

## ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика изучает общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел. Все прикладные инженерные дисциплины основываются на методах и выводах теоретической механики.

По характеру изучаемых задач теоретическая механика состоит из трех разделов: статики, кинематики и динамики.

Статика – раздел теоретической механики, изучающий условия равновесия материальных тел под действием заданных сил и методы преобразования систем сил в эквивалентные системы.

Под равновесием твердого тела понимается состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

В разделе «Статика» рассматриваются две основные задачи:

- 1) сложение сил и преобразование одних систем сил в другие, им эквивалентные;
- 2) определение условий и составление уравнений равновесия для тел, находящихся под действием сил.

### СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – М.: Высш. шк., 2010. – 416 с.
2. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – М.: Лань, 2009. – Т. 1. – 736 с.
3. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.
4. Мещерский, И. В. Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский – М.: Наука, 2008. – 448 с.

## 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ СВЯЗИ

### 1.1. Основные понятия статики

*Материальной точкой* называется тело, имеющее массу, размерами которого в конкретном случае можно пренебречь.

*Системой материальных точек* или *механической системой* называется совокупность материальных точек, в которой положение и движение каждой точки зависит от положения и движения других точек системы.

*Абсолютно твердым* называется тело, расстояние между двумя любыми точками которого остается всегда постоянным.

*Свободным* называется тело, которое может совершать любые перемещения в пространстве под действием сил.

*Несвободным* называется тело, перемещения которого ограничены в пространстве.

Под механическим взаимодействием понимают действие материальных тел друг на друга, в результате которого происходит изменение движения этих тел.

Мерой механического взаимодействия тел является *сила*.

Сила – величина векторная, определяется тремя параметрами: 1) модулем; 2) направлением; 3) точкой приложения силы (рис. 1).

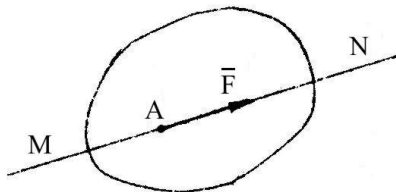


Рис. 1

Линия MN, вдоль которой действует сила, называется *линией действия* этой силы.

*Сосредоточенной силой* называют силу, приложенную к какой-либо точке твердого тела.

*Распределенными* называют силы, действующие на все точки объема, или части поверхности, или линии. Распределенные силы характеризуются интенсивностью  $q$ , т. е. силой, приходящейся на единицу объема, поверхности или длины линии. Распределенные силы обычно заменяют сосредоточенными. Сосредоточенная сила  $Q=ql$  (рис. 2).

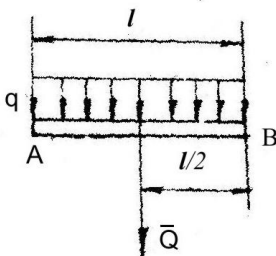


Рис. 2

*Системой сил* называют совокупность нескольких сил, действующих на тело или систему тел. По внешнему признаку все системы сил можно разделить на три вида: сходящая, произвольная

плоская и произвольная пространственная (см. дальше). Система сил, под действием которой тело находится в равновесии, называется *уравновешенной* или эквивалентной нулю. Сила, эквивалентная некоторой системе сил, называется *равнодействующей*. Сила, равная по модулю равнодействующей и направленная по линии ее действия в противоположную сторону, называется *уравновешивающей силой*.

*Внутренними силами* называют силы взаимодействия между точками и телами, входящими в механическую систему. *Внешними силами* называют силы, которые действуют на данную систему тел со стороны других тел, не входящих в данную систему.

## 1.2. Аксиомы статики

*Аксиома 1.* Свободное твердое тело будет находиться в равновесии под действием двух сил, если эти силы равны по модулю и направлены в противоположные стороны по одной прямой (см. рис. 3).

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$$

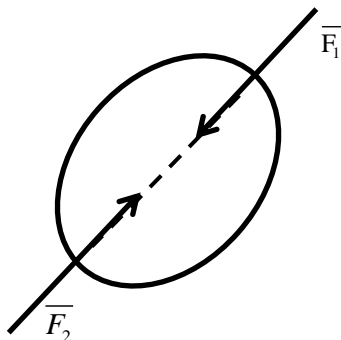


Рис. 3

*Аксиома 2.* Если к телу, находящемуся в покое или движении, приложить или отбросить систему уравновешенных сил, то состояние этого тела не изменится. (Например,  $|\vec{F}_5| = |\vec{F}_4|$ ) (рис. 4, а).

*Следствие.* Не нарушая состояние покоя или движения твердого тела, силу можно переносить по линии ее действия в другие точки тела, т. е. сила, приложенная к абсолютно твердому телу, является скользящим вектором (рис. 4, б).

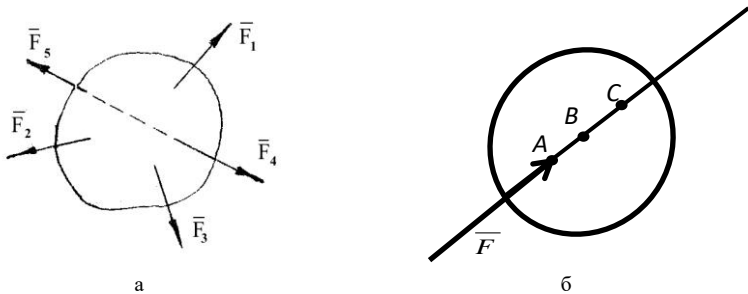


Рис. 4

*Аксиома 3.* Равнодействующая двух сил, приложенных к твердому телу в одной точке, равна их геометрической сумме и является диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рис. 5).

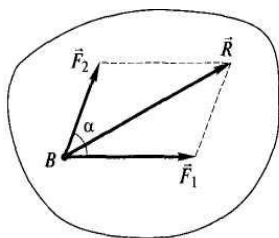


Рис. 5

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1)$$

Модуль равнодействующей равен:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos(\overline{F_1} \wedge \overline{F_2})}. \quad (2)$$

*Аксиома 4.* Силы, с которыми действуют друг на друга два тела, равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

*Аксиома 5.* Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если его мысленно освободить от связей, заменив их действие на тело силами реакций.

Тела, ограничивающие перемещение данного тела в пространстве, называются связями.

Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя его перемещениям, называется силой реакции или просто реакцией.

### 1.3. Основные виды связей и их реакции

#### 1.3.1. Гладкая поверхность

Реакция гладкой поверхности направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в сторону тела (рис. 6).

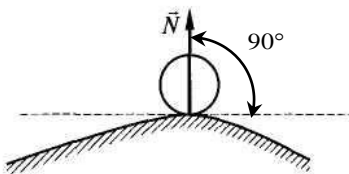


Рис. 6

Реакция опорной точки (ребра) перпендикулярна опирающейся поверхности или поверхности тела (рис. 7).

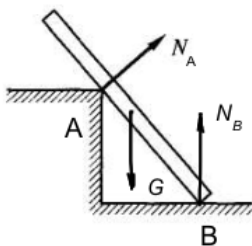


Рис. 7

#### 1.3.2. Гибкая связь

Гибкой называется невесомая и нерастяжимая нить, трос, канат, цепь, ремень. Реакция гибкой связи направлена вдоль нити от закрепленного тела (рис. 8).

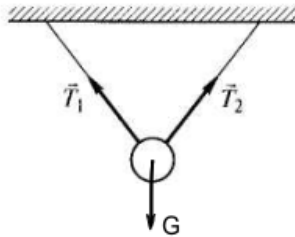


Рис. 8

### 1.3.3. Невесомый шарнирный стержень

Невесомым называется стержень, собственный вес которого во много раз меньше воспринимаемой им нагрузки, на концах которого расположены шарниры. Реакция связи направлена вдоль геометрической оси стержня. Геометрическая ось - это прямая, проходящая через шарниры стержня, так как стержень может быть и не прямолинейным (рис. 9). Невесомый стержень может быть сжат или растянут.

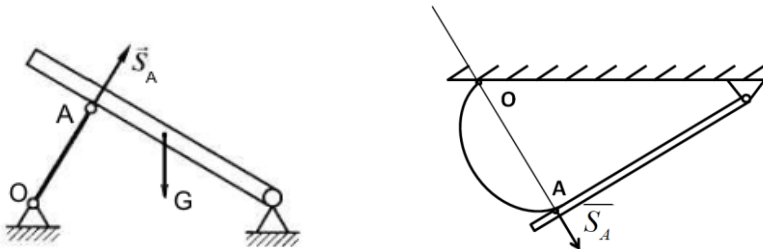


Рис. 9

### 1.3.4. Неподвижный цилиндрический шарнир

Неподвижный цилиндрический шарнир, соединяющий два тела, позволяет одному телу вращаться по отношению к другому вокруг оси шарнира, перемещаться вдоль нее, но не позволяет точке закрепления перемещаться в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. Реакция  $R_A$  лежит в этой плоскости, но ее направление не определено, поэтому она может быть представлена двумя взаимно перпендикулярными

составляющими  $X_A$  и  $Y_A$  (рис. 10). По модулю реакция в шарнире  $A$  равна:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} . \quad (3)$$

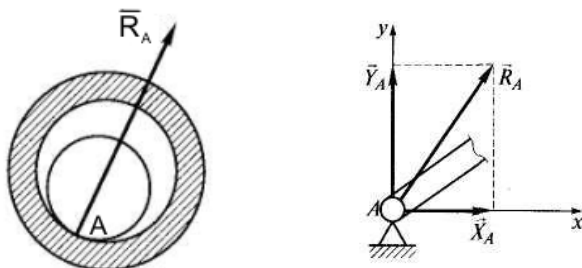


Рис. 10

### 1.3.5. Сферический (шаровой) шарнир

Шаровой шарнир, соединяющий два тела, позволяет телам только поворачиваться относительно другого вокруг центра шарнира.

Такая связь не дает точке закрепления тел перемещаться ни в одном из направлений. Направление реакции  $R_A$  не определено, но она может быть представлена тремя взаимно-перпендикулярными составляющими  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Y}_A$  и  $\bar{Z}_A$  (рис. 11).

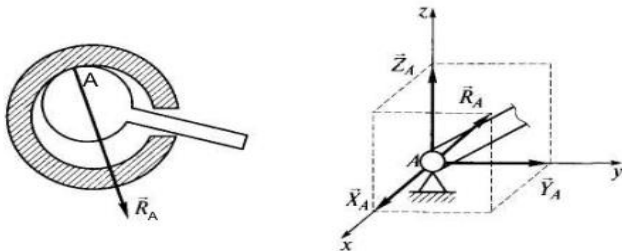


Рис. 11

По модулю реакция в сферическом шарнире  $A$  равна

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} . \quad (4)$$

### 1.3.6. Подпятник

Реакция данной связи (шарнир с упором) задается и определяется по модулю аналогично тому, как в предыдущем случае сферического шарнира, т. е. тремя взаимно перпендикулярными составляющими  $\overline{X}_A$ ,  $\overline{Y}_A$ ,  $\overline{Z}_A$  (рис. 12).

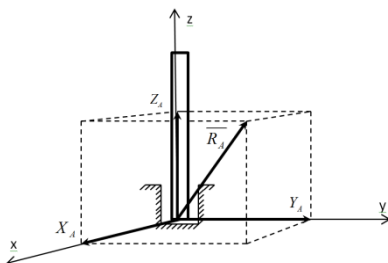


Рис. 12

Отличие в том, что одна из составляющих (например,  $\overline{Z}_A$ ) направляется вдоль оси подпятника  $z$ .

### 1.3.7. Жесткая заделка (плоская)

Такая связь (заделка одного конца балки) препятствует перемещению и повороту вокруг точки закрепления. В данном случае имеем две составляющие реакции  $\overline{X}_A$ ,  $\overline{Y}_A$  и пару сил с моментом  $M_A$ . На рис. 13 действие пары на твердое тело изображается дуговой стрелкой, показывающей направление действия пары, препятствующей повороту тела, с указанием ее момента. В случае жесткой заделки момент  $M_A$  называется моментом в заделке.

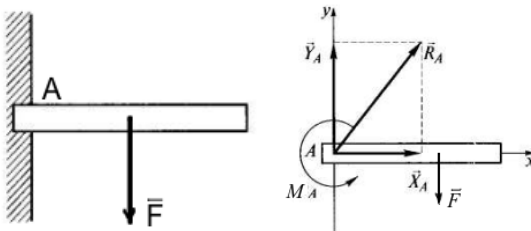


Рис. 13

## 2. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Системой сходящихся сил называют систему сил, линии действия которых пересекаются в одной точке (рис. 14).

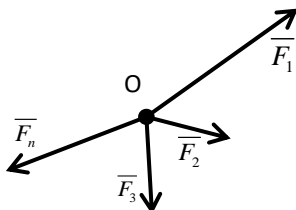


Рис. 14

Систему сходящихся сил в общем случае можно заменить равнодействующей, которая равна геометрической сумме всех сил системы и проходит через точку пересечения линий действия этих сил:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_k \quad (5)$$

### 2.1. Проекция силы на ось

Аналитический метод решения задач статики основан на понятии о проекции силы на ось.

Проекция силы на ось равна взятой с соответствующим знаком длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца силы на ось (рис. 15).

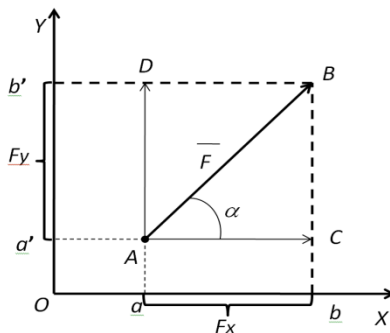


Рис. 15

Проекция силы имеет знак «плюс», если перемещение от ее начала к концу происходит в положительном направлении оси, и знак «минус», если в отрицательном.

Тогда

$$F_x = ab; F_y = a'b'.$$

Удобно определять проекции силы на ось как катеты прямоугольного треугольника (например,  $\triangle ABC$  и  $\triangle ADB$ ), гипотенузой которого является сила ( $F = AB$ ). Из рисунка видно, что:

$$\begin{aligned} F_x &= ab = AC = AB \cdot \cos \alpha = F \cdot \cos \alpha; \\ F_y &= a'b' = AD = AB \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = F \cdot \cos(90^\circ - \alpha). \end{aligned}$$

В общем случае проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси:

$$\begin{aligned} F_x &= F \cdot \cos \alpha; \\ F_y &= F \cdot \cos(90^\circ - \alpha). \end{aligned} \quad (6)$$

## 2.2. Условия равновесия системы сходящихся сил

Для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этой системы сил была равна нулю:

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k = 0. \quad (7)$$

**Геометрическое условие равновесия** означает, что силовой многоугольник должен быть замкнут, т. е. при построении силового многоугольника конец последнего вектора совпадает с началом первого вектора силы.

**Аналитические условия равновесия** системы сходящихся сил. Для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил системы на каждую из трех координатных осей были равны нулю:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; \\ \sum F_{ky} &= 0; \\ \sum F_{kz} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Для равновесия плоской системы сходящихся сил достаточно двух условий равновесия

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0; \\ \sum F_{ky} &= 0.\end{aligned}\tag{9}$$

### 3. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ. ПАРА СИЛ

#### 3.1. Момент силы относительно точки

Действие силы на твердое тело, закрепленное в одной точке, заключается в стремлении повернуть его вокруг точки закрепления. Для характеристики вращательного действия силы введено понятие момента силы относительно точки.

Если силы расположены в одной плоскости (плоская система сил), то *алгебраическим моментом силы* относительно точки называется взятое со знаком «плюс» или «минус» произведение модуля силы  $F$  на плечо  $h$ .

$$m_o(\vec{F}) = \pm F \cdot h,\tag{10}$$

где  $h$  – плечо силы (перпендикуляр, проведенный из точки до линии действия силы).

Знак «плюс» ставится в том случае, если сила стремится поворачивать тело относительно точки против хода часовой стрелки (рис. 16, *а*), знак «минус», если по ходу часовой стрелки (рис. 16, *б*).

Момент силы относительно точки равен нулю, если линия действия силы проходит через эту точку (рис. 16, *в*).

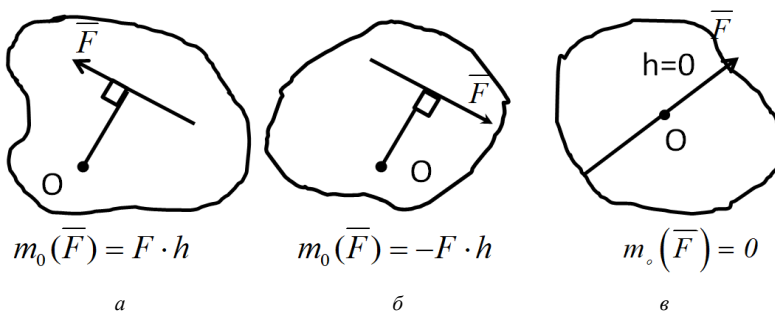


Рис. 16

### 3.2. Теорема о моменте равнодействующей плоской системы сил (Теорема Вариньона)

Момент силы относительно некоторой точки равен сумме моментов составляющих относительно той же точки.

Этой теоремой пользуются, когда определение плеча затруднено. Силу  $F$  представляют в виде двух составляющих  $F\cos\alpha$  и  $F\cos(90^\circ-\alpha)$  направленных параллельно выбранным осям координат (рис. 17).

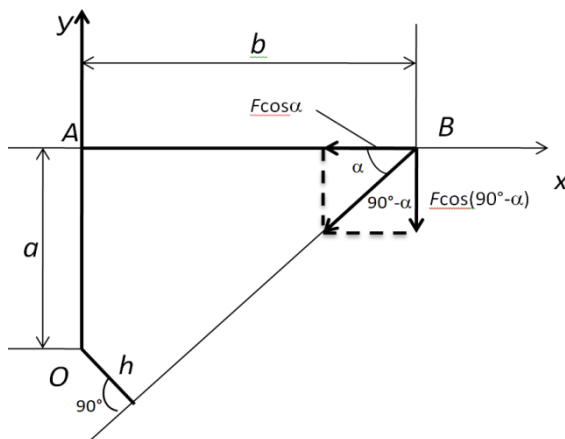


Рис. 17

$$m_o(\bar{F}) = -F \cdot h = F \cdot \cos \alpha \cdot a - F \cdot \cos(90^\circ - \alpha) \cdot b. \quad (11)$$

### 3.3. Пара сил

Система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил называется парой сил (рис. 18, а). Расстояние  $d$  между линиями действия пары сил называется плечом пары.

$$\bar{F}' = -\bar{F}.$$

Поскольку пара сил характеризуется только ее моментом, то на рисунках пару сил часто изображают просто дуговой стрелкой, показывающей направление поворота пары (рис. 18, б).

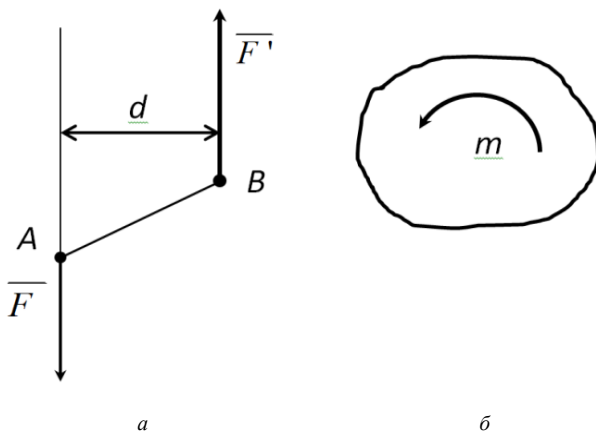


Рис. 18

Для характеристики действия на твердое тело пары сил введено понятие момента пары. **Моментом пары сил** на плоскости называется алгебраическая величина, равная взятому со знаком «плюс» или «минус» произведению модуля одной из сил пары на плечо пары.

$$m = \pm Fd. \quad (12)$$

Правило знаков такое же, как и для момента силы относительно точки. Сумма проекций двух сил пары на любую ось равна нулю.

#### 4. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

Произвольной плоской системой сил называется совокупность сил, расположенных в одной плоскости, линии действия которых не пересекаются в одной точке.

Условия равновесия произвольной плоской системы сил можно получить в трех различных формах.

##### 1. Первая (основная) форма условий равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; \\ \sum F_{ky} &= 0; \\ \sum m_o(F_k) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на две координатные оси и сумма моментов всех сил относительно любой точки были равны нулю.

## 2. Вторая форма условий равновесия:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0; \\ \sum m_A(F_k) &= 0; \\ \sum m_B(F_k) &= 0.\end{aligned}\tag{14}$$

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций сил на одну координатную ось и алгебраические суммы моментов всех сил относительно двух произвольных точек были равны нулю.

При использовании второй формы условий равновесия необходимо, чтобы ось  $X$  не была перпендикулярна прямой  $AB$ .

## 3. Третья форма условий равновесия:

$$\begin{aligned}\sum m_A(F_k) &= 0; \\ \sum m_B(F_k) &= 0; \\ \sum m_C(F_k) &= 0.\end{aligned}\tag{15}$$

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил относительно трех произвольных точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ , не лежащих на одной прямой, были равны нулю.

# 5. ТРЕНИЕ

## 5.1. Трение скольжения

При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила сопротивления их относительному скольжению, называемая силой трения скольжения.

Трение обусловлено шероховатостью поверхности и наличием сцепления прижатых тел. Реакция шероховатой поверхности имеет две составляющие – нормальную  $N$  и силу трения скольжения  $F_{\text{тр}}$ . Сила трения направлена в сторону, противоположную возможному движению тела (рис. 19). Максимальное значение силы трения пропорционально силе нормального давления и достигается в момент выхода тела из положения равновесия:

$$F_{\text{тр}} = fN,\tag{16}$$

где  $f$  – безразмерная величина, которую называют коэффициентом трения, принимает значения  $0 < f < 1$ .

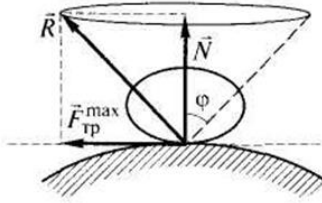


Рис. 19

## 5.2. Трение качения

Трением качения называется сопротивление, возникающее при перекатывании одного тела по поверхности другого.

Трение качения возникает в результате деформации катящегося тела и опорной поверхности, которые в действительности не являются абсолютно твердыми.

При этом нормальная реакция смещается в сторону движения относительно центра катка на некоторую величину, которая при выходе тела из равновесия достигает максимума и называется коэффициентом трения качения  $f_k$  (рис. 20, а). Коэффициент трения качения имеет размерность длины в отличие от безразмерного коэффициента трения скольжения. Обычно нормальную реакцию проводят через центр катка, добавляя при этом к телу пару сил с моментом (рис. 20, б), который называют моментом трения качения,

$$m_{тр} = f_k \cdot N. \quad (17)$$

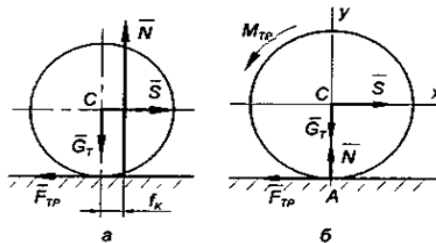


Рис. 20

При решении задач с учетом сил трения дополнительно к рассмотренным ранее уравнениям равновесия (13), (14) или (15) необходимо добавить уравнение (16) или (17).

## 6. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

Произвольной пространственной системой сил называется такая система, где силы расположены в пространстве и линии действия их не пересекаются в одной точке.

### 6.1. Проекция силы на плоскость

Проекция силы на плоскость  $Oxy$  равна произведению силы на косинус угла между вектором силы и плоскостью  $Oxy$  (рис. 21)

$$F_x = ab = F \cos \alpha. \quad (18)$$

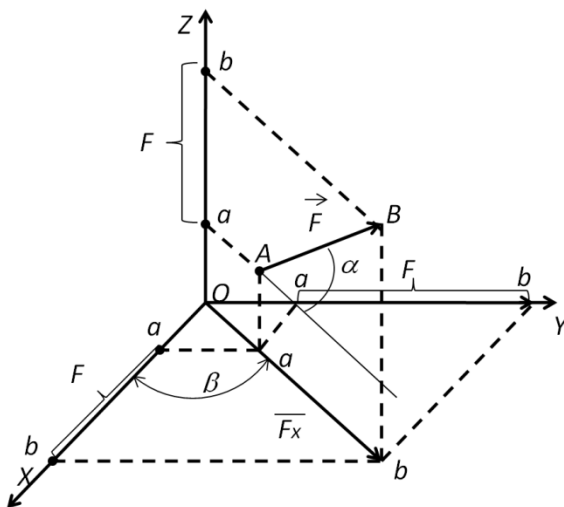


Рис. 21

### 6.2. Проекция силы на оси координат

Проекции силы на ось  $Ox$  и ось  $Oy$  определяют методом двойного проецирования: сначала на плоскость, затем – на ось (рис. 21).

$$F_x = a_1 b_1 = F_{xy} \cdot \cos \beta = F \cos \alpha \cdot \cos \beta; \quad (19)$$

$$F_y = a_2 b_2 = F_{xy} \cdot \sin \beta = F \cos \alpha \cdot \sin \beta. \quad (20)$$

Проекция силы на ось  $Oz$ :

$$F_z = a_3 b_3 = F \cdot \sin \alpha. \quad (21)$$

### 6.3. Момент силы относительно оси

Моментом силы относительно оси называют взятое со знаком «плюс» или «минус» произведение проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, на плечо этой проекции относительно точки пересечения оси с плоскостью (рис. 22).

$$m_z(\bar{F}) = \pm F_{xy} \cdot h. \quad (22)$$

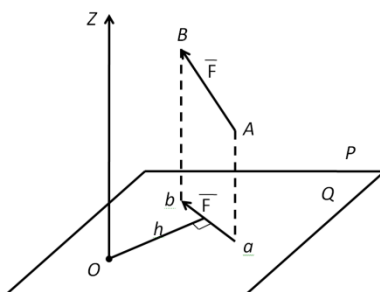


Рис. 22

Момент силы относительно оси будет положительным, если проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси, стремится повернуться против хода часовой стрелки вокруг положительного направления оси.

Момент силы относительно оси можно определять в следующей последовательности (рис. 22):

1. Провести мысленно плоскость перпендикулярную оси  $z$  (пл.  $xy$ ).
2. Спроецировать силу на данную плоскость и определить величину полученной проекции ( $F_{xy}$ ).
3. Определить момент полученной проекции относительно точки  $O$  пересечения оси  $z$  с плоскостью  $xy$  ( $F_{xy}h$ ).
4. Установить знак момента проекции силы относительно оси  $z$  (плюс или минус).

Момент силы относительно оси равен нулю, если:

1. Сила параллельна оси  $z$ . В этом случае  $F_{xy} = 0$ .
2. Линия действия силы пересекает ось  $z$ , поэтому  $h = 0$ .

На практике, при определении момента силы относительно оси, удобно разложить силу на составляющие параллельные выбранным осям и определить сумму моментов этих составляющих относительно

каждой оси. В этом случае некоторые составляющие будут параллельны осям и их моменты будут равны нулю.

#### **6.4. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил в аналитической форме**

Для равновесия произвольной пространственной системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на три оси координат равнялись нулю и алгебраические суммы моментов всех сил относительно этих осей равнялись нулю.

Условия равновесия в аналитической форме:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; & \sum m_x(F_k) &= 0; \\ \sum F_{ky} &= 0; & \sum m_y(F_k) &= 0; \\ \sum F_{kz} &= 0; & \sum m_z(F_k) &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

#### **6.5. Особенности решения задач на равновесие тела при действии пространственной системы сил**

1. Оси координат совмещают с телом, равновесие которого рассматривают, чтобы можно было определить плечи сил относительно осей. Одну из осей координат располагают параллельно или перпендикулярно наибольшему числу сил для удобства составления уравнений проекций сил на оси.

2. Начало осей помещают в ту точку тела и направляют так, чтобы их пересекало или им было параллельно как можно больше неизвестных сил (проще будет решить систему уравнений равновесия, так как в этом случае моменты этих неизвестных сил относительно осей будут равны нулю).

### **7. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ**

1. Что понимается под равновесием твердого тела?
2. Что называется силой?
3. Что называется линией действия силы?
4. Какую силу называют равнодействующей?
5. Какими правилами можно пользоваться при геометрическом сложении сил?
6. В каком случае свободное твердое тело находится в равновесии под действием двух сил?

7. Что произойдет с твердым телом, если точку приложения силы перенести по линии ее действия?
8. Что называется связями и чем они заменяются?
9. Сформулируйте аксиому связей.
10. Какая система сил называется сходящейся?
11. Запишите условия равновесия системы сходящихся сил в геометрической форме.
12. Запишите аналитическое условие равновесия сходящейся системы сил.
13. Какая система сил называется произвольной плоской?
14. Чему равен алгебраический момент силы относительно точки?
15. Что называется плечом силы относительно точки?
16. Какое движение характеризует момент силы относительно точки?
17. Когда момент силы относительно точки считается положительным, а когда отрицательным?
18. В каком случае момент силы относительно точки равен нулю?
19. Сформулируйте теорему о моменте равнодействующей плоской системы сил (теорему Вариньона).
20. В чем заключается практическая значимость применения теоремы Вариньона при определении момента силы относительно точки?
21. Что называется парой сил?
22. Чем характеризуется действие пары сил на тело?
23. Чему равен момент пары сил?
24. Какие пары сил называются эквивалентными?
25. Чему равна сумма проекций сил пары на ось?
26. Запишите первую (основную) форму условий равновесия произвольной плоской системы сил.
27. Запишите вторую форму условий равновесия произвольной плоской системы сил.
28. Запишите третью форму условий равновесия произвольной плоской системы сил.
29. Что называется трением скольжения?
30. По какой формуле определяется сила трения скольжения?
31. Что называется трением качения?
32. Из-за чего возникает трение качения?
33. Чему равен момент трения качения?
34. Что называется коэффициентом трения качения?
35. Какую размерность имеет коэффициент трения качения?
36. Какая система сил называется произвольной пространственной?
37. Как определить проекцию силы на плоскость?

38. Как определить проекцию силы на ось?
39. Чему равен момент силы относительно оси?
40. В каком случае момент силы относительно оси равен 0?
41. Запишите условия равновесия произвольной пространственной системы сил.

## 8. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Практическая часть предусматривает закрепление теории решением примеров и задач.

В результате изучения раздела «Статика» студент должен знать основные понятия и теоремы, уметь проецировать силы на оси, находить моменты сил относительно любой точки на плоскости и относительно осей, знать условия равновесия различных систем сил и уметь составлять уравнения их равновесия.

Данные задания разработаны для поэтапного освоения студентами раздела «Статика». Они построены по принципу «от простого к сложному» и дополняют теоретический материал, рассматриваемый на лекциях.

### 8.1. Проекция силы на оси координат

1. Чему равна проекция силы  $F$  на оси  $Ox$  и  $Oy$  на рис. 23 – 34?

$$F_x = ?$$

$$F_y = ?$$

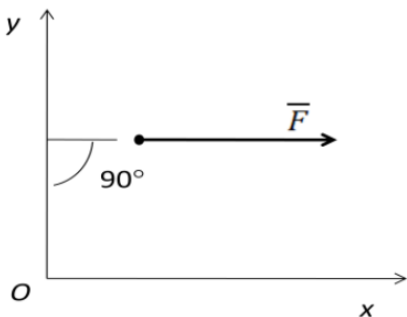


Рис. 23

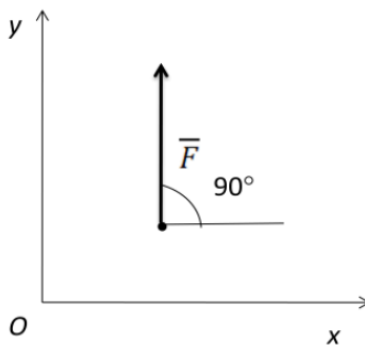


Рис.24

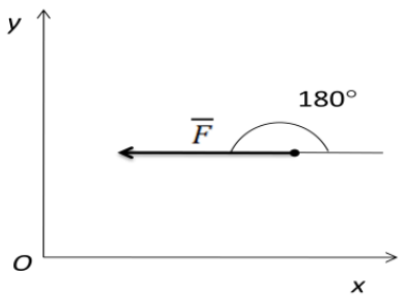


Рис. 25

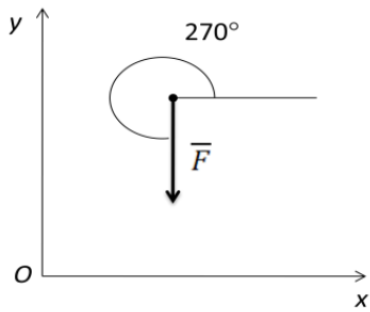


Рис. 26

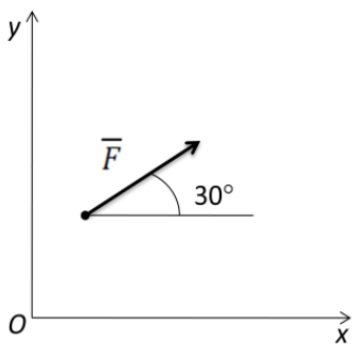


Рис. 27

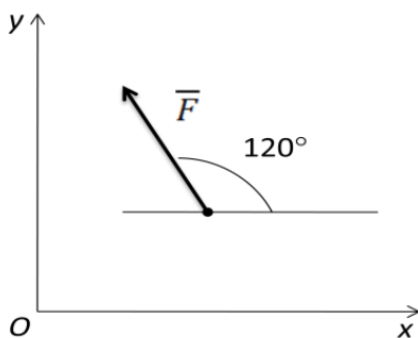


Рис. 28

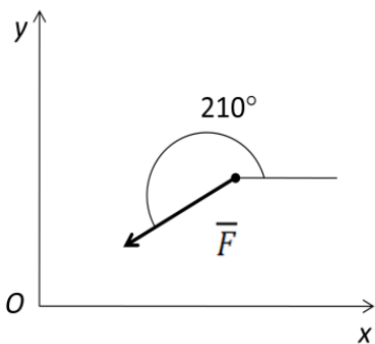


Рис. 29

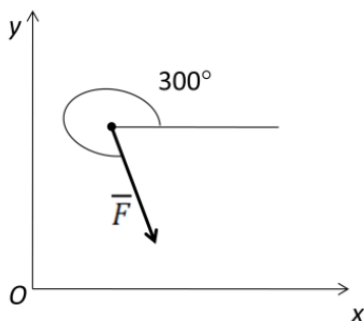


Рис. 30

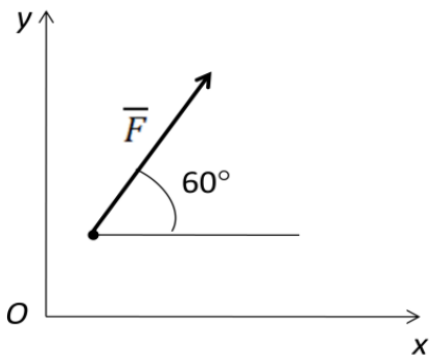


Рис. 31

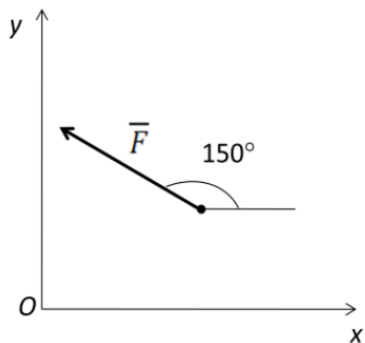


Рис. 32

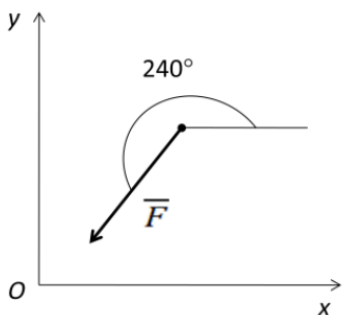


Рис. 33

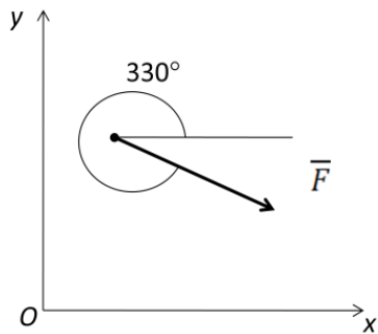


Рис. 34

2. Укажите буквами направление вектора силы, зная проекции силы на оси координат. Первая буква - начало силы, вторая - конец силы. Например (AC) (рис. 35).

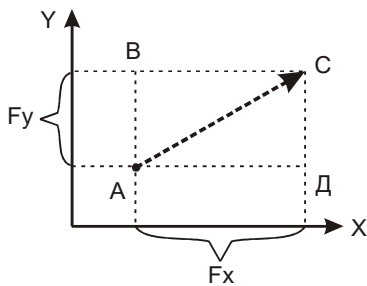


Рис. 35

1.  $F_x = +4H; F_y = +3H.$
2.  $F_x = -4H; F_y = -3H.$
3.  $F_x = -4H; F_y = +3H.$
4.  $F_x = +4H; F_y = -3H.$
5.  $F_x = 4H; F_y = 0.$
6.  $F_x = 0; F_y = 3H.$
7.  $F_x = -4H; F_y = 0.$
8.  $F_x = 0; F_y = -3H.$

3. Сложите две силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  (рис. 36) геометрически, применив теорему косинусов, и аналитически, определив их проекции на оси координат.

Сравните ответы.

Дано:  $F_1 = 5H; F_2 = 8H.$

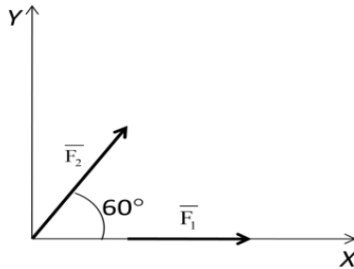


Рис. 36

## 8.2. Момент силы относительно точки

1. Чему равен момент силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  на рис. 37 - 76?  
 $m_o(\vec{F}) = ?$

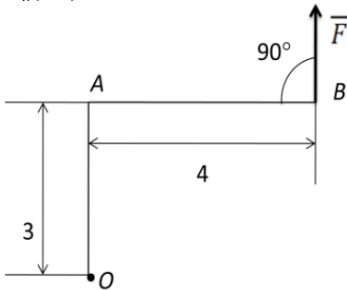


Рис. 37

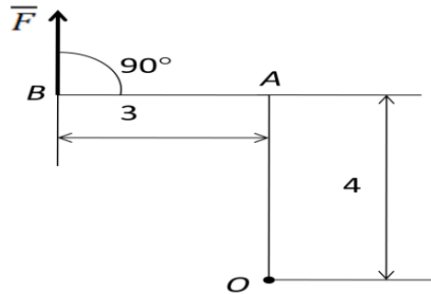


Рис. 38

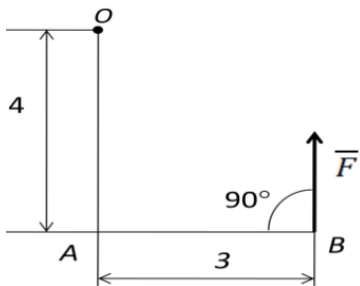


Рис. 39

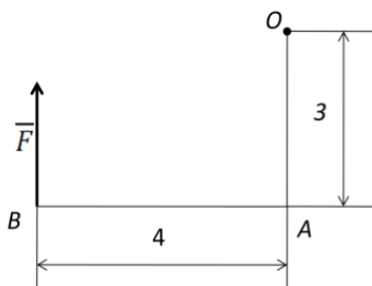


Рис. 40

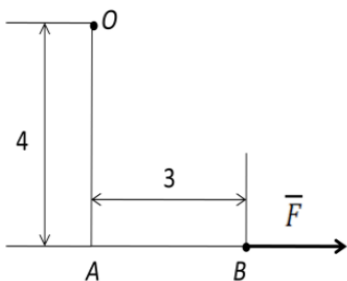


Рис. 41

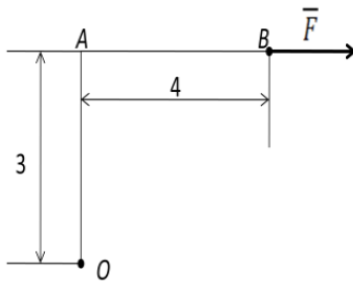


Рис. 42

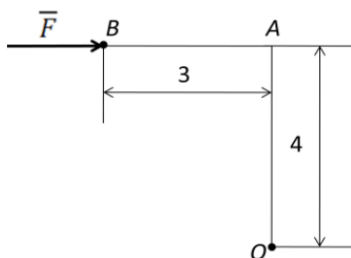


Рис. 43

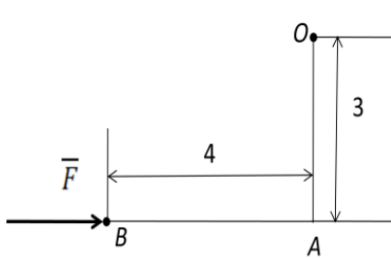


Рис. 44

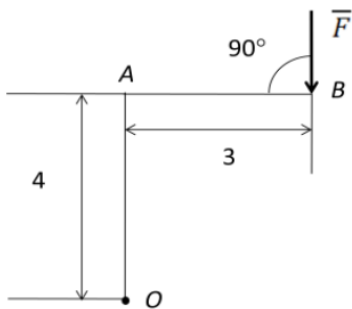


Рис. 45

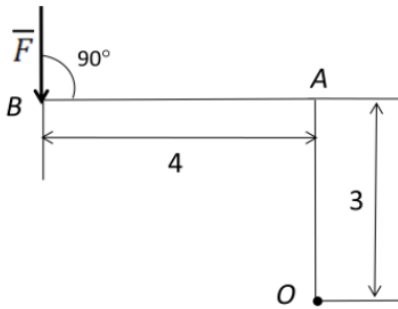


Рис. 46

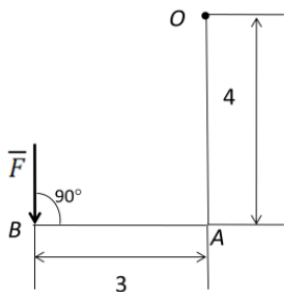


Рис. 47

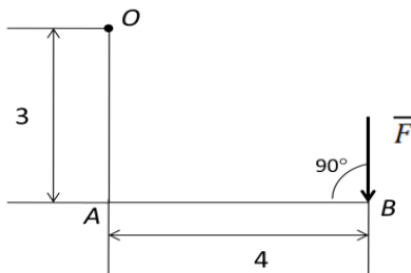


Рис. 48

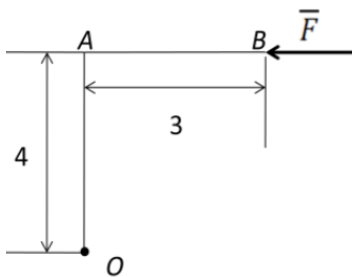


Рис. 49

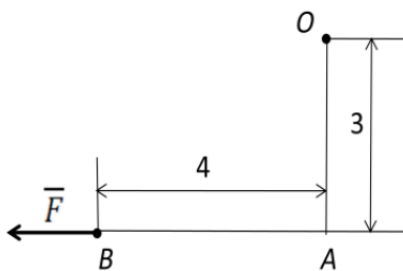


Рис. 50

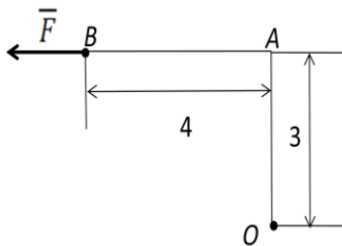


Рис. 51

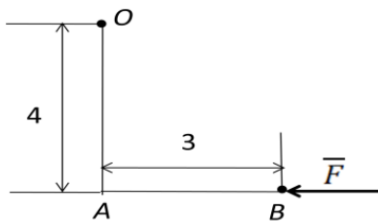


Рис. 52

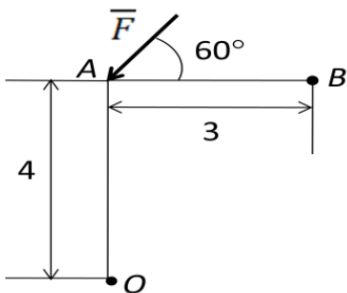


Рис. 53

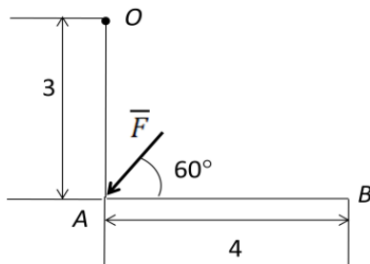


Рис. 54

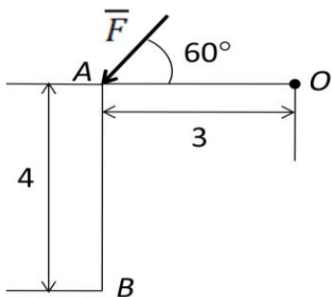


Рис. 55

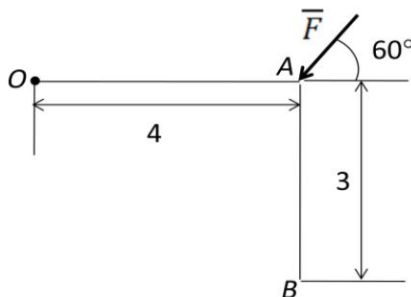


Рис. 56

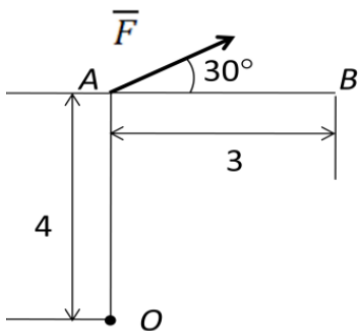


Рис. 57

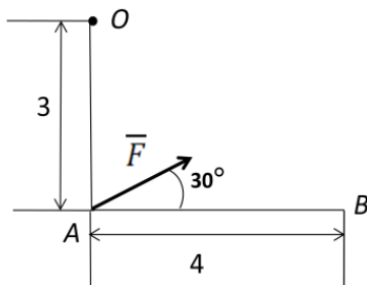


Рис. 58

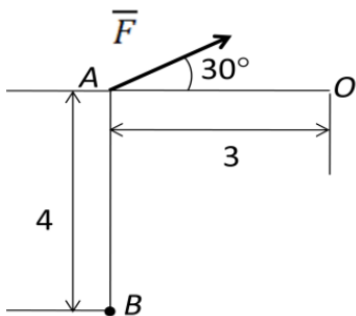


Рис. 59

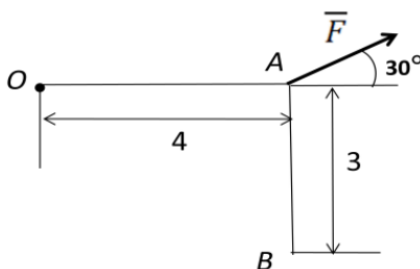


Рис. 60

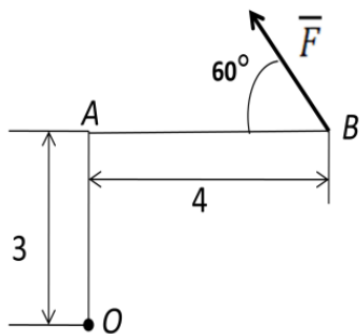


Рис. 61

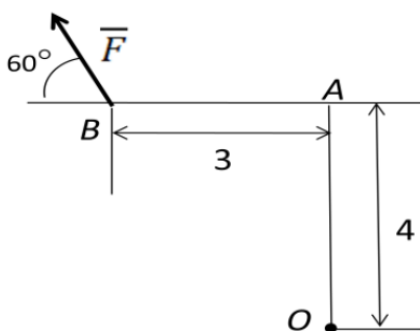


Рис. 62

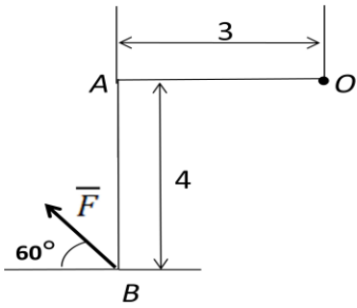


Рис. 63

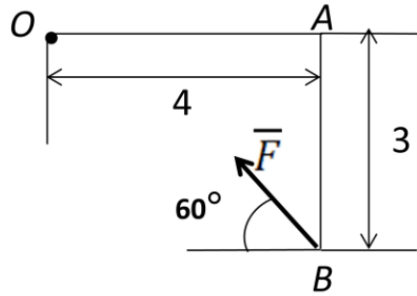


Рис. 64

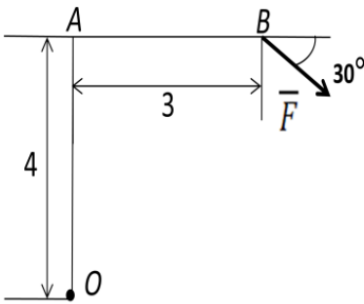


Рис. 65

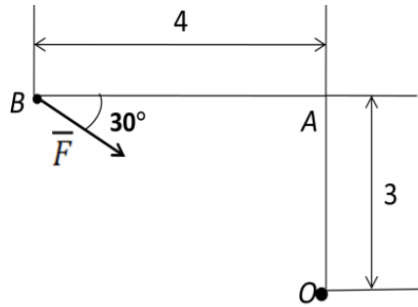


Рис. 66

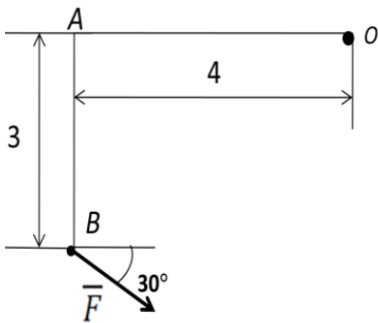


Рис. 67

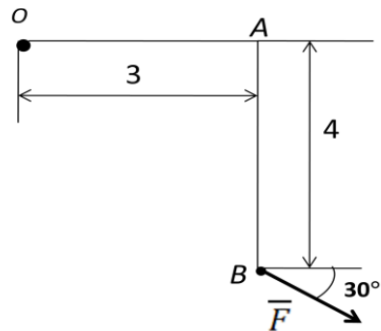


Рис. 68

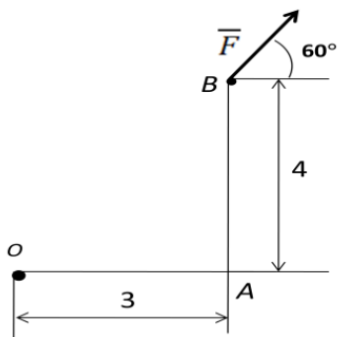


Рис. 69

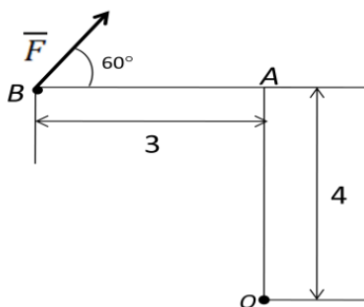


Рис. 70

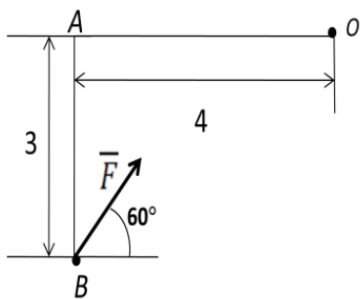


Рис. 71

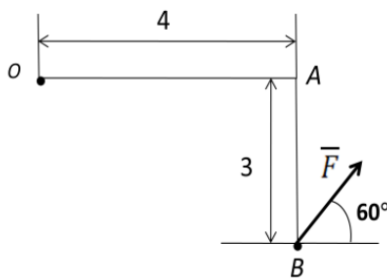


Рис. 72

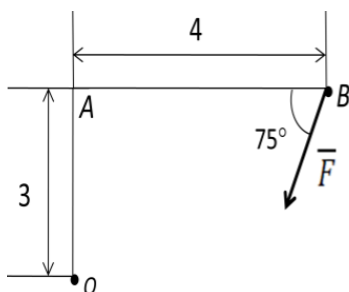


Рис. 73

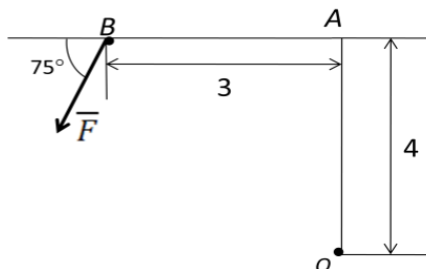


Рис. 74

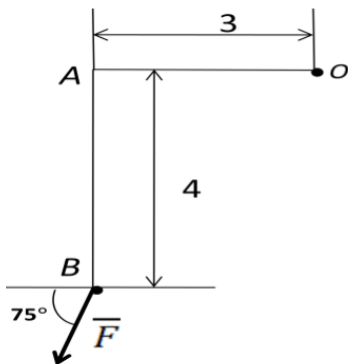


Рис. 75

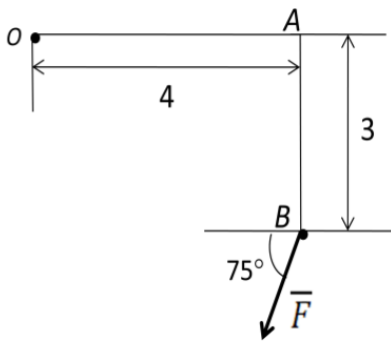


Рис. 76

### 8.3. Пара сил

1. Определите моменты пар сил действующих на тело (рис. 77).

1-я пара:  $F = 100\text{Н}$ ,  $d_1 = 2\text{м}$ .

2-я пара:  $N = 30\text{Н}$ ,  $d_2 = 3\text{м}$ .

$m_1 = ?$

$m_2 = ?$

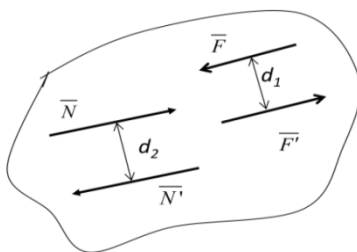


Рис. 77

2. Чему равны силы пары, если момент ее  $m = 1000\text{ Н}\cdot\text{м}$ , а плечо  $d = 5\text{м}$ ?

3. Чему равно плечо пары, если ее момент  $m = 600\text{ Н}\cdot\text{м}$ , а силы  $F = 200\text{ Н}$ ?

4. Эквивалентны ли пары сил, изображенные на рис. 78?

1-я пара -  $F_1 = F_1' = 20\text{ Н}$ ,  $d_1 = 6\text{м}$ .

2-я пара -  $F_2 = F_2' = 60\text{Н}$ ,  $d_2 = 2\text{м}$ .

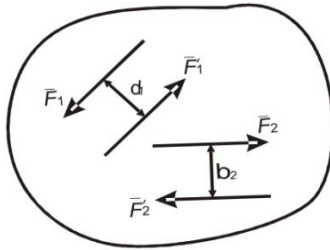


Рис. 78

5. Определите знаки моментов пар сил, изображенных на рисунке и вычислите сумму моментов пар сил, если по модулю они равны:  $m_1 = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $m_2 = 400 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $m_3 = 300 \text{ Н} \cdot \text{м}$  (рис.79).

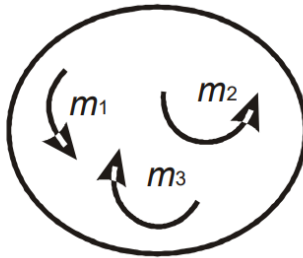


Рис. 79

6. Будет ли тело под действием системы пар, расположенных в одной плоскости, находиться в равновесии, если их моменты по модулю равны:  $m_1 = 400 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $m_2 = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $m_3 = 300 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $m_4 = 600 \text{ Н} \cdot \text{м}$  (рис. 80).

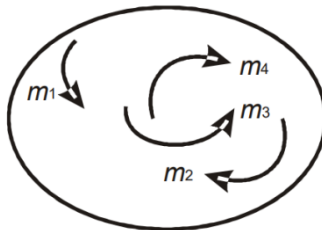


Рис. 80

## 8.4. Произвольная плоская система сил. Пример

1. Сложная балка  $A B C D K E$  (рис. 81) находится в равновесии под действием известных сил  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$ , известных моментов пар сил  $m_1, m_2$  и неизвестных сил реакций в жесткой заделке  $X_A, Y_A, m_A$ .

Все размеры и углы указаны на рисунке. Составьте уравнения равновесия для данной балки, находящейся в равновесии под действием произвольной плоской системы сил в первой форме.

2. Для приобретения навыков составления уравнений моментов сил, составьте дополнительно суммы моментов всех сил относительно других точек, например  $B, C, D, K, E$ .

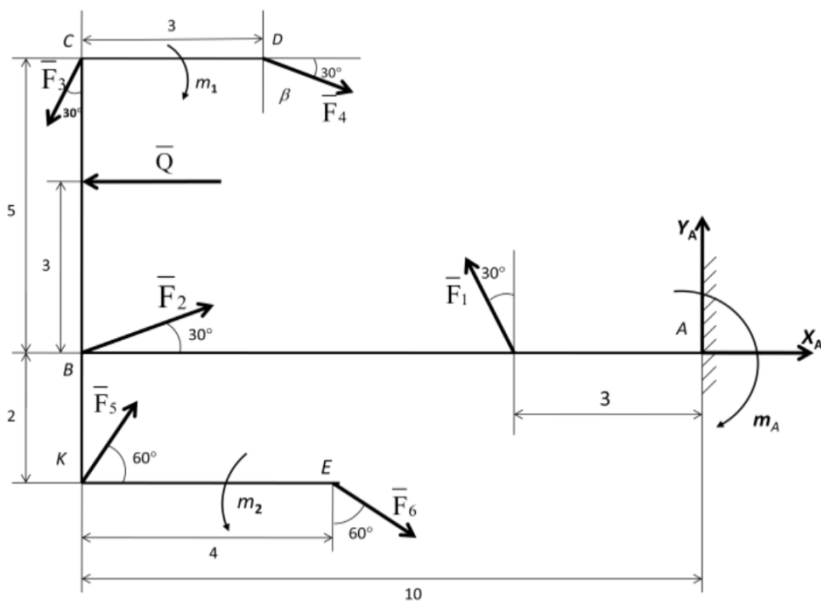


Рис. 81

## 8.5. Произвольная пространственная система сил.

1. Чему равны проекции сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  на оси координат (рис. 82–87)?

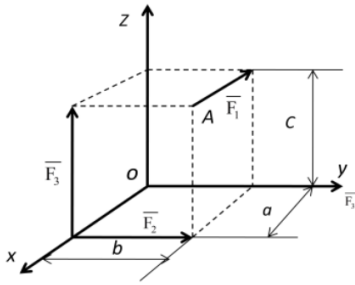


Рис. 82

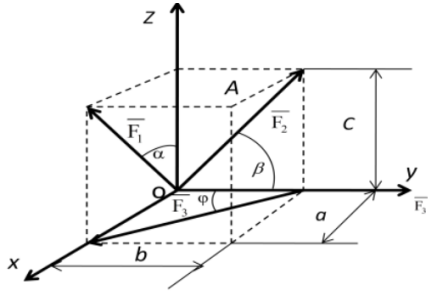


Рис. 83

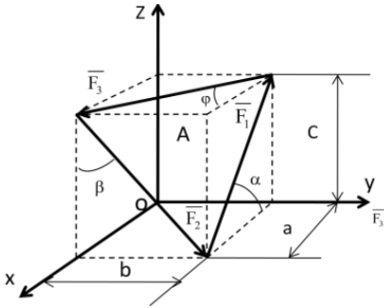


Рис. 84

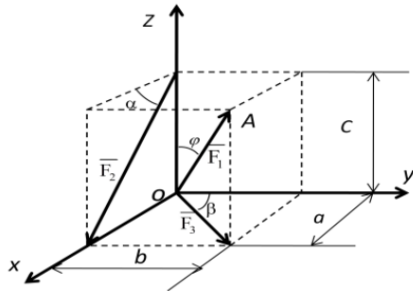


Рис. 85

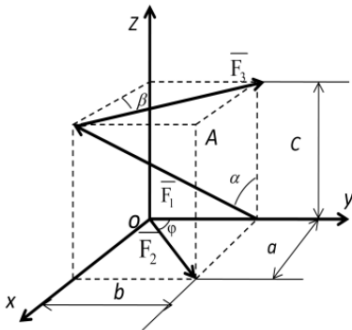


Рис. 86

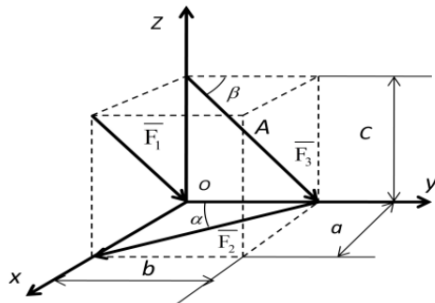


Рис. 87

2. Чему равны моменты сил  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  относительно осей координат  $Ox$ ;  $Oy$ ;  $Oz$  (рис. 82 – 87)?

$$m_x(\vec{F}) = ?; m_y(\vec{F}) = ?; m_z(\vec{F}) = ?$$

3. Определите проекции силы  $T$  на оси координат:

$$T_x = ?; T_y = ?; T_z = ? \text{ (рис. 88).}$$

4. Определите момент силы  $T$  относительно осей координат:

$$m_x(\vec{T}) = ?; m_y(\vec{T}) = ?; m_z(\vec{T}) = ? \text{ (рис. 88).}$$

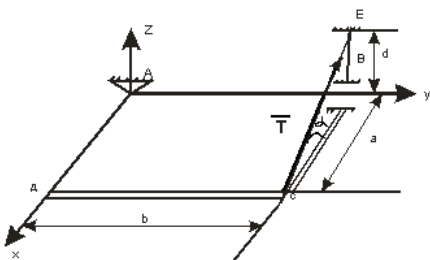


Рис. 88

## 8.6. Произвольная пространственная система сил.

### Примеры

1. Составьте уравнения равновесия для кулачкового вала  $AB$ , находящегося в равновесии под действием известных сил  $P, T, t, G$ , и указанных сил реакций  $X_A, Z_A, X_B, Z_B$ , если размеры  $a, b, c$  и угол  $\alpha$  известны (рис. 89).

2. Прямоугольная полка  $ABCD$  весом  $G$  закреплена с помощью шарового шарнира  $B$ , цилиндрического шарнира  $A$  и троса  $CE$ . Действующая на полку сила  $Q$  известна, а также известны размеры  $a, b, c$  и угол  $\alpha$ . На рисунке показаны силы реакций  $X_A, Z_A, T, X_B, Y_B, Z_B$ . Составьте уравнения равновесия (рис 90).

3. Однородная горизонтальная плита  $ABCD$  закреплена с помощью шести невесомых стержней. На плиту действуют известные силы  $F$  и  $Q$ , размеры  $a, b$  и  $d$  заданы. Освободите плиту от связей и составьте уравнения равновесия (рис 91).

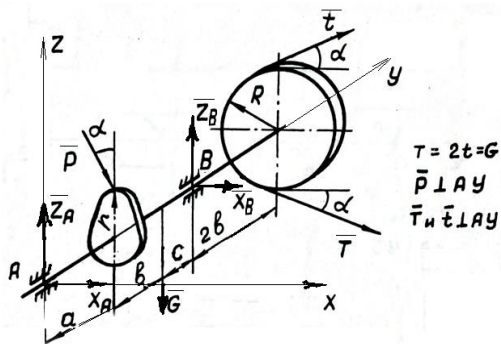


Рис. 89

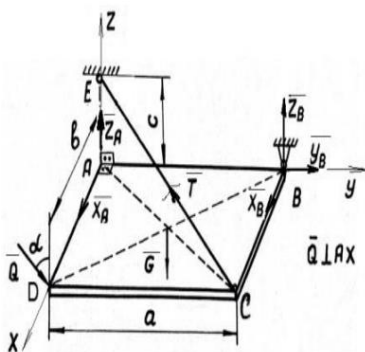


Рис. 90

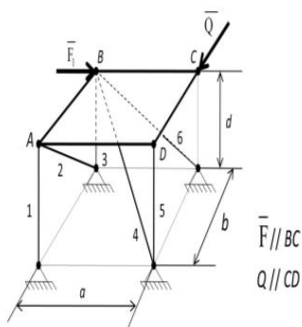


Рис. 91