 = 5\pi t^2$	1	10	
	2	$O_1M_1 = S_1 = 8\pi t^2$	2	32	
23	1	$O_1M_1 = S_1 = 10\pi t^2$	1	10	
	2	$O_1M_1 = S_1 = 5\pi t^2$	2	40	
24	1	$O_1M_1 = S_1 = 10t^2$	1		
	2	$O_1M_1 = S_1 = 15t - 5t^2$	1		
25	1	$O_1M_1 = S_1 = 5\pi t^2$	1	15	
	2	$O_1M_1 = S_1 = 8\pi t^2$	1	16	
26	1	$O_1M_1 = S_1 = 24\pi t^2$	1	16	
	2	$O_1M_1 = S_1 = 10\pi t^2$	1	15	
27	1	$O_1M_1 = S_1 = 10\pi t^2$	1	10	
	2	$O_1M_1 = S_1 = 5\pi t^2$	1	15	
28	1	$O_1M_1 = S_1 = 8\pi t^2$	1	16	
	2	$O_1M_1 = S_1 = 10\pi t^2$	1	20	
29	1	$O_1M_1 = S_1 = 4\pi t^2$	1	8	
	2	$O_1M_1 = S_1 = 2\pi t^2$	2	48	
30	1	$O_1M_1 = S_1 = 15\pi t - 5\pi t^2$	1	30	
	2	$O_1M_1 = S_1 = 12\pi t - 6\pi t^2$	1	12	

Таблица 2. **Исходные данные к заданию 2**

№ схемы	№ варианта	Уравнение движения точки M, см: $O_2M_2 = S_2 = f(t)$	t, с	R, см	α, град
1	2	3	4	5	6
1	1	$O_2M_2 = S_2 = 10t - t^2$	1	9	
	2	$O_2M_2 = S_2 = 5t^2$	2	20	
2	1	$O_2M_2 = S_2 = 20t - 2t^2$	2		30
	2	$O_2M_2 = S_2 = 10t^2$	1		60
3	1	$O_2M_2 = S_2 = 15\pi t^2$	1	30	
	2	$O_2M_2 = S_2 = 4\pi t^2$	1	12	
4	1	$O_2M_2 = S_2 = 12\pi t - 2\pi t^2$	1	60	
	2	$O_2M_2 = S_2 = 10\pi t^2$	1	30	
5	1	$O_2M_2 = S_2 = 10t - t^2$	2		30
	2	$O_2M_2 = S_2 = 8t^2$	1		30
6	1	$O_2M_2 = S_2 = 6\pi t^2$	1	12	
	2	$O_2M_2 = S_2 = 9\pi t - 3\pi t^2$	1	9	

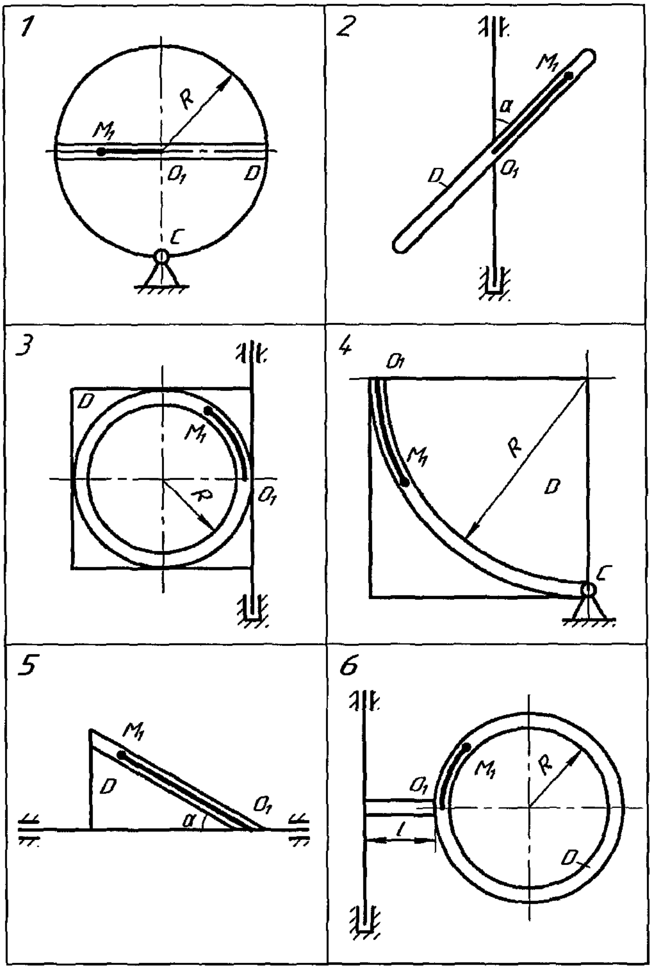
Окончание табл. 2

1	2	3	4	5	6
7	1	$O_2M_2 = S_2 = 15\pi t - 5\pi t^2$	1	5	
	2	$O_2M_2 = S_2 = 6\pi t^2$	1	18	
8	1	$O_2M_2 = S_2 = 12\pi t - 2\pi t^2$	1	30	
	2	$O_2M_2 = S_2 = 4\pi t^2$	1	12	
9	1	$O_2M_2 = S_2 = 15t^2$	1		30
	2	$O_2M_2 = S_2 = t^2 + 2$	1		60
10	1	$O_2M_2 = S_2 = 10t - 4t^2$	1		
	2	$O_2M_2 = S_2 = 1t - 5t^2$	1		
11	1	$O_2M_2 = S_2 = 30t - 10t^2$	1		75
	2	$O_2M_2 = S_2 = 10t^2$	1		60
12	1	$O_2M_2 = S_2 = 15t - 5t^2$	1	30	
	2	$O_2M_2 = S_2 = 10t^2$	1	30	
13	1	$O_2M_2 = S_2 = 9\pi t - 3\pi t^2$	1	9	
	2	$O_2M_2 = S_2 = 4\pi t^2$	1	8	
14	1	$O_2M_2 = S_2 = 15t - 10t^2$	1		
	2	$O_2M_2 = S_2 = 8t - 2t^2$	1		
15	1	$O_2M_2 = S_2 = 30t - 10t^2$	1		60
	2	$O_2M_2 = S_2 = 80t^2$	1		30
16	1	$O_2M_2 = S_2 = 8\pi t^2$	1	8	
	2	$O_2M_2 = S_2 = 20\pi t - 5\pi t^2$	1	15	
17	1	$O_2M_2 = S_2 = 4\pi t^2$	1	12	
	2	$O_2M_2 = S_2 = 5\pi t^2$	1	30	
18	1	$O_2M_2 = S_2 = 4\pi t^2$	1	24	
	2	$O_2M_2 = S_2 = 8\pi t^2$	1	16	
19	1	$O_2M_2 = S_2 = 20t - t^2$	2		60
	2	$O_2M_2 = S_2 = 4\pi t^2$	1		60
20	1	$O_2M_2 = S_2 = 15t - 5t^2$	1		60
	2	$O_2M_2 = S_2 = 10t^2$	1		60
21	1	$O_2M_2 = S_2 = 4\pi t^2$	1	6	
	2	$O_2M_2 = S_2 = 10\pi t^2$	2	40	
22	1	$O_2M_2 = S_2 = 4\pi t^2$	1	12	
	2	$O_2M_2 = S_2 = 10\pi t^2$	1	20	
23	1	$O_2M_2 = S_2 = 4\pi t^2$	1	24	
	2	$O_2M_2 = S_2 = 12\pi t^2$	1	8	
24	1	$O_2M_2 = S_2 = 20t - 4t^2$	1		
	2	$O_2M_2 = S_2 = 8t^2$	1		
25	1	$O_2M_2 = S_2 = 15\pi t - 5\pi t^2$	1	20	
	2	$O_2M_2 = S_2 = 5\pi t^2$	1	10	
26	1	$O_2M_2 = S_2 = 6\pi t^2$	1	12	
	2	$O_2M_2 = S_2 = 4\pi t^2$	2	48	
27	1	$O_2M_2 = S_2 = 15\pi t - 5\pi t^2$	1	30	
	2	$O_2M_2 = S_2 = 8\pi t^2$	1	8	
28	1	$O_2M_2 = S_2 = 20\pi t - 5\pi t^2$	1	30	
	2	$O_2M_2 = S_2 = 4\pi t^2$	1	24	
29	1	$O_2M_2 = S_2 = 15\pi t^2$	1	30	
	2	$O_2M_2 = S_2 = 30\pi t - 10\pi t^2$	1	40	
30	1	$O_2M_2 = S_2 = 20\pi t - 4\pi t^2$	1	32	
	2	$O_2M_2 = S_2 = 6\pi t^2$	1	18	

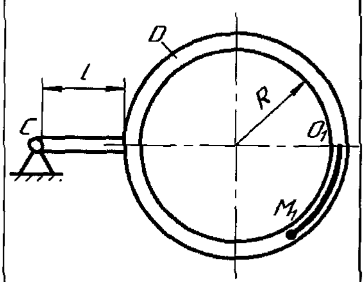
ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

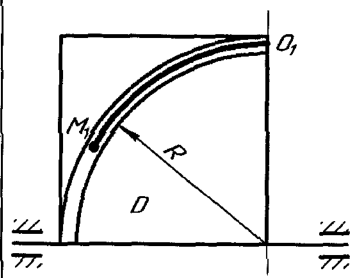
Расчетные схемы для задания 1



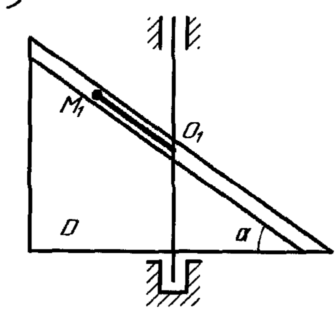
7



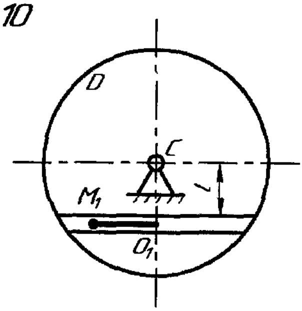
8



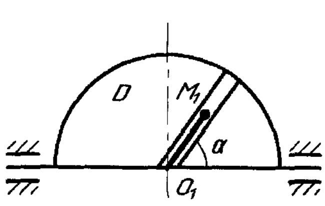
9



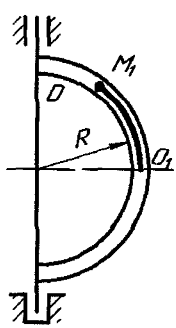
10

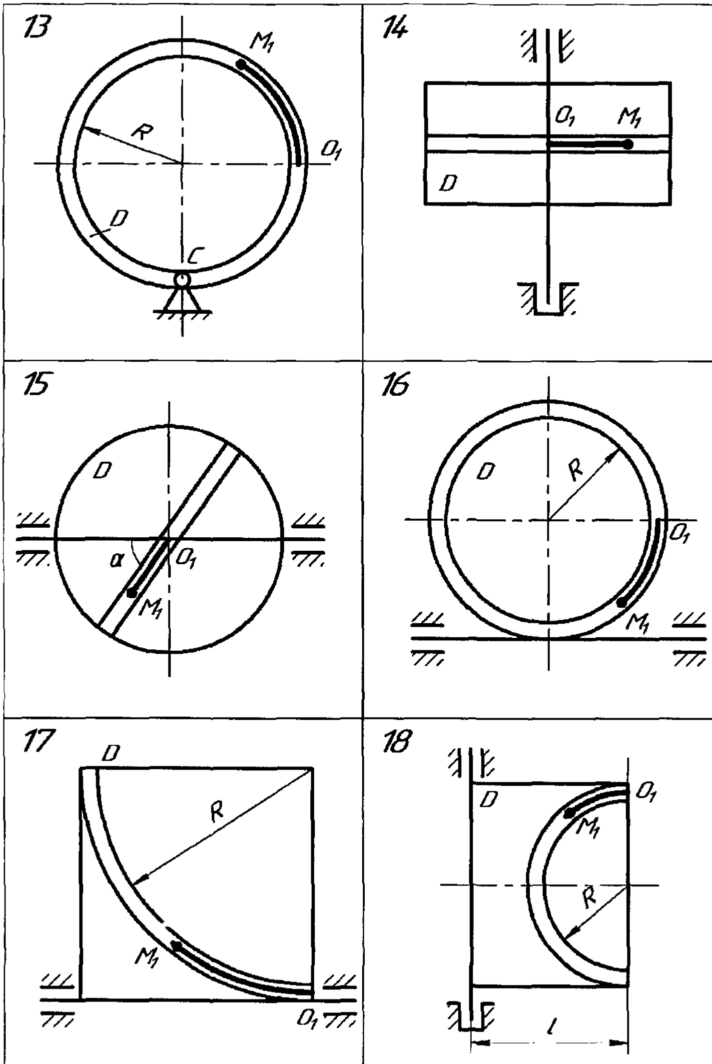


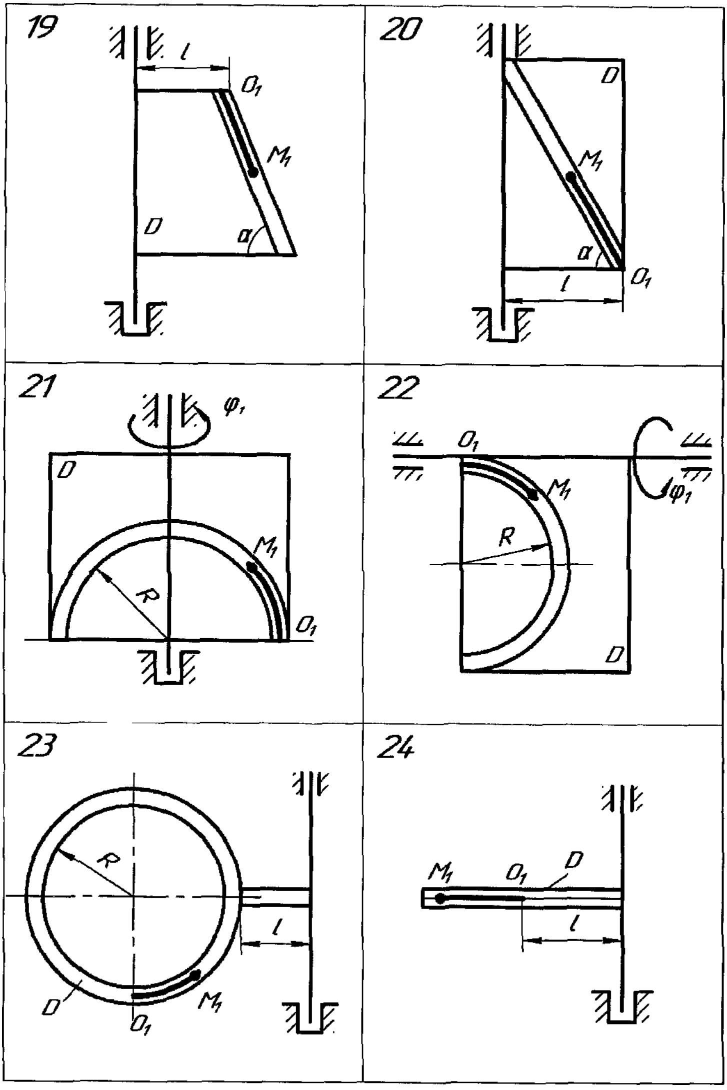
11



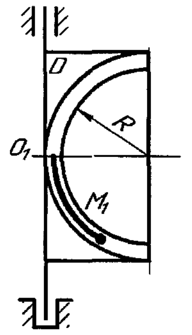
12



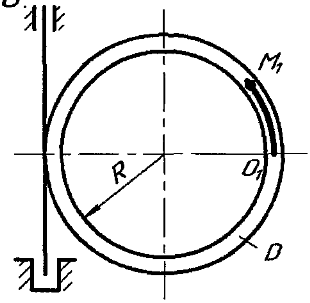

13
M1
R
O1
D
C
14
O1
M1
D
15
D
α
O1
M1
16
D
R
O1
M1
17
D
R
M1
O1
18
O1
D
M1
R
l


19
l
O1
M1
D
α
20
D
M1
α
O1
l
21
φ1
D
M1
R
O1
22
O1
M1
φ1
R
D
23
R
l
D
M1
O1
24
M1
O1
D
l

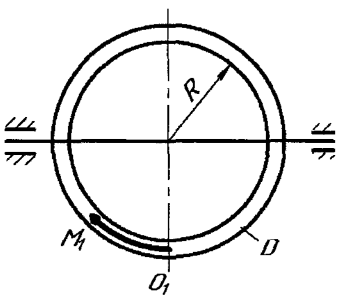
25



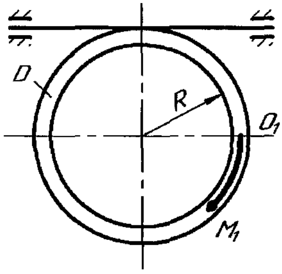
26.



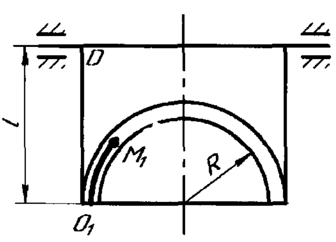
27



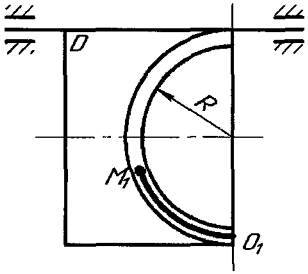
28



29

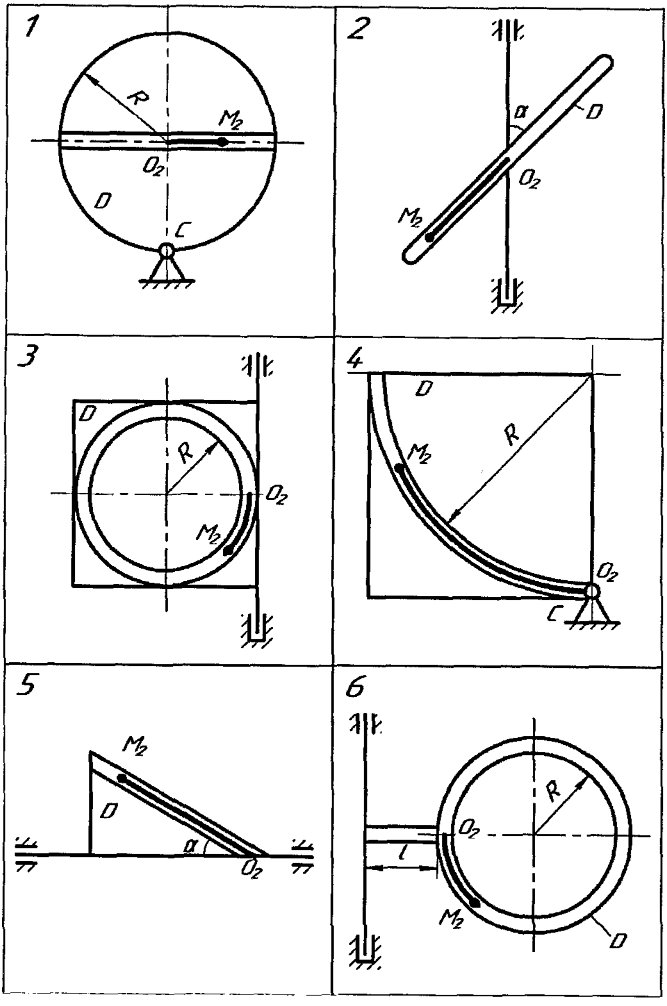


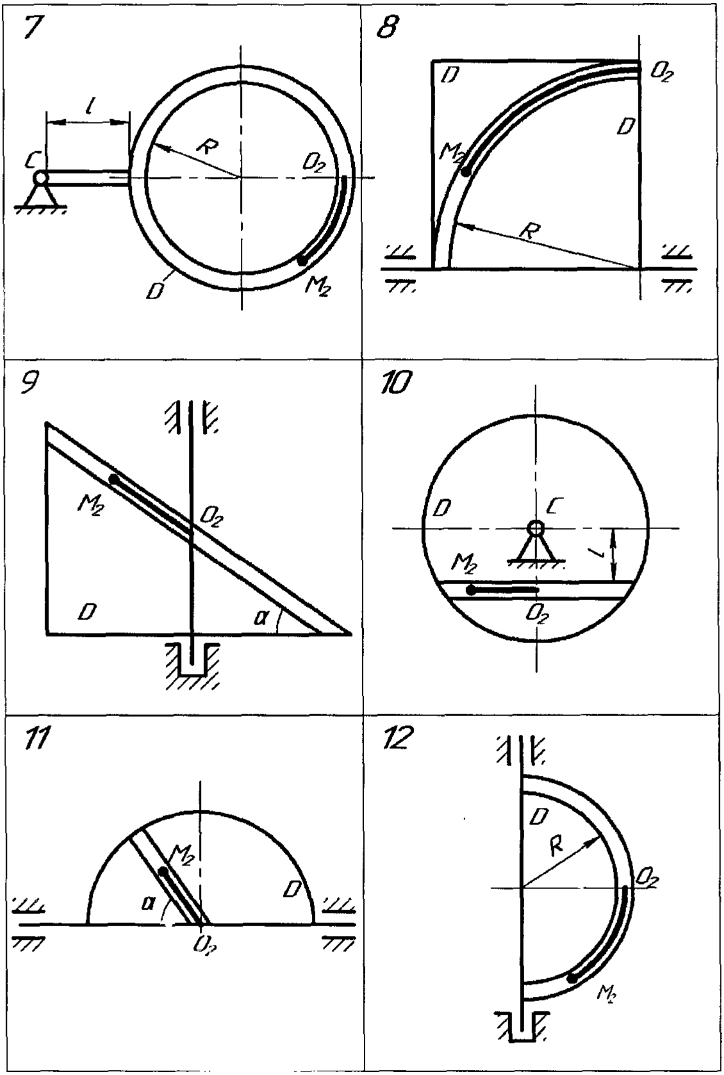
30



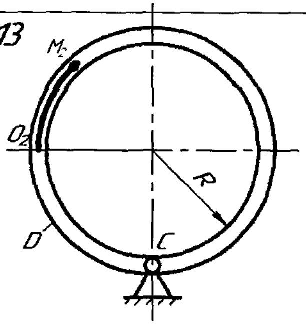
Приложение 2

Расчетные схемы для задания 2

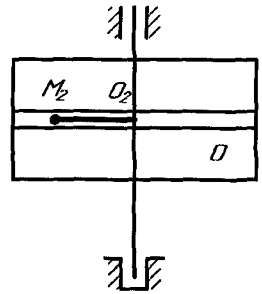



7
l
C
R
O_2
M_2
D
8
D
O_2
D
M_2
R
9
M_2
O_2
D
α
10
D
C
l
M_2
O_2
11
M_2
α
D
O_2
12
D
R
O_2
M_2

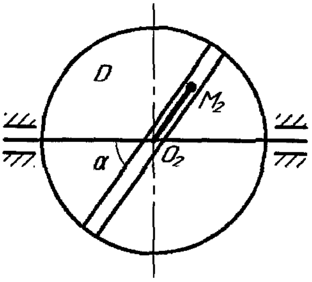
13



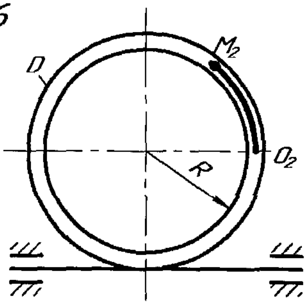
14



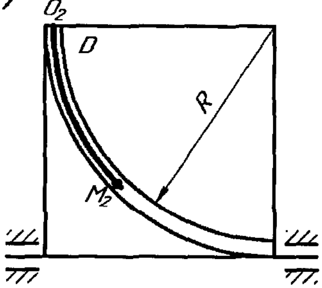
15



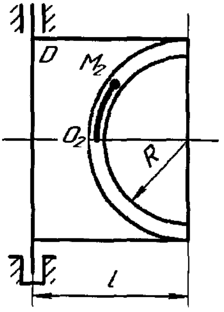
16

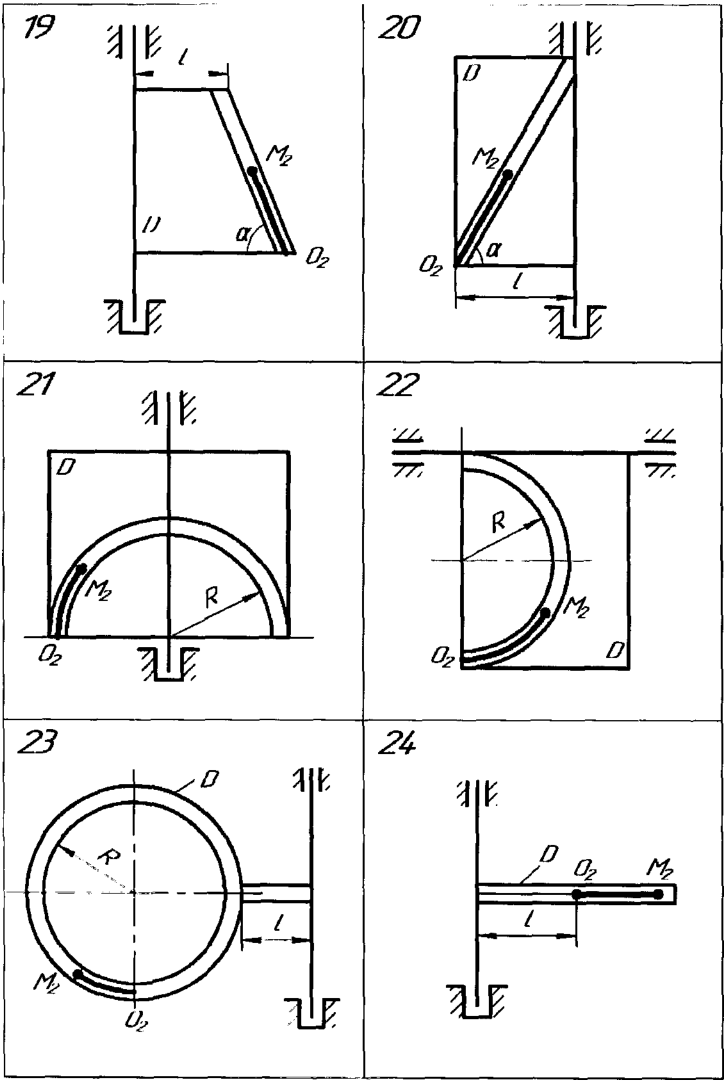


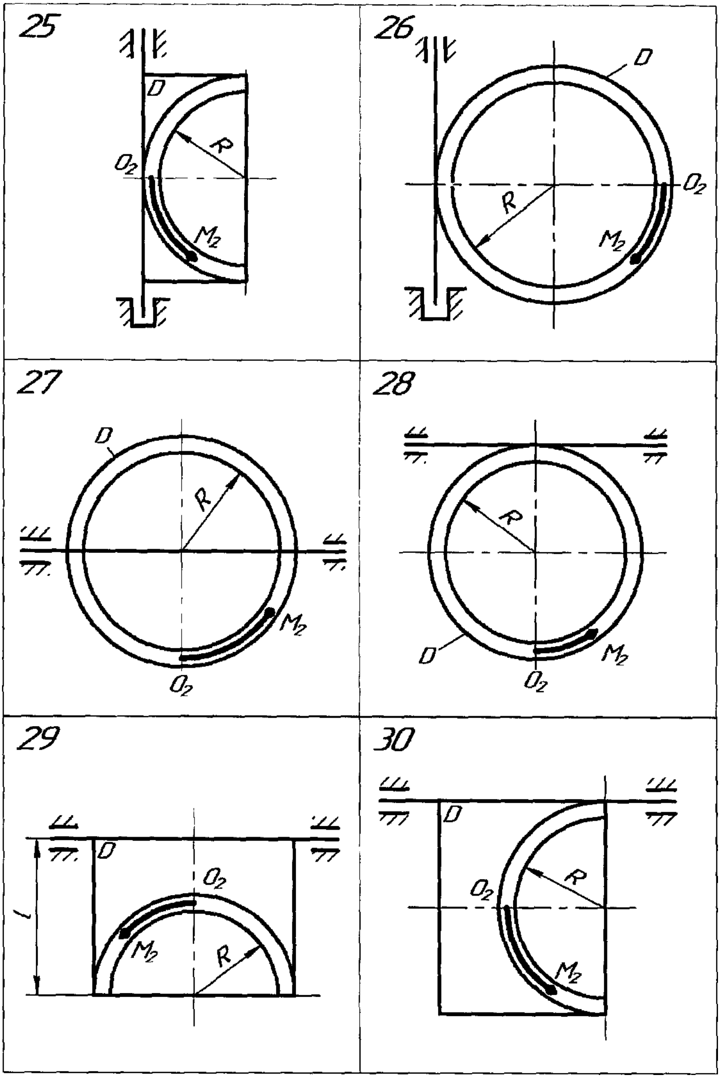
17



18




19
l
M2
D
α
O2
20
D
M2
α
O2
l
21
D
M2
R
O2
22
R
M2
O2
D
23
D
R
l
M2
O2
24
D
O2
M2
l


25
D
R
O2
M2
26
D
O2
R
M2
27
D
R
M2
O2
28
R
D
M2
O2
29
l
D
O2
M2
R
30
D
R
O2
M2