

# Определение ускорений и сил инерции звеньев механизма

Планы ускорений строятся для выбранного положения механизма с учетом маховика. Для построения планов ускорений необходимо определить истинное значение угловой скорости и углового ускорения кривошипного вала.

Угловое ускорение и угловая скорость кривошипного вала с учетом маховика определяются по следующим формулам:

$$\omega_1 = \omega_0 - \omega_0 [A_1 \cdot \sin(\omega_0 t + \gamma_1 + \delta_1) + 2A_2 \cdot \sin(2\omega_0 t + \gamma_2 + \delta_2)]; \quad (12.1)$$

$$\varepsilon_1 = -\omega_0^2 - \omega_0^2 [A_1 \cdot \cos(\omega_0 t + \gamma_1 + \delta_1) + 4A_2 \cdot \cos(2\omega_0 t + \gamma_2 + \delta_2)]. \quad (12.2)$$

Амплитудное значение этих параметров определяется по формуле

$$A_n = \frac{L_n}{n\omega_0 \sqrt{(I_{np_0} + I_M)^2 n^2 \omega_0^2 + K_n^2}}, \quad (12.3)$$

где  $L_n$  – возбуждающий момент  $n$ -й гармоники;

$n$  – номер гармоники.

Угол отклика системы на действие возмущающего фактора (маховика) определяется по следующим формулам:

$$\cos \delta_n = -\frac{n(I_{np_0} + I_M)\omega_0}{\sqrt{n^2(I_{np_0} + I_M)^2 \omega_0^2 + K_n^2}}, \quad (12.4)$$

$$\sin \delta_n = -\frac{K_n^2}{\sqrt{n^2(I_{np_0} + I_M)^2 \omega_0^2 + K_n^2}}. \quad (12.5)$$

Угловые скорости звеньев рычажного механизма определяются по зависимости (см. часть 1)

$$\omega_i = \omega_i^* \cdot \omega_1, \quad (12.6)$$

где  $\omega_i^*$  – аналог угловой скорости  $i$ -го звена в рассмотренном положении механизма.

Построение планов ускорений рассмотрим на примерах.

## 12.1. Ускорения характерных точек кривошипного вала

Ускорение точки В, принадлежащей кривошипу АВ, определим методом решения векторного уравнения (рис. 1.1)

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t, \quad (12.7)$$

$\parallel_{AB} \quad \perp_{AB}$

где  $a_{BA}^n = \omega_1^2 \cdot l_{AB}$  – величина вектора нормального ускорения точки В во вращательном движении вокруг точки А; этот вектор всегда направлен к оси вращения в любом положении механизма;

$a_{BA}^\tau = \varepsilon_1 \cdot l_{BA}$  – величина вектора касательного ускорения; этот вектор всегда направлен перпендикулярно кривошипу АВ в любом положении механизма.

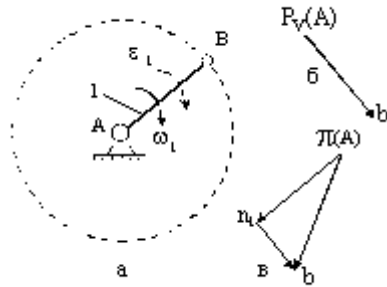


Рис.21.1. Кинематический анализ ведущего звена: а – схема звена; б – план скоростей; в – план ускорений

Направление этих векторов указано под слагаемыми уравнения (1.7). В дальнейшем в векторных уравнениях будем обозначать: если слагаемое подчеркнуть двумя линиями, то это означает, что вектор известен по величине и направлению, а одной линией – вектор известен по направлению.

Выбираем масштаб ускорений  $\mu_a \left( \frac{m/c^2}{mm} \right)$  и находим длину отрезков, изображающих на плане ускорений вектора  $a_{BA}^n$  и  $a_{BA}^\tau$  (см. рис.1.1, в), по следующим формулам:

$$\pi n_1 = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a}; \quad n_1 b = \frac{a_{BA}^\tau}{\mu_a}, \quad (12.8)$$

где  $\pi$  – полюс плана ускорений.

Решив уравнение (1.7), графически определяем абсолютное ускорение точки В:

$$a_B = \pi b_1 \cdot \mu_a.$$

## 12.2. Расчёт ускорений характерных точек структурных групп II класса методом планов ускорений

В образовании плоских многозвенных рычажных механизмов чаще всего используются двухзвенные структурные группы с двумя внешними и одной внутренней неподвижными кинематическими парами. Одна из внешних кинематических пар этой группы используется для шарнирного соединения с кривошипом или каким-либо другим подвижным звеном механизма. Вторая свободная пара используется для соединения группы со стойкой. Если присоединение группы к стойке осуществлено при помощи вращательной кинематической пары, то ускорение геометрического центра шарнира равно нулю. Если для присоединения группы к стойке использована поступательная пара, то линия действия вектора ускорения

совпадает с направляющей для ползуна. Исходя из этих предпосылок задача кинематического исследования сводится к определению ускорения внутренней кинематической пары каждой структурной группы.

Методика решения таких задач включает:

- составление уравнений связи между кинематическими параметрами узловых точек каждого звена, входящего в структурную группу;
- графическое решение этих уравнений применительно к выбранному положению механизма методом построения планов скоростей и ускорений;
- расшифровку планов и анализ полученных результатов.

Если в точке В к кривошипу АВ присоединить структурную группу с внутренней вращательной кинематической парой в точке С, то уравнение связи между ускорениями этих точек будет иметь следующий вид:

а) для шатунно-поршневой группы (рис. 1.2)

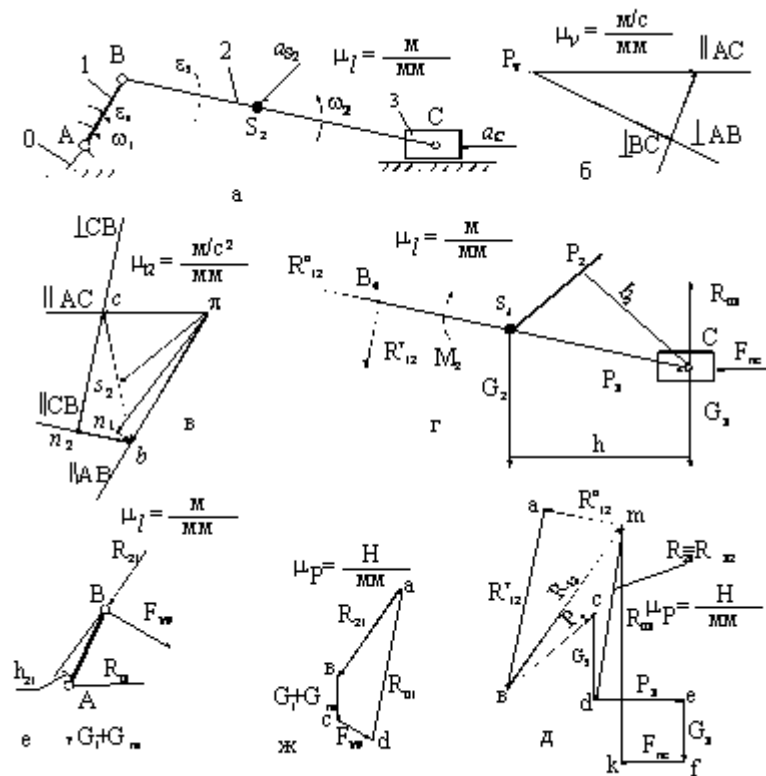


Рис.2.2. Силовой расчет кривошипно-шатунного механизма:  
 а – кинематическая схема механизма; б – план скоростей; в – план ускорений;  
 г – расчетная схема группы 2–3; д – план сил группы Ассур 2–3;  
 е – расчетная схема входного звена; ж – план сил входного звена

$$\overline{a_C} = \overline{a_B} + \overline{a_{CB}^n} + \overline{a_{CB}^t}; \quad (12.9)$$

$\parallel AC \quad \parallel CB \quad \perp CB$

б) для шатунно-коромысловой группы (рис. 1,3)

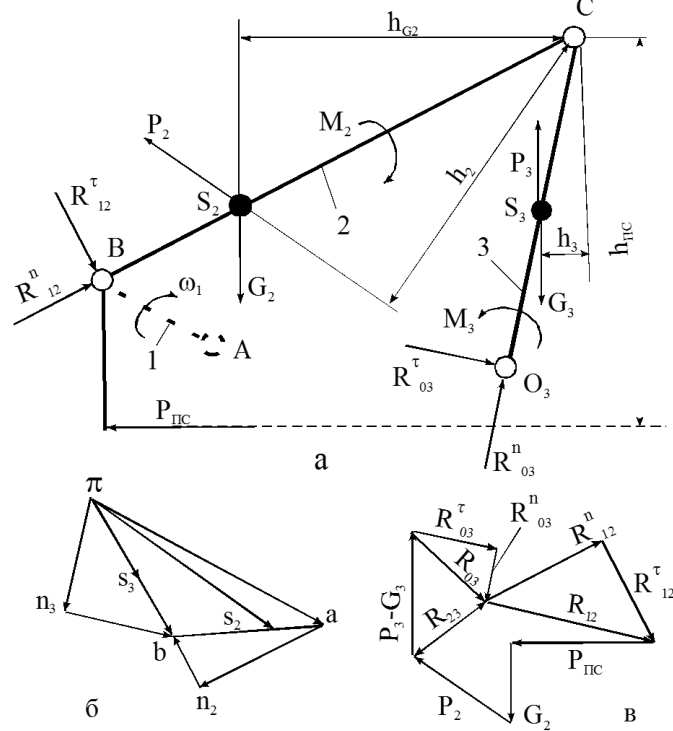


Рис.12.3. Силовой расчет группы типа ВВВ

$$\overline{a_C} = \overline{a_B} + \overline{a_{CB}^n} + \overline{a_{CB}^\tau}; \quad (12.10)$$

$\|CB \perp CB$

$$\overline{a_C} = \overline{a_{O_3}} + \overline{a_{CO_3}^n} + \overline{a_{CO_3}^\tau}. \quad (12.11)$$

$\|CO_3 \perp CO_3$

Если в точке В к кривошипу присоединить кулисную группу с внутренней поступательной кинематической парой, то точка В<sub>1</sub> кривошипа АВ, точка В<sub>2</sub> ползуна 2 и точка В<sub>3</sub> кулисы ВД в данный момент геометрически совпадут и уравнения связи между ускорениями этих точек примут следующий вид(рис. 1.4):

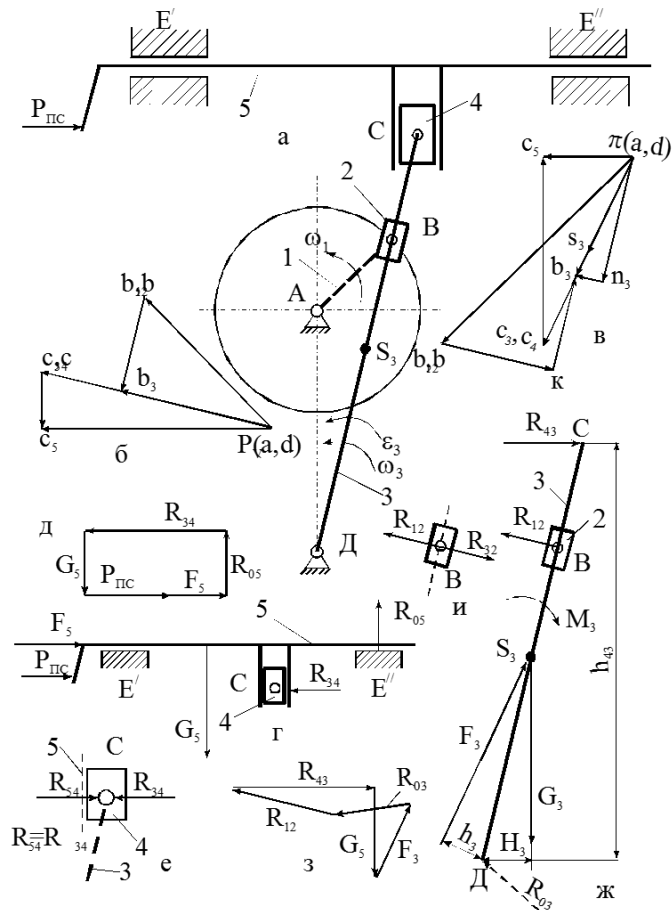


Рис.12.4. Силовой расчет кривошипно-кулисного механизма:

- а) – кинематическая схема механизма; б) – план скоростей; в) – план ускорений; г) – расчетная схема группы 4–5; д) – план сил группы 4–5; е) – расчетная схема ползуна 4; ж) – расчетная схема группы 2-3  
 з) – план сил группы 2–3; и) – расчетная схема ползуна 2.  
 3) – план сил группы 2–3; и) – расчетная схема

а) для точки  $B_1$  кривошипа АВ

$$\overline{a_{B_1}} = \overline{a_A} + \overline{a_{B_1A}^n} + \overline{a_{B_1A}^\tau}; \quad (12.12)$$

$\parallel AB \quad \perp AB$

б) для точки  $B_2$  ползуна 2, образующего с кривошипом АВ вращательную кинематическую пару,

$$\overline{a_{B_2}} = \overline{a_{B_1}}; \quad (12.13)$$

в) для точки  $B_3$ , принадлежащей кулисе 3 и образующей с ползуном 2 поступательную кинематическую пару

$$\overline{a_{B_3}} = \overline{a_{B_2}} + \overline{a_{B_3B_2}^k} + \overline{a_{B_3B_2}^r}; \quad (12.14)$$

$\perp BD \quad \parallel BD$

а – расчетная схема группы; б – план ускорений;

г) для точки  $B_3$ , принадлежащей кулисе 3, вращающейся вокруг неподвижного шарнира Д,

$$\underline{\underline{a_{B_3}}} = \underline{\underline{a_D}} + \underline{\underline{a_{B_3D}^n}} + \underline{\underline{a_{B_3D}^\tau}} \quad (12.15)$$

$\parallel \text{ВД} \quad \perp \text{ВД}$

В уравнениях (1.9 – 1.15) приняты условные обозначения:

- две горизонтальные черты под слагаемым означают, что вектор определён по величине и направлению;

- одна горизонтальная линия под слагаемым означает, что известна только линия действия вектора; величина и направление этого вектора определяются только после графического решения векторного уравнения;

- знаки параллельности ( $\parallel$ ) и перпендикулярности ( $\perp$ ) указывают на линию действия вектора по отношению к осевой линии рассматриваемого звена механизма;

- в индексе символа нормального ускорения первая буква означает, с какой точкой звена механизма совпадает начало, а вторая буква – к какой точке этого звена направлено острие вектора. Например, в уравнениях (1.9, 1.10) символика означает, что вектор нормального ускорения точки С во вращательном движении вокруг точки В приложен к точке С и направлен к точке В шатуна ВС.

Величина вектора нормального ускорения какой-либо точки К во вращательном движении звена KL вокруг точки L определяется по формуле

$$a_{KL}^n = \omega_i^2 \cdot l_{KL} \quad (12.16)$$

На плане ускорений величина этого вектора изображается отрезком

$$Kn_i = \frac{a_{KL}^n}{\mu_a} \quad (1.17)$$

где  $i$  – номер звена KL на схеме механизма.

Угловая скорость  $i$ -го звена определяется по формуле

$$\omega_i = \omega_1 \cdot \omega_i^* \quad (12.18)$$

где  $\omega_i^*$  – аналог угловой скорости  $i$ -го звена в заданном положении механизма.

Численное значение Кориолисова ускорения в уравнении (12.14) определяется по формуле

$$a_{B_3B_2}^K = 2 \cdot \omega_3 \cdot v_{B_3B_2} \quad (12.19)$$

где  $v_{B_3B_2}$  – скорость движения ползуна относительно кулисы 3;

$$v_{B_3B_2} = \omega_1 \cdot v_{B_3B_2}^* \quad (12.20)$$

где  $v_{B_3B_2}^*$  – аналог относительной скорости ползуна.

Направление Кориолисова ускорения совпадает с направлением вектора  $\bar{v}_{B_3B_2}$ , повернутого на  $90^\circ$  в сторону вращения кулисы.

На плане ускорений этот вектор изображается отрезком (см. рис. 1.4,в)

$$b_2 k_3 = a_{B_2B_3}^K / \mu_a \quad (12.21)$$

Методика построения планов ускорений подробно рассмотрена в учебной литературе [1, с. 79–96], [2, с. 84–92] и др.

В качестве примера построение плана ускорений приведено:

по уравнениям (1.7) и (1.9) на рис. 1.2, в;

по уравнениям (1.7) и (1.10, 1.11) на рис. 1.3, б;

по уравнениям (1.7) и (1.12–1.15) на рис. 1.4, в.

Если точка  $S_i$  принадлежит звену  $KL$ , то её расположение на отрезке ( $kl$ ) плана ускорений определяется из соотношения, составленного по теореме подобия,

$$\frac{KL}{KS_i} = \frac{kl}{ks_i} \quad \text{или} \quad ks_i = \frac{KS_i}{KL} \cdot kl, \quad (12.22)$$

где  $KL$  – длина отрезка, изображающего  $i$ -е звено на кинематической схеме механизма, мм;

$KS_i$  – расстояние от точки  $K$  до точки  $S_i$  на отрезке  $KL$ , мм;

$kl$  – расстояние между точками  $k$  и  $l$  на плане ускорений, мм;

$ks_i$  – расстояние от точки  $k$  до точки  $s_i$  на плане ускорений, мм.

Величина и направление абсолютного ускорения точки  $S$   $i$ -го звена механизма определяются отрезком ( $\pi s_i$ ), соединяющим точку  $S_i$  с полюсом плана ускорений (см. рис. 1.2, в; 1.3, б и 1.4, в).

Из плана ускорений касательные ускорения узловых точек и угловые ускорения звеньев определяются по следующим формулам:

$$a_{KL}^{\tau} = (n_{ik}) \cdot \mu_a; \quad \varepsilon_i = \frac{a_{KL}^{\tau}}{l_{KL}}, \quad (12.23)$$

где  $(n_{ik})$  – длина отрезка, изображающего вектор касательного ускорения звена  $KL$  на плане ускорений, мм;

$l_{KL}$  – истинная длина  $i$ -го звена механизма, м.

Ускорение масс центра  $i$ -го звена механизма определяется по формуле

$$a_{s_i} = (\pi s_i) \cdot \mu_a, \quad (12.24)$$

где  $(\pi s_i)$  – расстояние от полюса до точки  $s_i$  отрезка ( $kl$ ) плана ускорений, мм.

Определив по формулам (1.23) и (1.24) величину угловых ускорений центров масс звеньев, следует их направление указать на кинематической схеме механизма (см. рис. 1.2, а–1.4, а) и приступить к расчёту сил инерции и моментов инерции звеньев механизма.

### 12.3. Силы инерции звеньев механизма

Силы инерции – это силы, распределенные по всей длине звена. Для упрощения уравнений и удобства их решения, силы инерции приводятся к главному вектору и главному моменту:

$$\bar{P}_i = m_i \bar{a}_{s_i}, \quad M_i = I_{s_i} \varepsilon_i, \quad (12.25)$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -го звена, кг;

$I_{s_i}$  – момент инерции  $i$ -го звена относительно оси, проходящей через центр масс, кг·м<sup>2</sup>;

$a_{si}$  – ускорение центра масс  $i$ -го звена,  $\text{м/с}^2$ ;

$\varepsilon_i$  – угловое ускорение  $i$ -го звена,  $\text{с}^{-2}$ .

Из уравнений (2.9) следует, что главный вектор  $\bar{P}_i$  приложен к центру масс  $S$  звена и направлен противоположно вектору ускорения центра масс. Главный момент  $M_i$  направлен противоположно угловому ускорению звена.

Звенья плоских рычажных механизмов могут совершать поступательное, вращательное и плоскопараллельное движения. В зависимости от вида движения и расположения центра масс на звене силы инерции приводятся к главному вектору и главному моменту:

а) если звено совершает возвратно-поступательное движение (ползун), то силы инерции приводятся к главному вектору

$$P_i = m_i a_{si}; \quad (2.10)$$

б) если звено совершает вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр масс (кривошип), то силы инерции приводятся к главному моменту

$$M_i = I_{si} \varepsilon_i; \quad (2.11)$$

в) если звено совершает плоскопараллельное движение или вращательное движение вокруг оси, не проходящей через центр масс (кулиса, коромысло, шатун), то силы инерции приводятся к главному вектору и главному моменту

$$P_i = m_i a_{si}, \quad M_i = I_{si} \varepsilon_i, \quad (2.12)$$

где  $m_i$ ,  $I_{si}$  – масса и момент инерции звена относительно оси проходящей через центр масс;

$a_{si}$ ,  $\varepsilon_i$  – ускорение центра масс и угловое ускорение звена.

Силы тяжести звеньев определяются по формуле

$$G_i = m_i g, \quad (2.13)$$

где  $g = 9,81 \approx 10 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения.

В заданиях на курсовое проектирование чаще всего массой кривошипа пренебрегают, поэтому  $P_i = 0$ . Однако в расчетах следует учитывать массу маховика, который устанавливается на кривошип.

Если модуль сил тяжести или других сил не превышает 5% от модуля наибольшей силы, то этими силами в расчетах следует пренебречь. Определенные таким образом силы прикладываются к соответствующим точкам звеньев механизма, вычерченного в соответствующем положении в масштабе  $\mu_l$ .

## 12.4. Реакции кинематических пар

В образовании плоских рычажных механизмов используются вращательные и поступательные кинематические пары. Из теоретической механики известно, что сила взаимодействия двух соприкасающихся тел при отсутствии трения направлена по общей нормали к их поверхности. В **поступательной паре** сила (реакция)  $R_{12}$  приложена к звену 2 от звена 1, направлена по нормали  $n-n$  к поверхности соприкосновения звеньев (рис.12.5, а). Модуль реакции  $R_{12}$  и расстояние  $b$  – неизвестны и должны быть определены в процессе силового расчета.

Во **вращательной паре** без учета сил трения реакция  $R_{12}$  направлена нормально к цилиндрической поверхности соприкосновения звеньев, т.е. проходит через центр шарнира  $O$  (рис. 22.5, б).

Положение центра шарнира всегда известно, но модуль реакции  $R_{12}$  и угол  $\beta$  неизвестны. Для упрощения расчетов реакции удобно представлять в виде двух составляющих:  $R_{12}^n$  – нормальной составляющей, направленной вдоль рассматриваемого звена, и  $R_{12}^t$  – касательной составляющей, направленной перпендикулярно рассматриваемому звену. В этом случае реакции  $R_{12}^n$  и  $R_{12}^t$  будут неизвестны только по величине. Следовательно, от каждой реакции, действующей в любой кинематической паре, в расчетных уравнениях появляется две неизвестные величины, которые определяются в процессе силового расчета.

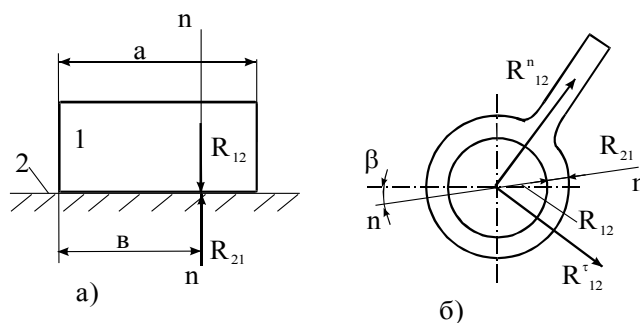


Рис.12.5. Направление реакций кинематических пар:

а – поступательная, б – вращательная.