

Лекция 11.

Динамическое исследование машинного агрегата по методу М.З. Коловского.

Краткое содержание: Прямая задача динамики машин. Понятие о динамической модели машины при $W=1$. Уравнения движения динамической модели. Параметры динамической модели: $I_{пр}$ - приведенный суммарный момент инерции механизма и $M_{пр}$ - приведенный суммарный момент внешних сил. Механические характеристики машин. Пример на определение параметров динамической модели.

Машинный агрегат представляет собой сложную механическую систему, состоящую из отдельных узлов и механизмов, соединенных между собой при помощи жестких или упругих связей (рис. 11.1,а,б). Каждый механизм машинного агрегата может иметь сложную форму

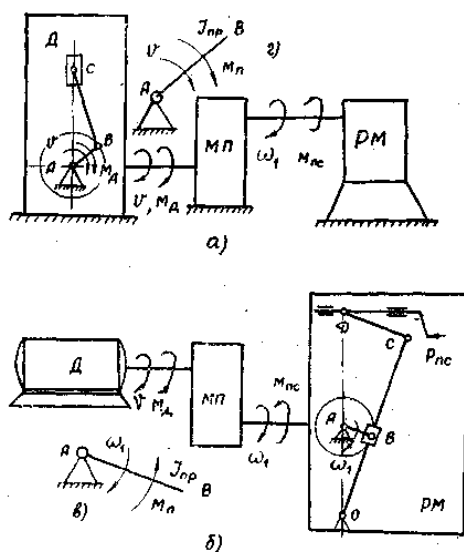


Рис. 11.1. Приведение схемы машины к динамической модели:
а – к выходному валу двигателя; б – к выходному валу рабочей машины;
в, г – динамические модели машин.

строения (кривошипно-шатунный механизм двигателя внутреннего сгорания (рис.1.1а), шести-звездный кулисный механизм строгального станка (рис.1.1б)) и его звенья могут двигаться под действием различных по природе сил (сил давления газов от сгоревшего топлива, сил полезного сопротивления, сил тяжести и т. д.).

Большинство из сил, действующих на звенья и узлы машинного агрегата, изменяют свою величину и направление в зависимости от положения механизмов и скорости движения точек их приложения, т. е. являются периодическими.

Так как отдельные звенья, механизмы и узлы машинного агрегата соединяются между собой при помощи связей, то силовой поток машинного агрегата оказывается замкнутым. В этом случае как силы полезного сопротивления будут оказывать влияние на работу двигателя, так и силы движущие окажут влияние на работу исполнительного механизма (рабочей машины). Поэтому в динамическом анализе работу двигателя и рабочей машины изучают совместно методом составления и решения дифференциальных уравнений. Если, воспользовавшись методом освобожденности от связей, составить уравнения движения для каждого звена машинного агрегата, то получится громоздкая и трудно решаемая система взаимосвязанных уравнений. Движение машинного агрегата можно описать одним дифференциальным уравнением, если все звенья, механизмы и узлы условно заменить одним звеном, вращающимся вокруг неподвижной оси (рис.1.1,в, г). Однако это звено должно обладать кинетической энергией всего машинного агрегата при любом расположении звеньев, а силы, приложенные к этому звену, должны выполнять работу, эквивалентную работе сил, приложенных к звеньям реального механизма, при любом конечном перемещении точек их приложения. Такое условное звено называется звеном приведения или простейшей динамической моделью машинного агрегата.

11.1. Математическое описание динамической модели

Уравнения движения динамической модели будут адекватно описаны движением начального звена машины с жесткими звеньями при равенстве:

1) кинетических энергий динамической модели и машины в любой момент времени цикла

$$T_{\text{мод.}} = T_{\text{агр.}} ; \quad (11.1)$$

2) работ сил, приложенных к модели и звеньям машины на любых возможных перемещениях точек приложения этих сил

$$A_{\text{мод.}} = A_{\text{агр.}} \quad (11.2)$$

Условие (11.1) и (11.2) реализуются приведением масс и сил к динамической модели за цикл работы машины и описанием этих величин в виде непрерывных периодических функций.

11.2. Приведение масс к динамической модели

Для определения величины приведенного момента инерции каждого звена механизма необходимо приравнять кинетическую энергию рассматриваемого звена к кинетической энергии этого же звена, но приведенную к динамической модели. Приняв в качестве динамической модели кривошипный вал, который вращается с угловой скоростью ω_1 , то его кинетическая энергия равна

$$T_1 = \frac{I_{\text{пр}} \cdot \omega_1^2}{2}. \quad (11.3)$$

В зависимости от характера движения звена существуют следующие варианты определения кинетической энергии и приведенного момента инерции:

а) при поступательном движении i -го звена механизма

$$T_i = \frac{m_i v_{si}^2}{2}; \quad I_{\text{пр}i} = \frac{m_i v_{si}^2}{\omega_1^2}; \quad (11.4)$$

б) при вращательном движении i -го звена вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс,

$$T_i = I_{s_i} \cdot \frac{\omega_i^2}{2}; \quad I_{\text{пр}i} = I_{s_i} \frac{\omega_i^2}{\omega_1^2}; \quad (11.5)$$

в) при плоскопараллельном движении i -го звена или при вращательном движении звена вокруг оси, не проходящей через центр масс,

$$T_i = \frac{m_i v_{si}^2}{2} + I_{s_i} \cdot \frac{\omega_i^2}{2}; \quad I_{\text{пр}i} = m_i \frac{v_{si}^2}{\omega_1^2} + I_{s_i} \frac{\omega_i^2}{\omega_1^2}, \quad (11.6)$$

где m_i – масса i -го звена;

v_{s_i} – скорость центра масс i -го звена;

I_{s_i} – момент инерции i -го звена относительно оси, проходящей через центр масс;

ω_i – угловая скорость i -го звена.

Приравняв кинетическую энергию динамической модели (11.3) к сумме кинетических энергий всех звеньев (11.4–11.6), получим зависимость для определения приведенного момента инерции в j -м положении механизма

$$\begin{aligned} I_{nj} &= I_{1S}(\omega_{1j}^*)^2 + I_{2S}(\omega_{2j}^*)^2 + I_{3S}(\omega_{3j}^*)^2 + \dots + I_{nS}(\omega_{nj}^*)^2 + \\ &+ m_1(v_{1sj}^*)^2 + m_2(v_{2sj}^*)^2 + m_3(v_{3sj}^*)^2 + \dots + m_n(v_{nsj}^*)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} I_{iS}(\omega_{ij}^*)^2 + \sum_{i=1}^{i=n} m_i(v_{isj}^*)^2, \end{aligned} \quad (11.7)$$

где I_{iS} – момент инерции i -го звена относительно оси, проходящей через центр масс S , определяется по исходным данным; для конкретного звена ($I_{iS} = \text{const}$);

$\omega_{ij}^* = \frac{\omega_{ij}}{\omega_1}$ – аналог угловой скорости i -го звена в j -м положении механизма; принимается по результатам построения планов скоростей;

$v_{isj}^* = \frac{V_{isj}}{\omega_1}$ – аналог скорости центра масс i -го звена в j -м положении механизма; принимается по результатам построения планов скоростей, м;

m_i – масса i -го звена; определяется по исходным данным.

По зависимости (1.7) приведенный момент инерции определяется для $j = 12$ положений механизма.

2. По полученным данным постройте график $I_n = f(\varphi)$ в масштабе

$$\mu_1 = \frac{I_{n \max}}{Y_{\max}} \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{мм}} \right), \quad (11.8)$$

где $I_{n \max}$ – максимальное значение момента инерции механизма, рассчитанного по зависимости (1.7);

$Y_{n \max} = (50 \div 100)$ мм – длина отрезка, изображенного $I_{n \max}$ на чертеже.

Помните, для того чтобы избежать ошибок при выполнении динамического анализа, все расчеты и построение всех графиков следует начинать в отсчете от одного из крайних положений механизма. При расчете I_n следует обратить внимание на то, что в зависимости (1.7) подставляются конкретные численные значения физических величин, которые будут повторяться при каждом обороте кривошипного вала. Поэтому численные значения I_n будут периодически повторяться в процессе работы машинного агрегата. Для составления уравнения движения динамической модели необходимо приведенный момент инерции представить -в виде непрерывной математической функции. В качестве такой функции принимается ряд Фурье вида:

$$I(\varphi) = I_0 + I_{1C} \cos \varphi + I_{1S} \sin \varphi + I_{2C} \cos 2\varphi + I_{2S} \sin 2\varphi + \dots \quad (11.9)$$

3. Определите коэффициенты ряда Фурье по численным значениям I_n , полученным по зависимости (11.7):

а) постоянная составляющая ряда Фурье

$$I_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{j=N} J_{nj}; \quad (11.10)$$

б) коэффициенты при синусах и косинусах n -й гармоники

$$J_{nc} = \frac{2}{N} \sum_{j=N}^{j=0} J_{nj} \cos(n\varphi_{1j}); \quad (11.11)$$

$$J_{ns} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{j=N} J_{nj} \sin(n\varphi_{1j}), \quad (11.12)$$

где N – число положений механизма, для которых определено значение I_n ;

n – номер гармоники ряда; при расчете на ЭВМ $n = 1, 2, 3$, в остальных случаях $n = 1, 2$;

φ_i – значение угла, определяющее заданное положение механизма, $\varphi_i = (0 - 360^\circ)$.

4. Составьте уравнение изменения приведенного момента инерции в виде (1.9) и определите численное его значение через каждые 30° угла поворота кривошипного вала.

5. По полученным данным постройте график изменения $I(\varphi)$ за один оборот кривошипного вала в масштабе μ_i , совместив его с графиком $I_{II} = f(\varphi)$.

6. Оцените сходимость графиков.

7. Определите номинальный момент инерции электродвигателя, приведенный к кривошипному валу рабочей машины, из соотношения

$$I_{дп} = (1,05 \div 1,15) I_0. \quad (11.13)$$

или по рекомендациям, приведенным в задании.

Если в качестве звена приведения принят коленчатый вал двигателя внутреннего сгорания (проекты 2, 3, 15, 16, 18), то номинальный момент инерции вращающихся частей рабочей машины, приведенный к валу двигателя, определяется из соотношения

$$I_{МП} = (1,1-2,2)I_0. \quad (11.14)$$

8. Определите момент инерции двигателя или рабочей машины из условий равенства кинетической энергии

$$I_d = I_{дп} \cdot \frac{\omega_p^2}{\omega_d^2} = I_{дп} : U^2; \quad (11.15)$$

$$I_M = I_{МП} \cdot U^2, \quad (11.16)$$

где ω_d – угловая скорость выходного вала двигателя;

ω_p – угловая скорость входного вала рабочей машины;

U – передаточное отношение от вала двигателя к валу рабочей машины.

9. Определите момент инерции механизма передач, приведенный к кривошипному валу, из соотношения: к валу рабочей машины

$$I_{ЗМ} = (1-5)I_d; \quad (11.17)$$

к валу двигателя

$$I_{ЗМ} = (1,1 - 1,5)I_M; \quad (11.18)$$

10. Определите постоянную составляющую момента инерции машинного агрегата:

приведенного к валу рабочей машины

$$I_{про} = I_0 + I_{дп} + I_{ЗМ}; \quad (11.19)$$

приведенного к валу двигателя

$$I_{про} = I_0 + I_{МП} + I_{ЗМ}. \quad (11.20)$$

11. Используя формулы (11.7), (11.19 или 11.20) и данные расчетов по формулам (11.8–11.16), составьте зависимость для определения кинетической энергии модели, как функцию обобщенной скорости $\dot{\varphi}$ и обобщенной угловой координаты $\varphi = \dot{\varphi}t$.

$$T(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} J_{про0} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \tilde{J}(\varphi) \cdot \dot{\varphi}^2, \quad (11.21)$$

$$\text{Где } \tilde{J}(\varphi) = J_{1c} \cos \varphi + J_{1s} \sin \varphi + J_{2c} \cos 2\varphi + J_{2s} \sin 2\varphi \quad (11.22)$$

– переменные слагаемые формулы (1.21).

11.3. Приведение сил и зависящих от положения механизма, к динамической модели

Анализ движения машинного агрегата с помощью динамической модели сводится к динамике тела с переменным моментом инерции и вращающимся вокруг неподвижной оси под действием движущих сил и сил полезного сопротивления.

Если на выходные звенья рычажного механизма действуют силы, то момент этих сил, приведенный к динамической модели, определяется из условия неразрывности потока мощности

$$M_{ij} \cdot \omega_j = \pm \sum P_{ij} \cdot V_{ij}, \quad (11.23)$$

где i, j – соответственно номер звена и номер положения на кинематической схеме механизма;

ω_j – угловая скорость динамической модели в рассматриваемом положении механизма;

P_{ij} – сила, приложенная к i -тому звену в j -том положении механизма;

V_{ij} – скорость движения звена в направлении линии действия силы.

Из уравнения (1.30) определим момент сил, приведенный к динамической модели

$$M_{ij} = \pm \sum P_{ij} \cdot \frac{V_{ij}}{\omega_j} = \pm \sum P_{ij} \cdot V_{ij}^*, \quad (11.31)$$

где $V_{ij}^* = \frac{V_{ij}}{\omega_j}$ – аналог скорости точки приложения силы, (м).

В уравнении (11.31) приведенный момент сил движущих – положителен, а сил полезного сопротивления – отрицателен (см. § 11.5.2–11.5.4).

Расчеты по зависимости (11.31) выполняются в последовательности:

1. Исходя из последовательности кинематического анализа, составьте циклограмму работы механизма (см. § 11.5.2–11.5.4) и в соответствии с циклограммой и исходными данными, постройте диаграмму сил, действующих на исполнительные звенья в функции угла поворота кривошипа;

2. По диаграмме определите численное значение сил, действующие на эти звенья в каждом из расчетных положений механизма. Результаты занесите в таблицу. В эту же таблицу впишите численные значения аналогов скоростей исполнительных звеньев в соответствующем положении механизма.

3. По зависимости (11.31) рассчитайте момент сил, приведенный к динамической модели, для всех N положений механизма ($N=12$ для машин с периодом цикла в один оборот кривошипного вала и $N=24$ для четырехтактных ДВС. Результаты расчетов M_{Π} представляются в виде таблицы и графика, построенного в масштабе

$$\mu_M = \frac{M_{\Pi \max}}{Y_{\max}} \left(\frac{H \cdot M}{\text{мм}} \right), \quad (11.32)$$

где $M_{\Pi \max}$ – максимальное значение момента, подсчитанного по (11.31);

$Y_{\max} = (50–120)$ мм – длина отрезка, изображающего $M_{\Pi \max}$ на чертеже.

4. При расчете M_{Π} следует обратить внимание на то, что в (11.31) подставляются конкретные численные значения физических величин, которые будут повторяться при каждом цикле машинного агрегата. Для составления уравнения движения машинного агрегата необходимо приведенный момент сил представить в виде непрерывной математической функции. В качестве такой функции применяется периодический ряд Фурье вида

$$M(\varphi) = \frac{1}{2}M_0 + M_{1c} \cos\left(\frac{\varphi}{l}\right) + M_{1s} \sin\left(\frac{\varphi}{l}\right) + \\ + M_{2c} \cos\left(\frac{2\varphi}{l}\right) + M_{2s} \sin\left(\frac{2\varphi}{l}\right) + \dots = \frac{1}{2}M_0 + \tilde{M}(\varphi), \quad (11.33)$$

где l – коэффициент продолжительности цикла машины ($l=1$ и $l=2$ при продолжительности цикла соответственно равным одному и двум оборотам кривошипного вала).

Коэффициенты ряда определяются по формулам

$$M_0 = \frac{2}{N \cdot l} \sum_{j=0}^{j=N} M_{\Pi j}; \quad M_{nc} = \frac{2}{N \cdot l} \sum_{j=0}^{j=N} M_{\Pi j} \cos\left(\frac{n\varphi}{l}\right); \\ M_{ns} = \frac{2}{N \cdot l} \sum_{j=0}^{j=N} M_{\Pi j} \sin\left(\frac{n\varphi}{l}\right), \quad (11.34)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ – номера гармоник, принятых к расчету.

5. Составьте уравнение изменения приведенного момента в виде (11.33) с учетом (11.34) и определите численные значения функции через каждые 30° (при расчете на ЭВМ – через каждые 10°) угла поворота кривошипа.

6. По полученным данным постройте график изменения $M(\varphi)$ в масштабе μ_M за цикл работ машинного агрегата, совместив его с графиком $M_{\Pi} = f(\varphi)$.

7. Оцените сходимость графиков.

8. Определите номинальный момент движущих сил электродвигателя, приведенный к кривошипному валу рабочей машины из соотношения

$$M_{дп} = (1,2 \div 1,25)M_0, \quad (11.35)$$

или момент сил сопротивления рабочей машины, приведенный к коленчатому валу двигателя внутреннего сгорания

$$M_{мп} = (0,8 - 0,85)M_0, \quad (11.36)$$

где M_0 – постоянная составляющая в уравнении (11.33).

9. Определите номинальный момент движущих сил на выходном валу электродвигателя или на входном валу рабочей машины из соотношений

$$M_{дп} = M_{дн} \cdot u, \quad (11.37)$$

$$M_{мп} = M_{мн} \cdot \frac{1}{u}, \quad (11.38)$$

где $M_{дн}$, $M_{мн}$ – соответственно номинальные моменты движущих сил и сил сопротивления на выходном валу двигателя и рабочей машины;

u – передаточное отношение от вала двигателя к валу рабочей машины.

11.4. Приведение механических характеристик машины к динамической модели

При решении задач динамики машин нас интересует только те свойства двигателей, которые определяют характер взаимодействия с другими функциональными частями машины. Эти свойства определяются

механическими характеристиками, представляющими собой зависимость крутящего момента на выходном валу, его угловой скоростью и положением механизма управления работой двигателя. При фиксированном положении механизма управления, зависимость между крутящим моментом и угловой скоростью выходного вала двигателя, называется статической характеристикой $M_D = f(\omega_D)$. На установившемся режиме работы машины эта зависимость принимается линейной на участке изменения угловой скорости от холостого хода (ω_{DX}) до номинального значения (ω_{DN}) (рис.11.5 а).

Оценочным критерием статической характеристики двигателя принят коэффициент крутизны [4]

$$K_D = \frac{M_{DN}}{\omega_{DX} - \omega_{DN}}, \quad (11.39)$$

где ω_{DN} , ω_{DX} – угловые скорости выходного вала соответственно на номинальном и холостом режиме работы двигателя.

Крутящий момент M_{D0} при угловой скорости ω_{D0} , выраженный через параметры статической характеристики двигателя, определяется уравнением

$$M_{D0} = M_{DN} - \Delta M = M_{DN} - K_D(\omega_{D0} - \omega_{DN}). \quad (11.40)$$

Если момент двигателя приводится к кривошипному валу рабочей машины, то, выразив параметры уравнения (1.40) через передаточное отношение, получим

$$M_{D0П} = M_{DN} \cdot u - K_D u^2 (\omega_0 - \omega_H) = M_{D0}(\phi), \quad (11.41)$$

где ω_0 и ω_H – расчетная и номинальная угловые скорости кривошипного вала, принятого за динамическую модель рабочей машины.

Если сопротивление машины зависит от угловой скорости входного вала, то коэффициент крутизны среднего момента сил сопротивления определяется по формуле [4] (рис.11.5 б)

$$K_C = -\frac{M_{MH}}{\omega_{HX} - \omega_H}. \quad (11.42)$$

С учетом формулы (1.42), момент сил сопротивления, приведенный к кривошипному валу двигателя, определяется зависимостью

$$M_{C0} = (M_{MH} / u) + (K_M / u^2)(\omega_{D0} - \omega_{DN}) = M(\phi). \quad (11.43)$$

В общем случае коэффициент крутизны статической характеристики (двигателя или рабочей машины), приведенный к динамической модели, определяет интенсивность изменения приведенного момента $M(\phi)$ в окрестностях точки с абсциссой ($\omega_0 \pm \Delta\omega$) (см. рис. 1.5)

$$K_{II} = \frac{dM(\phi)}{d\phi}(\omega_0), \quad (11.44)$$

где K_{II} – приведенный коэффициент крутизны:

а) к кривошипному валу рабочей машины

$$K_{\Pi} = K_{Д} \cdot u^2; \quad (11.45)$$

б) к кривошипному валу двигателя

$$K_{\Pi} = K_{С} / u^2. \quad (11.46)$$

Суммарный момент сил, приведенных к кривошипному валу определяется по зависимости (11.33), (11.34), (11.35), (11.36) и (11.41)

$$M(\varphi, \dot{\varphi}) = M_{Д0}(\dot{\varphi}) + M_0 + \tilde{M}(\varphi); \quad (11.47)$$

– для двигателя внутреннего сгорания с учетом формул (11.33), (11.34), (11.36), (11.38) и (11.43)

$$M(\varphi, \dot{\varphi}) = M_{С0}(\dot{\varphi}) + M_0 + \tilde{M}(\varphi), \quad (11.48)$$

где $\tilde{M}(\varphi)$ – переменная составляющая в уравнении (11.33).

В заключение этого параграфа отметим, что уравнениями (11.21), (11.44) и (11.45) реализуются условия (11.1) и (11.2) по тематическому описанию энергетических и силовых параметров динамической модели.

11.5. Уравнение движения машины на установившемся режиме

Составим уравнение движения вращательного движения динамической модели в виде уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = M(\varphi, \dot{\varphi}). \quad (11.49)$$

Используя (11.21) и с учетом (11.22) находим:

1) частную производную кинетической энергии по обобщенной скорости

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J(\varphi) \cdot \dot{\varphi}; \quad (11.50)$$

2) производную по времени от частной производной кинетической энергии

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = J'(\varphi) \cdot \dot{\varphi}^2 + J(\varphi) \ddot{\varphi}; \quad (11.51)$$

3) частную производную кинетической энергии по обобщенной координате

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} J'(\varphi) \cdot \dot{\varphi}^2. \quad (11.52)$$

Подставляя в левую часть уравнения (11.49) выражения (11.51)–(11.52), а в правую – приведенный момент сил (11.47) или (11.48), после преобразований, получим

$$J_{\text{пр}0}\ddot{\phi} - M(\dot{\phi}) - M_0 = -\tilde{J}(\phi) \cdot \ddot{\phi} - \frac{1}{2} J'(\phi) \dot{\phi}^2 + \tilde{M}(\phi). \quad (11.53)$$

Уравнение (11.53) рекомендуется вывести самостоятельно. Для этого:

1) Уравнение (11.21) с учетом (11.22) продифференцируйте по параметру ϕ , считая этот параметр не зависящим от ϕ , и определите $(\partial T / \partial \dot{\phi})$.

2) Полученное выражение продифференцируйте по параметру t , считая ϕ и $\dot{\phi}$ функциями времени t . Полученное выражение представляет собой первое слагаемое левой части уравнения (11.53).

3) Считая, что $\dot{\phi}$ не зависит от координаты ϕ , продифференцируйте уравнение (11.21), с учетом (11.22) по обобщенной координате ϕ и определите тем самым второе слагаемое уравнения (11.53).

4) В левой части полученного выражения приведите подобные члены.

5) В правую часть уравнения (11.53) запишите вместо $M(\phi, \dot{\phi})$ выражение (1.47), если рычажный механизм относится к рабочей машине или (11.48), если рычажный механизм относится к ДВС.

6) Преобразуйте полученное уравнение: в левой части сгруппируйте все слагаемые которые не зависят, а в правой – зависящие от угла ϕ поворота динамической модели.

7) Сопоставьте полученное выражение с уравнением (11.53): если они идентичны, то приступим к его анализу и решению.

Если бы в уравнении (1.53) отсутствовала правая часть, то под действием силовых факторов, входящих в левую часть, динамическая модель вращалась бы с постоянной угловой скоростью ω_0 (рис. 11.6).

В правой части уравнения (11.53) сгруппированы силовые факторы, зависящие от угла поворота кривошипного вала. Они вызывают отклонение угловой скорости ω от среднего значения ω_0 на величину $\dot{\psi}(t)$. Поэтому интегрирование уравнения (1.53) ведется в предположении, что закон движения может быть представлен в виде равномерного вращения и малых периодических колебаний

$$\phi(t) = \omega_0 t + \psi(t); \quad (11.54)$$

$$\dot{\phi}(t) = \omega = \omega_0 + \dot{\psi}(t) \dots; \quad (11.55)$$

$$\ddot{\phi}(t) = \varepsilon = \ddot{\psi}(t); \quad (11.56)$$

где ω_0 – постоянная составляющая угловая скорость вращения динамической модели вокруг неподвижной оси; подлежит определению;

$\psi(t); \dot{\psi}(t); \ddot{\psi}(t)$ – динамическое отклонение по углу поворота, угловой скорости и угловому ускорению от соответствующего постоянного значения параметра, удовлетворяющего условию

$$(\dot{\psi}_{\text{max}}) \ll \omega_0. \quad (11.57)$$

Условие (11.57) считается выполненным, если ω_0 превышает максимальное значение динамического отклонения не менее, чем в 10 раз.

Уравнение (11.53) решается методом последовательных приближений. Исходное приближение $\varphi_0 = \omega_0 t$ определится, если левую часть уравнения (1.53) приравнять нулю, приняв при этом $\dot{\varphi}_0 = \omega_0$; $\ddot{\varphi}_0 = 0$.

$$J_{\text{пр}0} \ddot{\varphi}_0 - M(\dot{\varphi}) - M_0 = 0, \quad (11.57)$$

из которого следует, что

$$M(\dot{\varphi}) - M_0 = 0. \quad (11.58)$$

Если в уравнении (11.58) вместо $M(\dot{\varphi})$ подставить (11.41), то определим постоянную угловой скорости кривошипного вала рабочей машины

$$\omega_{c_0} = \frac{M_{\text{дн}} \cdot u + K_{\text{д}} \cdot u^2 \omega_{\text{н}} - M_0}{K_{\text{д}} u^2}. \quad (11.59)$$

Если уравнение (11.58) вместо $M(\dot{\varphi})$ подставить выражение (11.43), то определим постоянную составляющую угловой скорости двигателя

$$\omega_{\text{д}0} = \frac{M_{\text{мп}} + K_{\text{с}} \cdot \omega_{\text{дн}} - M_0 u^2}{K_{\text{с}}}. \quad (11.60)$$

Угловые скорости, определенные по формулам (11.59) или (11.60) определяют нулевое приближение в решении дифференциального уравнения движения (11.53) соответственно кривошипного вала рабочей машины или ДВС.

Перейдем к определению решения уравнения (11.53) в первом приближении. Подставим в левую часть этого уравнения искомое решение (11.55-11.56)

$$J_{\text{пр}0} \ddot{\varphi}_0 - M(\dot{\varphi}) - M_0 = J_{\text{пр}0} \ddot{\psi} + \frac{dM}{d\varphi} \dot{\psi} - (M(\omega_0) + M_0) \quad (11.61)$$

В выражении (11.61) сумма слагаемых, заключенных в скобки, равна нулю по условию (11.58). по условию (11.44), второе слагаемое равно приведенному коэффициенту крутизны статической характеристики.

С учётом этих замечаний, правую часть выражения (11.61) перепишем в виде

$$J_{\text{пр}0} \ddot{\varphi}_0 - M(\dot{\varphi}) - M_0 = J_{\text{пр}0} \ddot{\psi} + k_{\text{п}} \dot{\psi}, \quad (11.62)$$

Подставим в правую часть уравнения (1.53) данные нулевого решения: $\varphi_0 = \omega_0 t$; $\dot{\varphi}_0 = \omega_0$ и $\ddot{\varphi}_0 = 0$. В результате получим возмущающий момент $L(t)$, который и вызывает отклонение движения динамической модели от равномерного вращения

$$L(t) = -\frac{1}{2} \tilde{J}'(\omega_0 t) \cdot \omega_0^2 + \tilde{M}(\omega_0 t), \quad (11.63)$$

$$\text{где } \tilde{J}'(\omega_0 t) = \frac{n}{2} \sum_1^n -J_{nc} \sin(n\omega_0 t) + \frac{n}{2} \sum_1^n J_{ns} \cos(n\omega_0 t), \quad (11.64)$$

$$\tilde{M}(\omega_0 t) = \sum_1^n M_{nc} \cos(n\omega_0 t) + \sum_1^n M_{ns} \sin(n\omega_0 t). \quad (11.65)$$

В выражении (1.63) сгруппируем слагаемые по синусам и косинусам каждой из n гармоник (при расчётах на ЭВМ $n = 3$). В результате получим

$$L(t) = \sum_1^n \left(-\frac{n}{2} J_{ns} \omega_0^2 + M_{nc} \right) \cos(n\omega_0 t) + \sum_1^n \left(\frac{n}{2} J_{nc} \omega_0^2 + M_{ns} \right) \sin(n\omega_0 t) \quad (11.66)$$

Выражение (1.66) представляет собой сумму проекций вектора L_n из подвижных осей координат $OX_1 Y_1$ на неподвижные OXY (рис.11.7).

Рис. 11.7.

Амплитудное значение возмущающего момента n -ой гармоники определим по формуле

$$L_n = \sqrt{\left(-\frac{n}{2} J_{ns} \omega_0^2 + M_{nc} \right)^2 + \left(\frac{n}{2} J_{nc} \omega_0^2 + M_{ns} \right)^2}. \quad (11.67)$$

В следствии инертности механическая система воспринимает действие возмущающего момента с некоторым запаздыванием, характеризующимся углом γ_n (рис.1.8), величина которого определяется по формулам

$$\begin{aligned} \cos \gamma_n &= \frac{1}{L_n} \left(-\frac{n}{2} J_{ns} \omega_0^2 + M_{nc} \right); \\ \sin \gamma_n &= \frac{1}{L_n} \left(\frac{n}{2} J_{nc} \omega_0^2 + M_{ns} \right). \end{aligned} \quad (11.68)$$

С учётом зависимостей (1.67) и (1.68), выражение (1.66) примет вид

$$L(\omega_0 t) = \sum_1^n L_n \cos(n\omega_0 t + \gamma_n). \quad (11.69)$$

Записав вместо левой части уравнения (11.53) выражение (11.62), а вместо правой – зависимость (1.69), получим

$$J_{\text{пр}0} \ddot{\Psi} + K_{\text{П}} \dot{\Psi} = \sum_1^n L_n \cos(n\omega_0 t + \gamma_n). \quad (11.70)$$

Уравнение (1.70) относится к системе уравнений, описывающих малые вынужденные колебания механической системы с одной степенью свободы. Движение таких систем исследовано и описано в справочной литературе по математике. Установившемуся движению соответствует частное решение этого уравнения

$$\psi(t) = \sum_1^n A_n \cos(n\omega_0 t + \gamma_n + \delta_n), \quad (11.71)$$

где A_n – амплитудное значение динамического отклонения угловой координаты, определяемое по зависимости

$$A_n = \frac{L_n}{n\omega_0 \sqrt{n^2 \omega_0^2 \cdot J_{\text{пр}0}^2 + K_{\text{П}}^2}}, \quad (11.72)$$

δ_n – угол отклика системы на действие возмущающего момента n -ой гармоники, определяется по формуле

$$\delta_n = -\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{K_n}{\sqrt{n^2 \omega_0^2 \cdot J_{\text{пр}0}^2 + K_{\text{П}}^2}}. \quad (11.73)$$

Дифференцируя (11.71) по времени t , получим зависимость динамического отклонения по угловой скорости и угловому ускорению

$$\dot{\psi}(t) = -\sum_1^n n\omega_0 A_n \sin(n\omega_0 t + \gamma_n + \delta_n), \quad (11.74)$$

$$\ddot{\psi} = -\sum_1^n n^2 \omega_0^2 A_n \cos(n\omega_0 t + \gamma_n + \delta_n). \quad (11.75)$$

Подставив зависимости (11.71), (11.74) и (11.75) в соответствующие искомые решения (11.54 – 11.56), получим уравнения движения кривошипного вала машины.

Обратите внимание, при расчетах по формулам (11.72) – (11.75), а также (11.54 – 11.56), вместо ω_0 и $K_{\text{П}}$ подставляются величины, полученные по формулам (11.59) и (11.45), если в качестве динамической модели принят кривошипный вал рабочей машины. Если в качестве динамической модели принят кривошипный вал ДВС, то в формулы (11.72 – 11.75) и (11.54 – 11.56) вместо ω_0 подставляются величины, полученные по формулам (11.60) и (11.46).

Расчеты по изложенной методике показывают, что точность определения динамических отклонений по первому приближению, оказывается достаточной для практики. Это объясняется тем, что коэффициенты L_n убывают с ростом номера гармоники, как коэффициенты сходящихся рядов Фурье; во вторых, тем, что номер гармоники стоит в знаменателе выражения (11.72). Поэтому $A_1 > A_2 > A_3$ и т.д.

11.6. Расчет маховика

В технических требованиях к машине приводится допустимый коэффициент неравномерности хода [8], который сопоставляется с расчетным по уравнению [11.55]

$$\delta = \frac{\dot{\Psi}_{\max} - \dot{\Psi}_{\min}}{\omega_0}, \quad (1.76)$$

где $\dot{\Psi}_{\max}$ и $\dot{\Psi}_{\min}$ – соответственно максимальное и минимальное значение динамического отклонения угловой скорости от ω_0 за цикл работы машины.

Практическими расчетами установлено, что достаточная точность решения уравнения (11.53) обеспечивается при значениях коэффициента неравномерности, не превышающих (0,2–0,25).

Анализ выражения (11.55) с учетом (11.72) показывает, что уменьшение динамического отклонения от ω_0 может быть достигнуто увеличением $J_{\text{пр}0}$ – постоянной составляющей приведенного момента инерции машины. На практике такое увеличение достигается путем установки на кривошипный вал дополнительной массы маховика, обладающим приведенным моментом инерции.

В общем случае момент инерции маховика определяется по формуле

$$A_{\text{изб}} = (I_M + I_{\text{пр}0}) \cdot [\delta] \cdot \omega_{\text{ср}}^2, \quad (11.77)$$

где $\omega_{\text{ср}} = \omega_H$ – среднее значение угловой скорости; в расчетах принимается равной номинальному значению;

$A_{\text{изб}}$ – избыточная работа, т. е. разность работ движущих сил и сил сопротивления.

Если звено приведения имеет постоянную составляющую момента инерции $I_{\text{пр}0}$ и вращается с угловой скоростью ω_0 , то величина избыточной работы определится по формуле

$$A_{\text{изб}} = I_{\text{пр}0} \cdot \omega_0^2 \cdot \delta, \quad (11.78)$$

где δ – величина расчетного коэффициента неравномерности.

Из уравнений (11.77) и (11.78) находим:

$$I_M = \frac{I_{\text{пр}0} \delta \cdot \omega_0^2}{[\delta] \omega_H^2} - I_{\text{пр}0}. \quad (11.79)$$

Маховики выполняются в виде отдельных стальных дисков или чугунами в виде обода со спицами и ступицей. Последние применяются на тихоходных приводах различных машин с окружной скоростью на ободе, не превышающей 30 м/с. Диаметр маховика в виде сплошного диска (рис. 11.7 а) определите по зависимости

$$D_M = 5 \sqrt{\frac{32 \cdot I_M}{\pi \rho \beta}}, \quad (11.80)$$

где ρ – плотность материала маховика, ($\rho=7600 - 7800$) кг/м³;

$\beta = b / D_M = (0,08 - 0,15)$ – отношение ширины маховика к его диаметру. Диаметр маховика должен находиться в пределах $D_M=(6-10)r_1$.

Средний диаметр обода маховика со спицами определите по зависимости

$$D_{\text{ср}} = 5 \sqrt{\frac{4 \cdot I_M}{\pi \rho \beta \varepsilon}}, \quad (11.81)$$

где ρ – плотность материала маховика, кг/м³;

$\beta = b / D_{\text{ср}} = (0,08 - 0,15)$ – отношение ширины обода к его диаметру;

$\varepsilon = h / D_{\text{ср}} = (0,08 - 0,15)$ – отношение толщины обода к его диаметру.

Определите массу маховика, его вес и маховый момент. Общая масса маховика в виде $m = 1,3m_{\text{обода}}$. Если при определении коэффициента неравномерности окажется, что его расчетная величина будет меньше допустимой, в этом случае маховик не нужен. В таких случаях в курсовом проекте рассчитать виброгаситель крутильных колебаний.

1.7.2. Расчет виброгасителя

Динамическими гасителями колебаний называются колебательные системы, присоединенные к машине для уменьшения колебаний. Он состоит из дополнительной массы (рис. 1.7, б), установленной на звене привода и пружины кручения, соединяющей его с валом звена привода. При колебаниях массы гасителя относительно вала возникает упругий момент, действующий на вал. Этот момент, по отношению к возмущающему моменту, направлен в противоположную сторону. Таким образом, амплитуда колебаний уменьшается в соответствии с уравнением

$$\psi(t) = \frac{c_r - I_r \cdot \omega^2}{[-I_0 \omega^2 + KU^2](c_r - I_r \omega^2) - I_r c_r \omega^2} \cdot L_i, \quad (11.82)$$

где c_r – жесткость пружины;

I_r – момент инерции массы гасителя;

ω – угловая скорость звена привода в том положении механизма, где динамическое отклонение по углу достигает максимального значения;

L_i – возбуждающий момент той гармоники, амплитудное значение которой в рассматриваемом положении имеет наибольшее значение.

Если выбрать c_r и I_r так, чтобы

$$c_r = I_r \cdot \omega, \quad (11.83)$$

то числитель (1.57) обратиться в нуль. Тогда $\psi(t)=0$.

Таким образом, с помощью динамического гасителя можно компенсировать действие одной из гармоник возбуждающего момента. При расчетах принимается

$$I_r = (0,15 - 0,20)I_{\text{пр}0}. \quad (11.84)$$

В этом случае определению подлежит жесткость пружины c_f . Размеры гасителя определяются по тем же зависимостям, что и для маховика.

Следует обратить внимание, что при расчете маховика для тихоходных машин, его момент инерции, а следовательно его масса и размеры достигают больших размеров. Установка столь большой по конструктивным соображениям. В этом случае маховик устанавливается на быстроходный вал машины (выходной вал двигателя). Момент инерции маховика в этом случае уменьшается в u^2 раз (u – передаточное отношение механизма передач). Отметим, что установка маховика на быстроходном валу опасна тем, что вызывает переменные нагрузки в передаточном механизме, а также отрицательно сказывается на внешней виброактивности машины, т.е. приводит к увеличению переменных моментов, действующих на корпус и фундамент [4].

Контрольные вопросы к лекции 11.

1. Определите задачу динамического исследования машин ?
2. Сформулируйте теорему о изменении кинетической энергии для идеальной механической системы ?
3. Запишите уравнение Лагранжа 2-го рода ?
4. Что называется динамической моделью машины ?
5. Какие параметры характеризуют динамическую модель машины ?
6. Что называется механической характеристикой машины ?
7. Изобразите механические характеристики (д.в.с., асинхронного электродвигателя, поршневого компрессора) и укажите их основные параметры ?