

## Лекция 1

# ВВЕДЕНИЕ В СТРОИТЕЛЬНУЮ МЕХАНИКУ

## 1. Предмет строительной механики

Единый объект, построенный (сооруженный) человеком, называется *сооружением*. Когда речь идет о внутреннем строении и расчете сооружения как системы элементов, его называют *системой*.

Сооружения необходимы для удовлетворения жизненных потребностей людей и улучшения качества их жизни. Они должны быть удобными, прочными, устойчивыми и безопасными.

Строительство сооружений – вид древнейшего занятия людей и древнее искусство. Результаты многих археологических раскопок, проведенных в различных частях мира, сохранившиеся до наших дней древние сооружения и здания являются доказательством этого. Их совершенство и красота говорят об искусстве и большом опыте древних зодчих и строителей.

Вопросами расчета сооружений занимается наука *строительная механика*, которую часто называют *механикой сооружений*. Считается, что строительная механика возникла сравнительно недавно, после выхода в свет в 1638 году сочинения великого итальянского ученого Галилео Галилея «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки ...».

В дальнейшем строительная механика развивалась как часть общей механики. В XIX веке, после бурного начала строительства железных дорог, мостов, больших кораблей, плотин, различных промышленных сооружений, она стала самостоятельной наукой. А в XX веке, в результате развития методов расчета и компьютерных технологий, строительная механика поднялась на современный высокий уровень.

*Строительная механика* – наука о принципах и методах расчета сооружений на прочность, жесткость и устойчивость.

Строительная механика является как теоретической, так и прикладной наукой. С одной стороны, она разрабатывает теоретические основы методов расчета, а с другой стороны – является инструментом расчета, так как решает важные практические задачи, связанные с прочностью, жесткостью и устойчивостью сооружений.

Воздействие нагрузок приводит как к деформированию отдельных элементов, так и самого сооружения в целом. Расчетом и теоретической оценкой результатов их воздействия занимается *механика деформируемого твердого тела*. Частью этой науки является *прикладная механика (сопротивление материалов)*, занимающаяся расчетом простейших сооружений или их отдельных элементов. А другая ее часть – *строительная механика* – позволяет рассчитывать разные и весьма сложные многоэлементные сооружения.

Для правильного расчета сооружений следует правильно применять общие законы механики, основные соотношения, учитывающие механические свойства материала, условия взаимодействия элементов, частей и основания сооружения. На этой базе формируются *расчетная схема сооружения* и ее *математическая модель*, как некоторая система уравнений.

Чем подробнее изучаются внутреннее строение сооружения, действующая на него нагрузка и особенности материала, тем сложнее становится его математическая модель. На следующей схеме (рис. 1.1) показаны основные факторы, влияющие на особенности расчета сооружения.

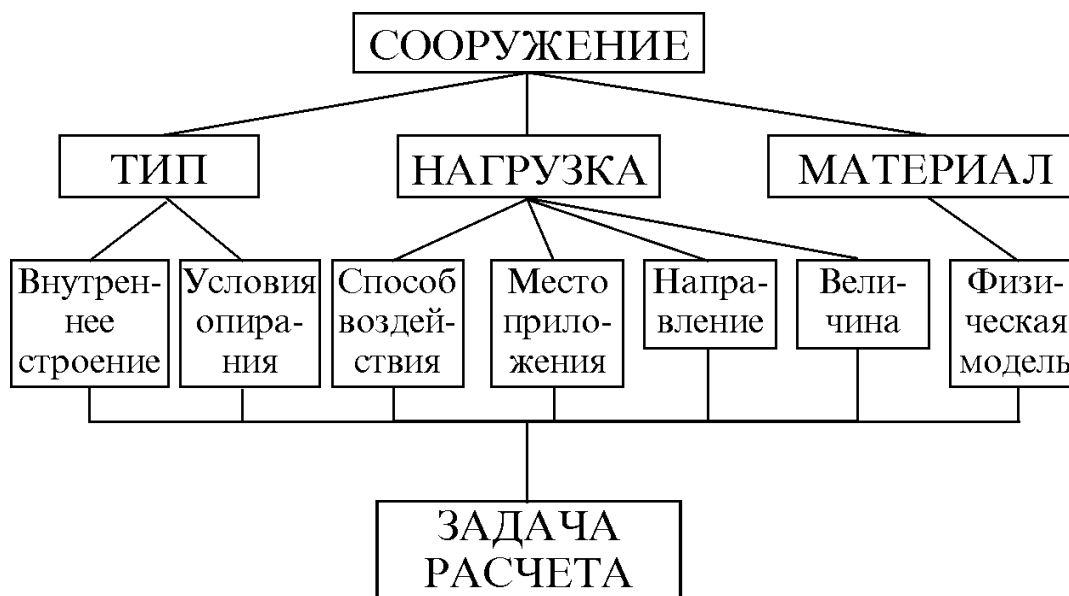


Рис. 1.1

Обычно задачи строительной механики решаются в линейной постановке. Но при больших деформациях или использовании неупругих материалов ставятся и решаются нелинейные задачи.

В строительной механике большое место занимают статические и динамические задачи. Если в статике сооружений внешняя нагрузка постоянна, а элементы и части системы находятся в равновесии, то в динамике сооружений рассматривается движение системы под воздействием переменных динамических нагрузок.

Строительная механика быстро развивается. Ещё недавно, в первой половине XX века, для расчета сооружений использовались только простейшие математические модели. Но в 60-70 годы, когда начали широко внедряться компьютеры, стали применяться более сложные модели. Поэтому стало возможным проектирование, расчет и строительство сложных современных сооружений из новейших материалов.

## 2. Сооружения и их элементы

Сооружения весьма разнообразны. Поэтому они и классифицируются по-разному. Например, только по назначению сооружения делятся на промышленные, общественные, жилищные, транспортные, гидротехнические, подземные, сельскохозяйственные, военные и др.

В сооружениях используются элементы разных типов:

1) **стержни** – прямые или криволинейные элементы, поперечные размеры  $a$  и  $b$  которых намного меньше длины  $l$  (рис. 1.2 а, б, в);

2) **плиты** – элементы, толщина которых  $t$  меньше остальных размеров  $a$  и  $b$ ; плиты могут быть прямыми (рис. 1.2 г) и кривыми в одном или двух направлениях (рис. 1.2 д, е);

3) **массивные тела** – элементы, все три размера которых одного порядка (рис. 1.2 ж).

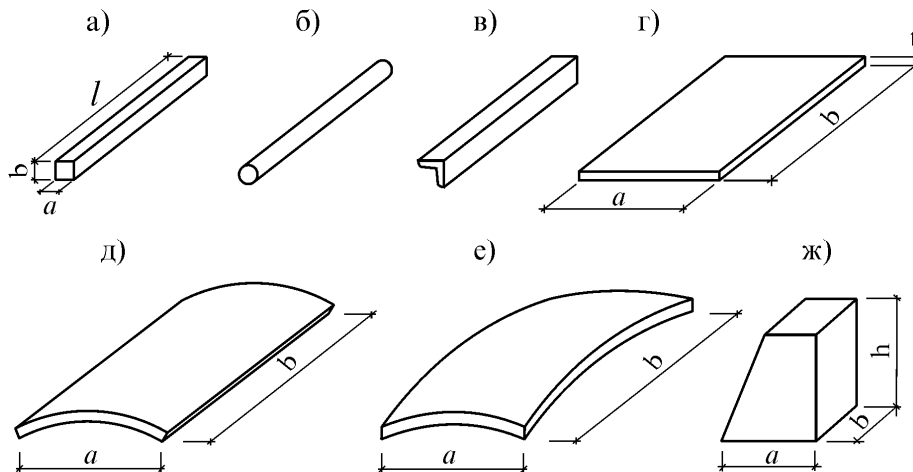


Рис. 1.2

Простейшие сооружения, состоящие из таких элементов, можно подразделять на следующие типы – **стержневые сооружения** (рис. 1.3 а, б), **складчатые сооружения** (рис. 1.3 в), **оболочки** (рис. 1.3 г) и **массивные сооружения** – подпорные стенки (рис. 1.3 д) и каменные своды (рис. 1.3 е):

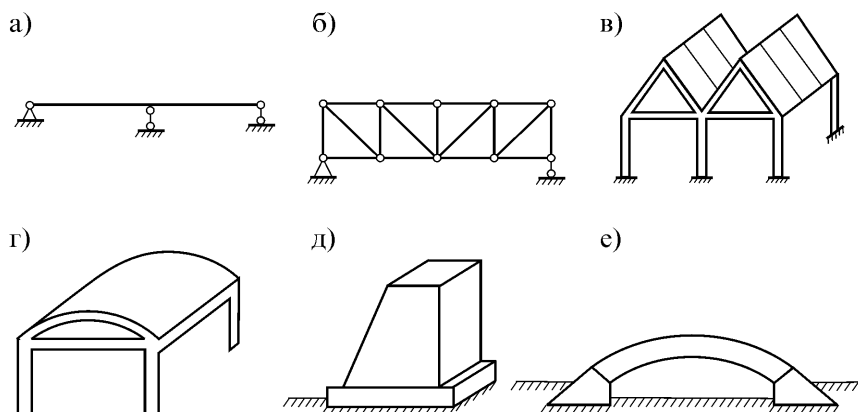


Рис. 1.3

Современные строители возводят очень сложные сооружения, состоящие из разнообразных элементов различной формы и типа. Например, достаточно распространенным является сооружение, у которого основание массивное, средняя часть может состоять из колонн стержневого типа и плит, а верхняя часть – из плит или оболочек.

### 3. Расчетные схемы сооружений и их классификация

Все особенности сооружений учесть невозможно. Поэтому приходится рассматривать их в упрощенном виде. Упрощенная модель сооружения называется *расчетной схемой*. Расчетная схема, состоящая из множества элементов, называется *системой*.

Любое сооружение представляет собой пространственный объект. Действующая на него внешняя нагрузка также является пространственной. Значит, и расчетную схему сооружения надо выбирать как пространственную. Однако такая схема приводит к сложной задаче составления и решения большого числа уравнений. Поэтому реальное сооружение (рис. 1.4 а) стараются привести к плоской системе (рис. 1.4 б).

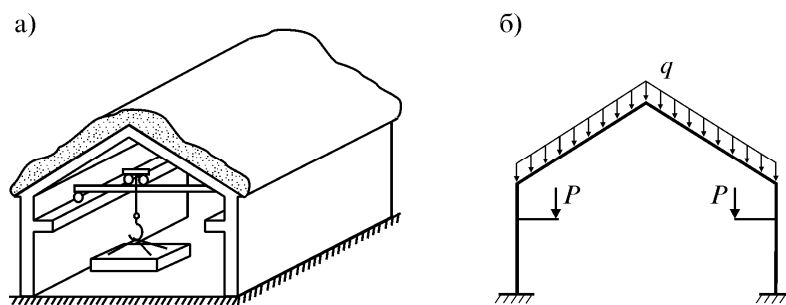


Рис. 1.4

Переход от сооружения к его расчетной схеме является сложной и ответственной задачей. Правильная расчетная схема должна отражать основные особенности сооружения. А неправильный выбор расчетной схемы может привести к неправильным результатам.

Следует отметить, что для одного и того же сооружения можно выбирать разные расчетные схемы. Выбор хорошей расчетной схемы приводит к экономии вычислений и точности результатов расчета.

Расчетные схемы сооружений можно классифицировать по-разному. Например, различают плоские и пространственные расчетные схемы, расчетные схемы по типу или способу соединения элементов, по направлению опорных реакций, по статическим и динамическим особенностям и т.д.

Сооружения опираются или закрепляются к основанию через какие-то опорные устройства. Взаимосвязь между сооружением и его основанием в расчетных схемах учитывается с помощью специальных знаков – *опор*. В пространственных и плоских расчетных схемах используется много типов опор. В плоских системах встречаются следующие типы опор (табл. 1.1):

**Таблица 1**  
**Основные типы опор плоских систем**

Тип опоры	Условное обозначение	Реакции	Перемещения
Шарнирная опора			 Δ – перемещение; φ – угол поворота
Шарнирно-неподвижная опора			
Заделка			 Перемещений нет
Ползун			
Упругая опора (κ - жесткость)	а) б)	 	 

Рассмотрим некоторые типы простых сооружений.

1. **Балка** – изгибаемый брус. Она бывает однопролетной или многопролетной. Типы однопролетных балок: **простая балка** (рис. 1.5 а), **консоль** (рис. 1.5 б) и консольная балка (рис. 1.5 в). Многопролетные балки бывают **разрезные** (рис. 1.5 г), **неразрезные** (рис. 1.5 д) и **составные** (рис. 1.5 е):

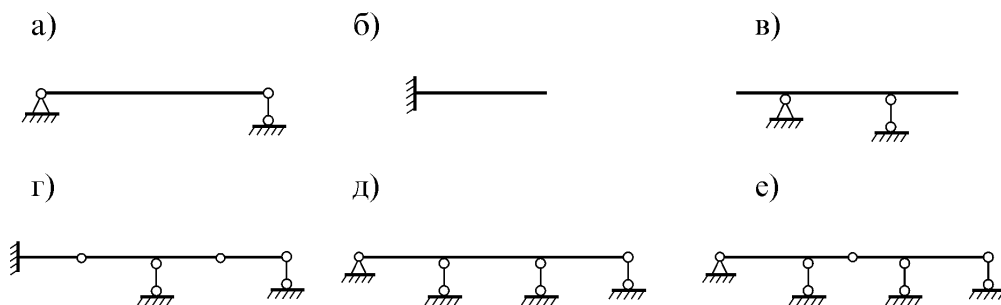


Рис. 1.5

2. **Рама** – система прямых (ломаных или кривых) стержней. Ее стержни могут соединяться жестко или через шарнир. Вот некоторые типы рам: **простая рама** (рис. 1.6 а), **составная рама** (рис. 1.6 б), **многоэтажная рама** (рис. 1.6 в).

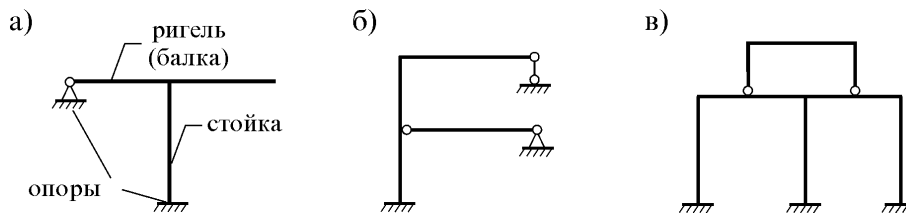


Рис. 1.6

3. **Ферма** – система стержней, соединенных шарнирами. Типов ферм много. Например, бывают **стропильная ферма** (рис. 1.7 а), **мостовая ферма** (рис. 1.7 б), **крановая ферма** (рис. 1.7 в), **башенная ферма** (рис. 1.7 г).

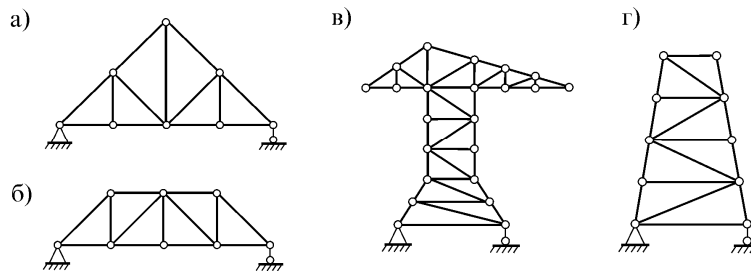


Рис. 1.7

4. **Арка** – система из кривых стержней. Некоторые типы арок: **трехшарнирная** (рис. 1.8 а), **одношарнирная** (рис. 1.8 б), **бесшарнирная** (рис. 1.8 в) арки.

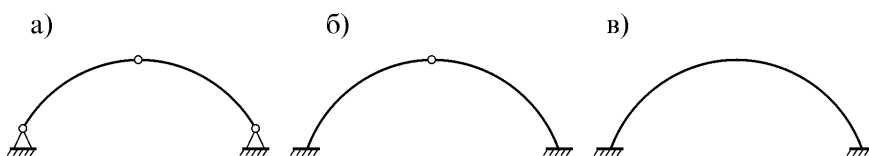


Рис. 1.8

Существуют более сложные системы как комбинации простых систем. Они называются **комбинированными системами**. Например: **арочная ферма** (рис. 1.9 а), **ферма с аркой** (рис. 1.9 б), **висячая система** (рис. 1.9 в):

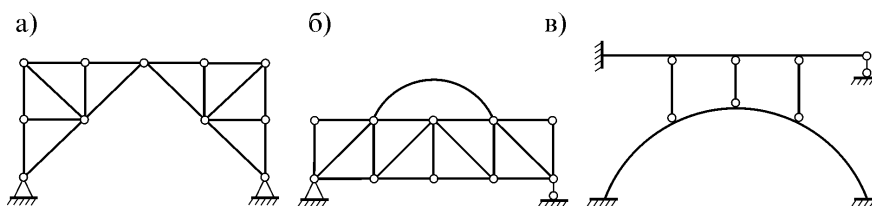


Рис. 1.9

По статическим особенностям различают **статически определимые** и **статически неопределимые** системы.

#### 4. Механические свойства материалов. Основные гипотезы

Большинство материалов сооружений при действии малых нагрузок являются упругими и подчиняются закону Гука. При возрастании нагрузки этот закон перестает выполняться. В нашем курсе будем рассматривать только упругие материалы.

Примем некоторые *гипотезы*, которые позволяют выбирать более простые расчетные модели, упрощать и уменьшать объем вычислений:

1. Материал сооружения является упругим.
2. Перемещения точек сооружения намного меньше его размеров.
3. Перемещения пропорциональны величине нагрузки.
4. Выполняется принцип суперпозиции (независимости действия сил): результат действия нескольких сил равен сумме действий отдельных сил и не зависит от порядка приложения этих сил.

#### 5. Внешние и внутренние силы. Деформации и перемещения

Внешние силы, действующие на сооружение, называются *нагрузкой*. Кроме того, за нагрузку могут приниматься различные сочетания внешних сил, изменение температуры, смещение опор и т.д. Нагрузки различают:

– по способу приложения. Например, *объемная нагрузка* действует во всех точках сооружения (собственный вес, инерционные силы и др.), *поверхностная нагрузка* распределена по поверхности (снег, ветер и др.).

– по времени действия. К примеру, *постоянная нагрузка* действует постоянно и зачастую сохраняется в течение всей жизни сооружения (собственный вес), *временная нагрузка* действует только в определенный период или момент (снег, ветер).

– по способу действия. Например, *статическая нагрузка* действует так, что сооружение сохраняет статическое равновесие. А *динамическая нагрузка* вызывает инерционные силы и нарушает это равновесие. Источниками динамической нагрузки являются различные машины и механизмы, ветер, землетрясения и др. *Подвижные нагрузки* меняют свое положение (поезд, автотранспорт, группа людей и т.д.).

Нагрузка, распределяясь между элементами сооружения, вызывает внутренние напряжения и деформации. В строительной механике определяются их обобщенные характеристики – внутренние усилия и перемещения. А сами напряжения и деформации определяются через внутренние усилия по известным формулам сопротивления материалов.

#### В о п р о с ы

1. Что изучает строительная механика?
2. Какие важные факторы определяют задачу расчета сооружения?
3. Что такое расчетная схема сооружения?
4. Как классифицируются расчетные схемы?
5. Перечислите основные типы стержневых систем.
6. Какие гипотезы принимаются для упрощения расчета сооружений?

## Лекция 2

# КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ

Внешняя нагрузка может вызвать значительные перемещения элементов, в результате чего сооружение может перестать служить своему назначению. Поэтому ставится требование: перемещения сооружения должны быть малыми. Решением этой задачи на начальном этапе проектирования занимается специальный раздел строительной механики, называемый кинематическим анализом.

**Кинематический анализ** – это анализ геометрической структуры сооружения с целью исключения больших перемещений. При кинематическом анализе внешняя нагрузка обычно не рассматривается, а элементы системы считаются достаточно жесткими.

В кинематическом анализе различают три типа расчетных схем:

- 1) геометрически неизменяемые системы,
- 2) геометрически изменяемые системы,
- 3) мгновенно изменяемые системы.

**Геометрически неизменяемая система (ГНС)** – это система, перемещения которой возможны только при деформации ее элементов. Простейшей ГНС является шарнирный треугольник (рис. 2.1 а).

**Геометрически изменяемая система (ГИС)** – это система, элементы которой могут получать перемещения даже без их деформаций. Например, изменяемой является шарнирный четырехугольник (рис. 2.1 б).

**Мгновенно изменяемая система (МИС)** – система, способная получать лишь мгновенные перемещения (рис. 2.1 в).

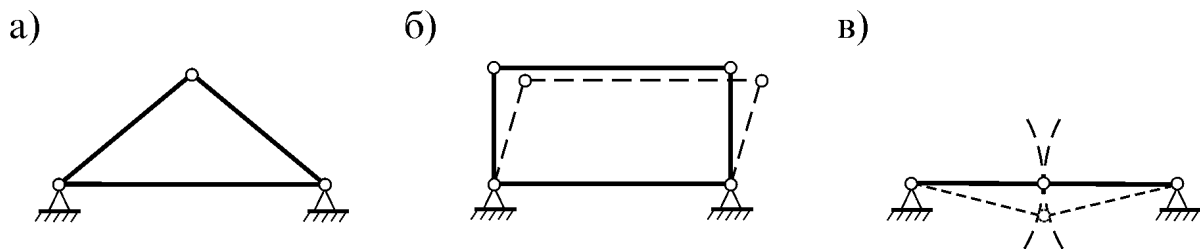


Рис. 2.1

### 1. Степень свободы. Кинематические связи

Количественная оценка кинематических свойств системы основана на определении ее степеней свободы как направлений возможных независимых перемещений. **Число степеней свободы ( $W$ )** – это минимальное число независимых параметров, необходимых для определения положения всех точек системы. Такими параметрами могут быть перемещения отдельных точек, углы поворота элементов и др.

Число степеней свободы простых систем можно определять путем задания ее элементам возможных перемещений (рис. 2.2 а, б, в).

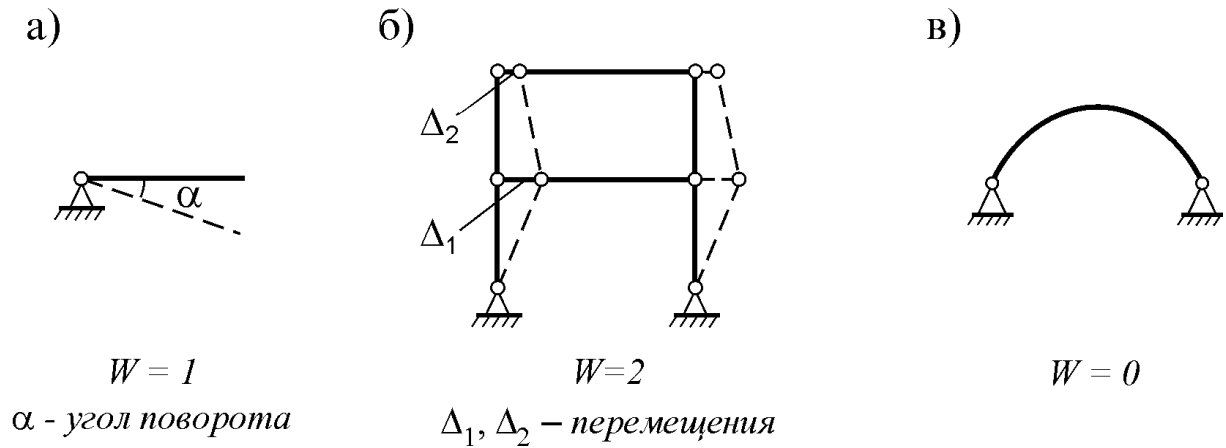


Рис. 2.2

Для изучения более сложных случаев введем следующие понятия:

**диск (Д)** – неизменяемая часть системы, состоящая из одного или нескольких жестко связанных элементов (рис. 2.3 а);

**шарнир (Ш)** – связь, дающая возможность взаимного поворота соседним дискам (рис. 2.3 б);

**припайка (П)** – связь, жестко закрепляющая соседние диски (рис. 2.3 в);

**стержень (С)** – связь, ограничивающая перемещение диска относительно другого в одном направлении (рис. 2.3 г);

**опорная связь (С<sub>0</sub>)** – связь, ограничивающая перемещение диска в одном направлении по отношению к земле (рис. 2.3 д).

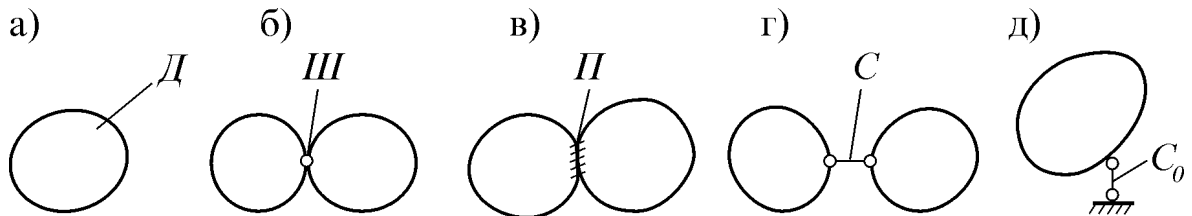


Рис. 2.3

Определим число степеней свободы точки (рис. 2.4 а) и диска с различными кинематическими связями (рис. 2.4 б-д):

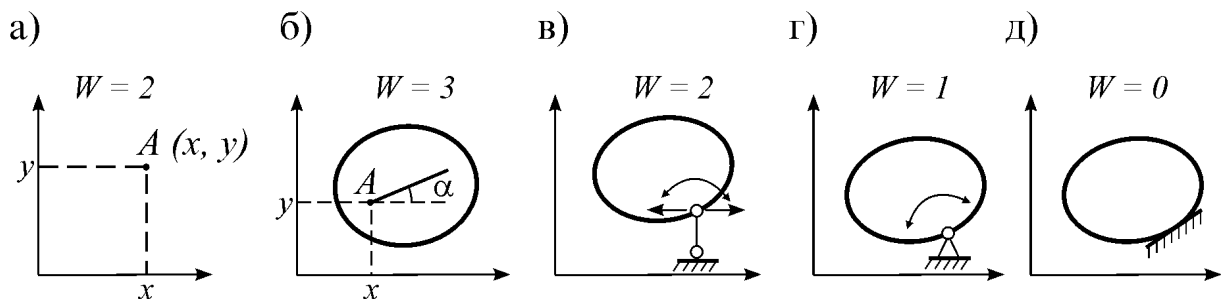


Рис. 2.4

Как видим, стержень или опорная связь уменьшают число степеней свободы на единицу, шарнир – на два, припайка – на три.

Кинематические связи должны обеспечивать неподвижность системы относительно земли (основания), а также неизменяемость ее внутренней структуры. Если при удалении одной связи из неизменяемой системы она становится изменяемой, то эта связь называется **необходимой**. Если после этого система остается неизменяемой, то связь называется **избыточной**. Связь, соединяющая систему с землей, называется **внешней**, а находящаяся внутри – **внутренней связью**.

Шарнир, объединяющий два диска, называется **простым шарниром** (рис. 2.5 а). Если шарнир объединяет несколько дисков, то он называется **кратным шарниром**. Кратный шарнир эквивалентен нескольким простым шарнирам (рис. 2.5 б, в). Кратность шарнира определяется по формуле  $n_{III} = n_D - 1$ , где  $n_D$  – число дисков, объединяемых шарниром.

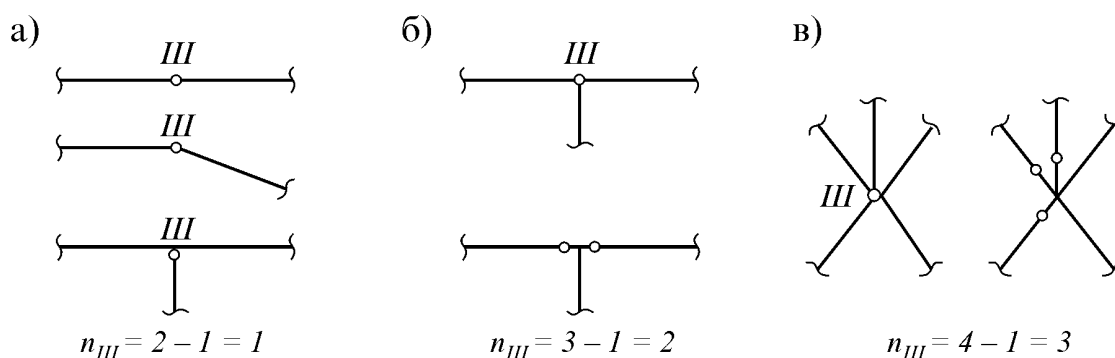


Рис. 2.5

## 2. Число степеней свободы стержневой системы

Рассматривая расчетную схему сооружения как систему дисков, объединенных связями, получаем ее **дисковый аналог**. Для одной и той же системы часто можно получить несколько дисковых аналогов.

Число степеней свободы плоской стержневой системы определяется по **основной формуле кинематического анализа**:

$$W = 3n_D - 2n_{III} - n_C - n_{C_0} - 3n_{II}$$

Здесь  $n_D$  – число дисков в дисковом аналоге;  $n_{III}$  – число простых шарниров;  $n_C$  – число стержней;  $n_{C_0}$  – число опорных связей;  $n_{II}$  – число припаяк.

При расчете фермы можно использовать формулу

$$W = 2n_U - n_C - n_{C_0},$$

где  $n_U$  – число узлов фермы (узлом считается любой шарнир, связывающий стержни фермы).

После расчета по этим формулам возможны три случая:

1)  $W > 0$  – такая система геометрически изменяема и является механизмом;

2)  $W = 0$  – в системе имеется достаточное число связей; если они введены правильно, то система неизменяема и статически определима;

3)  $W < 0$  – в системе есть избыточные связи. Если эти связи введены правильно, то система неизменяема и статически неопределима.

Отсюда следует, что расчетная схема сооружения должна удовлетворять **необходимому условию геометрической неизменяемости**

$$W \leq 0.$$

В качестве примера рассмотрим три расчетные схемы (рис. 2.6 а, в, д) и их дисковые аналоги (рис. 2.6 б, г, е, ж).

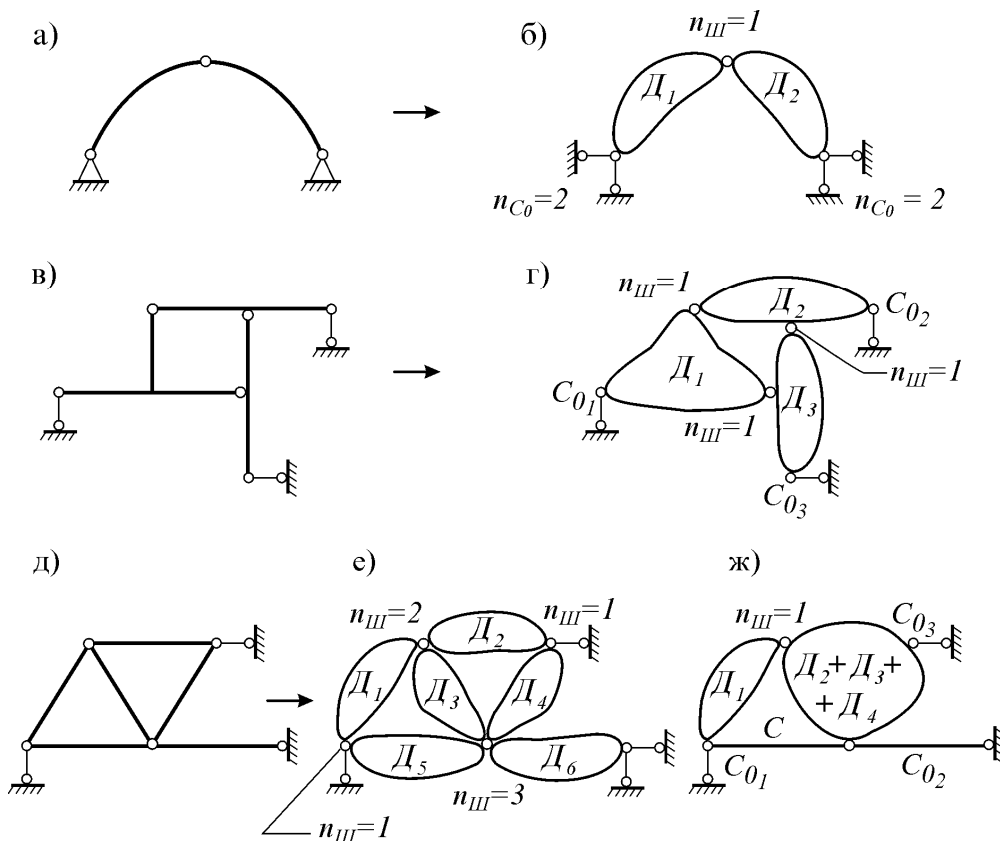


Рис. 2.6

Вычислим число степеней свободы этих систем:

1) арка (рис. 2.6 а), по рис. 2.6 б:  $n_D=2, n_{Ш}=1, n_C=0, n_{C_0}=4, n_{П}=0$ ;

$$W=3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 0 - 4 - 3 \cdot 0 = 0;$$

2) рама (рис. 2.6 в), по рис. 2.6 г:  $n_D=3, n_{Ш}=3, n_C=0, n_{C_0}=3, n_{П}=0$ ;

$$W=3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 0 - 3 - 3 \cdot 0 = 0.$$

3) ферма (рис. 2.6 д):

– по рис. 2.6 е:  $n_D=6, n_{Ш}=7, n_C=0, n_{C_0}=4, n_{П}=0$ ;

$$W=3 \cdot 6 - 2 \cdot 7 - 0 - 4 - 3 \cdot 0 = 0;$$

– по рис. 2.6 ж:  $n_D=2, n_{Ш}=1, n_C=1, n_{C_0}=3, n_{П}=0$ ;

$$W=3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 1 - 3 - 3 \cdot 0 = 0;$$

– по формуле для фермы (рис. 2.6 д):  $n_Y=4, n_C=5, n_{C_0}=3$ ;

$$W=2 \cdot 4 - 5 - 3 = 0.$$

### 3. Способы образования неизменяемых систем

Выполнение условий, рассмотренных выше, необходимо, но не достаточно. Например, число степеней свободы систем на рис. 2.7 а, в одинаково:  $W=0$ , поэтому необходимое условие их геометрической неизменяемости выполняется. Но, тем не менее, обе системы геометрически изменяемы. Причиной их изменяемости является неправильная постановка связей. Для того чтобы эти системы стали геометрически неизменяемыми, одну связь в них нужно переставить в другое место (рис. 2.7 б, г).

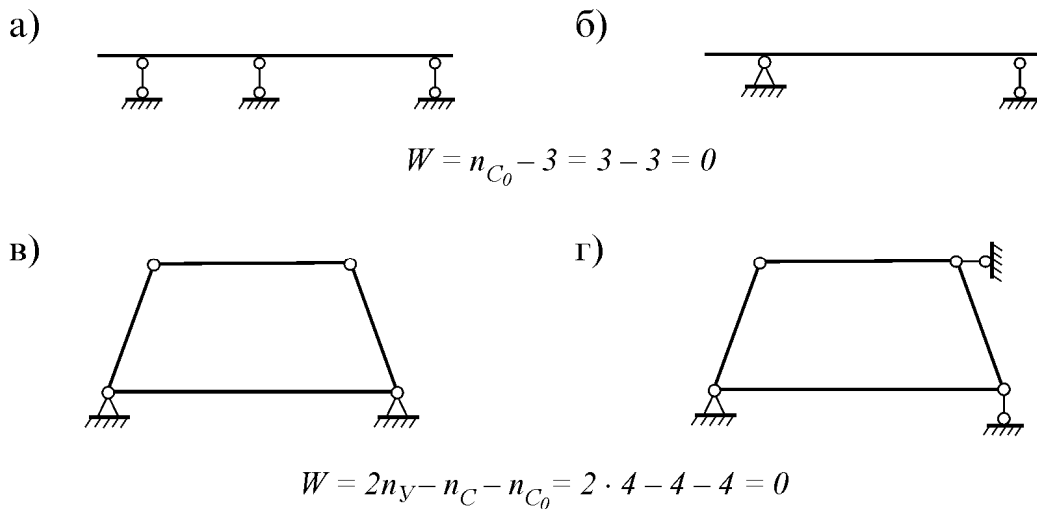


Рис. 2.7

Из этих примеров следует, что для полной уверенности в неизменяемости системы нужна дополнительная оценка системы – **проверка геометрической структуры**. Ее суть заключается в проверке способов объединения элементов между собой и с землей. Для такой проверки необходимо:

- выделить в системе неизменяемые фигуры – диски;
- последовательно объединять эти диски между собой, используя способы образования неизменяемых систем.

Рассмотрим **простейшие способы образования геометрически неизменяемых систем:**

1. Новый узел к диску должен добавляться способом диады – двумя непараллельными стержнями (рис. 2.8 а).

2. Два диска должны объединяться:

– способом триады – тремя непараллельными и непересекающимися в одной точке связями (рис. 2.8 в);

– одним шарниром и одной связью (рис. 2.8 б). Этот способ вытекает из способа триады;

3. Три диска должны объединяться тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой (рис. 2.8 г). Шарниры могут быть условными (рис. 2.8 д).

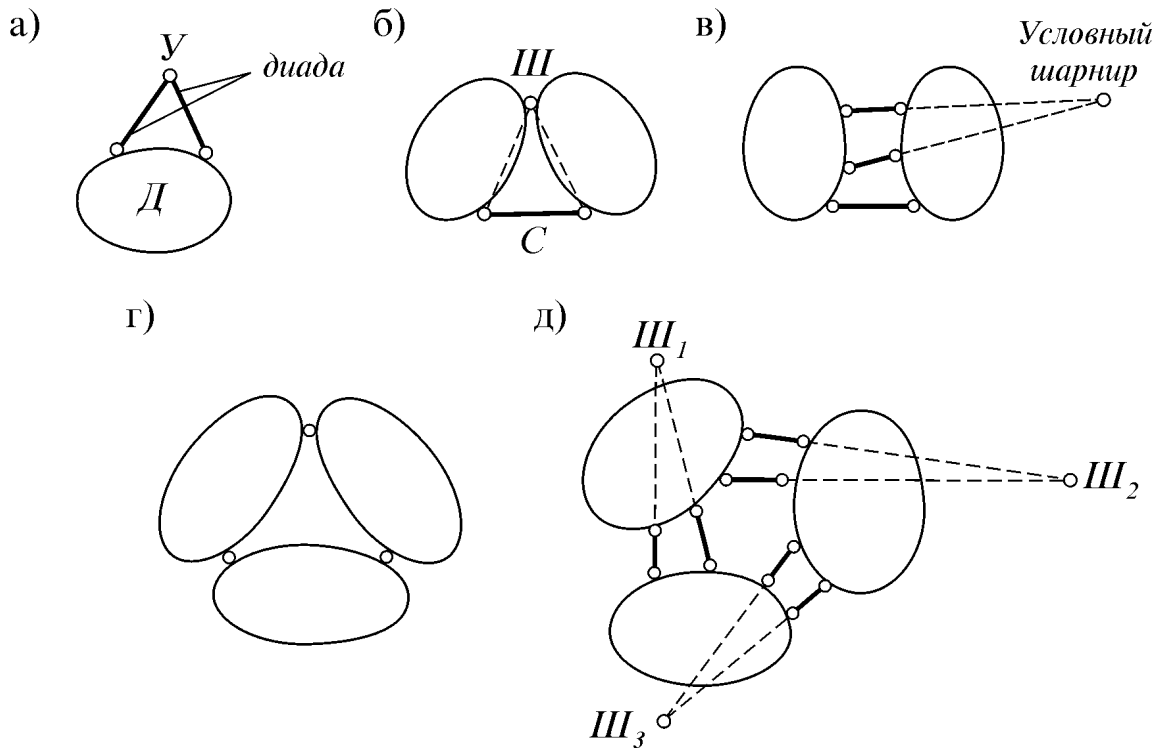


Рис. 2.8

#### 4. Понятие о мгновенно изменяемых системах

Расчетная схема любого инженерного сооружения не должна быть изменяемой или мгновенно изменяемой. Если изменяемость системы обычно возникает из-за недостатка связей, то мгновенная изменяемость возникает при их неправильной установке (рис. 2.9 а, г, д, е).

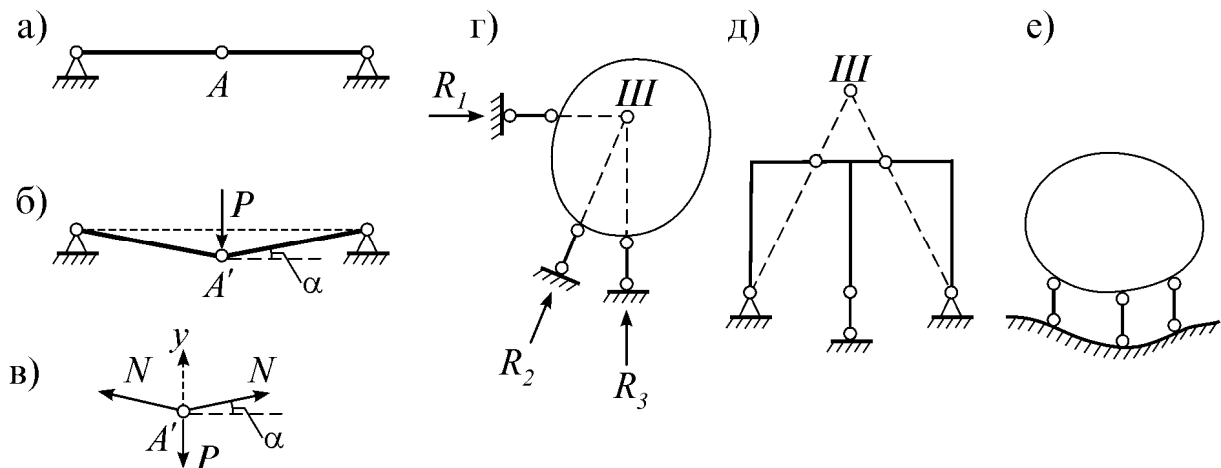


Рис. 2.9

Обнаружить мгновенную изменяемость очень важно уже на этапе кинематического анализа, так как это позволяет вносить коррективы в расчетную схему сооружения.

В качестве примера рассмотрим балку (рис. 2.9 а) и выясним, почему же она является мгновенно изменяемой.

1. При действии на эту балку сосредоточенной силы  $P$  ее положение изменяется (рис. 2.9 б). Запишем условие равновесия системы сил, сходящихся в точке  $A'$  (рис. 2.9 в):

$$\sum Y = N \sin \alpha \cdot 2 - P = 0.$$

Отсюда

$$N = \frac{P}{2 \sin \alpha}.$$

Если в этой формуле  $\alpha=0$ , т.е. когда стержни  $AB$  и  $BC$  лежат на одной прямой, то  $N=\infty$ . Таким образом, мгновенная изменяемость опасна тем, что усилия в элементах системы могут быть очень большими.

2. Если в последней формуле примем  $P=0$ , внутреннее усилие становится неопределенным:  $N=0/0$ .

Этот результат лежит в основе **метода нулевой нагрузки**. Суть метода заключается в следующем:

- удалить все силы, действующие на систему;
- вычислить внутренние усилия. Если они все (включая и опорные реакции) будут равны нулю, то система неизменяема. Если же хотя бы одно усилие будет неопределенным (типа  $0/0$ ), то данная система является мгновенно изменяемой.

**Общие выводы.** Расчетная схема сооружения должна быть геометрически неизменяемой. С целью проверки геометрической неизменяемости системы проводится ее кинематический анализ, состоящий из двух этапов:

- 1) **количественный анализ** – проводится по основной формуле кинематического анализа; должно выполняться условие  $W \leq 0$ ;
- 2) **качественный анализ** – проводится с использованием способов образования геометрически неизменяемых систем.

## В о п р о с ы

1. Какие системы называются геометрически неизменяемыми, изменяемыми и мгновенно изменяемыми?
2. Что такое число степеней свободы?
3. Как записывается основная формула кинематического анализа?
4. Как классифицируются системы по числу их степеней свободы?
5. В чем заключается необходимое условие геометрической неизменяемости?
6. Как проверяется геометрическая неизменяемость системы?
7. Какие способы образования неизменяемых систем знаете?
8. Каков порядок кинематического анализа?
9. Что такое метод нулевой нагрузки?
10. В чем заключается количественный анализ геометрической неизменяемости?
11. Как проводится качественный анализ?

### Лекция 3

## РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ НА ПОСТОЯННУЮ НАГРУЗКУ

Важной задачей расчета сооружений является определение их напряженно-деформированного состояния (НДС). Эта задача состоит из:

- определения опорных реакций и внутренних усилий;
- определения напряжений;
- определения перемещений и деформаций.

Перед расчетом должны быть установлены геометрические размеры и формы элементов сооружения, физические характеристики материала, внешняя нагрузка и особенности ее воздействия.

Наиболее простым является расчет статически определимых систем.

**Статически определимой** называется система, внутренние усилия которой можно определить только из уравнений статики (равновесия).

Статически определимые системы (СОС) имеют свои особенности:

- 1) их внутренние усилия не зависят от упругих характеристик материала, форм сечений и площадей элементов;
- 2) воздействие температуры, смещение опор, неточность изготовления элементов не вызывают внутренних усилий;
- 3) если нет внешних нагрузок, все внутренние усилия равны нулю.

### 1. Определение опорных реакций

Сооружение, воспринимая внешнюю нагрузку, через свои элементы передает ее опорам, вызывая в них опорные реакции.

При определении опорных реакций используется **принцип освобождения от связей**: всякое тело можно освободить от связей, заменив их воздействием реакциями. После этого из уравнений равновесия можно определить величины опорных реакций.

Уравнения равновесия плоской системы записываются в трех формах:

$$1) \Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma M_A = 0$$

( $\Sigma X$  и  $\Sigma Y$  – суммы проекций на взаимно-пересекающиеся оси  $x$  и  $y$ ,  $\Sigma M_A$  – сумма моментов всех сил относительно любой точки  $A$  на плоскости);

$$2) \Sigma X = 0, \quad \Sigma M_A = 0, \quad \Sigma M_B = 0$$

(точки  $A$  и  $B$  не должны лежать на одном перпендикуляре к оси  $x$ );

$$3) \Sigma M_A = 0, \quad \Sigma M_B = 0, \quad \Sigma M_C = 0$$

(точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  не должны лежать на одной прямой).

### 2. Внутренние усилия стержневой системы

В элементах плоской стержневой системы возникают три усилия: продольная сила  $N$ , поперечная сила  $Q$ , изгибающий момент  $M$ . Для любого поперечного сечения стержня они определяются как на рис. 3.1.

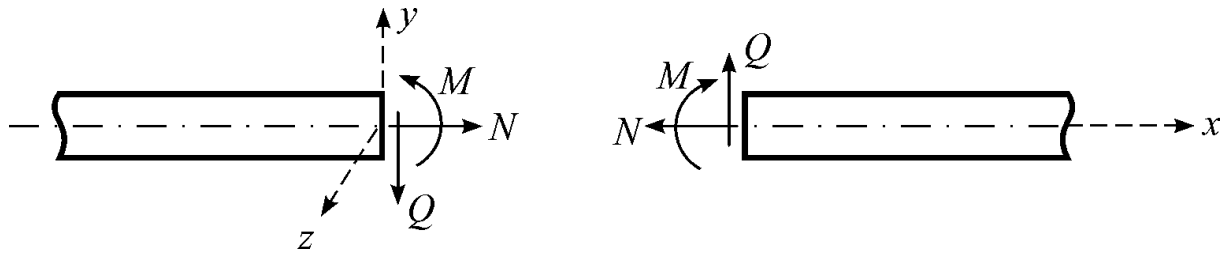


Рис. 3.1

**Изгибающий момент** – это сумма моментов всех сил, лежащих слева (или справа) от сечения относительно оси  $z$ :

$$M = \sum_{\text{лев}} M_{iz} = - \sum_{\text{пр}} M_{jz}.$$

В строительной механике знак изгибающего момента обычно не устанавливается, а эпюра  $M$  изображается на стороне растянутого волокна.

**Поперечная сила** – это сумма проекций всех сил, лежащих слева (или справа) от сечения на ось  $y$ :

$$Q = \sum_{\text{лев}} P_{iy} = - \sum_{\text{пр}} P_{jy}.$$

Поперечная сила положительна, если вращает элемент по часовой стрелке, и отрицательна, если вращает его против часовой стрелки.

**Продольная сила** – это сумма проекций всех сил, лежащих слева (или справа) от сечения, на ось  $x$ :

$$N = \sum_{\text{лев}} P_{ix} = - \sum_{\text{пр}} P_{jx}.$$

Продольная сила положительна, если растягивает элемент, и отрицательна, если сжимает его.

Между  $M$  и  $Q$  существует дифференциальная зависимость:

$$Q = \frac{dM}{dx}.$$

Исходя из геометрического смысла первой производной, величина  $Q$  равняется тангенсу угла между осью эпюры  $M$  и касательной к ней.

По эпюре  $M$  можно определить знак  $Q$ . Для этого ось эпюры  $M$  нужно повернуть до совпадения с касательной к ней. Если поворот будет по часовой стрелке,  $Q$  будет со знаком «+», а если против часовой стрелки, то со знаком «-».

Эпюры поперечных и продольных сил можно изображать на любой стороне от оси стержня, но эпюру изгибающего момента нужно обязательно изображать на стороне растянутого волокна.

### 3. Методы определения внутренних усилий

Внутренние усилия статически определимых систем определяются методами простых сечений, совместных сечений, вырезания узла, замены связей и др.

### 3.1. Метод простых сечений

Этот метод позволяет рассматривать внутреннее усилие как внешнюю силу и определять его из уравнений статики (равновесия).

Например, внутренние усилия балки (рис. 3.2 а) в сечении  $K$  определяются как на рис. 3.2 б).

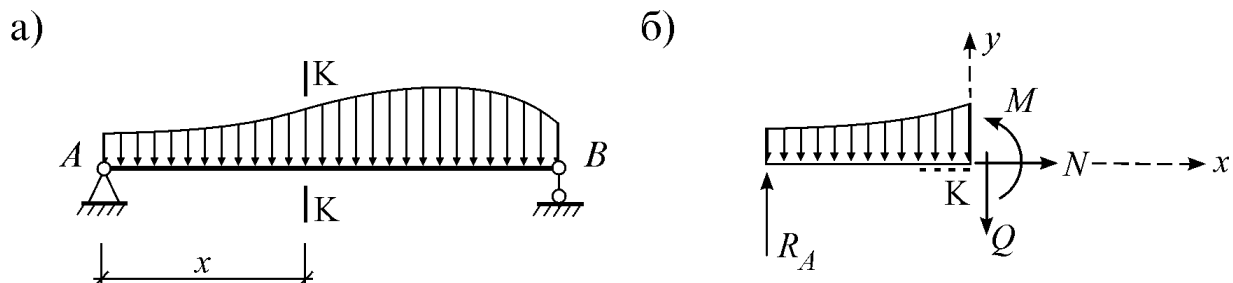


Рис. 3.2

#### Алгоритм метода простых сечений:

- 1) поделить систему на участки;
- 2) выбрать участок и провести поперечное сечение;
- 3) выбрать одну (наиболее простую) из отсеченных частей;
- 4) составить три уравнения равновесия;
- 5) из них определить внутренние усилия  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ ;
- 6) для данного участка построить эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ ;
- 7) повторить пункты 2-6 для остальных участков.

### 3.2. Метод совместных сечений

Этот метод используется при расчете многодисковых систем.

Например, для расчета трехдисковой рамы (рис. 3.3 а) проводятся три совместных сечения  $I$ ,  $II$ ,  $III$ . В результате появляются девять неизвестных реакций (рис. 3.3 б): опорные реакции  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $H$  и междисковые реакции  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$ . Составив для каждого диска по три уравнения равновесия, т.е.  $3 \times 3 = 9$  уравнений, из их решения определяются все 9 реакций.

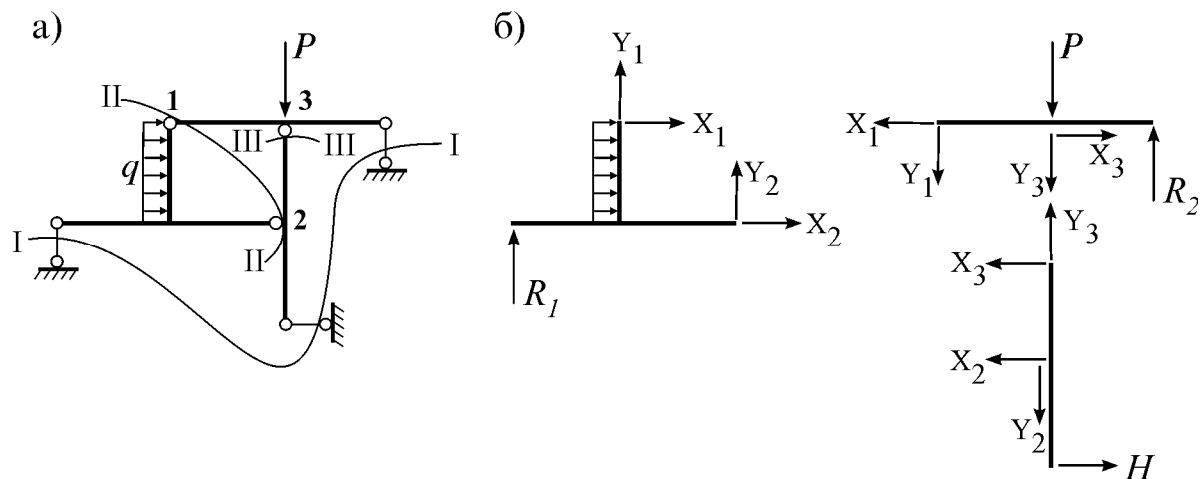


Рис. 3.3

### Алгоритм метода совместных сечений:

- 1) совместными сечениями разделить систему на части (диски);
- 2) обозначить опорные и междисковые реакции;
- 3) для каждого диска записать уравнения равновесия;
- 4) решить систему полученных уравнений;
- 5) каждый диск рассчитать отдельно и построить эпюры;
- 6) объединить все эпюры в общие эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ .

### 3.3. Метод вырезания узла

Используется для определения усилий простых систем.

Сущность метода: вырезается узел с не более чем двумя неизвестными усилиями; силы, действующие в узле, проецируются на две оси; из этих уравнений определяются искомые усилия.

Например, при расчете балочно-ферменной системы (рис. 3.4 а), после того как определены опорные реакции (рис. 3.4 б), вырезается узел  $A$  (рис. 3.4 в) и составляются уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\Sigma X &= N_2 \cos 45^\circ - N_1 \cos 45^\circ = 0, \\ \Sigma Y &= N_1 \sin 45^\circ + N_2 \sin 45^\circ + P/2 = 0.\end{aligned}$$

Из них определяются искомые продольные силы:  $N_1 = N_2 = -\frac{P}{4 \sin 45^\circ}$ .

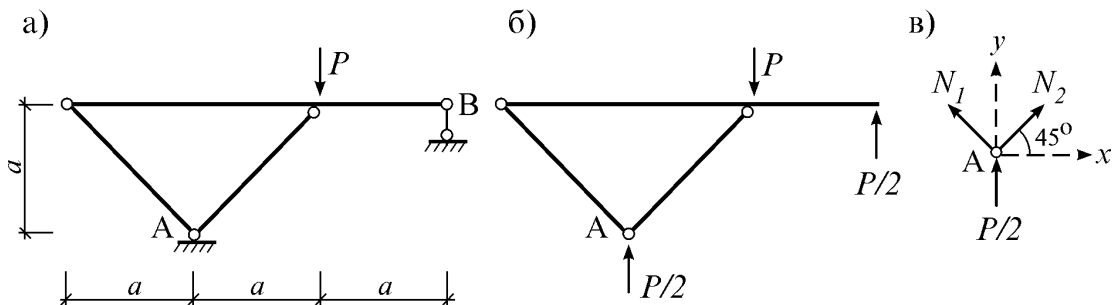


Рис. 3.4

### 3.4. Метод замены связей

Используется при расчете сложных статически определимых систем, которые трудно рассчитать другими способами.

Сущность метода: сложная система превращается в более простую путем перестановки связи (или нескольких связей) в другое место; из условия эквивалентности заданной и заменяющей систем определяется усилие в переставленной связи; затем система рассчитывается известными методами.

Например, для расчета рамы (рис. 3.5 а) удалим правый вертикальный стержень заданной системы (ЗС) и введем одну связь в левый шарнир. Тогда шарнир станет припайкой  $C$ , а примыкающие к нему стержни будут жестко связаны. Обозначив усилие в удаленной связи через  $X$ , получим так называемую **основную систему** (ОС) для расчета рамы (рис. 3.5 б).

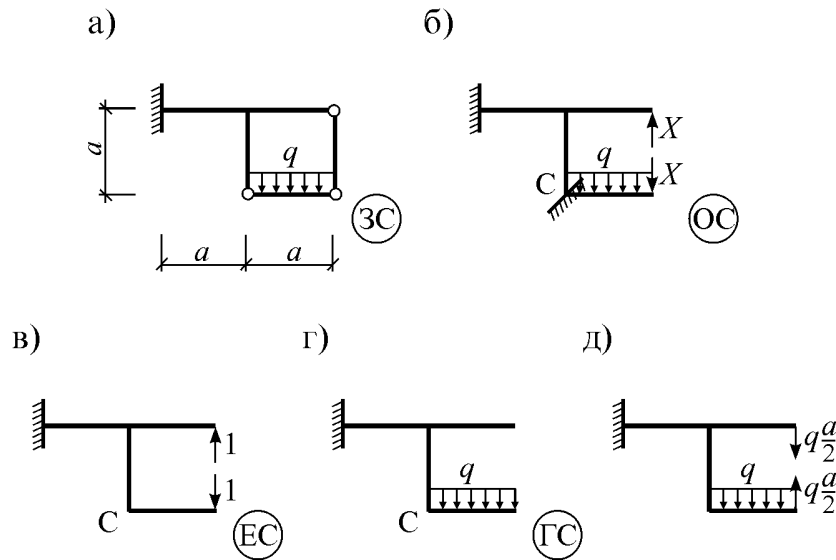


Рис. 3.5

Условием эквивалентности ОС по отношению к ЗС будет условие равенства нулю момента в точке  $C$ :  $M_C=0$ . По принципу суперпозиции, этот момент равняется сумме моментов от силы  $X$  и внешней нагрузки:

$$M_C = M_{C,X} + M_{C,P} = 0.$$

Далее рассмотрим два состояния ОС:

1) единичное состояние (ЕС), где прикладываются силы  $X=1$  (рис. 3.5 в);

2) грузовое состояние (ГС), где прикладывается нагрузка (рис. 3.5 г).

Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$\overline{M}_C \cdot X + M_{C,P} = 0,$$

где  $\overline{M}_C = 1 \cdot a = a$  – момент в точке  $C$  в единичном состоянии (рис. 3.5 в);

$M_{C,P} = qa^2 / 2$  – момент в точке  $C$  в грузовом состоянии (рис. 3.5 г).

Теперь неизвестное усилие легко вычисляется:

$$X = -\frac{M_{C,P}}{\overline{M}_C} = -\frac{qa}{2}.$$

После этого можно перейти к расчету более простой системы (рис. 3.5 д).

В более сложных случаях переставляются несколько связей и записываются соответствующие условия эквивалентности:

$$s_{11}X_1 + s_{12}X_2 + \dots + s_{1n}X_n + S_{1P} = 0,$$

$$s_{21}X_1 + s_{22}X_2 + \dots + s_{2n}X_n + S_{2P} = 0,$$

.....

$$s_{n1}X_1 + s_{n2}X_2 + \dots + s_{nn}X_n + S_{nP} = 0.$$

Здесь  $1, 2, \dots, n$  – заменяемые связи;  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – неизвестные внутренние усилия в этих связях;  $s_{ij}$  – усилие в  $i$ -ой связи в  $j$ -ом единичном состоянии;  $S_{iP}$  – усилие в  $i$ -ой связи в грузовом состоянии.

Из этой системы уравнений определяются неизвестные  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

**Общий вывод.** Расчет любой статически определимой системы приводит к решению системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными. Если определитель полученной системы уравнений отличен от нуля ( $det \neq 0$ ), внутренние усилия будут конечными величинами. Если же определитель равняется нулю ( $det = 0$ ), то внутренние усилия определить нельзя. В этом случае система является мгновенно изменяемой.

### В о п р о с ы

1. Какая система называется статически определимой?
2. Какие особенности имеет статически определимая система?
3. Какие формы уравнений равновесия можно записать для плоской системы?
4. Что такое изгибающий момент, поперечная сила и продольная сила, как определяются их знаки?
5. Какие методы используются при расчете статически определимых систем?
6. В чем сущность метода замены связей?
7. Какой общий вывод можно сделать после анализа методов расчета статически определимых систем?

### Л е к ц и я 4

#### РАСЧЕТ ФЕРМ НА ПОСТОЯННУЮ НАГРУЗКУ

**Ферма** – это геометрически неизменяемая система, состоящая из прямых стержней, соединенных в узлах жестко или шарнирно (рис. 4.1 а). Замена жестких узлов фермы шарнирами превращает ее в шарнирную ферму (рис. 4.1 б) и упрощает расчет.

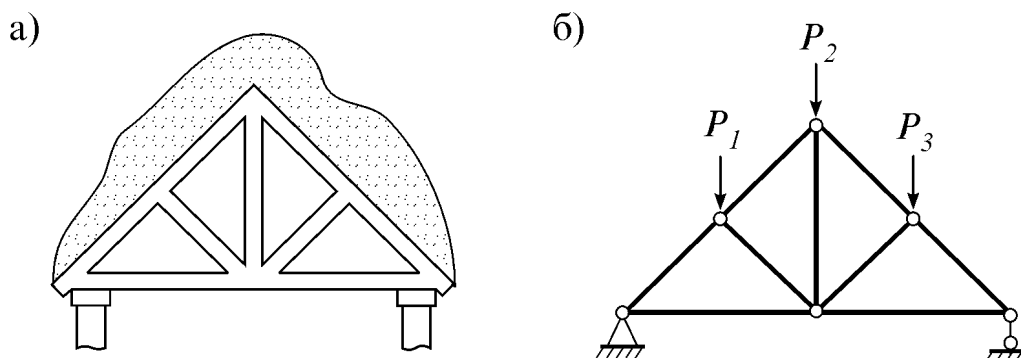


Рис. 4.1

Для статической определимости и геометрической неизменяемости шарнирных ферм должно выполняться условие

$$2n_y = n_c + n_{c_0}.$$

При действии узловой нагрузки стержни фермы работают в основном на растяжение или сжатие, а моменты и поперечные силы в них отсутствуют. Поэтому в стержнях шарнирной фермы определяются только продольные усилия.

Положительное усилие  $N_{ij}$  в стержне фермы между узлами  $i$  и  $j$  (рис. 4.2 а) следует направить в сторону от шарниров (рис. 4.2 б).

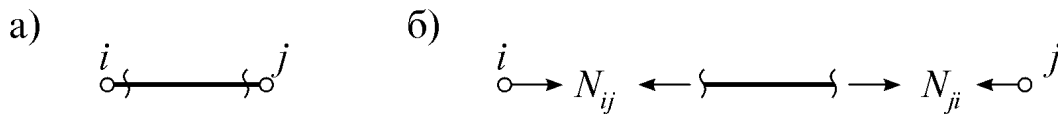


Рис. 4.2

При расчете ферм используются различные методы. Рассмотрим некоторые из них.

## 1. Метод вырезания узлов

Этот метод основан на последовательном вырезании и рассмотрении равновесия узлов фермы.

*Сущность метода:* вырезается узел, в котором не более двух неизвестных; составляются уравнения равновесия  $\Sigma X=0$  и  $\Sigma Y=0$ ; из них определяются неизвестные продольные усилия. После этого можно вырезать следующий узел и продолжить расчет.

В методе вырезания узлов необходимо установить порядок вырезания узлов. Например, для расчета фермы (рис. 4.3 а) сначала вырежем узел А (рис. 4.3 б) и запишем уравнения равновесия:

$$\Sigma X = N_{A-10} + N_{A-1} \cos \alpha = 0;$$

$$\Sigma Y = N_{A-1} \sin \alpha + 1,5P = 0.$$

Из них:  $N_{A-1} = -1,5P / \sin \alpha$ ;  $N_{A-10} = 1,5P / \operatorname{tg} \alpha$ .

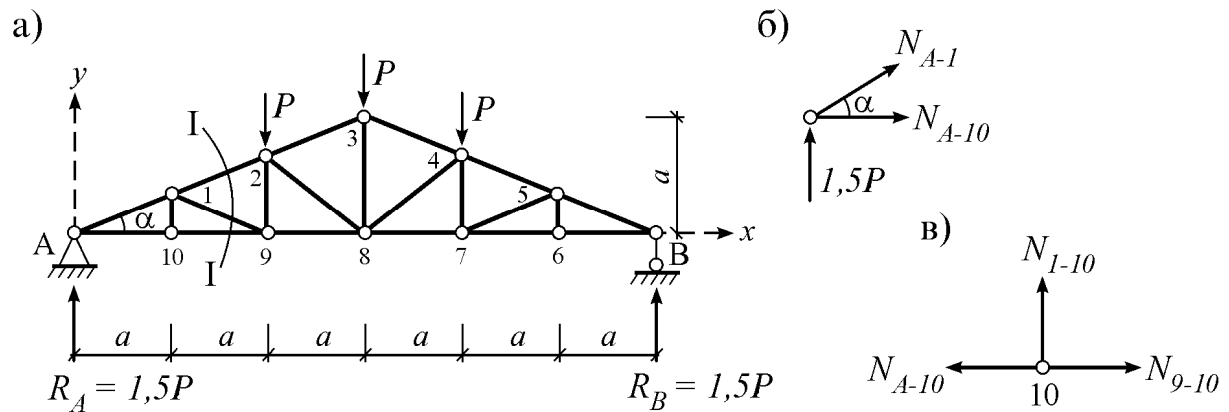


Рис. 4.3

Теперь вырежем узел 10 (рис. 4.3 в) и запишем условия равновесия:

$$\Sigma X = N_{9-10} - N_{A-10} = 0;$$

$$\Sigma Y = N_{1-10} = 0.$$

Из них получаем:  $N_{9-10} = N_{A-10} = 1,5P / \operatorname{tg} \alpha$ ;  $N_{1-10} = 0$ .

После этого можно вырезать узлы 1, 9, 2, 3, 8, 4, 7, 6, 5.

У метода вырезания узлов есть недостаток: ошибка (неточность), допущенная при расчете одного узла, влияет на последующие вычисления. Поэтому результаты, полученные этим методом, надо контролировать.

Например, результаты расчета фермы могут быть проверены по формуле

$$\sum N_i l_i = \sum P_x \cdot x + \sum P_y \cdot y,$$

где  $\boxed{\times}$  – усилия в стержнях,  $l_i$  – длины стержней,  $P_x$  и  $P_y$  – проекции нагрузок (включая и опорные реакции),  $x$  и  $y$  – координаты нагрузок.

Из метода вырезания узлов вытекают следующие **признаки, упрощающие расчет ферм**:

1) если в узле сходятся два стержня и внешняя нагрузка не приложена (рис. 4.4 а), то оба усилия равны нулю:  $N_1 = N_2 = 0$ ;

2) если в узле сходятся два стержня, а внешняя нагрузка действует в направлении одного стержня (рис. 4.4 б), то  $N_1 = P$ ,  $N_2 = 0$ ;

3) если в трехстержневом узле два стержня лежат на одной прямой, а внешней нагрузки нет (рис. 4.4 в), то усилия в двух стержнях равны:  $N_1 = N_2$ , а усилие в боковом стержне равно нулю:  $N_3 = 0$ ;

4) если в четырехстержневом узле стержни попарно лежат на одной прямой, а внешней нагрузки нет (рис. 4.4 г), то усилия попарно равны между собой:  $N_1 = N_2$ ,  $N_3 = N_4$ .

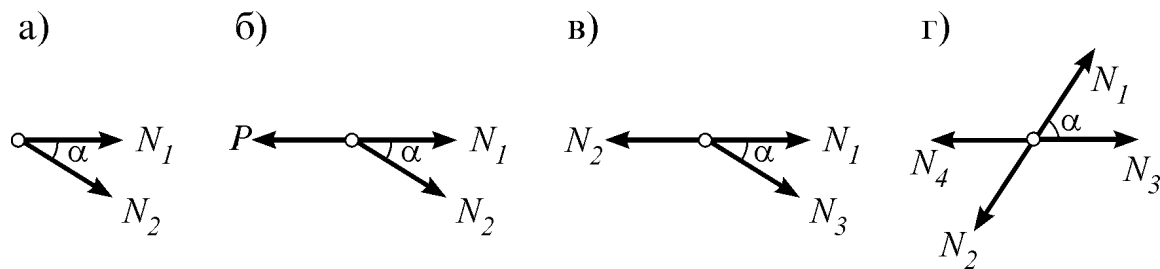


Рис. 4.4

Используя эти признаки, легко определяются некоторые усилия рассмотренной фермы (рис. 4.3 а):

- по 2-му признаку  $N_{1-10} = N_{1-9} = N_{2-9} = 0$ ;  $N_{5-6} = N_{5-7} = N_{4-7} = 0$ ;
- по 3-му признаку  $N_{A-10} = N_{9-10} = N_{8-9}$ ;  $N_{B-6} = N_{6-7} = N_{7-8}$ ;  $N_{A-1} = N_{1-2}$ ;  $N_{B-5} = N_{4-5}$ .

## 2. Метод сквозных сечений

Этот метод позволяет определять усилие в стержне фермы, решая только одно уравнение.

Сущность метода: поперек фермы проводится такое сквозное сечение, чтобы появилось не более трех неизвестных усилий; в точке пересечения направлений двух из них составляется уравнение момента, из которого определяется третье усилие.

Точка, в которой составляется уравнение момента, называется **моментной точкой**.

В качестве примера рассмотрим ту же ферму, проведя поперек второй панели сквозное сечение I-I (рис. 4.3 а). Рассматривая равновесие левой части от сечения (рис. 4.5), составим уравнение момента в точке 1:

$$\Sigma M_I = N_{9-10} \cdot \frac{a}{3} - 1,5P \cdot a = 0.$$

Отсюда получаем:  $N_{9-10} = 4,5P$ .

Точка 9 является моментной точкой для  $N_{1-2}$ . Поэтому

$$\Sigma M_9 = -N_{1-2} b - 1,5P \cdot 2a = 0.$$

Так как  $b = 2a \cdot \sin \alpha$ , получаем  $N_{1-2} = -1,5P / \sin \alpha$ .

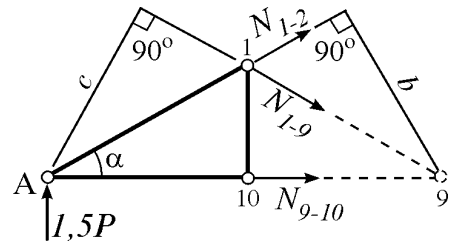


Рис. 4.5

Для  $N_{1-9}$  моментной является точка А:  $\Sigma M_A = -N_{1-9} \cdot c = 0$ . Отсюда  $N_{1-9} = 0$ .

Иногда (например, когда два стержня параллельны) моментной точки не существует. В этом случае вместо уравнения момента следует составлять уравнение проекции на ось, перпендикулярную этим параллельным стержням.

У метода сквозных сечений есть один недостаток: в сложных фермах не удастся провести такое сквозное сечение, чтобы появились только три неизвестных усилия. В этом случае часть неизвестных нужно определить заранее или использовать другие методы.

### 3. Метод совместных сечений

Этот метод используется для расчета ферм, которые невозможно рассчитать методами вырезания узлов и сквозных сечений.

Сущность метода: поперек фермы проводятся несколько совместных сечений; для полученных частей фермы составляются уравнения равновесия; эти уравнения решаются совместно; затем каждая часть фермы рассчитывается отдельно.

Например, опорные реакции фермы на рис. 4.6 а легко определить, но усилия в ее стержнях нельзя определить способами вырезания узлов и сквозных сечений. Поэтому проводим совместные сечения I-I и II-II и рассматриваем равновесие двух полученных частей (рис. 4,6 б, в).

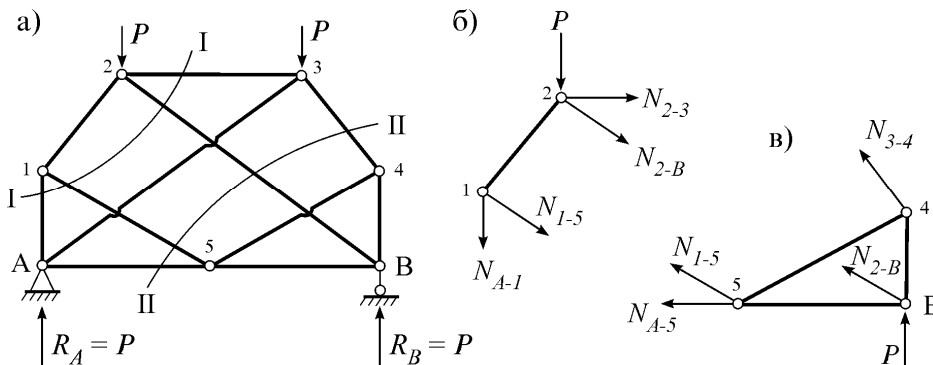


Рис. 4.6

В них имеются шесть неизвестных усилий  $N_{A-1}$ ,  $N_{1-5}$ ,  $N_{2-3}$ ,  $N_{2-B}$ ,  $N_{3-4}$ ,  $N_{A-5}$ . Их можно найти составив по три уравнения равновесия для обеих частей. Затем, используя способ вырезания узлов, определяются и остальные усилия в стержнях фермы  $N_{1-2}$ ,  $N_{5-B}$ ,  $N_{4-B}$ ,  $N_{A-3}$ ,  $N_{4-5}$ .

## 4. Расчет шпренгельных ферм

С целью экономии материала в фермах стремятся использовать стержни малого поперечного сечения. Однако это может привести к значительному изгибу и потере устойчивости некоторых стержней. Для исключения таких явлений в панели такой фермы (рис. 4.7 а) вводят дополнительные стержни – шпренгельные элементы и получают **шпренгельную ферму** (рис. 4.7 б). В дальнейшем первоначальную ферму (ферму без шпренгелей) для простоты будем называть **главной фермой**.

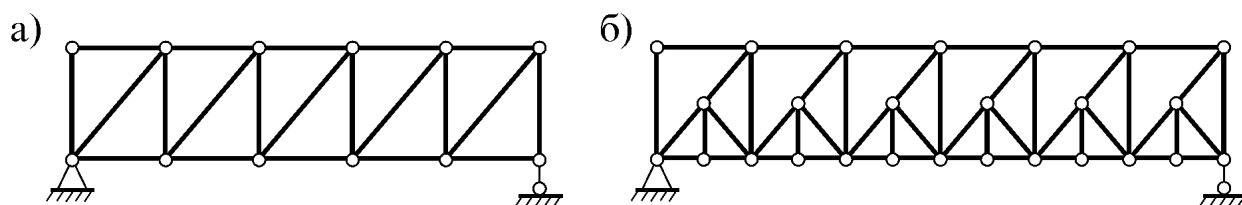


Рис. 4.7

Шпренгели фермы могут быть одноэтажными и двухэтажными. Одноэтажный шпренгель воспринимает внешнюю нагрузку в пределах одной панели и передает ее в узлы только одного пояса, а двухэтажный – передает внешнюю нагрузку и в узлы другого пояса (из нижнего пояса в верхний, и наоборот).

Рассмотренные выше методы можно использовать и для расчета шпренгельных ферм. Однако их расчет упрощается, если разложить ферму на главную ферму и закрепленные в узлах шпренгели. На рис. 4.8 показан пример такого разложения для одной панели одноэтажной (рис. 4.8 а, б, в) и двухэтажной (рис. 4.8 г, д, е) шпренгельных ферм.

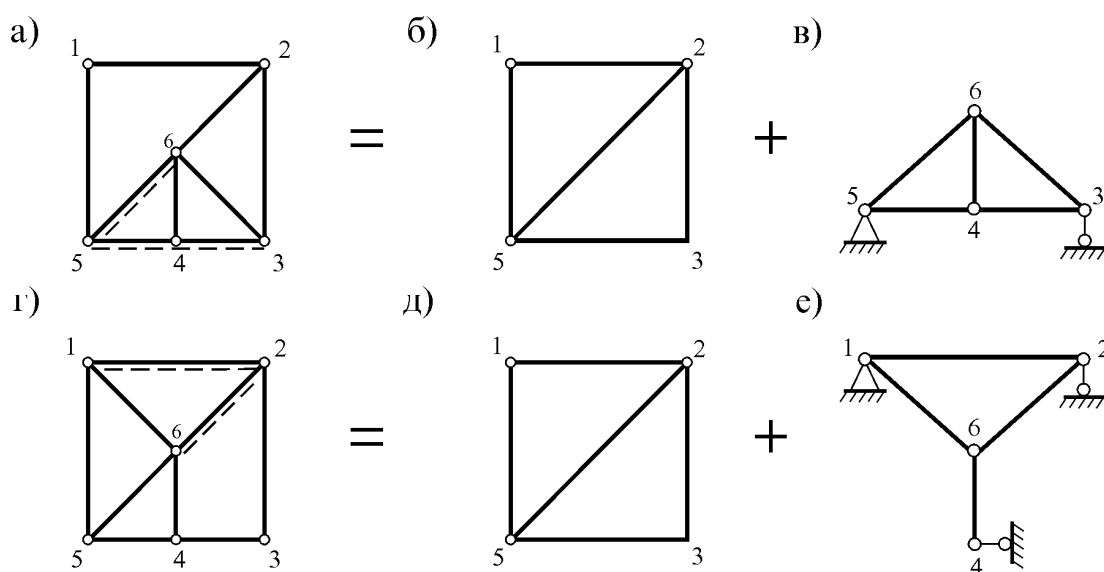


Рис. 4.8

При расчете многих шпренгельных ферм можно выделить три разных типа стержней:

- стержни 1 типа – входят только в главную ферму;
- стержни 2 типа – входят только в шпренгели;
- стержни 3 типа – входят в состав и главной фермы, и в состав шпренгелей.

Например, на рис. 4.8 а стержни фермы 1-2, 2-3, 1-5 и 2-6 (как часть элемента 2-5) будут относиться к первому; стержни 3-6 и 4-6 – ко второму; стержни 5-6, 4-5 и 3-4 – к третьему типу. А стержни 1-5, 2-3, 3-4, 5-4 и 5-6 фермы на рис. 4.8 г будут первого, стержни 1-6 и 4-6 – второго, стержни 1-2 и 2-6 – третьего типа. Кроме того, стержни третьего типа на рис. 4.8 а, г дополнительно отмечены пунктирной линией.

Расчет шпренгельной фермы начинается с расчета тех шпренгелей, к которым приложена узловая нагрузка (например, в узле 4). После этого определяются опорные реакции шпренгеля и методом вырезания узлов – продольные усилия во всех стержнях шпренгелей  $N_i''$ .

Затем проводится расчет главной фермы (фермы без шпренгелей), на которую прикладываются все ее узловые силы, а также дополнительные силы со стороны шпренгелей, равные опорным реакциям шпренгелей и приложенных в обратном направлении. Далее любым из рассмотренных выше методов вычисляются продольные усилия во всех стержнях главной фермы  $N_i'$ .

После этого определяются окончательные величины усилий в стержнях шпренгельной фермы, которые вычисляются по следующим формулам:

- для стержней 1 типа:  $N_i = N_i'$ ;
- для стержней 2 типа:  $N_i = N_i''$ ;
- для стержней 3 типа:  $N_i = N_i' + N_i''$ .

## В о п р о с ы

1. Какие упрощения принимаются при расчете ферм?
2. Как записывается условие статической определимости и геометрической неизменяемости шарнирной фермы?
3. Какие методы используются при расчете ферм?
4. В чем сущность метода вырезания узлов?
5. В чем недостаток метода вырезания узлов?
6. Какие признаки (частные случаи) упрощают расчет ферм?
7. В чем сущность метода сквозных сечений?
8. В чем недостаток метода сквозных сечений и как его избежать?
9. Что такое моментная точка и как ее определить?
10. В чем сущность метода совместных сечений?
11. Что такое шпренгельная ферма?
12. На какие типы делятся стержни шпренгельной фермы?
13. Каков порядок расчета шпренгельных ферм?

## Лекция 5

# РАСЧЕТ МНОГОДИСКОВЫХ СИСТЕМ

## 1. Расчет разрезных балок

В зависимости от расположения опор и шарниров, расчетные схемы разрезных балок могут быть разными (рис. 5.1).

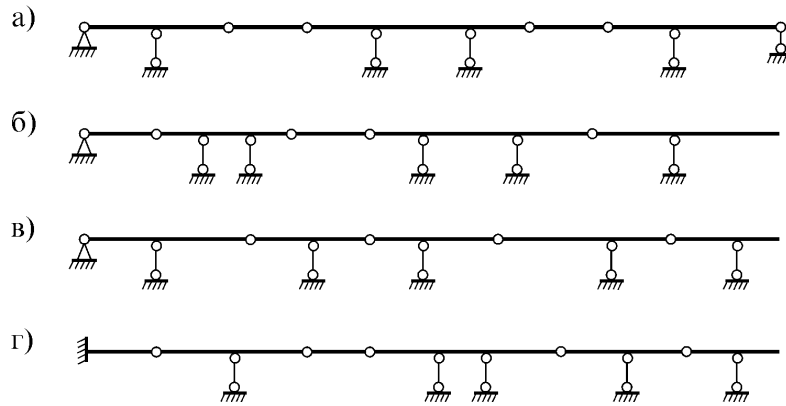


Рис. 5.1

Для геометрической неизменяемости и статической определимости разрезных балок должно выполняться условие

$$n_{ш} = n_{C_0} - 3.$$

Взаимодействие частей разрезной балки легче изучать путем составления их этажных схем. Для этого выявляются те части балки, которые могут самостоятельно нести внешнюю нагрузку (назовем их *главными балками*). Все главные балки изображаются на нижнем этаже. Те части балки, которые примыкают к главным балкам и могут нести нагрузку только при опирании на главные балки (*подвесные балки*), изображаются выше и т.д. В результате получается этажная схема балки.

Например, рассмотренные на рис. 5.1 разрезные балки можно представить в виде следующих этажных схем (рис. 5.2).

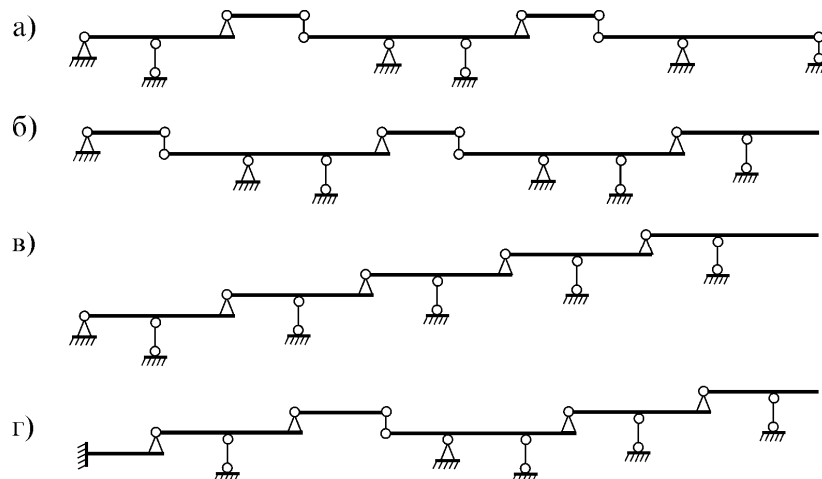


Рис. 5.2

Расчет разрезных балок начинается с самого верхнего этажа: определяются опорные реакции и внутренние усилия этой части балки от ее нагрузки. После этого переходим к нижележащему этажу. Однако, кроме своей нагрузки, к нему следует приложить и давление от вышележащего этажа (которое равно реакции вышележащего этажа, но направлено в противоположную сторону). Затем определяются его реакции и внутренние усилия. Расчет продолжается до самого нижнего этажа.

Рассмотрим пример (рис. 5.3 а). Вначале строим этажную схему (рис. 5.3 б), проводим расчет подвесной балки (рис. 5.3 в), а затем главной балки (рис. 5.3 г). Полученные эпюры для отдельных частей балки объединяем в общие эпюры  $M$  и  $Q$  (рис. 5.3 д, е).

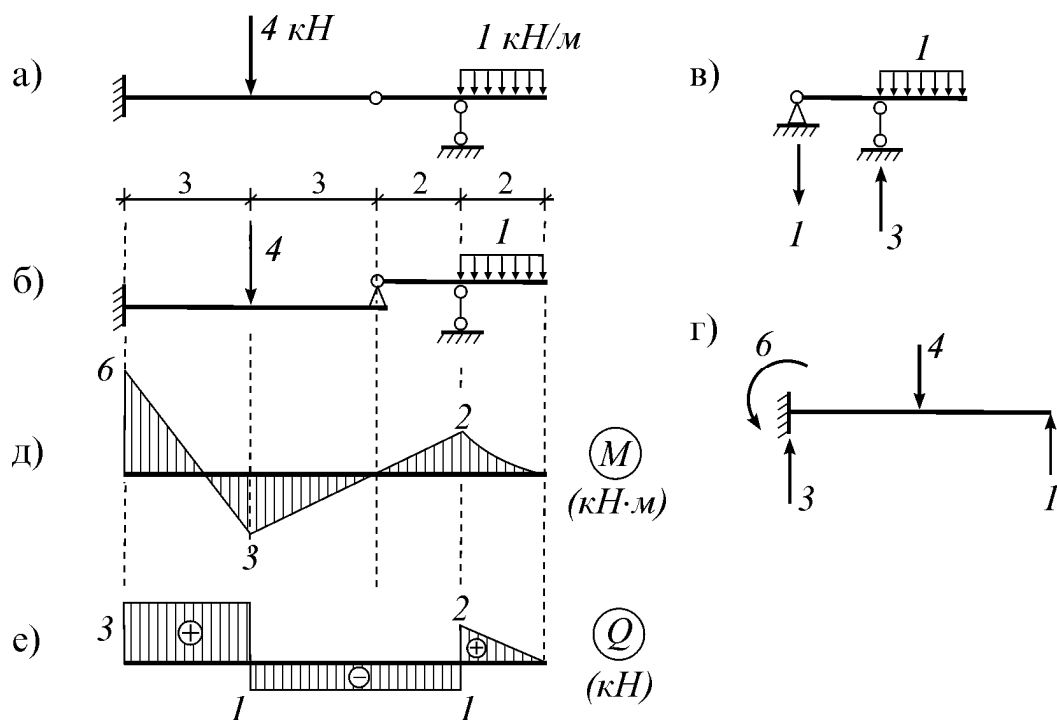


Рис. 5.3

## 2. Расчет трехшарнирных систем

**Трехшарнирная система** – это система из двух дисков, связанных между собой и основанием тремя шарнирами. Есть трехшарнирные системы двух видов: арочные (рис. 5.4 а) и подвесные системы (рис. 5.4 б).

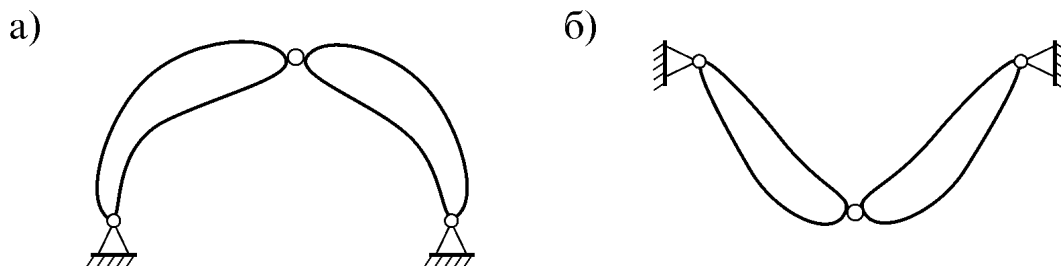


Рис. 5.4

Их расчет мало отличается друг от друга. Поэтому остановимся на арочных системах, которые бывают трех типов: трехшарнирные рамы (рис. 5.5 а), трехшарнирные арочные фермы (рис. 5.5 б) и трехшарнирные арки (рис. 5.5 в):

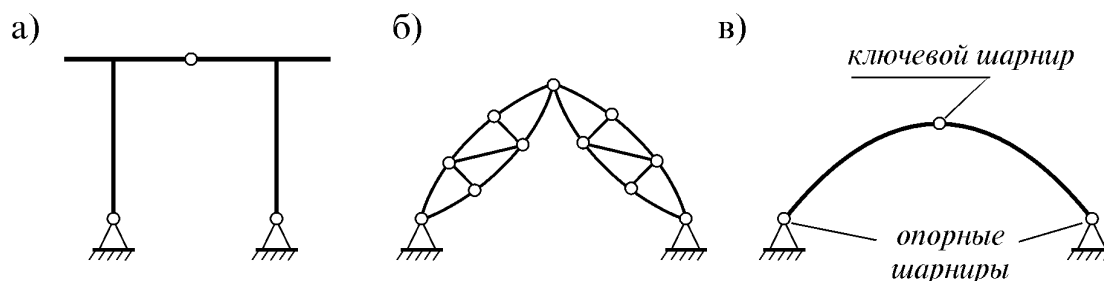


Рис. 5.5

Особенность трехшарнирных систем состоит в том, что в них возникает распор (боковое давление) даже от вертикальной нагрузки. Опорные реакции таких систем можно определять методом совместных сечений (рис. 5.6 а). В результате проведения двух сечений *I-I* и *II-II* появляются две независимые части с шестью неизвестными (четыре опорные реакции  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $H_A$ ,  $H_B$  и две междисковые реакции  $X_C$ ,  $Y_C$  (рис. 5.6 б).

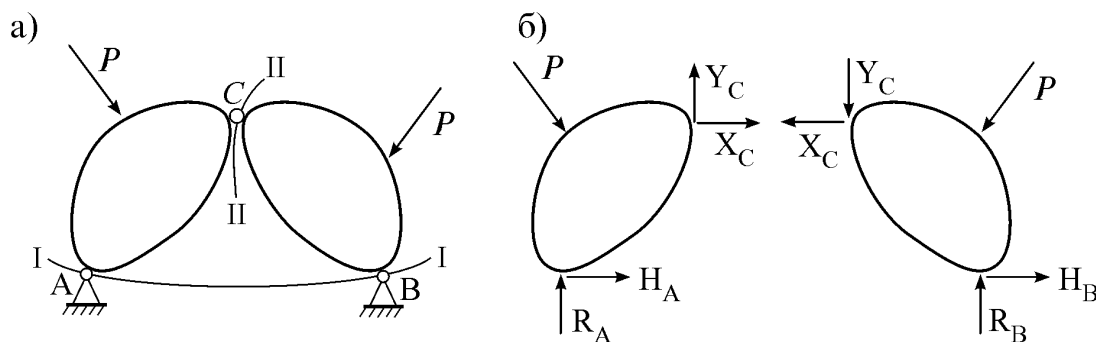


Рис. 5.6

Составив для каждого диска по три уравнения равновесия (всего шесть уравнений), можно определить все эти реакции. Далее каждый диск рассчитывается самостоятельно.

### 3. Расчет трехшарнирной арки

Рассмотрим расчет трехшарнирной арки произвольного очертания.

При расчете арок назначаются несколько характерных сечений, определяемых делением пролета арки на несколько частей. К ним добавляются точки приложения нагрузок и расположения шарниров. Если известны длина пролета  $l$  и стрела подъема  $f$  параболической арки или радиус кривизны  $R$  круговой арки, необходимые для дальнейшего расчета геометрические параметры арки определяются путем вычислений. Если ось арки определяется другой кривой, то ее геометрические параметры

(координаты сечений  $x_i$  и  $y_i$ , углы наклона касательной к оси арки в этих точках  $\varphi_i$ , а также значения  $\sin\varphi_i$  и  $\cos\varphi_i$  должны быть известными.

При действии на арку только вертикальных сил, ее можно рассчитать и без расчленения на отдельные диски. Для этого следует сравнить арку (рис. 5.7 а) с вспомогательной балкой такого же пролета (рис. 5.7 б).

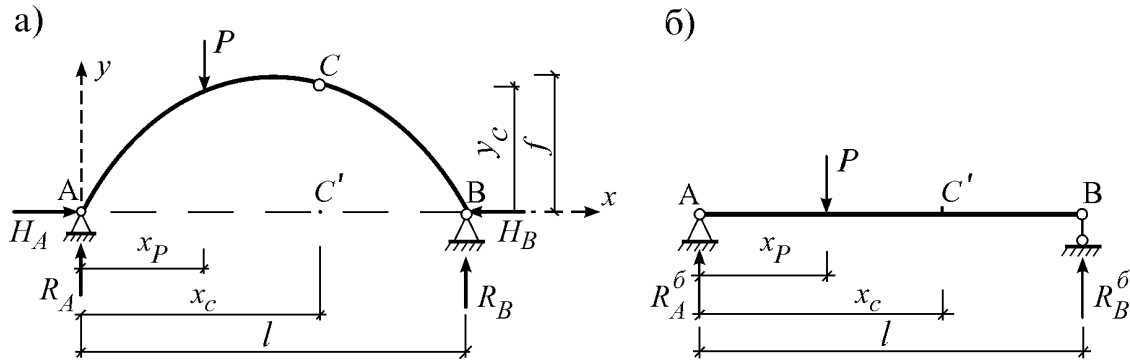


Рис. 5.7

Вначале составим уравнения моментов для обеих систем:

$$\text{для арки: } \Sigma M_A = R_B l - P x_p = 0; \quad \Sigma M_B = -R_A l - P(l - x_p) = 0.$$

$$\text{для балки: } \Sigma M_A = R_B^0 l - P x_p = 0; \quad \Sigma M_B = -R_A^0 l - P(l - x_p) = 0.$$

Сравнивая их между собой замечаем, что  $R_B = R_B^0$ ,  $R_A = R_A^0$ .

Так как  $\Sigma X = H_A - H_B = 0$ , то  $H_A = H_B = H$ , где  $H$  – величина распора арки. Для ее определения вычислим момент сил слева от ключевого шарнира  $C$

$$\Sigma M_C^{\text{лев}} = -R_A x_c + P(x_c - x_p) + H y_c = 0$$

и момент от левых сил балки в точке  $C'$

$$M_{C'}^0 = R_A x_c - P(x_c - x_p).$$

С учетом последнего выражения, уравнение для арки примет вид

$$M_{C'}^0 + H y_c = 0.$$

Отсюда получается формула для распора:

$$H = M_{C'}^0 / y_c.$$

Теперь определим внутренние усилия. Для этого применим метод сечений и для арки, и для балки, рассмотрев их левые части (рис. 5.8 а, б).

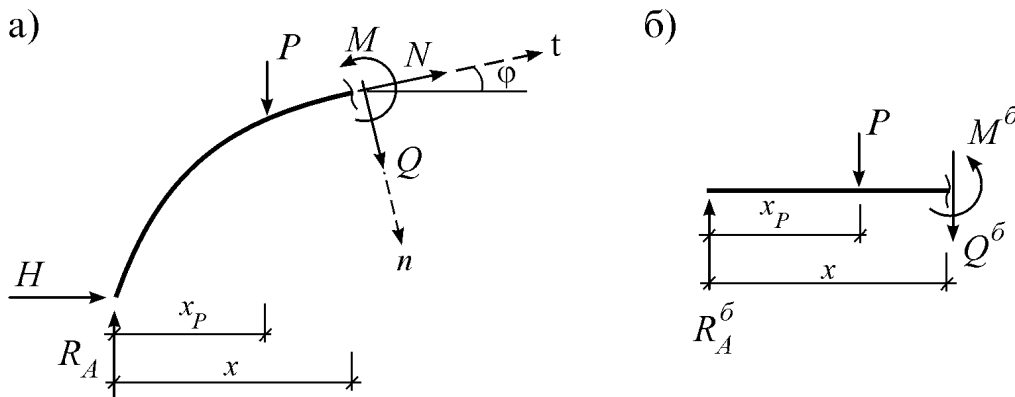


Рис. 5.8

Для арки:

$$M(x) = R_A x - P(x - x_P) - H y(x).$$

Для балки:

$$M^0(x) = R_A x - P(x - x_P).$$

Заметим, что начальная часть формулы для арки совпадает с формулой для балки. Поэтому можно записать:

$$M(x) = M^0(x) - H y(x).$$

Как видим, момент в арке меньше момента в балке.

Здесь следует отметить, что момент, растягивающий нижнее волокно арки, считается положительным.

Определим поперечные и продольные силы. Для этого спроецируем силы, указанные на рис. 5.8 а, на направления касательной  $t$  и нормали  $n$  в сечении:

$$\Sigma n = Q(x) + H \sin \varphi + (P - R_A) \cos \varphi = 0;$$

$$\Sigma t = N(x) + H \cos \varphi + (R_A - P) \sin \varphi = 0.$$

Так как в левой части балки (рис. 5.8 б)  $Q^0(x) = R_A - P$ , то из этих уравнений вытекают формулы:

$$Q(x) = Q^0(x) \cos \varphi - H \sin \varphi;$$

$$N(x) = -[Q^0(x) \sin \varphi + H \cos \varphi].$$

Если на арку кроме вертикальных сил действуют и горизонтальные силы, то в формулах для внутренних усилий вместо  $H$  следует учитывать сумму всех горизонтальных сил, лежащих слева от сечения.

Эпюры внутренних усилий  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  арки строят в двух видах: или на оси арки, или на оси балки.

## В о п р о с ы

1. Как строится этажная схема разрезной балки?
2. Чем отличаются арочная и подвесная системы?
3. В чем главная особенность трехшарнирных систем?
4. Как определяются распор и внутренние усилия в сечениях арки?
5. Как строятся эпюры внутренних усилий арки?

## Л е к ц и я 6

### РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ

**Подвижной нагрузкой** называется нагрузка, движущаяся по сооружению с некоторой скоростью. К примеру, таковой является транспорт, движущийся по мосту (рис. 6.1 а). Его можно рассматривать как систему взаимосвязанных параллельных сил, движущихся по сооружению (рис. 6.1 б).

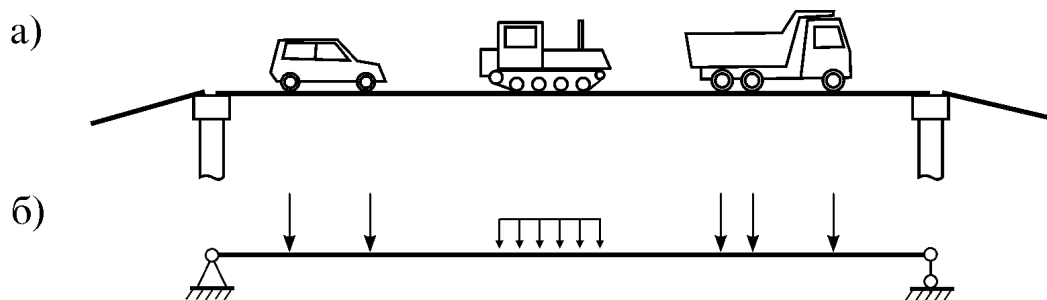


Рис. 6.1

## 1. Методы расчета сооружений на подвижную нагрузку

Подвижная нагрузка вызывает в элементах сооружения переменные внутренние усилия. Расчет сооружения на подвижную нагрузку, даже без учета динамических эффектов (например, ускорений и инерционных сил), сложнее расчета на постоянную нагрузку. Потому что приходится решать несколько задач:

- определять наиболее опасное (расчетное) положение нагрузки;
- определять наибольшее (расчетное) значение этой нагрузки;
- рассчитывать сооружение на расчетную нагрузку.

Расчет на подвижную нагрузку можно вести двумя методами.

**Общий метод.** *Сущность метода:*

- подвижная нагрузка рассматривается целиком и обозначается одной координатой;
  - искомое внутреннее усилие выражается как функция координаты нагрузки; эта функция исследуется на экстремум и определяется расчетное положение нагрузки;
  - затем вычисляется расчетное значение внутреннего усилия.
- Этот метод универсален, но сложен для реализации.

**Метод линий влияния.** *Сущность метода:*

- искомая величина (внутреннее усилие, реакция и др.) определяется как функция от подвижной единичной силы;
- строится график этой функции;
- находятся расчетное положение и расчетное значение этой величины.

Метод линий влияния более прост для реализации, позволяет достаточно просто определять расчетное положение нагрузки и ее величину. Поэтому остановимся на нем.

**Линия влияния (ЛВ)** – это график зависимости искомой величины от подвижной единичной силы  $P=1$ .

Понятия линии влияния и эпюры нельзя путать, потому что эпюра показывает значение внутреннего усилия для всех точек (сечений) от постоянной нагрузки, а линия влияния показывает значение внутреннего усилия от подвижной единичной силы  $P=1$  только для одного сечения.

## 2. Построение линий влияния усилий простой балки

Рассмотрим консольную балку, на которую действует подвижная нагрузка  $P=l$  (рис. 6.2 а).

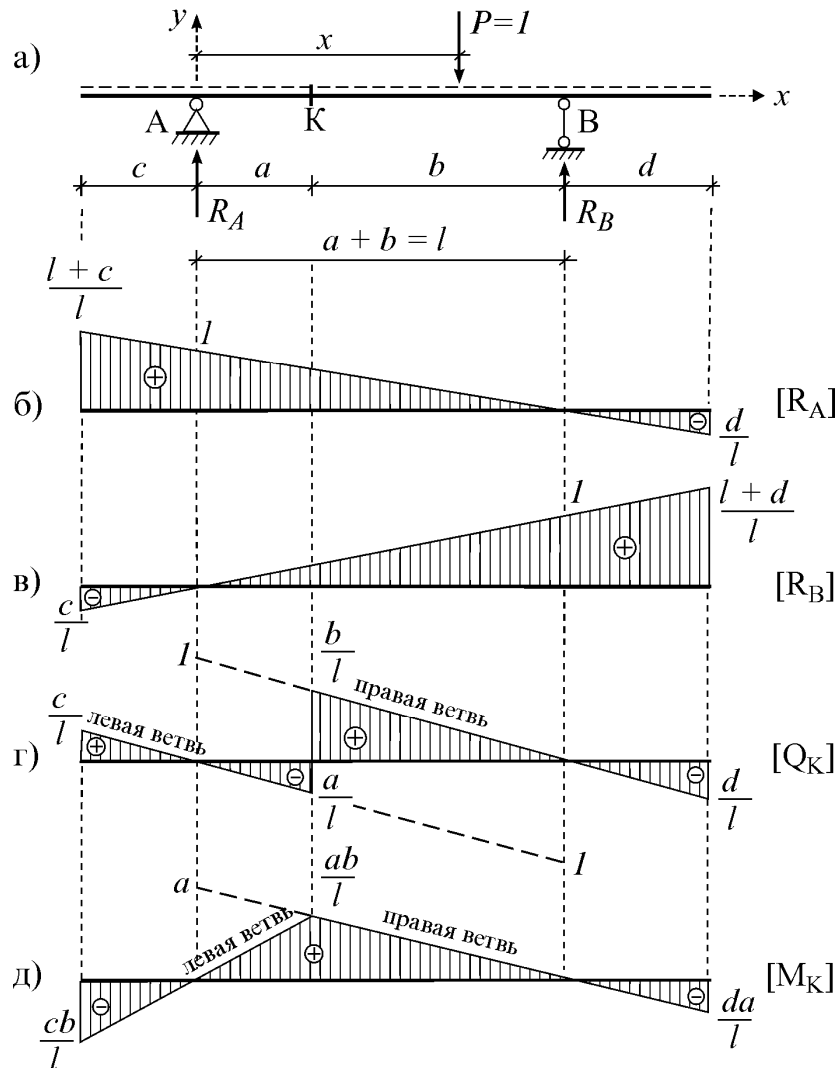


Рис. 6.2

### 1) Линии влияния опорных реакций

Сумма моментов в правой опоре:

$$\sum M_B = -R_A \cdot l + l \cdot (l - x) = 0.$$

Откуда  $R_A = \frac{l-x}{l}$ .

Для построения графика этой функции найдем положение двух точек:

если  $x=0$ , то  $R_A=l$ ; если  $x=l$ , то  $R_A=0$ .

Через эти точки проводим прямую и строим ЛВ реакции  $R_A$  (рис. 6.2 б).

Для определения правой опорной реакции составим уравнение

$$\sum M_A = R_B \cdot l - l \cdot x = 0.$$

Отсюда  $R_B = \frac{x}{l}$ .

Если  $x=0$ , то  $R_B=0$ ; если  $x=l$ , то  $R_B=l$ . Через эти точки проводим прямую и строим ЛВ реакции  $R_B$  (рис. 6.2 в).

## 2) Линии влияния поперечной силы и момента

Они зависят от положения сечения, в котором определяются.

### а) Единичная сила правее сечения $K$

В этом случае  $Q_K = R_A$ ,  $M_K = R_A \cdot a$ .

Эти функции определяют **правые ветви ЛВ** поперечной силы и момента в сечении  $K$  (рис. 6.2 г, д).

### б) Единичная сила левее сечения $K$

В этом случае внутренние усилия легко выражаются через правую опорную реакцию:  $Q_K = -R_B$ ,  $M_K = R_B \cdot b$ . Эти функции определяют **левые ветви ЛВ** поперечной силы и момента в сечении  $K$  (рис. 6.2 г, д).

Если сечение располагается на консольных (левой или правой) частях балки (рис. 6.3 а), ЛВ поперечной силы и момента будут совсем другими. Результаты их построения для двух сечений  $K_1$  и  $K_2$  даны на рис. 6.3 б-д.

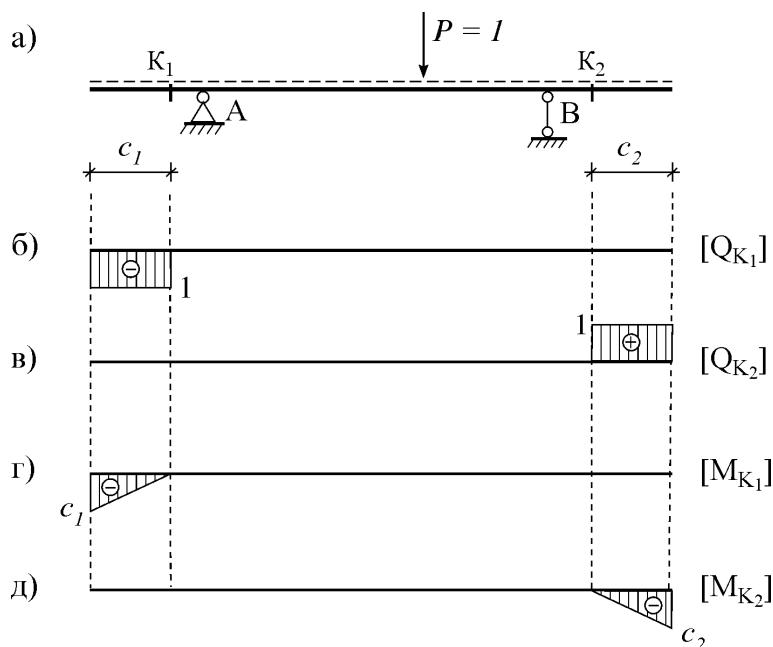


Рис. 6.3

В некоторых расчетных схемах (например, в этажных схемах разрезной балки) встречаются консоли с заделками справа или слева. ЛВ их усилий можно получить без расчетов, используя левые и правые части линий влияния на рис. 6.3 б-д, считая, что в точках  $A$  и  $B$  имеются заделки.

Полученные здесь ЛВ опорных реакций и внутренних усилий используются как известные решения при расчете аналогичных балок и как промежуточные решения при расчете многопролетных балок.

## 3. Построение линий влияния кинематическим методом

В основе кинематического метода лежит известный в теоретической механике **принцип возможных перемещений**: для того чтобы механическая система находилась в равновесии, необходимо чтобы сумма работ всех сил на их возможных перемещениях равнялась нулю.

Рассмотрим применение этого метода на примере построения ЛВ опорной реакции  $R_B$  консольной балки (рис. 6.4 а). Для этого опоре  $B$  балки с единичной силой  $P=1$  дадим малое перемещение  $\delta_B$  в направлении реакции  $R_B$  (рис. 6.4 б). По принципу возможных перемещений, сумма работ всех сил балки на возможных перемещениях (рис. 6.4 б) равна нулю:

$$-1 \cdot \delta_P + \delta_B \cdot R_B = 0.$$

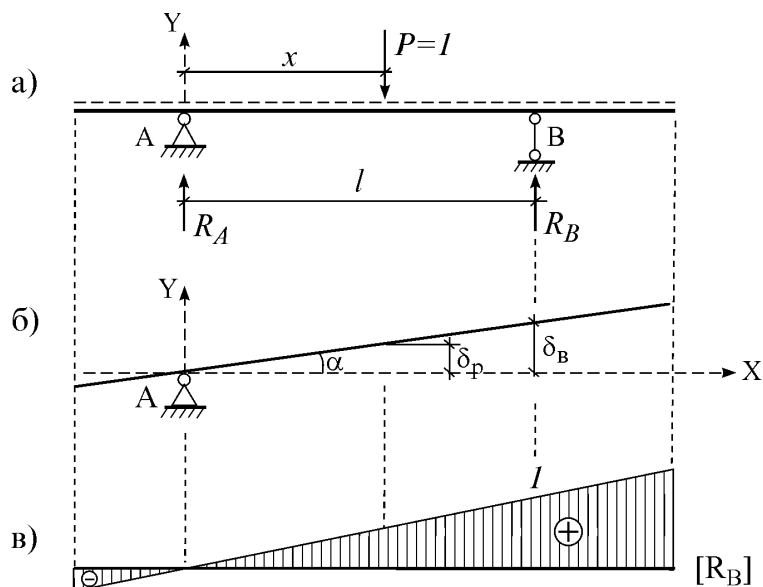


Рис. 6.4

По рис. 6.4 б имеем:  $\delta_P = x \cdot \operatorname{tg} \alpha = x \cdot \frac{\delta_B}{l}$ . С учетом этого предыдущая формула принимает вид  $R_B = \frac{x}{l}$ , которая определяет искомую ЛВ  $R_B$  (рис. 6.4 в). Она совпадает с полученной ранее (рис. 6.2 в).

Кинематический метод, как более сложный статического метода (в нем надо вычислять перемещения), обычно используется лишь для проверки общего вида ЛВ, полученного статическим методом.

Например, для получения общего вида линии влияния  $Q_K$  консольной балки на рис. 6.2 а удаляем связь в точке  $K$  и образуем механизм (рис. 6.5 а) с одной степенью свободы. Задавая малые перемещения в направлении  $Q_K$  слева и справа от сечения, строим новое положение балки, которое и покажет общий вид ЛВ  $Q_K$  (рис. 6.5 б). Аналогично поступаем и при получении общего вида ЛВ  $M_K$  (рис. 6.5 в, г).

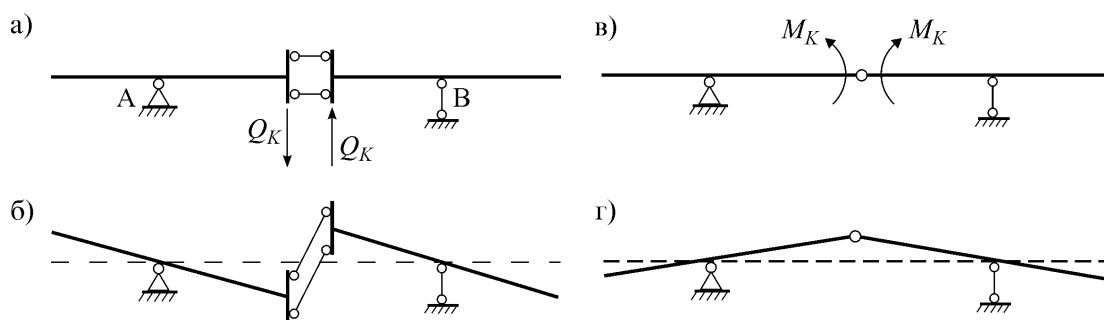


Рис. 6.5

#### 4. Построение ЛВ при узловой передаче нагрузки

В некоторых сооружениях нагрузка на их несущую часть может передаваться через вспомогательные балки. Например, такая конструктивная схема часто используется в мостах: там на главную балку накладываются поперечные балки, а на них – настил (рис. 6.6 а). В таких сооружениях нагрузка на главные балки передается через узлы пересечения главной балки с поперечными балками.

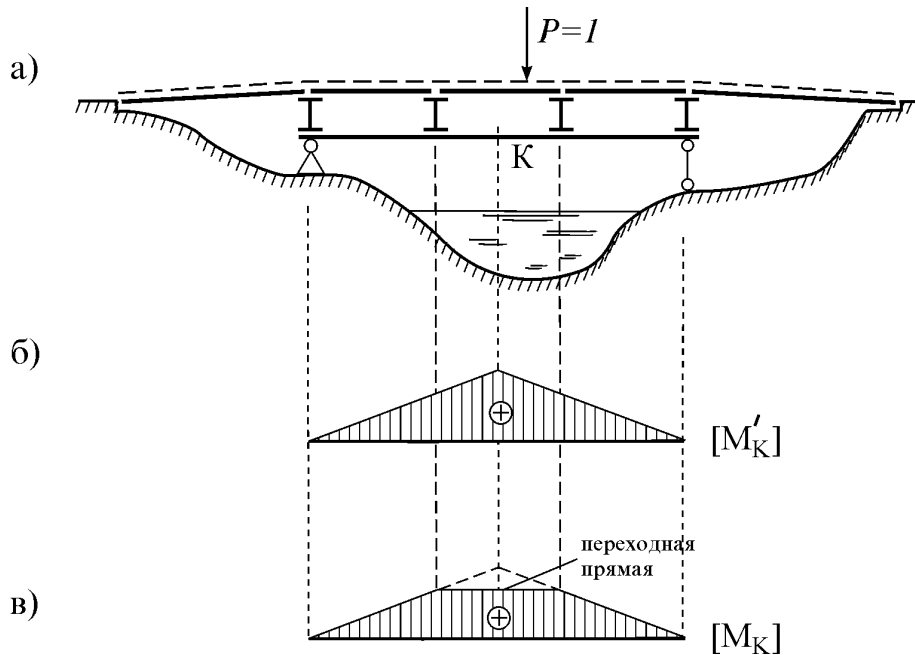


Рис. 6.6

Если бы нагрузка действовала только на главную балку, ЛВ  $M_K$  была бы как на рис. 6.6 б. Поэтому, когда единичная сила находится над поперечными балками, ординаты ЛВ будут такими же. Если же единичная сила будет между поперечными балками, ЛВ сглаживается (рис. 6.6 в).

#### 5. Определение усилий по ЛВ

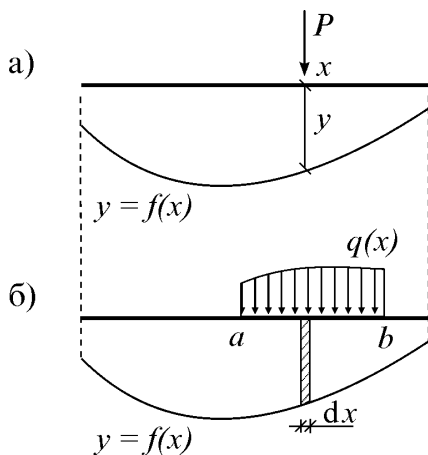


Рис. 6.7

Пусть ЛВ какого-то усилия  $S$  определяется уравнением  $y=f(x)$ . По ее графику можно определять усилие  $S$  от произвольной нагрузки.

**а) Действие сосредоточенной силы** (рис. 6.7 а). Если система упругая, то внутреннее усилие прямо пропорционально нагрузке. Поэтому  $S=Py$ . Когда же действуют несколько сил  $P_i$ , то внутреннее усилие определится по принципу суперпозиции:

$$S = \sum P_i y_i.$$

б) Действие распределенной нагрузки (рис. 6.7 б). Если рассматривать элементарную силу  $q(x)dx$  как сосредоточенную силу, то

$$S = \int_a^b q(x) y dx.$$

Когда же распределенная нагрузка постоянна, т.е.  $q(x) = q = const$ , то

$$S = q \int_a^b y dx = q \omega.$$

Здесь  $\omega$  – площадь ЛВ в области действия распределенной нагрузки.

Если на сооружение действует несколько сил и распределенных нагрузок, по принципу суперпозиции получаем

$$S = \sum P_i y_i + \sum q_j \omega_j.$$

### В о п р о с ы

1. Что такое линия влияния и чем она отличается от эпюры?
2. Как выглядят линии влияния опорных реакций консольной балки?
3. Как получить общий вид линии влияния кинематическим методом?
4. Чем отличается ЛВ при узловой передаче нагрузки?
5. Как по линии влияния определяется усилие от постоянной нагрузки?

### Л е к ц и я 7

## РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ (продолжение)

### 6. Определение невыгоднейшего положения нагрузки

При расчете сооружений на подвижную нагрузку часто требуется определять наибольшее значение внутреннего усилия, которое достигается в некотором положении этой нагрузки, называемом **невыгоднейшим (критическим)** положением. Однако решение такой задачи связано с поиском экстремума функции от многих параметров. Поэтому рассмотрим лишь достаточно простой случай движения связанных сосредоточенных грузов (рис. 7.1 а), когда ЛВ усилия имеет вид треугольника (рис. 7.1 б).

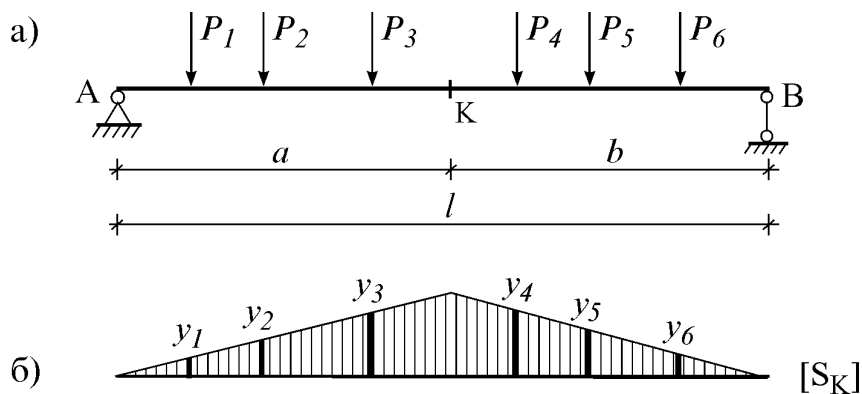


Рис. 7.1

Невыгоднейшее положение такой нагрузки определяется поочередной подстановкой сил в сечение  $K$  и проверкой выполнения двух неравенств

$$\boxed{\times} ; \quad R_{лев} / a \leq (P_{кр} + R_{пр}) / b.$$

Здесь  $R_{лев}$  и  $R_{пр}$  – равнодействующие сил, расположенных левее и правее от сечения  $K$ ,  $P_{кр}$  – критическая сила, установленная в сечении  $K$  (в вершину ЛВ).

## 7. Понятие о матрице влияния

Матричная форма представления данных является эффективной на разных этапах расчета сооружений. Так, при расчете на многовариантное воздействие нагрузки, полезно вводить матрицу влияния, элементами которой являются ординаты линий влияния. Матрица влияния позволяет определять внутренние силы сразу в нескольких сечениях.

Например, для построения матрицы влияния изгибающих моментов балки, имеющей  $n$  сечений (рис. 7.2 а), необходимо иметь  $n$  линий влияния моментов  $[M_1]$ ,  $[M_2]$ , ...,  $[M_n]$  с известными ординатами  $y_{ij}$  (рис. 7.2 б, в, г). Здесь  $i$  – номер ЛВ,  $j$  – номер сечения.

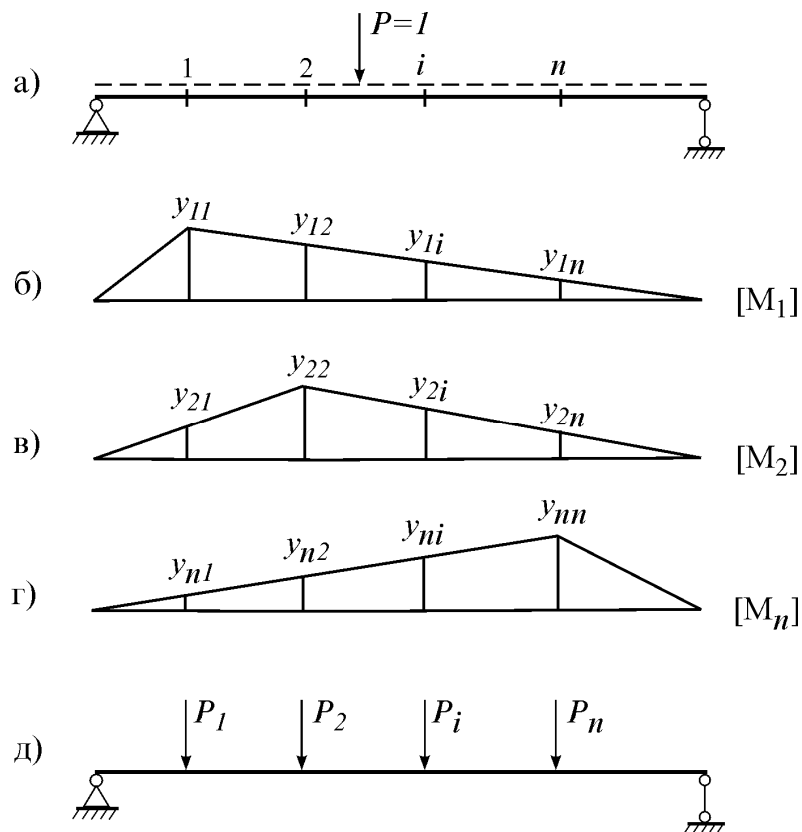


Рис. 7.2

Объединяя ординаты в единую матрицу, получаем матрицу влияния

$$\mathbf{L}_M = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix}.$$

Она позволяет определять моменты во всех сечениях балки по формуле

$$\{M_1 \ M_2 \ \dots \ M_n\} = L_M \mathbf{P},$$

где  $\mathbf{P} = \{P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n\}$  – вектор действующих на балку  $n$  сил  $P_1, P_2, \dots, P_n$  (рис. 7.2 д).

## 8. Построение ЛВ усилий фермы

Рассмотрим ферму (рис. 7.3 а). При воздействии только вертикальной нагрузки, ее опорные реакции будут такими же как у вспомогательной балки (рис. 7.3 б). Поэтому ЛВ опорных реакций фермы будут аналогичны ЛВ балки (рис. 7.3 в, г).

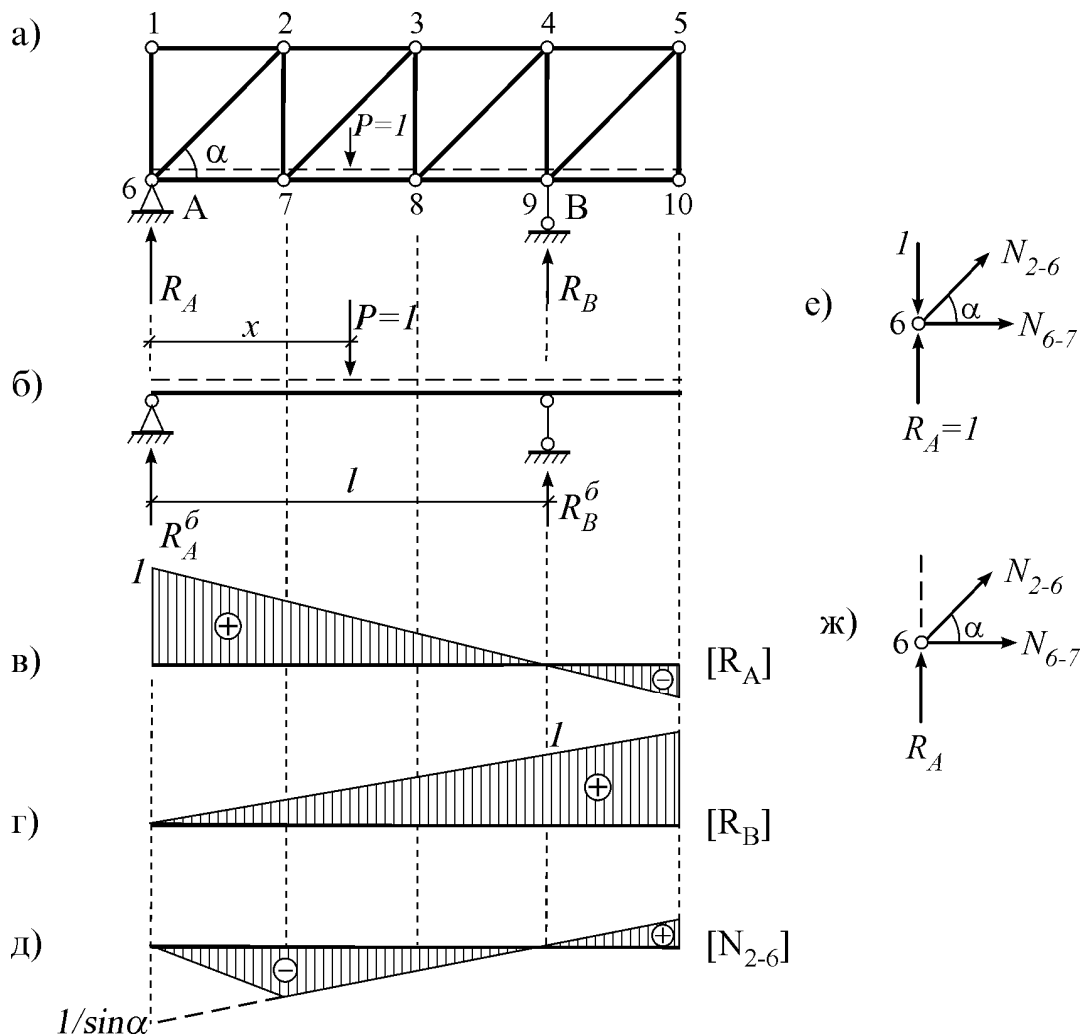


Рис. 7.3

При построении ЛВ продольных усилий фермы воспользуемся методами вырезания узлов и сквозных сечений.

### а) Использование метода вырезания узлов

Для построения ЛВ  $N_{2-6}$  вначале рассмотрим узел 1. Так как к нему силы не приложены, то по признаку 1 (стр. 25)  $N_{1-6}=0$ .

После этого вырежем узел 6 фермы. Здесь могут быть два случая:

1) когда единичная сила  $P=1$  находится в этом узле (рис. 7.3 е), то

$$\Sigma Y = N_{2-6} \sin \alpha + 1 - 1 = 0. \text{ Отсюда } N_{2-6} = 0.$$

2) когда единичная сила  $P=1$  находится вне этого узла (рис. 7.3 ж), то

$$\Sigma Y = N_{2-6} \sin \alpha + R_A = 0. \text{ Отсюда } N_{2-6} = -\frac{1}{\sin \alpha} \cdot R_A.$$

Тогда, используя ЛВ опорной реакции  $R_A$ , можно построить ЛВ усилия  $N_{2-6}$  (рис. 7.3 д).

### б) Использование метода сквозных сечений

Поперек фермы проведем сквозное сечение I-I (рис. 7.4 а) и получим независимые левые и правые части. Единичная сила  $P=1$  может находиться в обеих частях фермы.

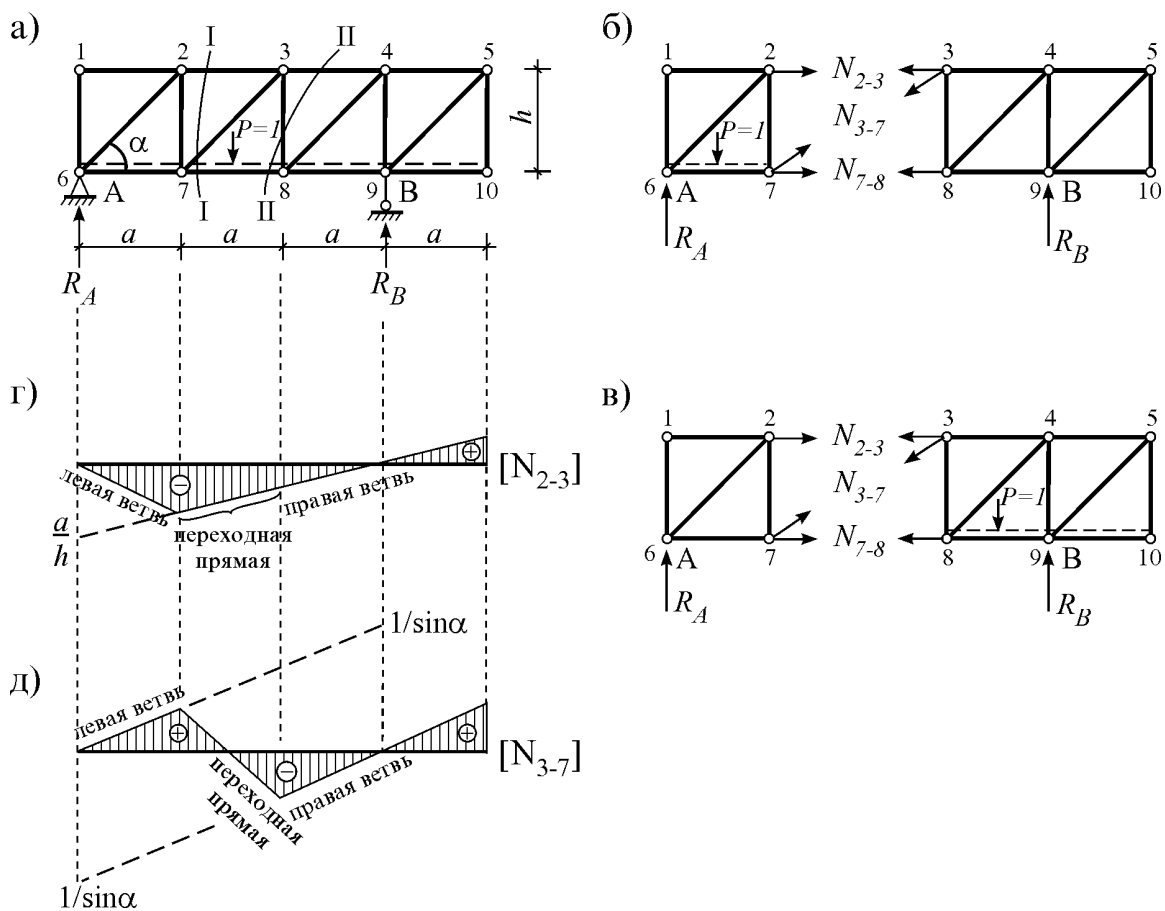


Рис. 7.4

1) Единичная сила левее сечения (рис. 7.4 б):

$$\Sigma M_7^{np} = N_{2-3} h + R_B 2a = 0. \quad \text{Отсюда } N_{2-3} = -2 \frac{a}{h} R_B;$$

$$\Sigma Y^{np} = -N_{3-7} \sin \alpha + R_B = 0. \quad \text{Отсюда } N_{3-7} = \frac{1}{\sin \alpha} R_B.$$

2) Единичная сила правее сечения (рис. 7.4 в):

$$\Sigma M_7^{лев} = -N_{2-3} h - R_A a = 0. \quad \text{Отсюда } N_{2-3} = -\frac{a}{h} R_A;$$

$$\Sigma Y^{лев} = N_{3-7} \sin \alpha + R_A = 0. \quad \text{Отсюда } N_{3-7} = -\frac{1}{\sin \alpha} R_A.$$

В первом случае определяются ординаты ЛВ этих усилий между узлами 6-7, т.е. определяются их левые ветви, а во втором случае определяются ординаты обоих ЛВ между узлами 8-10, т.е. правые ветви ЛВ. Соединив точки между узлами 7-8, получаем переходную прямую и окончательный вид ЛВ (рис. 7.4 г, д).

Как видно из этих примеров, у ЛВ продольных усилий фермы есть следующие свойства: *ветви ЛВ пересекаются под моментной точкой; если же моментной точки нет, ветви ЛВ параллельны.*

## В о п р о с ы

1. Что такое невыгоднейшее положение нагрузки?
2. Что такое матрица влияния и для чего она применяется?
3. Какие способы используются при построении ЛВ усилий фермы?

## Л е к ц и я 8

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

#### 1. Понятие о перемещениях

При воздействии нагрузки, температуры и других факторов сооружение меняет свою форму, а его точки получают перемещения.

Перемещение – векторная величина. Перемещение любой точки на плоскости можно задать через его модуль и направление. Например, вектор перемещения  $\overline{AA'} = \vec{\Delta}_A$  точки  $A$  рамы в точку  $A'$  (рис. 8.1 а) определяется через его модуль  $\Delta_A$  и угол (направление)  $\varphi_A$  (рис. 8.1 б). А эти величины можно определять через горизонтальную и вертикальную составляющие  $\Delta x_A$  и  $\Delta y_A$  вектора перемещения  $\vec{\Delta}_A$ :

$$\Delta_A = \sqrt{(\Delta x_A)^2 + (\Delta y_A)^2}, \quad \varphi_A = \arctg \frac{\Delta y_A}{\Delta x_A}.$$

Поступательные перемещения  $\Delta_A$ ,  $\Delta x_A$ ,  $\Delta y_A$  будем называть **линейными перемещениями**, а  $\varphi_A$  – **угловым перемещением**.

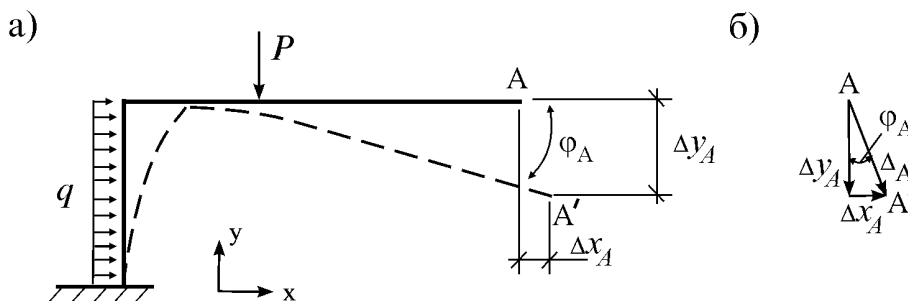


Рис. 8.1

Методы определения перемещений основаны на определении работ внешних и внутренних сил. В механике рассматриваются два вида таких работ – действительные и возможные работы.

## 2. Действительные работы внешних и внутренних сил. Потенциальная энергия

**Действительным перемещением** называется перемещение, вызванное силой по направлению ее действия (рис. 8.2 а). В упругих системах перемещение  $\Delta$  прямо пропорционально действующей силе и выполняется закон Гука

$$\Delta = \delta P,$$

где коэффициент  $\delta$  называется **податливостью**.

Эта зависимость представляется в виде диаграммы  $\Delta - P$  (рис. 8.2 б).

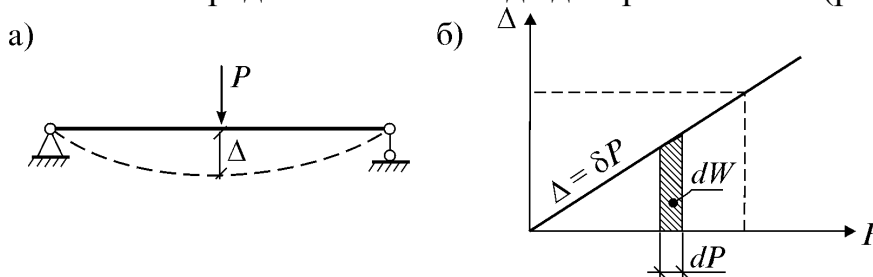


Рис. 8.2

**Действительной работой** называется работа силы на ее действительном перемещении.

Действительную работу силы  $P$  можно найти по рис. 8.2 б:

$$W = \int_0^P dW = \frac{1}{2} P \Delta.$$

Эта формула определяет **теорему Клапейрона**: сила, действующая на упругую систему, совершает работу, равную половине произведения силы на ее перемещение.

Используя закон Гука, получаем

$$W = \frac{1}{2} \delta P^2 \geq 0.$$

Из формулы следует, что **внешняя сила совершает положительную работу**.

Если на систему действуют несколько сил, по принципу суперпозиции

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_{Pk}.$$

В идеально-упругой системе предполагается, что работа внешних сил  $W$  полностью переходит в потенциальную энергию деформации  $U$ :

$$W = U.$$

Если убрать внешние силы, упругая система возвратится в исходное положение. Эту работу совершают внутренние силы. Так как работа внешних сил  $W$  всегда положительна, то работа внутренних сил  $V$  будет отрицательной:

$$W = -V.$$

Теперь вычислим работу внутренних сил стержневой системы.

**а) Работа продольной силы  $N$**

Пара продольных сил  $N$ , действующих на элемент  $dx$ , приводит к его чистому растяжению (рис. 8.3 а).

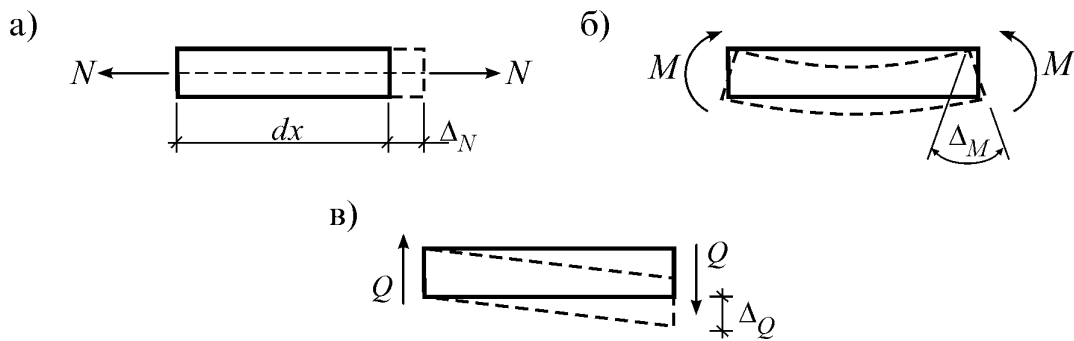


Рис. 8.3

По теореме Клапейрона эти силы на общей деформации элемента (действительном перемещении)  $\Delta_N$  совершают действительную работу

$$-dV_N = \frac{1}{2} N \cdot \Delta_N.$$

С учетом закона Гука при растяжении  $\Delta_N = \frac{Ndx}{EF}$ , получим

$$-dV_N = \frac{N^2}{2EF} dx,$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $F$  – площадь сечения,  $EF$  – жесткость на растяжение.

**б) Работа изгибающего момента  $M$**

Пара изгибающих моментов  $M$ , действующих на элемент  $dx$ , приводит к его чистому изгибу (рис. 8.3 б). На общей деформации  $\Delta_M$  эти моменты совершают работу

$$-dV_M = \frac{1}{2} M \cdot \Delta_M.$$

По закону Гука при изгибе  $\Delta_M = \frac{Mdx}{EI}$ . Поэтому

$$-dV_M = \frac{M^2}{2EI} dx,$$

где  $I$  – момент инерции сечения,  $EI$  – жесткость на изгиб.

**в) Работа поперечной силы  $Q$**

Действие пары поперечных сил  $Q$  приводит к чистому сдвигу элемента  $dx$  (рис. 8.3 в). На общей деформации  $\Delta_Q$  они совершают работу:

$$-dV_Q = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta_Q.$$

По закону Гука  $\Delta_Q = \mu \frac{Qdx}{GF}$ . Поэтому

$$-dV_Q = \mu \frac{Q^2}{2GF} dx,$$

где  $\mu$  – коэффициент формы сечения,  $GF$  – жесткость на сдвиг.

Теперь воспользуемся принципом суперпозиции:

$$-dV = -(dV_M + dV_Q + dV_N) = \frac{1}{2} \left( \frac{M^2}{EI} + \mu \frac{Q^2}{GF} + \frac{N^2}{EF} \right) dx.$$

Если проинтегрировать это выражение по всей длине элемента  $l$  и учесть наличие в системе  $n$  стержней, получим выражение потенциальной энергии всей стержневой системы:

$$U = -V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left( \frac{M^2}{EI} + \mu \frac{Q^2}{GF} + \frac{N^2}{EF} \right) dx.$$

### 3. Возможные перемещения.

#### Возможные работы внешних и внутренних сил

Малое перемещение, допускаемое связями системы, называется **возможным перемещением**. Причиной возможного перемещения могут быть другие силы, изменение температуры, осадки опор и др.

Работа силы на ее возможном перемещении называется **возможной работой**. Возможное перемещение обозначим  $\Delta_{ij}$ , а возможную работу  $W_{ij}$  (здесь  $i$  означает направление, а  $j$  – причину).

Например, если в некоторой точке балки действует сила  $P_i$ , а затем в другой точке начнет действовать другая сила  $P_j$ , то балка в точке действия силы  $P_i$  получит возможное перемещение  $\Delta_{ij}$  (рис. 8.4 а). Так как в это время сила  $P_i$  остается постоянной, совершаемая ею возможная работа определяется площадью прямоугольника (рис. 8.4 б):

$$W_{ij} = P_i \Delta_{ij}.$$

Таким образом, *возможная работа равна произведению силы на возможное перемещение*.

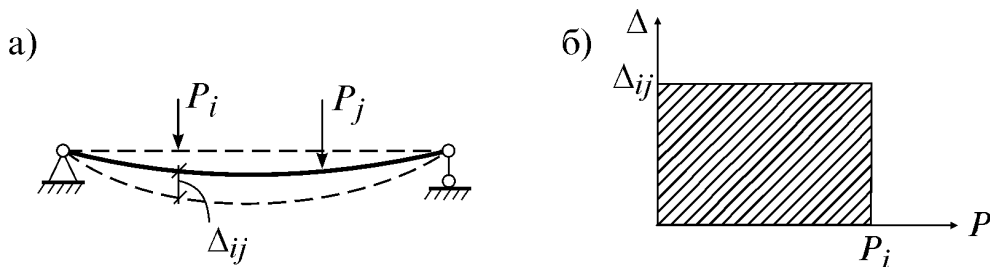


Рис. 8.4

При определении возможной работы следует рассматривать два состояния системы: в одном из них действуют заданные, а во втором – возможные силы.

**Теорема Бетти.** *Возможная работа сил  $i$ -го состояния на перемещениях  $j$ -го состояния равна возможной работе сил  $j$ -го состояния на перемещениях  $i$ -го состояния.*

**Доказательство.** Пусть на систему воздействуют силы  $P_i$  и  $P_j$ . Приложим их в разной последовательности и рассмотрим два состояния:

1) прикладывается сила  $P_i$ , затем сила  $P_j$  (рис. 8.5 а);

2) прикладывается сила  $P_j$ , затем сила  $P_i$  (рис. 8.5 б).

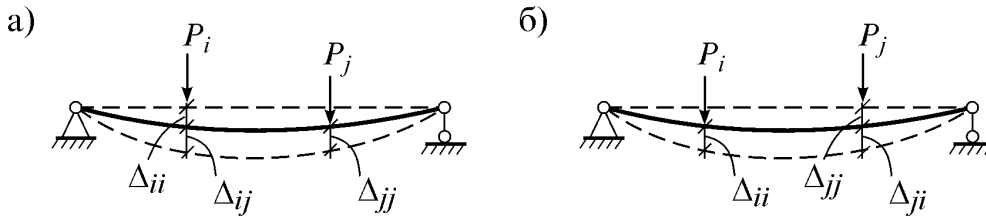


Рис. 8.5

В этих состояниях силы на действительных перемещениях совершают действительные, а на возможных перемещениях – возможные работы. Выражения работ в обоих состояниях будут:

$$W_{ij} = \frac{1}{2} P_i \Delta_{ii} + \frac{1}{2} P_j \Delta_{jj} + P_i \Delta_{ij}; \quad W_{ji} = \frac{1}{2} P_j \Delta_{jj} + \frac{1}{2} P_i \Delta_{ii} + P_j \Delta_{ji}.$$

На основании принципа суперпозиции, результат воздействия этих сил не зависит от порядка их приложения. Следовательно, обе работы равны:  $W_{ij} = W_{ji}$ . Отсюда получаем

$$P_i \Delta_{ij} = P_j \Delta_{ji}.$$

Теорема доказана. Ее часто называют **теоремой о взаимности работ**.

Теперь определим возможную работу внутренних сил. Для этого рассмотрим два состояния системы:

- 1) действует сила  $P_i$  и вызывает внутренние усилия  $M_i$ ,  $Q_i$ ,  $N_i$ ;
- 2) действует сила  $P_j$ , которая в пределах малого элемента  $dx$  вызывает возможные деформации

$$\Delta_{M_j} = \frac{M_j}{EI} dx, \quad \Delta_{Q_j} = \mu \frac{Q_j}{GF} dx, \quad \Delta_{N_j} = \frac{N_j}{EF} dx.$$

Внутренние усилия первого состояния на деформациях (возможных перемещениях) второго состояния совершают возможную работу

$$-dV_{ij} = M_i \Delta_{M_j} + Q_i \Delta_{Q_j} + N_i \Delta_{N_j} = \frac{M_i M_j}{EI} dx + \mu \frac{Q_i Q_j}{GF} dx + \frac{N_i N_j}{EF} dx.$$

Если проинтегрировать это выражение по длине элемента  $l$  и учесть наличие в системе  $n$  стержней, получим формулу возможной работы внутренних сил:

$$-V_{ij} = \sum_{\kappa=1}^n \int_0^l \left( \frac{M_i M_j}{EI} + \mu \frac{Q_i Q_j}{GF} + \frac{N_i N_j}{EF} \right) dx.$$

## В о п р о с ы

1. Чему равняется действительная работа плоской стержневой системы?
2. В чем состоит теорема Клапейрона?
3. Как определяется потенциальная энергия стержневой системы?
4. Что такое возможное перемещение?
5. Как формулируется теорема Бетти?
6. Какие состояния рассматриваются при определении перемещений?
7. Как определяются перемещения в рамах и фермах?

## Лекция 9

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ (продолжение)

#### 4. Интеграл Мора

Рассмотрим два состояния стержневой системы:

1) **грузовое состояние** (рис. 9.1 а), в котором действующая нагрузка вызывает внутренние усилия  $M_P, Q_P, N_P$ ;

2) **единичное состояние** (рис. 9.1 б), в котором действующая единичная сила  $P=1$  вызывает внутренние усилия  $\bar{M}, \bar{Q}, \bar{N}$ .

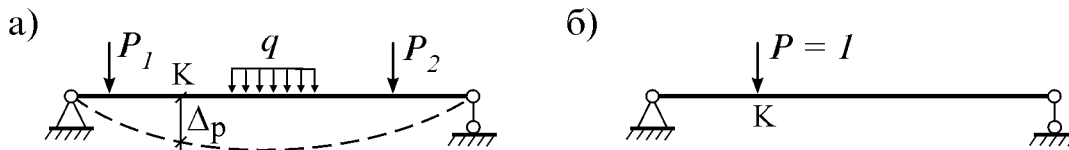


Рис. 9.1

Внутренние силы грузового состояния на деформациях единичного состояния  $\frac{\bar{M}}{EI} dx, \frac{\bar{Q}}{EI} dx, \frac{\bar{N}}{EI} dx$  совершают возможную работу

$$-V_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left( \frac{M_P \bar{M}}{EI} + \mu \frac{Q_P \bar{Q}}{GF} + \frac{N_P \bar{N}}{EF} \right) dx.$$

А единичная сила  $P=1$  единичного состояния на перемещении грузового состояния  $\Delta_P$  совершает возможную работу

$$W_{ij} = 1 \cdot \Delta_P = \Delta_P.$$

По известному из теоретической механики принципу возможных перемещений, в упругих системах эти работы должны быть равными, т.е.  $W_{ij} = -V_{ij}$ . Значит, должны быть равны и правые части этих выражений:

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left( \frac{M_P \bar{M}}{EI} + \mu \frac{Q_P \bar{Q}}{GF} + \frac{N_P \bar{N}}{EF} \right) dx.$$

Эта формула называется **формулой Мора** и используется для определения перемещений стержневой системы от силовой нагрузки.

#### 5. Частные случаи применения формулы Мора

Во многих случаях вместо полной формулы Мора можно использовать ее сокращенные варианты. Это позволяет, без допущения больших погрешностей, существенно сократить объем вычислений.

1. **В балках** (рис. 9.2 а) возможны три случая:

– если  $\frac{l}{h} > 8$ , в формуле оставляется только слагаемое с моментами:

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{M_P \bar{M}}{EI} dx;$$

– если  $5 \leq \frac{l}{h} \leq 8$ , учитываются и поперечные силы:

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left( \frac{M_P \bar{M}}{EI} + \mu \frac{Q_P \bar{Q}}{GF} \right) dx;$$

– если  $\frac{l}{h} < 5$ , формула Мора дает большие погрешности. В этом случае перемещения следует определять методами теории упругости.

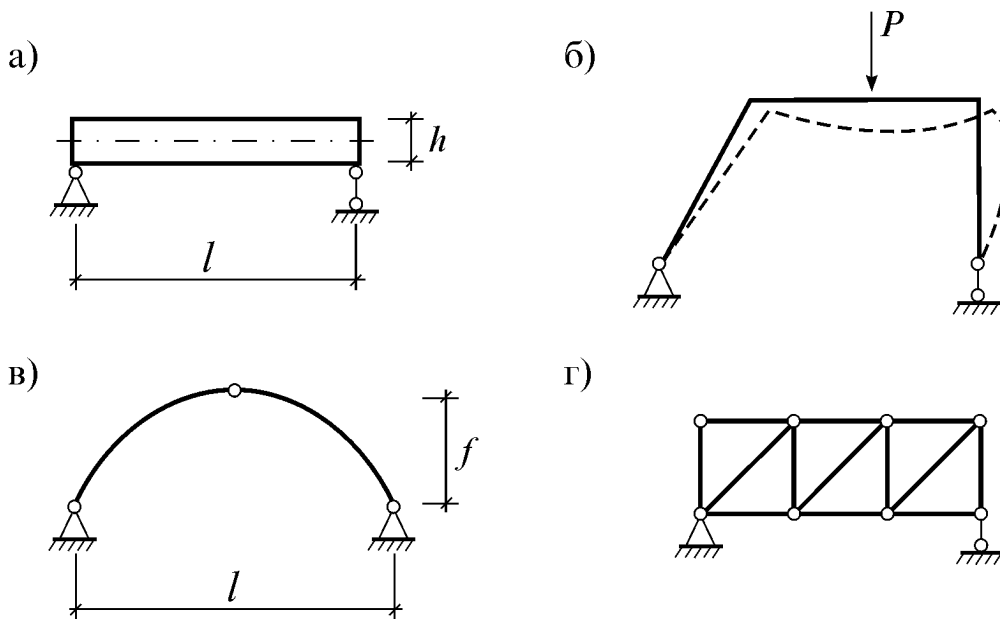


Рис. 9.2

2. **В рамах** (рис. 9.2 б) элементы в основном работают только на изгиб. Поэтому в формуле Мора учитываются только моменты.

В высоких рамах учитывается и продольная сила:

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left( \frac{M_P \bar{M}}{EI} + \frac{N_P \bar{N}}{EF} \right) dx .$$

3. **В арках** (рис. 9.2 в) необходимо учитывать соотношение между основными размерами арки – длиной пролета  $l$  и стрелой подъема  $f$ :

- 1) если  $\frac{l}{f} \leq 5$  (крутая арка), учитываются только моменты;
- 2) если  $\frac{l}{f} > 5$  (пологая арка), учитываются моменты и продольные силы.

4. **В фермах** (рис. 9.2 г) возникают только продольные силы. Поэтому

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{N_P \bar{N}}{EF} dx = \sum_{k=1}^n \frac{N_P \bar{N}}{EF} \int_0^{l_k} dx = \sum_{k=1}^n \frac{N_{Pk} \bar{N}_k}{EF_k} l_k .$$

## 6. Определение перемещений от температуры

Изменение температуры по сравнению с некоторой начальной приводит к тому, что элементы сооружения деформируются и ее точки получают перемещения. Для определения этих перемещений будем пользоваться принципом возможных перемещений.

Рассмотрим простейший элемент – шарнирную балку, температуры верхней и нижней волокон которой изменяются на  $t_1$  и  $t_2$  (рис. 9.3 а). Возникающее при этом температурное перемещение  $\Delta_t$  по направлению единичной силы  $P=1$  совершает возможную работу

$$W_{ij} = 1 \cdot \Delta_t = \Delta_t.$$

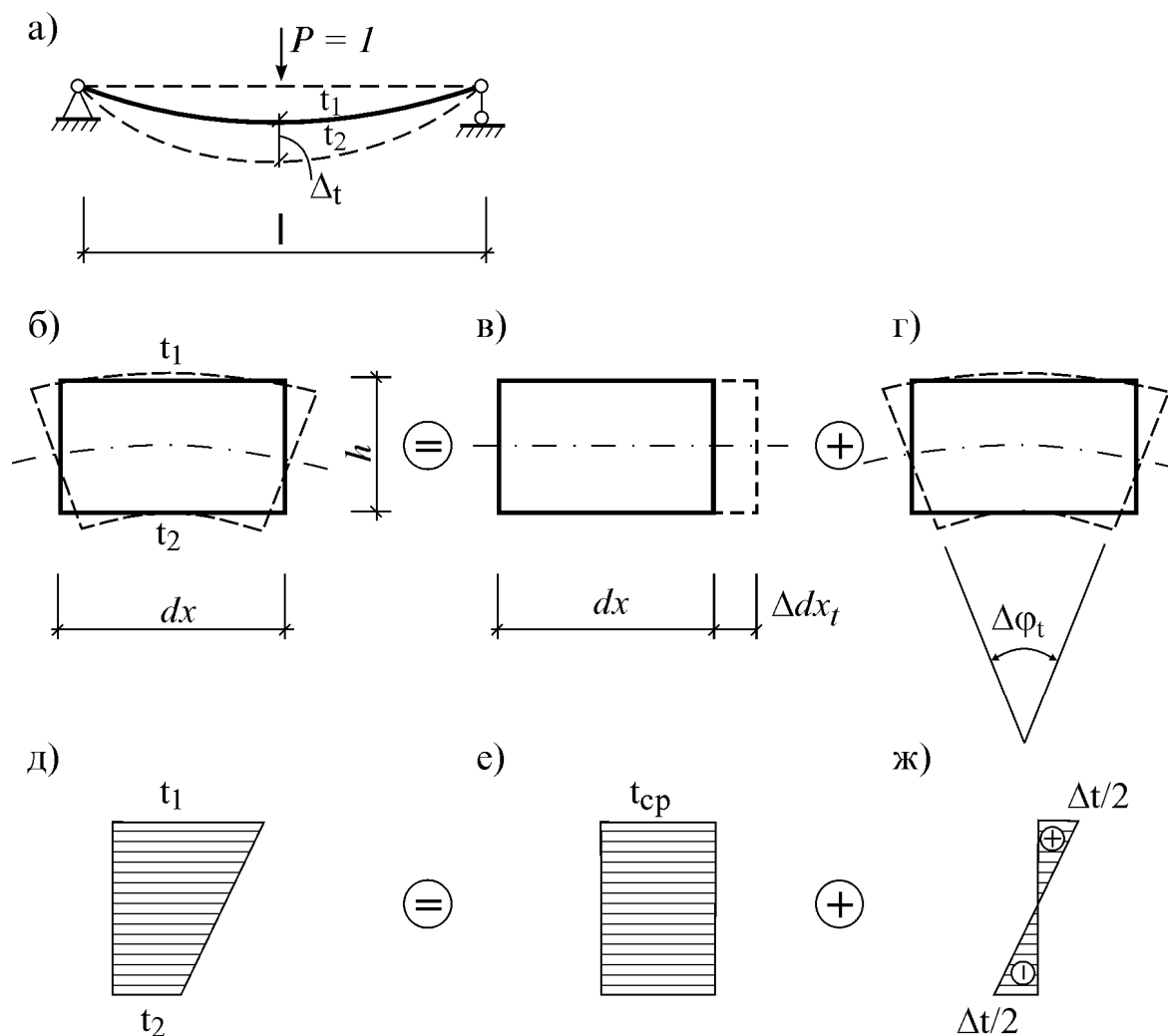


Рис. 9.3

Для определения возможной работы внутренних сил рассмотрим малый элемент длиной  $dx$  (рис. 9.3 б), предполагая, что температура внутри него изменяется по линейному закону (рис. 9.3 д).

Представим это температурное состояние как сумму двух состояний:

1) равномерный нагрев (рис. 9.3 в), когда оба волокна нагреваются на среднюю температуру  $t_{cp} = (t_1 + t_2)/2$  (рис. 9.3 е);

2) неравномерный нагрев (рис. 9.3 г), когда одно (верхнее) волокно нагревается на температуру  $\Delta t/2$ , а второе (нижнее) охлаждается на эту же температуру (рис. 9.3 ж), где  $\Delta t = t_1 - t_2$  – разность температур, а  $t_1 > t_2$ .

В результате этого деформация элемента  $dx$  может быть представлена как сумма двух деформаций:

- 1) чистого растяжения от нагрева на  $t_{cp}$ ;
- 2) чистого изгиба от одновременного нагрева и охлаждения верхнего и нижнего волокон на температуру  $\Delta t/2$ .

Первая деформация приводит к растяжению элемента  $dx$  на величину  $\Delta dx_t = \alpha t_{cp} dx$ , а вторая – повороту концевых сечений элемента на общий угол  $\Delta \varphi_t = \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} dx = \alpha \frac{\Delta t}{h} dx$ . Здесь  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения материала,  $h$  – высота сечения (рис. 9.3 б).

Усилия, возникающие в единичном состоянии  $\bar{M}, \bar{Q}, \bar{N}$ , на этих деформациях  $\Delta dx_t$  и  $\Delta \varphi_t$  совершат возможную работу:

$$-V_{ij} = \int_0^l (\bar{N} \cdot \Delta dx_t + \bar{M} \cdot \Delta \varphi_t) = \int_0^l \left( \bar{N} \alpha t_{cp} dx + \bar{M} \alpha \frac{\Delta t}{h} dx \right) = \alpha \left( t_{cp} \int_0^l \bar{N} dx + \frac{\Delta t}{h} \int_0^l \bar{M} dx \right).$$

Величины интегралов в этом выражении равняются площадям эпюр  $\bar{N}$  и  $\bar{M}$  в пределах данного элемента  $\Omega_{\bar{N}}$  и  $\Omega_{\bar{M}}$ . Поэтому

$$-V_{ij} = \alpha \left( t_{cp} \Omega_{\bar{N}} + \frac{\Delta t}{h} \Omega_{\bar{M}} \right).$$

На основании принципа возможных перемещений, возможные работы внешних и внутренних сил равны. Отсюда получаем

$$\Delta_t = \alpha \left( t_{cp} \Omega_{\bar{N}} + \frac{\Delta t}{h} \Omega_{\bar{M}} \right).$$

Если в сооружении имеется  $n$  стержней (или участков), полное перемещение от воздействия температуры на всю систему будет равно сумме перемещений от вклада каждого стержня:

$$\Delta_t = \alpha \sum_{k=1}^n \left( t_{cp,k} \Omega_{\bar{N}_k} + \frac{\Delta t_k}{h_k} \Omega_{\bar{M}_k} \right).$$

Каждое слагаемое в этой формуле берется со знаком «+» или «-» в зависимости от совпадения деформаций единичного и температурного состояний. Например, если и в единичном, и в температурном состояниях стержень растягивается, первое слагаемое берется со знаком «+». Если в одном состоянии стержень растягивается, а в другом сжимается, оно берется со знаком «-». Знак второго слагаемого определяется аналогично. Только в этом случае учитывается совпадение или несовпадение растянутых волокон двух состояний.

## 7. Определение перемещений от смещения опор

При смещении опор статически определимой системы внутренние силы и деформации в ее элементах не возникают, однако точки системы получают некоторые перемещения.

Порядок вычисления таких перемещений изучим на примере рамы, опора которой смещается на величину  $c$  (рис. 9.4 а). При этом точка  $A$  принимает новое положение  $A'$ . Определим вертикальное перемещение этой точки, обозначенное как  $\Delta_c$ .

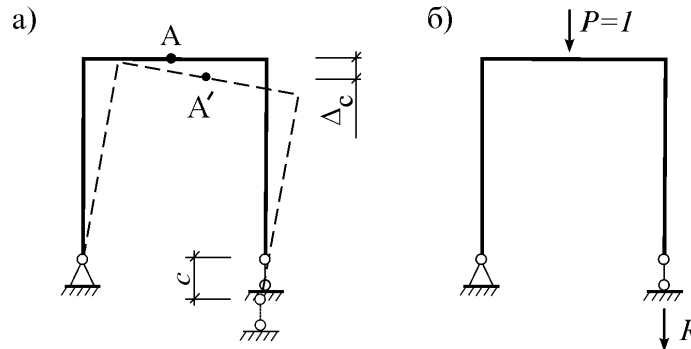


Рис. 9.4

Для этого рассмотрим единичное состояние рамы, приложив в точке  $A$  единичную силу (рис. 9.4 б), и вычислим две возможные работы:

1) работа сил первого состояния на перемещениях второго  $W_{12}=0$  (т.к. в первом состоянии внутренние силы не возникают);

2) работа сил второго состояния на перемещениях первого состояния равна  $W_{21}=I \cdot \boxed{x} + R \cdot c$ .

По теореме Бетти должно быть  $W_{12} = W_{21}$ . Отсюда получаем формулу

$$\boxed{x} = -R \cdot c.$$

Если смещение будет по нескольким направлениям, то по принципу суперпозиции имеем

$$\Delta_c = -\sum_{k=1}^n R_k c_k.$$

Каждое произведение  $R_k c_k$  в этой формуле берется со знаком «+» или «-» в зависимости от совпадения направлений реакции и смещения опоры.

### В о п р о с ы

1. Из каких слагаемых состоит интеграл Мора?
2. Какие слагаемые формулы Мора учитываются при расчете рам?
3. Чем заменяется интеграл Мора при расчете ферм?
4. На какие два состояния разбивается температурное состояние при определении температурных перемещений?
5. Как записывается формула вычисления перемещения от смещения опор?
6. Как учитываются знаки слагаемых в формуле определения перемещения от осадки опор?

## Лекция 10

# РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

### 1. Понятие о статически неопределимых системах

**Статически неопределимой** называется система, внутренние усилия которой нельзя определить только из уравнений статики (равновесия). Статически неопределимые системы (СНС) отличаются от статически определимых рядом свойств:

1. Они надежнее, разрушение некоторых элементов не всегда приводит к разрушению всей системы.
2. Они выдерживают большую нагрузку.
3. У них деформации меньше.
4. Изменение температуры, смещение опор, неточность изготовления элементов вызывают дополнительные усилия.
5. Внутренние усилия зависят от физических и геометрических характеристик элементов.

У статически неопределимых систем есть так называемые «лишние» связи, число которых называется **степенью статической неопределимости**. Степень статической неопределимости простой системы определяется из дискового аналога по следующей формуле:

$$n = -W = 2n_{ш} + n_c + n_{c_0} - 3n_D.$$

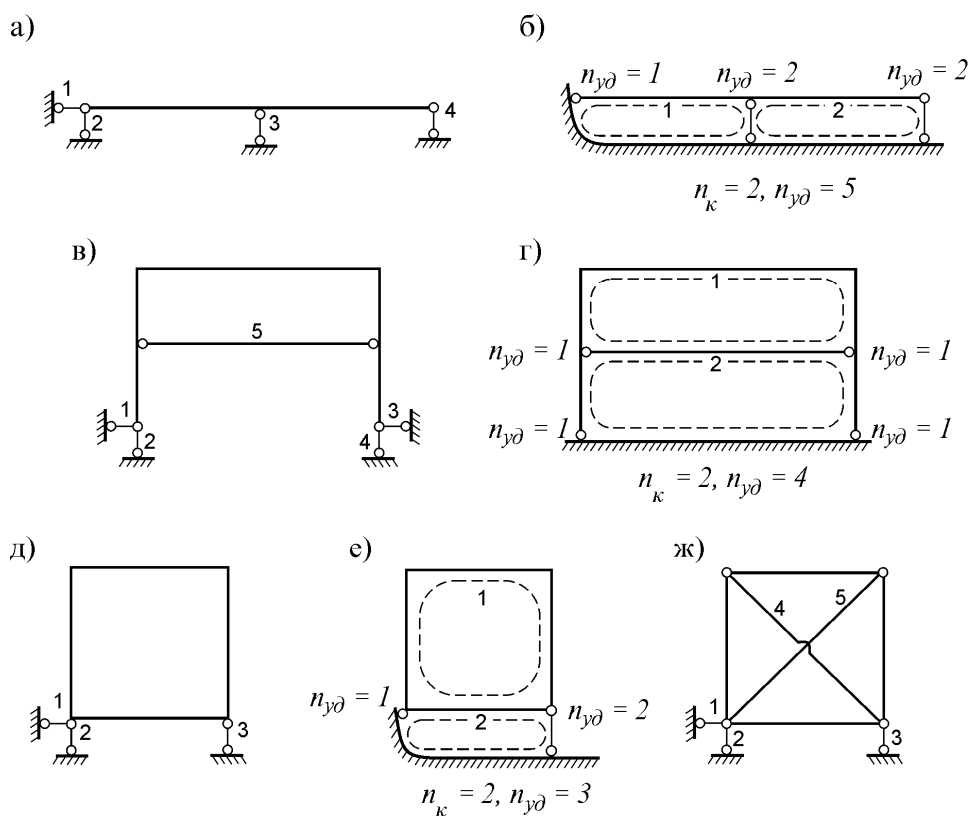


Рис. 10.1

Например, степени статической неопределимости балки (рис. 10.1 а) и рамы (рис. 10.1 в) будут:

$$n=2\cdot 0+0+4-3\cdot 1=1 \text{ и } n=2\cdot 0+1+4-3\cdot 1=2.$$

Использование этой формулы при расчете сложных рам затруднительно. Поэтому можно применить другой подход, вводя два понятия: 1) **замкнутый контур** – замкнутая цепь из элементов и связей системы; 2) **удалённая связь** – связь замкнутого контура, исключенная из жесткого соединения элементов (рис. 10.1 б, г, е).

Степень статической неопределимости сплошного замкнутого контура равняется трем. Поэтому степень статической неопределимости системы из  $n_k$  замкнутых контуров, из которых удалены  $n_{уд}$  связей, будет

$$n=3n_k - n_{уд}.$$

При использовании этой формулы для балки (рис. 10.1 а) и рам (рис. 10.1 в, д) необходимо определить общее число замкнутых контуров  $n_k$  и удаленных связей  $n_{уд}$  (рис. 10.1 б, г, е). Тогда

– для балки:  $n=3\cdot 2-5=1$ ;

– для обеих рам:  $n=3\cdot 2-4=2$ ,  $n=3\cdot 2-4=2$ .

Степень статической неопределимости фермы определяется по формуле

$$n= n_c + n_{c_0} - 2n_y.$$

Например, для фермы (рис. 10.1 ж):  $n=6+3-2\cdot 4=1$ .

## 2. Выбор основной системы

Расчет статически неопределимой системы начинается с превращения ее в статически определимую. Для этого необходимо исключить лишние связи и заменить их реакции неизвестными силами. Полученная система называется **основной системой** (ОС).

Например, у балки (рис. 10.2 а), которую далее будем называть заданной системой (ЗС), степень статической неопределимости  $n=1$ . Если исключить лишнюю связь (правую опору) и обозначить неизвестную реакцию через  $X$ , получим ее ОС (рис. 10.2 б).

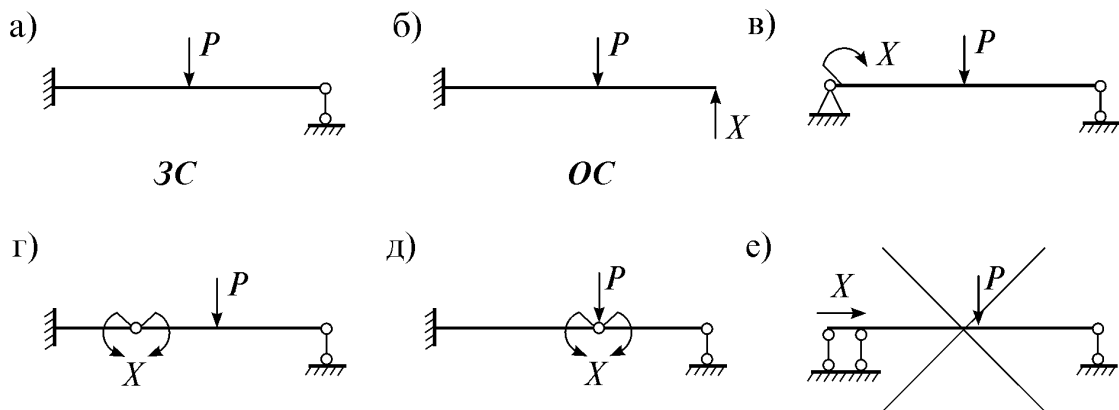


Рис. 10.2

Способов исключения лишних связей очень много (теоретически – бесконечное число). Например, лишнюю связь можно исключать как на рис. 10.2 в-е. Однако одна из этих схем (рис. 10.2 е) геометрически изменяема и для дальнейшего расчета непригодна. Все остальные схемы могут быть приняты за основную систему.

Если воспользоваться известным теоретическим положением о том, что в линейно-упругих системах внешняя нагрузка распределяется единственным образом, то результаты расчетов по различным ОС должны быть одинаковыми. Однако объем вычислений в разных ОС может быть разным. Поэтому из многих вариантов ОС нужно выбирать наиболее рациональную. Например, в нашем примере первый вариант ОС (рис. 10.2 б) предпочтительнее остальных, т.к. в ней эпюры строятся легче.

Поэтому основная система должна быть:

- 1) обязательно геометрически неизменяемой;
- 2) простой для расчета;
- 3) учитывать особенности сооружения и действующей нагрузки.

### 3. Сущность метода сил

В рассматриваемом методе расчета статически неопределимых систем за основные неизвестные принимаются силы (внутренние усилия). Поэтому он и называется *методом сил*.

Изучим метод сил на примере предыдущей балки.

Потребуем, чтобы ее ЗС (рис. 10.2 а) и ОС (рис. 10.2 б) были эквивалентными. Для этого перемещение в направлении исключенной связи должно равняться нулю:

$$\Delta = 0.$$

По принципу суперпозиции, это перемещение равно сумме перемещения  $\Delta_X$  (рис. 10.3 а) от неизвестной реакции  $X$  и перемещения  $\Delta_P$  (рис. 10.3 б) от заданной силы  $P$ . Поэтому

$$\Delta = \Delta_X + \Delta_P = 0.$$

Это уравнение, учитывающее геометрические особенности системы, называется *уравнением совместности деформаций*.

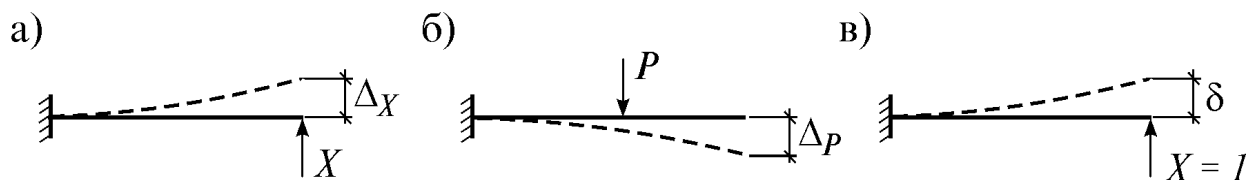


Рис. 10.3

Так как сила  $X$  неизвестна, перемещение  $\Delta_X$  непосредственно определить нельзя. Поэтому рассмотрим единичное состояние (ЕС) основной системы, где действует только единичная сила  $P=1$  (рис. 10.3 в). Перемещение  $\delta$ , возникающее в нем в направлении единичной силы, называется податливостью, и его уже можно определить.



#### 4. Определение коэффициентов канонических уравнений

Коэффициенты при неизвестных  $\delta_{ij}$  и грузовые коэффициенты  $\Delta_{iP}$  канонических уравнений – возможные перемещения от единичных сил и нагрузки. У них есть два индекса. Первый индекс  $i$  указывает на направление, а второй индекс  $j$  (или  $P$ ) – на причину перемещения.

Методику вычисления этих коэффициентов изучим на примере некоторой условной системы (рис. 10.4 а) и ее основной системы (рис. 10.4 б).

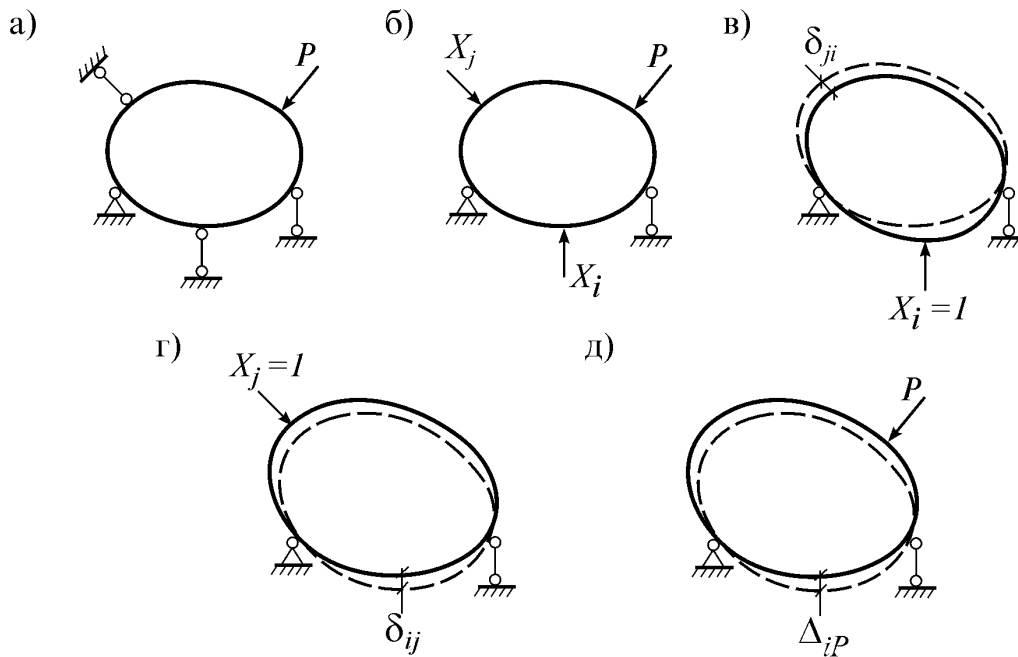


Рис. 10.4

Для определения коэффициентов  $\delta_{ij}$  рассмотрим два состояния ОС:

- 1)  $i$ -ое единичное состояние – воздействие силы  $X_i=1$  (рис. 10.4 в);
- 2)  $j$ -ое единичное состояние – воздействие силы  $X_j=1$  (рис. 10.4 г).

Если в этих состояниях возникают внутренние усилия  $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$  и  $\bar{M}_j, \bar{Q}_j, \bar{N}_j$ , то возможная работа внутренних сил  $i$ -го состояния на деформациях  $j$ -го состояния будет:

$$-V_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left( \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} + \mu \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_j}{GF} + \frac{\bar{N}_i \bar{N}_j}{EF} \right) dx.$$

С другой стороны, возможная работа внешних сил  $i$ -го состояния на перемещениях  $j$ -го состояния равна

$$W_{ij} = 1 \cdot \delta_{ij} = \delta_{ij}.$$

По принципу возможных перемещений  $W_{ij} = -V_{ij}$ . Приравнявая их, получаем формулу для вычисления коэффициентов при неизвестных:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left( \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} + \mu \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_j}{GF} + \frac{\bar{N}_i \bar{N}_j}{EF} \right) dx.$$

**Теорема Максвелла.** Перемещение в  $i$ -ом направлении от единичной силы в  $j$ -ом направлении равно перемещению в  $j$ -ом направлении от единичной силы в  $i$ -ом направлении, т.е.  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ .

**Доказательство.** Возможную работу сил  $i$ -го состояния (рис. 10.4 в) на перемещениях  $j$ -го (рис. 10.4 г) мы уже определили:  $W_{ij} = \delta_{ij}$ . А возможная работа сил  $j$ -го состояния на перемещениях  $i$ -го равна  $W_{ji} = 1 \cdot \delta_{ji} = \delta_{ji}$ . По теореме Бетти  $W_{ij} = W_{ji}$ . Следовательно,  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ .

Эта теорема позволяет уменьшать объем вычислений при нахождении боковых коэффициентов системы канонических уравнений.

Теперь выведем формулу вычисления грузовых коэффициентов.

Вначале определим возможную работу сил  $i$ -го единичного состояния (рис. 10.4 в) на перемещениях грузового состояния (рис. 10.4 д):

$$W_{iP} = 1 \cdot \Delta_{iP} = \Delta_{iP}.$$

С другой стороны, возможная работа внутренних сил  $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$   $i$ -го единичного состояния на деформациях грузового состояния равна

$$-V_{iP} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left( \frac{\bar{M}_i M_P}{EI} + \mu \frac{\bar{Q}_i Q_P}{GF} + \frac{\bar{N}_i N_P}{EF} \right) dx.$$

По принципу возможных перемещений  $W_{iP} = -V_{iP}$ . Приравнявая их, получим формулу вычисления грузовых коэффициентов:

$$\Delta_{iP} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left( \frac{\bar{M}_i M_P}{EI} + \mu \frac{\bar{Q}_i Q_P}{GF} + \frac{\bar{N}_i N_P}{EF} \right) dx.$$

Так как в рамах и балках перемещения определяются в основном изгибными деформациями, то коэффициенты канонических уравнений можно вычислять по сокращенным формулам:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} dx = \boxed{\otimes} \bar{M}_j, \quad \Delta_{iP} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_i M_P}{EI} dx = \bar{M}_i \otimes M_P,$$

где условный знак  $\otimes$  использован для сокращения записи формулы вычисления интеграла Мора и означает условное «произведение» двух эпюр.

## В о п р о с ы

1. Какие отличия имеют статически неопределимые системы от статически определимых систем?
2. Как определяется число лишних связей статически неопределимой системы?
3. Каким требованиям должна удовлетворять основная система?
4. В чем заключается физический смысл канонических уравнений метода сил?
5. Чем отличается вычисление коэффициентов при неизвестных от вычисления грузовых коэффициентов?
6. Какое преимущество дает использование теоремы Максвелла?

## Лекция 11

# РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ (продолжение)

### 5. Проверка правильности коэффициентов

При вычислении коэффициентов системы канонических уравнений возможны ошибки. Поэтому их надо проверять.

Существует три способа проверки коэффициентов.

**1. Построчная проверка** проводится для проверки всех коэффициентов одного уравнения.

Если сложить все коэффициенты при неизвестных  $i$ -го уравнения, то

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \delta_{ij} &= \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in} = \overline{M}_i \otimes \overline{M}_1 + \overline{M}_i \otimes \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_i \otimes \overline{M}_n = \\ &= \overline{M}_i \otimes (\overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n) = \overline{M}_i \otimes \overline{M}_\Sigma = \delta_{i\Sigma}.\end{aligned}$$

Здесь:  $\overline{M}_\Sigma = \sum_{i=1}^n \overline{M}_i = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n$  – суммарная единичная эпюра,  $\delta_{i\Sigma}$

– результат «произведения»  $i$ -ой единичной эпюры на эту эпюру.

Отсюда следует, что *если сумма всех коэффициентов  $i$ -ой строки системы канонических уравнений равна произведению  $i$ -ой единичной эпюры на суммарную единичную эпюру, т.е.*

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} = \overline{M}_i \otimes \overline{M}_\Sigma,$$

*то коэффициенты этой строки вычислены верно.*

**2. Универсальная проверка** используется для одновременной проверки всех коэффициентов системы канонических уравнений. Приведем (без доказательства) только общее правило этой проверки: *если сумма всех коэффициентов системы канонических уравнений равна произведению суммарной единичной эпюры на себя, т.е.*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} = \overline{M}_\Sigma \otimes \overline{M}_\Sigma = \overline{M}_\Sigma^2,$$

*то все коэффициенты системы канонических уравнений вычислены верно.*

**3. Постолбцовая проверка** используется для проверки коэффициентов одного столбца системы канонических уравнений. Приведем правило проверки столбца из грузовых коэффициентов: *если сумма всех грузовых коэффициентов равна произведению суммарной единичной эпюры на грузовую эпюру, т.е.*

$$\sum_{i=1}^n \Delta_{iP} = \overline{M}_\Sigma \otimes M_P,$$

*то грузовые коэффициенты вычислены верно.*

## 6. Определение внутренних усилий

После подсчета и проверки коэффициентов системы канонических уравнений, все они подставляются в уравнения, а потом система уравнений решается относительно неизвестных  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Затем определяются внутренние усилия заданной статически неопределимой системы. Эту задачу можно решать двумя способами:

1) подстановкой найденных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$  в основную систему и определением ее усилий  $M, Q, N$ ;

2) используя эпюры внутренних усилий в единичных состояниях  $\overline{M}_i, \overline{Q}_i, \overline{N}_i$  и в грузовом состоянии  $M_P, Q_P, N_P$ :

$$M = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + \dots + \overline{M}_n X_n + M_P;$$

$$Q = \overline{Q}_1 X_1 + \overline{Q}_2 X_2 + \dots + \overline{Q}_n X_n + Q_P;$$

$$N = \overline{N}_1 X_1 + \overline{N}_2 X_2 + \dots + \overline{N}_n X_n + N_P.$$

При расчете рам и балок обычно используется только первая из этих формул, и по ней строится эпюра изгибающих моментов  $M$ . Эпюра  $Q$  строится по эпюре  $M$  с учетом дифференциальной зависимости, а эпюра  $N$  строится по эпюре  $Q$  способом вырезания узлов.

## 7. Алгоритм метода сил

Порядок расчета рамы методом сил состоит из следующих этапов:

1. Определение степени статической неопределимости.
2. Выбор основной системы.
3. Запись канонических уравнений.
4. Рассмотрение единичных и грузового состояний.
5. Построение единичных и грузовой эпюр.
6. Определение коэффициентов канонических уравнений.
7. Решение системы канонических уравнений.
8. Построение эпюр  $M, Q, N$ .
9. Проверка правильности расчета. Она состоит из двух частей:

1) **статическая проверка** – проверка условий равновесия;

2) **кинематическая проверка** – проверка всех условий  $\overline{M}_i \otimes M = 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ) или общего условия  = 0.

Действительно,

$$\begin{aligned} \overline{M}_i \otimes M &= \overline{M}_i \otimes (\overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + \dots + \overline{M}_n X_n + M_P) = \\ &= \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{in} X_n + \Delta_{iP}. \end{aligned}$$

А это выражение равно нулю, так как является  $i$ -ой строкой системы канонических уравнений. Отсюда следует, что и  $\overline{M}_\Sigma \otimes M = (\overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n) \otimes M = 0$ , поскольку каждый из его сомножителей равняется нулю.

## 8. Определение перемещений

Перемещения статически неопределимых систем можно вычислять по известной формуле Мора. В системах с преобладанием изгибных деформаций (например, в рамах и балках) она имеет вид:

$$\Delta = \sum_{\kappa=1}^n \int \frac{\overline{M} M}{EI} dx = \overline{M} \otimes M.$$

Здесь  $\overline{M}$  и  $M$  – эпюры моментов от единичной силы и нагрузки в заданной статически неопределимой системе. Однако, построение этих эпюр связано с решением трудоемких задач раскрытия статической неопределимости.

Задача упрощается, если одну из этих эпюр строить в основной системе и использовать формулы  $\Delta = M_0 \otimes M$  или  $\Delta = \overline{M} \otimes M_P$ , где  $M_0$  и  $M_P$  – единичная и грузовая эпюры в любой основной системе метода сил.

## 9. Расчет симметричных рам

**Симметричными** называются системы, расчетные схемы которых симметричны относительно некоторой оси.

Расчет любой симметричной рамы (рис. 11.1 а) можно упростить, если воспользоваться ее симметрией и разложить внешнюю нагрузку на симметричную (рис. 11.1 б) и кососимметричную (рис. 11.1 в) нагрузки.

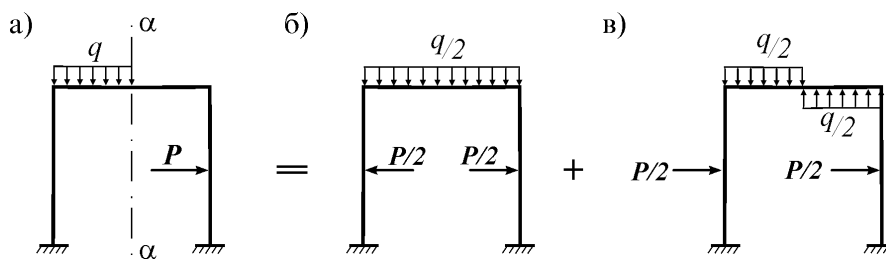


Рис. 11.1

Тогда, хотя раму приходится рассчитывать дважды, выбор основной системы по рис. 11.2 а дает значительный выигрыш в вычислениях.

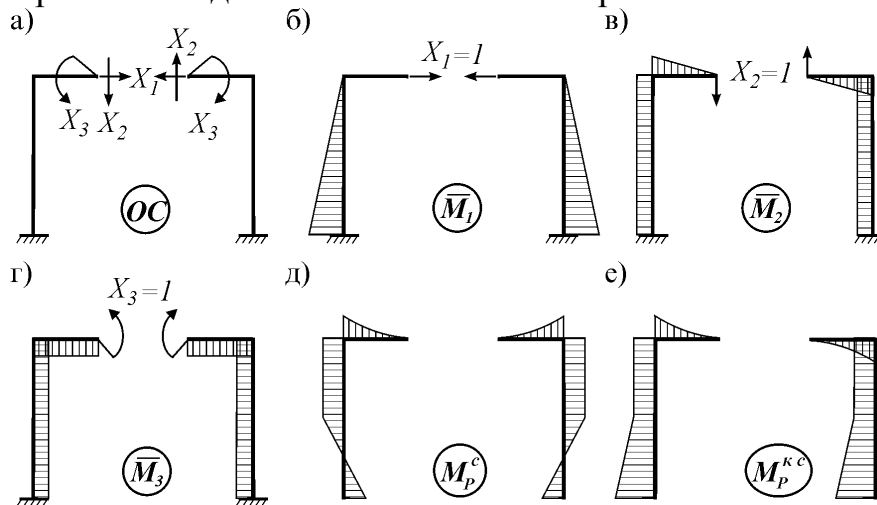


Рис. 11.2

Канонические уравнения метода сил при расчете этой рамы будут:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0,$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0,$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0.$$

Во всех трех единичных состояниях построим эпюры моментов (рис. 11.2 б, в, г). Из них две эпюры (рис. 11.2 б, г) – симметричные, а одна (рис. 11.2 в) – кососимметричная.

Симметричная (*c*) и кососимметричная (*kc*) эпюры взаимно-ортогональны, т.к. их “произведение” равно нулю:

$$\overline{M}_i^c \otimes \overline{M}_j^{kc} = 0.$$

Поэтому следующие коэффициенты системы канонических уравнений обращаются в нуль:  $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$  и  $\delta_{32} = \delta_{23} = 0$ , и система канонических уравнений распадается на две независимые системы:

$$(1) \begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0, \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0; \end{cases} \quad (2) \quad \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0,$$

Значит, некоторые коэффициенты можно не вычислять, а решение большой системы канонических уравнений заменить решением двух систем уравнений значительно меньших размеров.

#### ***а) Расчет на симметричную нагрузку***

Так как эпюра изгибающих моментов при действии симметричной нагрузки также является симметричной (рис. 11.2 д), то она ортогональна кососимметричной эпюре  $\overline{M}_2$ . Следовательно,  $\Delta_{2P} = 0$ . Поэтому, как следует из уравнения (2),  $X_2 = 0$ . Таким образом, при симметричной нагрузке кососимметричная неизвестная равна нулю. В этом случае эпюра изгибающих моментов будет строиться по формуле

$$M^c = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_3 X_3 + M_P^c.$$

Она, как сумма симметричных эпюр, также будет симметричной. В этом случае эпюра  $Q$  будет кососимметричной, а эпюра  $N$  будет симметричной.

#### ***б) Расчет на кососимметричную нагрузку***

В этом случае эпюра изгибающих моментов кососимметрична (рис. 11.2 е) и ортогональна симметричным эпюрам  $\overline{M}_1$  и  $\overline{M}_3$ . Поэтому  $\Delta_{1P} = \Delta_{3P} = 0$ , и, как следует из системы уравнений (1),  $X_1 = X_3 = 0$ . Итак, при кососимметричной нагрузке все симметричные неизвестные равны нулю. Тогда эпюра изгибающих моментов строится по формуле

$$M^{kc} = \overline{M}_2 X_2 + M_P^{kc},$$

она и эпюра  $N$  будут кососимметричными, а эпюра  $Q$  – симметричной.

Окончательная эпюра определяется как сумма двух решений:

$$M = M^c + M^{kc}.$$

## 9. Группировка неизвестных

Если при расчете симметричной рамы (рис. 11.3 а) выбрана обычная основная система (рис. 11.3 б), все коэффициенты канонических уравнений

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0,$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0$$

будут отличаться от нуля.

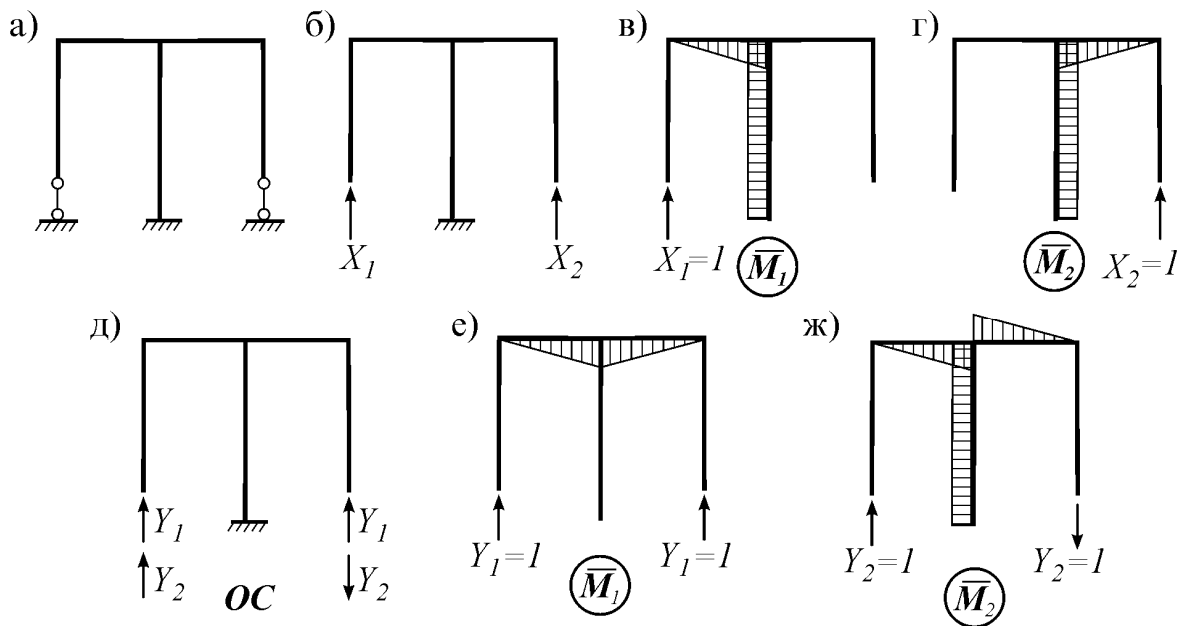


Рис. 11.3

Если же неизвестные группировать по формулам

$$X_1 = Y_1 + Y_2, \quad X_2 = Y_1 - Y_2,$$

что соответствует выбору основной системы на рис. 11.3 д, то единичные эпюры (рис. 11.3 е, ж) будут ортогональными ( $\overline{M}_1 \otimes \overline{M}_2 = 0$ ), а канонические уравнения распадутся на два независимых уравнения:

$$\delta_{11}Y_1 + \Delta_{1P} = 0,$$

$$\delta_{22}Y_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

Итак, при группировке неизвестных некоторые коэффициенты обращаются в нуль, и их вычислять не требуется. В то же время система канонических уравнений распадается на две, что упрощает их решение. Как видим, группировка неизвестных уменьшает объем вычислений.

### Вопросы

1. Какие имеются способы проверки коэффициентов канонических уравнений?
2. Из каких этапов состоит алгоритм метода сил?
3. Какие способы проверки правильности расчета существуют?
4. Как определяются перемещения статически неопределимых систем?
5. Какая система называется симметричной?
6. Какое преимущество дает использование симметрии рамы?
7. В чем состоит группировка неизвестных?

## Лекция 12

# РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Как уже знаем, при расчете статически неопределимых систем методом сил исключаются лишние связи, а за неизвестные принимаются силы (усилия) в этих связях. После их вычисления из канонических уравнений можно определять все остальные усилия, а также перемещения, напряжения и деформации системы.

Напряженно-деформированное состояние (НДС) статически неопределимых систем можно устанавливать и по-другому. В этом случае связи не исключаются, а делается наоборот – в систему вводятся дополнительные связи. За неизвестные принимаются перемещения во введенных связях, которые определяются из канонических уравнений. Поэтому этот метод называется *методом перемещений*.

### 1. Неизвестные метода перемещений

Установим минимальное число узловых перемещений, необходимых для определения напряженно-деформированного состояния статически неопределимой стержневой системы.

С этой целью определим простейшие деформации некоторого стержня  $AB$  стержневой системы, которые он получает при переходе в новое положение  $A'B'$  под воздействием внешней нагрузки (рис. (12.1 а)). Данная задача упрощается, если стержень закрепить по обоим концам и, задавая его концам некоторые независимые перемещения, привести стержень к окончательному деформированному состоянию  $A'B'$ .

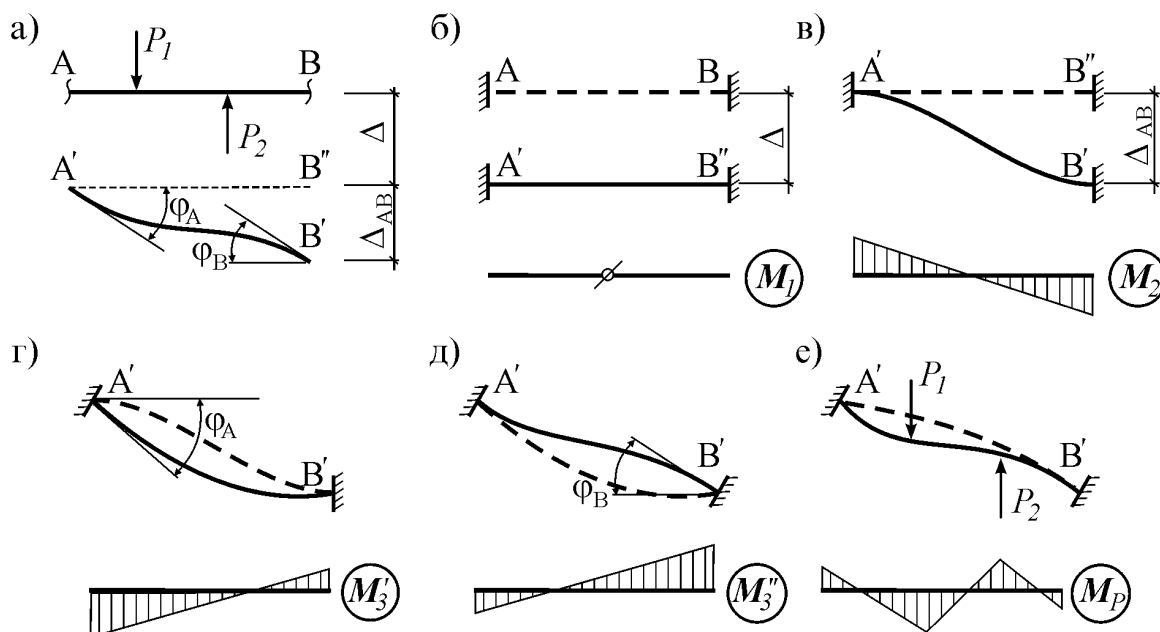


Рис. 12.1

Как следует из рис. 12.1, для этого концам закрепленного стержня  $AB$  необходимо последовательно задавать поступательные (линейные) перемещения  $\Delta$  и  $\Delta_{AB}$  (рис. 12.1 б, в), угловые перемещения  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$  (рис. 12.1 г, д), а внутри стержня приложить внешнюю нагрузку (рис. 12.1 е).

От перемещения  $\Delta$  всего стержня внутренние усилия и деформации не возникают (на рис. 12.1 б  $M_I = 0$ ). Внутренние усилия и деформации от местной нагрузки, действующей в пределах закрепленного стержня  $AB$ , можно найти отдельно. Значит, для определения НДС всего стержня достаточно знать три неизвестных перемещения – два угловых перемещения его концов  $\varphi_A$ ,  $\varphi_B$  и одно поступательное перемещение – взаимное смещение концов стержня  $\Delta_{AB}$ . Поэтому степень кинематической неопределимости отдельного стержня равняется трем.

## 2. Выбор основной системы

Основная система метода перемещений должна быть кинематически определимой. Для ее получения в заданную систему следует ввести столько дополнительных связей, чтобы концы всех стержней были закреплены, т. е. исключены их перемещения. Поэтому общее число вводимых связей будет равно числу неизвестных метода перемещений.

Однако число вводимых связей может быть весьма большим. Например, рама на рис. 12.2 а состоит из пяти стержней. По результатам проведенного выше анализа, степень ее кинематической неопределимости (или число неизвестных метода перемещений) будет  $5 \cdot 3 = 15$ .

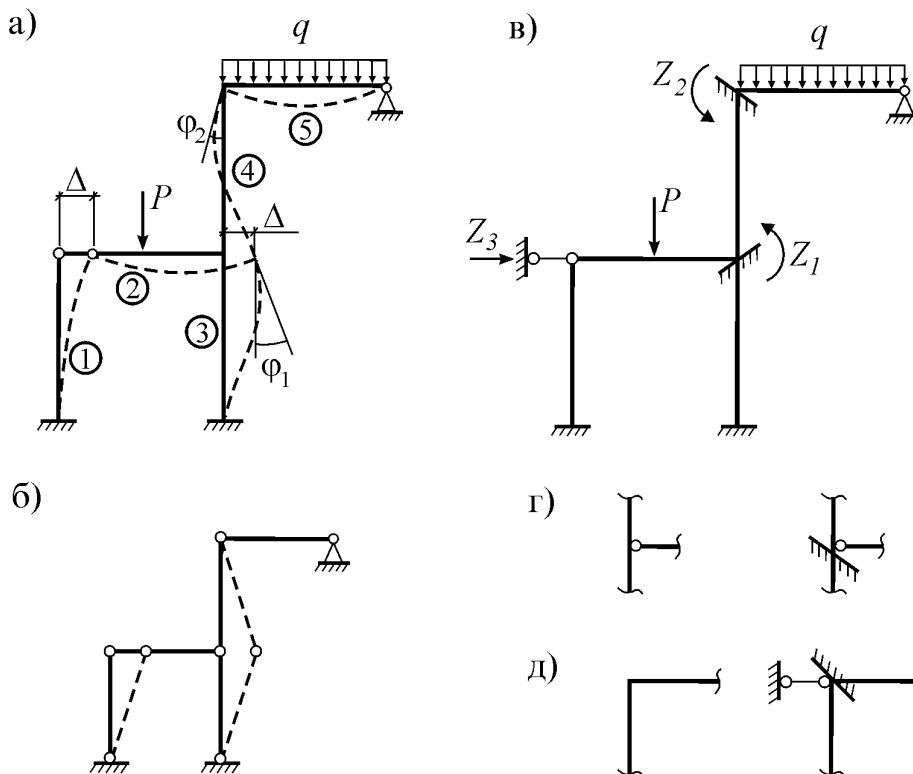


Рис. 12.2

Это число можно уменьшить, если принять следующие **гипотезы**:

- 1) поперечные и продольные деформации стержней малы;
- 2) длина хорды, соединяющей концы изогнутого стержня, равна первоначальной длине стержня;
- 3) в упругом рамном узле углы между стержнями сохраняются.

Действительно, в этом случае в данной раме достаточно будет знать только три перемещения – поступательное перемещение  $\Delta$  и два угловых перемещения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (рис. 12.2 а). Таким образом, число неизвестных уменьшилось намного – с пятнадцати до трех.

Из третьей гипотезы следует, что число неизвестных угловых перемещений будет определяться по формуле

$$n_{\text{угл}} = \text{числу упругих рамных узлов.}$$

Для определения числа неизвестных поступательных перемещений (в дальнейшем их будем называть линейными перемещениями) во все узлы рамы, включая и опоры, нужно ввести шарниры (рис. 12.2 б). Тогда число линейных перемещений легко определяется по известной формуле кинематического анализа для фермы

$$n_{\text{лин}} = W = 2n_{\text{У}} - n_{\text{С}} - n_{\text{С}_0}.$$

В рассматриваемой раме имеем  $n_{\text{лин}} = 2 \cdot 6 - 5 - 6 = 1$ .

Общее число всех неизвестных перемещений определяется по формуле

$$n = n_{\text{угл}} + n_{\text{лин}}$$

и называется **степенью кинематической неопределимости**. Сами неизвестные перемещения обозначаются однотипно:  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ .

После определения числа неизвестных в заданной системе (ЗС) следует вводить столько же связей для исключения перемещений концов ее стержней. Например, в рассмотренную раму введем две заделки и одну опорную связь. Полученная схема (рис. 12.2 в) будет **основной системой (ОС) метода перемещений**.

Таким образом, для получения ОС метода перемещений необходимо:

- в упругие рамные узлы заданной системы ввести  $n_{\text{угл}}$  заделок;
- в направлении поступательных перемещений узлов заданной системы ввести  $n_{\text{лин}}$  опорных связей (они вводятся так, чтобы система с введенными шарнирами стала геометрически неизменяемой).

Введенные связи, хотя внешне и похожи на обычные опорные связи, от них принципиально отличаются, потому что: 1) введенная заделка исключает лишь угловое перемещение узла, оставляя возможность линейного смещения; 2) введенная опорная связь исключает только линейное перемещение узла, оставляя возможность поворота (рис. 12.2 г, д).

При соблюдении этих требований ОС метода перемещений, по-сути, является единственной.

Пусть необходимо выбрать ОС метода перемещений для рамы (рис. 12.3 а). Она имеет четыре жестких узла. Значит, число угловых неизвестных  $n_{угл} = 4$ . Для определения числа линейных неизвестных во все узлы и опоры рамы введем шарниры (рис. 12.3 б). Тогда имеем:  $n_{лин} = 2n_y - n_C - n_{C_0} = 2 \cdot 8 - 8 - 6 = 2$ . Поэтому общее число неизвестных будет  $n = n_{угл} + n_{лин} = 4 + 2 = 6$ . Вводя в жесткие узлы ЗС четыре заделки и две опоры, исключая линейные перемещения узлов рамы (последние вводятся так, чтобы механизм на рис. 12.3 б стал геометрически неизменяемым), получаем требуемую ОС (рис. 12.3 в).

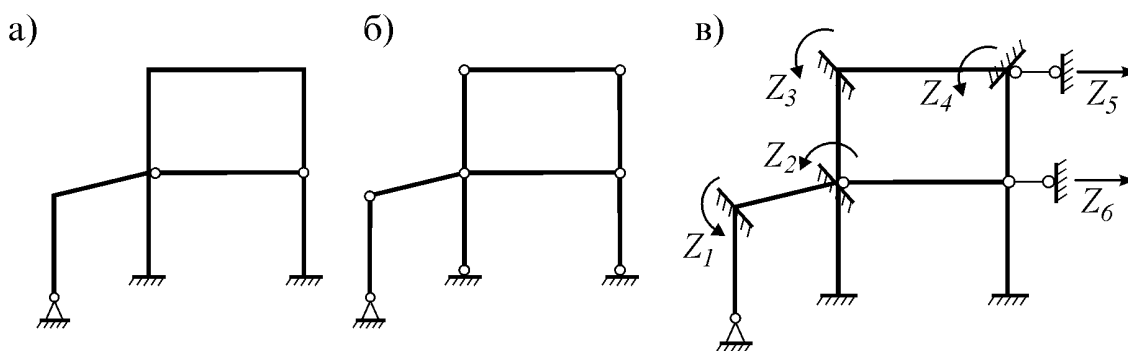


Рис. 12.3

### 3. Сущность метода перемещений

Данный вопрос изучим на следующем примере (рис. 12.4 а). Эта рама четырежды статически неопределима. При ее расчете методом сил нужно исключить четыре лишние связи и выбрать основную систему, например, такую как на рис. 12.4 б.

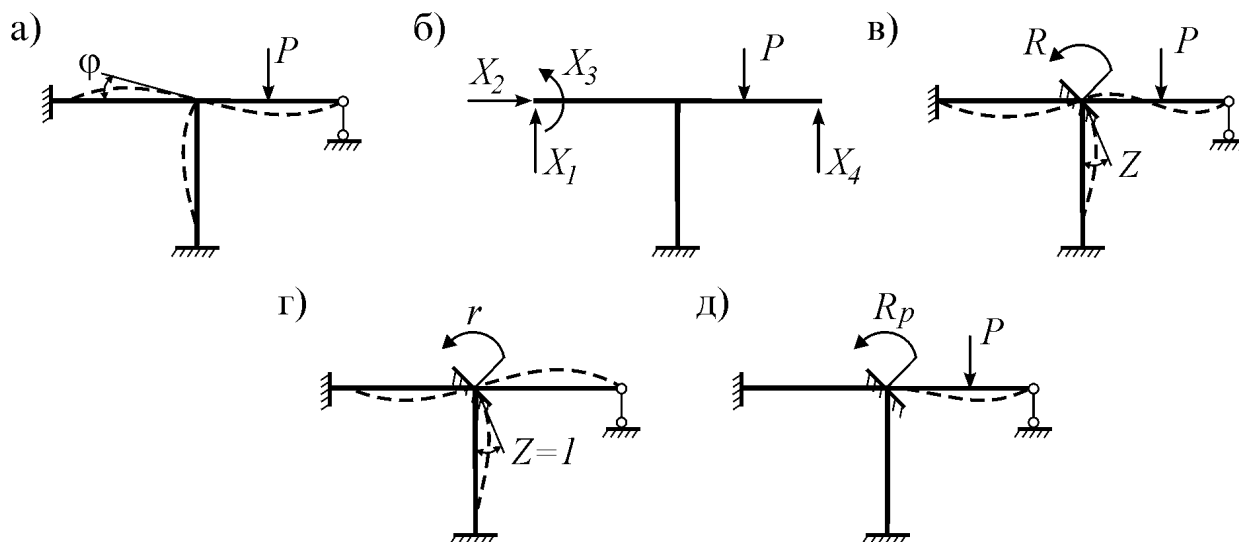


Рис. 12.4

При использовании же метода перемещений раму следует превратить в кинематически определимую. Для этого в заданную систему (ЗС) достаточно ввести  $n = n_{\text{угл}} + n_{\text{лин}} = 1 + 0 = 1$  кинематическую связь. Если неизвестное угловое перемещение узла обозначить через  $Z$ , получим основную систему (ОС), показанную на рис. 12.4 в.

Потребуем, чтобы усилия и деформации ОС были такими же, как у ЗС. Для этого перемещение  $Z$  должно быть равно углу поворота узла рамы  $\varphi$  (рис. 12.4 а), а реактивный момент во введенной заделке основной системы (рис. 12.4 в) должен равняться нулю:

$$R = 0.$$

Эту реакцию определим, рассматривая единичное и грузовое состояния основной системы.

В единичном состоянии введенной связи зададим единичное перемещение  $Z=1$  и определим возникающую в ней реакцию  $r$  (рис. 12.4 г). Такая реакция от единичного перемещения называется **жесткостью**.

В грузовом состоянии приложим только внешнюю нагрузку и во введенной связи основной системы определим реакцию  $R_P$  (рис. 12.4 д).

С учетом упругости системы и принципа суперпозиции, наше уравнение приводится к виду

$$r \cdot Z + R_P = 0.$$

Оно называется **каноническим уравнением метода перемещений**. Если известны реакции  $r$  и  $R_P$ , то из него можно найти величину узлового перемещения:

$$Z = -R_P/r.$$

Если степень кинематической неопределимости стержневой системы равна  $n$ , ее ОС получается введением  $n$  дополнительных связей с неизвестными  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ . Чтобы ОС была эквивалентна ЗС, реакции во введенных связях должны равняться нулю. С учетом этого можно записать  $n$  уравнений. После рассмотрения  $n$  единичных состояний, одного грузового состояния и дальнейшего определения реакций (реактивных усилий) во всех состояниях, эти уравнения приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1P} &= 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2P} &= 0, \\ \dots & \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nP} &= 0. \end{aligned}$$

Все вместе они называются **системой канонических уравнений метода перемещений**. Здесь  $r_{ii}$  – главные коэффициенты,  $r_{ij}$  – боковые коэффициенты. Свободные члены  $R_{iP}$  являются грузовыми коэффициентами.

После введения матриц и векторов

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_P = \begin{bmatrix} R_{1P} \\ R_{2P} \\ \vdots \\ R_{nP} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

система канонических уравнений записывается в матричной форме:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{R}_P = \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{r}$  – матрица жесткости,  $\mathbf{Z}$  – вектор неизвестных,  $\mathbf{R}_P$  – вектор нагрузки,  $\mathbf{0}$  – нуль-вектор. Отсюда определяется вектор неизвестных:

$$\mathbf{Z} = -\mathbf{r}^{-1} \mathbf{R}_P,$$

где  $\mathbf{r}^{-1}$  – обратная матрица жесткости.

### В о п р о с ы

1. Какие величины являются неизвестными метода перемещений?
2. Что такое степень кинематической неопределимости?
3. Какие гипотезы принимаются при расчете рам методом перемещений?
4. Как определяется основная система метода перемещений?
5. Что называется жесткостью?
6. В чем заключается сущность метода перемещений?
7. Как записывается система канонических уравнений метода перемещений?

### Л е к ц и я 13

## РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ (продолжение)

### 4. Элементарные состояния основной системы

Как было установлено в предыдущей лекции, коэффициенты системы канонических уравнений метода перемещений – реакции, определяемые в единичных и грузовом состояниях. Например,  $r_{ij}$  – реакция, возникающая в  $i$ -ой связи в  $j$ -ом единичном состоянии,  $R_{iP}$  – реакция, возникающая в  $i$ -ой связи в грузовом состоянии.

Все эти реакции равны сумме реакций отдельных стержней, объединенных в узлах основной системы. Для их определения необходимо рассчитывать статически неопределимые стержни различной длины и жесткости с различными закреплениями по концам, получающие разные перемещения или нагруженные различными силами. С целью упрощения таких расчетов все типовые задачи, встречающиеся при расчете различных основных систем, решаются для общего случая. Их называют элементарными состояниями основной системы, а результаты их расчетов сводятся в таблицу. Эти задачи в большинстве случаев бывают статически неопределимыми и поэтому решаются методом сил.

Рассмотрим решение двух типовых задач.

### 1) Стержень с равномерно распределенной нагрузкой $q$

Степень статической неопределимости этой системы (рис. 13.1 а)  $n=1$ . Каноническое уравнение имеет вид  $\delta X + \Delta_P = 0$ . Выбирая основную систему (рис. 13.1 б), в единичном (рис. 13.1 в) и грузовом (рис. 13.1 д) состояниях строим единичную (рис. 13.1 г) и грузовую эпюры (рис. 13.1 е).

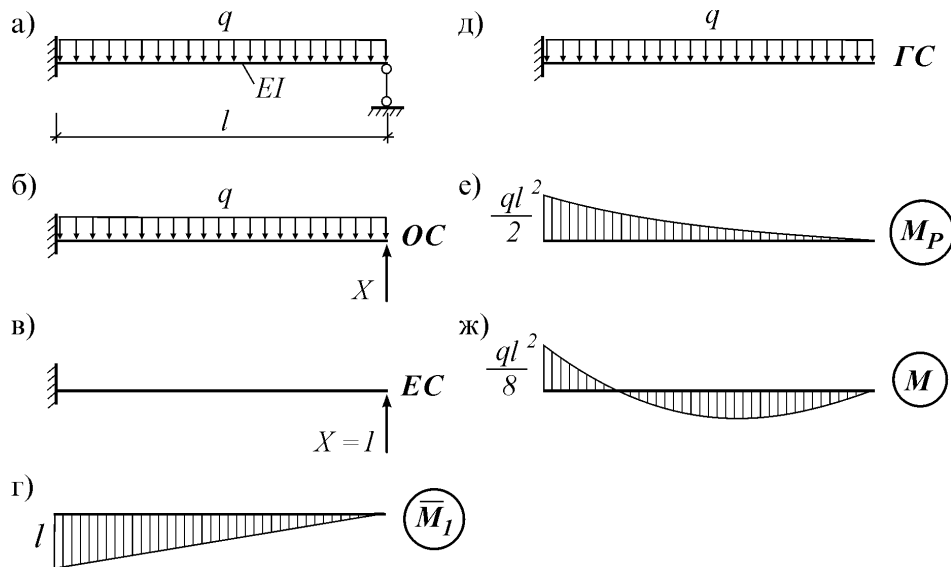


Рис. 13.1

Определим коэффициенты канонического уравнения:

$$\delta = \overline{M}^2 = \frac{l^3}{3EI}, \quad \Delta_P = \overline{M} \otimes M_P = -\frac{ql^4}{8EI},$$

а затем неизвестную реакцию:  $R_B = X = -\frac{\Delta_P}{\delta} = \frac{3}{8}ql$ . После этого из уравнений статики определяем остальные реакции, а по формуле  $M = \overline{M}X + M_P$  строим эпюру изгибающих моментов (рис. 13.1 ж).

### 2) Поворот одного конца стержня с заделанными концами

Пусть один конец стержня с заделанными концами поворачивается на единичный угол (рис. 13.2 а). У этой системы степень статической неопределимости  $n=3$ . Однако, если не учитывать продольную деформацию, вместо заданной системы можно рассматривать стержень с правой опорой в виде ползуна (рис. 13.2 б) и принять  $n=2$ .

Система канонических уравнений будет:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned}$$

Если основную систему выбрать симметричной (рис. 13.2 в), в обоих единичных состояниях (рис. 13.2 г, е) единичные эпюры  $\overline{M}_1$ ,  $\overline{M}_2$  легко строятся (рис. 13.2 д, ж). В грузовом состоянии (рис. 13.2 з) момент не возникает, поэтому  $M_P = 0$ .

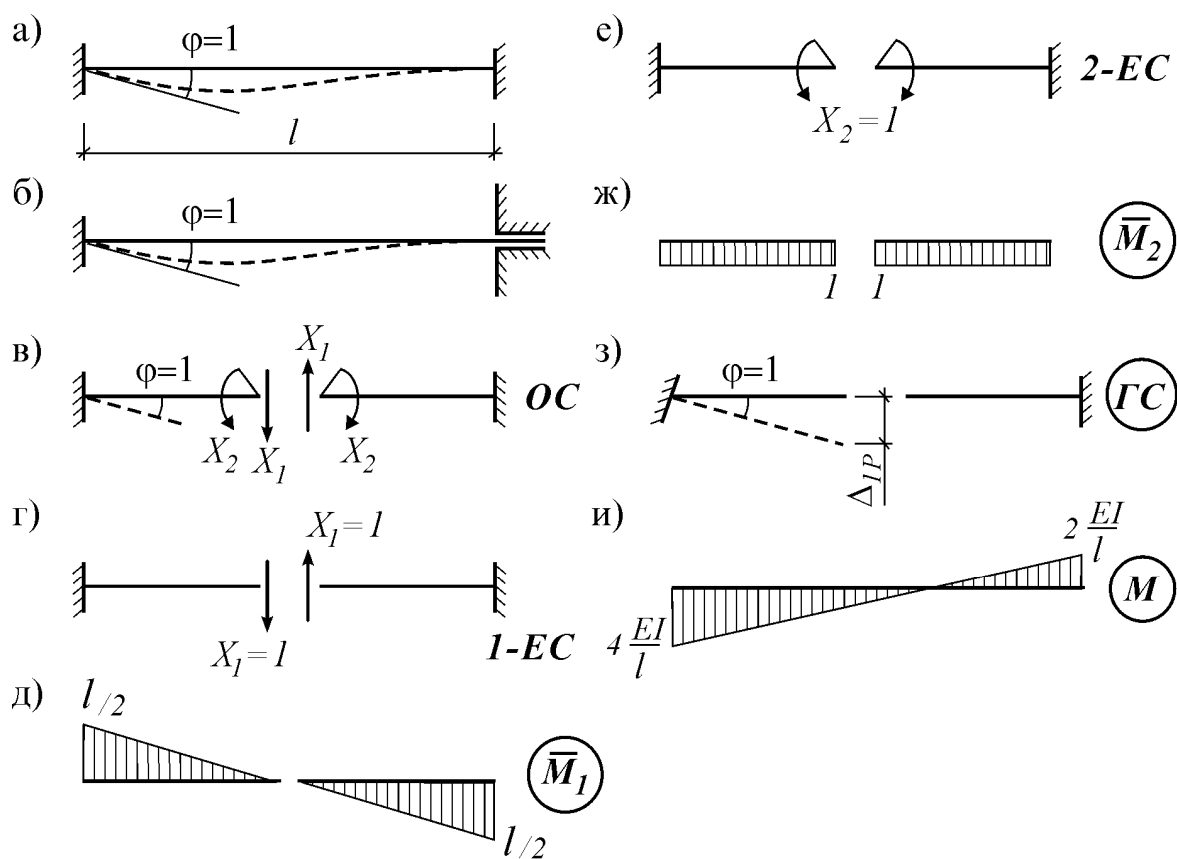


Рис. 13.2

Определим коэффициенты канонических уравнений:

$$\delta_{11} = \overline{M}_1^2 = \frac{l^3}{12EI}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \overline{M}_1 \otimes \overline{M}_2 = 0, \quad \delta_{22} = \overline{M}_2^2 = \frac{l}{EI}.$$

Из рис. 13.2 з следует, что  $\Delta_{1P} = \frac{l}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{l}{2} \cdot 1 = \frac{l}{2}$  и  $\Delta_{2P} = -\varphi = -1$ , а из канонических уравнений получаем  $X_1 = -6 \frac{EI}{l^2}$ ,  $X_2 = \frac{EI}{l}$ .

Так как  $M_P = 0$ , имеем  $M = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2$  (рис. 13.2 и).

Аналогичные расчеты проводятся для всех типовых случаев, встречающихся в различных основных системах. Результаты их расчетов сводятся в единую таблицу (табл. 2).

## 5. Определение коэффициентов канонических уравнений

Коэффициенты канонических уравнений метода перемещений можно определять статическим или кинематическим способами.

**Статический способ** основан на определении реакций во введенных связях основной системы из уравнений статики. Для этого необходимо вырезать отдельные узлы или части основной системы и составлять уравнения равновесия (статики). Если искомая реакция является реактивным моментом, то она определяется из условия равенства нулю

Таблица 2  
Таблица метода перемещений

<p><b>1</b></p>	<p><b>2</b></p>
<p><b>3</b></p>	<p><b>4</b></p>
<p><b>5</b></p>	<p><b>6</b></p>
<p><b>7</b></p>	<p><b>8</b></p>

момента в узле  $\Sigma M=0$ ; если же она является реактивной силой, то определяется из уравнения проекции на ось (например, на ось  $x$ ) в направлении этой реакции  $\Sigma X=0$ . Статический способ достаточно прост для использования, поэтому является основным способом определения коэффициентов системы канонических уравнений.

Докажем одну полезную теорему.

**Первая теорема Релея.** Реакция, возникающая в  $j$ -ой связи от перемещения  $i$ -ой связи на единицу, равна реакции  $i$ -ой связи от перемещения  $j$ -ой связи на единицу, т.е.  $r_{ji} = r_{ij}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим  $i$ -ое и  $j$ -ое единичные состояния основной системы некоторой рамы (рис. 13.3 а, б) и соответствующие эпюры моментов в этих состояниях (рис. 13.3 г, д).

Возможная работа сил  $j$ -ого единичного состояния (рис. 13.3 б) на перемещениях  $i$ -го состояния (рис. 13.3 а) равна

$$W_{ji} = r_{ij} \cdot 1 = r_{ij}.$$

Работа сил  $i$ -го состояния на перемещениях  $j$ -го состояния будет

$$W_{ij} = r_{ji} \cdot 1 = r_{ji}.$$

По теореме Бетти  $W_{ji} = W_{ij}$ . Значит, равны и правые части, т.е.  $r_{ij} = r_{ji}$ .

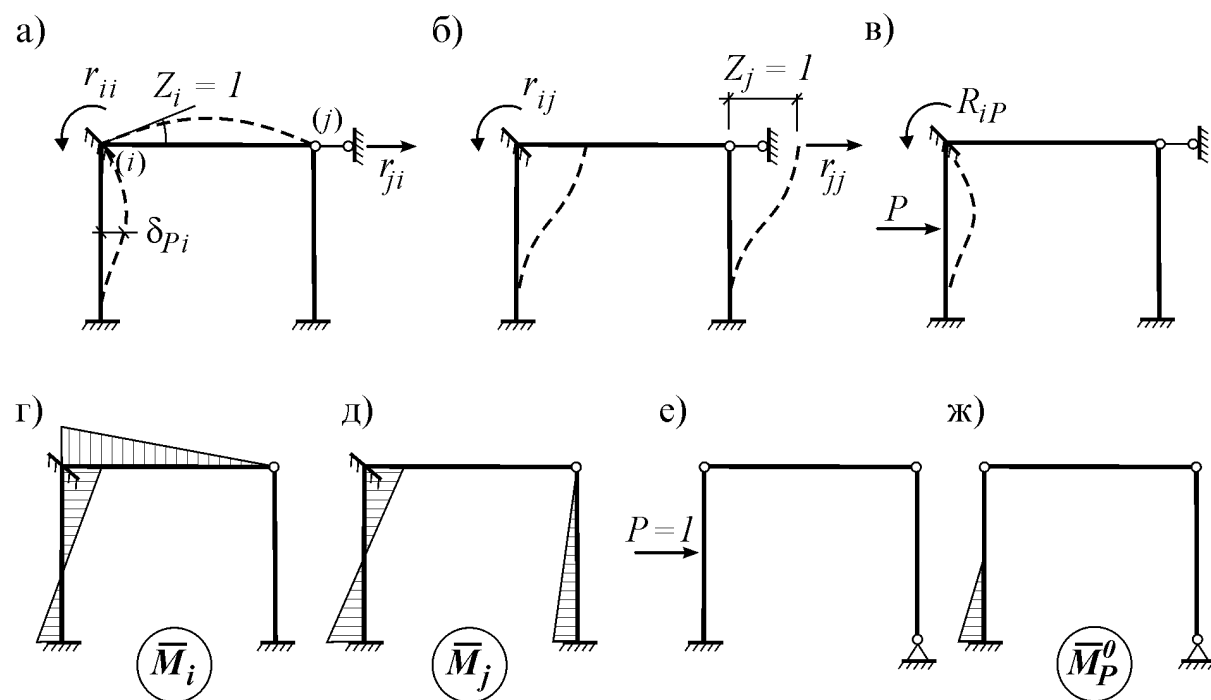


Рис. 13.3

Эту теорему иногда называют **теоремой о взаимности реакций**. Она позволяет сократить объем вычислений побочных коэффициентов канонических уравнений.

**Кинематический способ** основан на определении коэффициентов канонических уравнений перемножением эпюр. Этот способ применяется при сложности определения коэффициентов статическим способом или для проверки результатов статического способа.

Для вывода формулы кинематического способа определим две возможные работы. Работа внешних сил  $j$ -го единичного состояния на перемещениях  $i$ -го состояния нам известна:  $W_{ji} = r_{ij}$ . А возможная работа внутренних сил  $j$ -го единичного состояния на деформации  $i$ -го состояния  $\overline{M}_i / EI$  равна:

$$-V_{ji} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EI} dx.$$

По принципу возможных перемещений  $W_{ji} + V_{ji} = 0$  или  $W_{ji} = -V_{ji}$ . Отсюда получаем искомую формулу:

$$r_{ij} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EI} dx \quad \text{или} \quad r_{ij} = \overline{M}_i \otimes \overline{M}_j.$$

Формула вычисления грузовых коэффициентов отличается от аналогичной формулы метода сил (дается без вывода):

$$R_{iP} = - \sum \int \frac{\overline{M}_i M_P^0}{EI} dx \quad \text{или} \quad R_{iP} = -\overline{M}_i \otimes M_P^0,$$

где  $\overline{M}_P^0$  – грузовая эпюра изгибающих моментов в любой статически определимой системе, полученной из заданной системы удалением лишних связей.

## 6. Определение усилий

После определения всех коэффициентов, они подставляются в систему канонических уравнений. Затем она решается и определяются неизвестные  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ . После этого определяются внутренние усилия заданной статически неопределимой системы. Этот расчет выполняется аналогично методу сил. Вначале по формуле

$$M = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + \dots + \overline{M}_n Z_n + M_P$$

определяются моменты. Затем по эпюре  $M$  определяются поперечные силы  $Q$ , а по ним – продольные силы  $N$ .

## 7. Алгоритм метода перемещений

Метод перемещений реализуется в следующей последовательности:

1. Определение степени кинематической неопределимости.
2. Выбор основной системы.
3. Запись канонических уравнений.
4. Рассмотрение единичных и грузового состояний.

5. Построение эпюр моментов во всех состояниях.
  6. Определение коэффициентов канонических уравнений (при необходимости – их проверка).
  7. Решение канонических уравнений.
  8. Построение эпюр  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ .
  9. Проверка правильности расчета. Она проводится аналогично методу сил – статическим и кинематическим способами.
- Как видим, алгоритмы метода перемещений и метода сил совпадают.

## **8. Сравнение методов сил и перемещений**

При более подробном рассмотрении можно выявить не только сходные, но и принципиально отличающиеся стороны методов сил и перемещений. Рассмотрим некоторые из них:

- оба метода используются для расчета статически неопределимых систем; при принятии одинаковых допущений оба приводят к единому результату, а при использовании в разных областях дополняют друг-друга;
- в методе сил неизвестными являются силы, а в методе перемещений неизвестными являются перемещения; при расчете одной и той же системы число их неизвестных часто бывает разным, поэтому одни системы выгоднее рассчитывать методом сил, другие – методом перемещений;
- в методе сил основная система получается удалением связей, а в методе перемещений – введением связей;
- в методе сил вариантов основной системы много, а в методе перемещений она единственна;
- единичные состояния в методе сил определяются воздействием единичных сил, в методе перемещений – единичных перемещений;
- в методе сил необходимые эпюры в основной системе строятся обычным способом, а в методе перемещений – по готовой таблице;
- коэффициенты канонических уравнений в методе перемещений определяются проще (из уравнений статики);
- многие из боковых коэффициентов системы канонических уравнений метода перемещений равняются нулю, что упрощает ее решение и т.д.

### **В о п р о с ы**

1. Как рассчитываются элементарные состояния основной системы метода перемещений?
2. Какие способы используются при определении коэффициентов канонических уравнений метода перемещений?
3. Как формулируется теорема Релея?
4. Как определяются окончательные усилия в методе перемещений?
5. Из каких этапов состоит алгоритм метода перемещений?
6. Какие сходства и различия имеют метод сил и метод перемещений?



Как обычно, в этих уравнениях выполняются равенства  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ ,  $r_{ij} = r_{ji}$ . Однако в уравнения I-го типа, кроме коэффициентов  $\delta_{11}, \dots, \delta_{kk}$ , определяемых в основной системе как перемещения от единичных сил  $X_i = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), входят коэффициенты  $\delta'_{ij}$ , определяемые как перемещения от единичных перемещений  $Z_j = 1$  ( $j = k+1, \dots, n$ ). А в уравнения II-го типа, кроме обычных коэффициентов  $r_{k+1, k+1}, \dots, r_{nn}$ , входят коэффициенты  $r'_{ji}$ , определяемые как реакции от единичных сил  $X_i = 1$ .

Упростить их определение позволяет следующая теорема.

**Вторая теорема Релея.** Величина перемещения системы в  $i$ -ом направлении от единичного перемещения  $j$ -ой связи равна реакции в  $j$ -ой связи от действия единичной силы в  $i$ -ом направлении, взятой с обратным знаком, т.е.  $\delta_{ij} = -r_{ji}$ .

*Доказательство.* Для этого рассмотрим некоторую систему и два ее возможных состояния. В одном из них прикладывается единичная сила  $X_i = 1$  (рис. 14.1 а), а во втором – единичное перемещение (рис. 14.1 б).

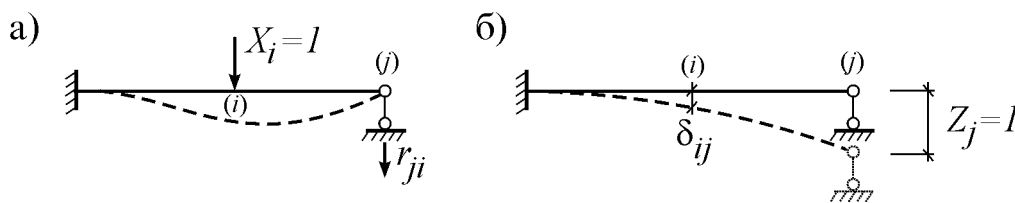


Рис. 14.1

Возможная работа сил первого состояния на перемещениях второго равна

$$W_{12} = 1 \cdot \delta_{ij} + r_{ji} \cdot 1,$$

а возможная работа сил второго состояния на перемещениях первого равна

$$W_{21} = 0.$$

По теореме Бетти  $W_{12} = W_{21}$ . Приравнявая два выражения работы, получим требуемое соотношение  $\delta_{ij} = -r_{ji}$ .

Доказанная теорема позволяет определять некоторые коэффициенты канонических уравнений без вычислений. Например, если вначале были вычислены  $\delta'_{ij}$ , то  $r'_{ji} = -\delta'_{ij}$ , если же были вычислены  $r'_{ji}$ , то  $\delta'_{ji} = -r'_{ij}$ .

Грузовые коэффициенты канонических уравнений смешанного метода  $\Delta_{iP}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) и  $R_{jP}$  ( $j = k+1, \dots, n$ ) определяются также как в методах сил и перемещений.

Окончательная эпюра изгибающих моментов в смешанном методе строится по формуле

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \dots + \bar{M}_k X_k + \bar{M}_{k+1} Z_{k+1} + \dots + \bar{M}_n Z_n + M_P.$$

Правильность этой эпюры проверяется также как в методах сил и перемещений: перемещения в удаленных связях и реакции во введенных связях должны равняться нулю.

Когда число неизвестных смешанного метода велико, канонические уравнения удобно записать в матричной форме

$$\mathbf{D}\mathbf{Y} + \Delta_{\mathbf{P}} = \mathbf{0},$$

где матрица коэффициентов канонических уравнений  $\mathbf{D}$ , вектор неизвестных  $\mathbf{Y}$  и вектор грузовых коэффициентов  $\Delta_{\mathbf{P}}$  имеют вид

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1k} & \delta'_{1,k+1} & \dots & \delta'_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k1} & \dots & \delta_{kk} & \delta'_{k,k+1} & \dots & \delta'_{kn} \\ r'_{k+1,1} & \dots & r'_{k+1,k} & r_{k+1,k+1} & \dots & r_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r'_{n1} & \dots & r'_{nk} & r_{n,k+1} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}; \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_k \\ Z_{k+1} \\ \dots \\ Z_n \end{bmatrix}; \Delta_{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \Delta_{1P} \\ \dots \\ \Delta_{kP} \\ R_{k+1,P} \\ \dots \\ R_{nP} \end{bmatrix}.$$

Тогда неизвестные метода определяются по формуле

$$\mathbf{Y} = -\mathbf{D}^{-1} \Delta_{\mathbf{P}}.$$

Алгоритм смешанного метода состоит из следующих этапов:

1. Определение числа неизвестных.
2. Выбор основной системы.
3. Запись канонических уравнений.
4. Рассмотрение единичных и грузового состояний.
5. Построение эпюр в этих состояниях.
6. Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений.
7. Решение канонических уравнений.
8. Построение эпюр  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ .
9. Проверка правильности расчета.

Как видим, этот алгоритм совпадает с алгоритмами метода сил и перемещений. Однако, по сути, каждый этап расчета отличается от них.

В качестве примера рассмотрим некоторые этапы расчета рамы, представленной на рис. 14.2 а. Число неизвестных, если ее рассчитывать методами сил и перемещений, будут

$$n_{mc} = 3n_k - n_{y\partial} = 3 \cdot 2 - 2 = 4,$$

$$n_{mn} = n_{y\partial} + n_{лин} = 2 + 1 = 3.$$

Когда выбирается основная система по смешанному методу как на рис. 14.2 б, число неизвестных будет

$$n_{cm} = 1 + 1 = 2.$$

Тогда канонические уравнения запишутся так:

$$\delta_{11}X_1 + \delta'_{12}Z_2 + \Delta_{1P} = 0,$$

$$r'_{21}X_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0.$$

Коэффициенты канонических уравнений  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1P}$  определяются как в методе сил – перемножением единичной и грузовой эпюр моментов по

рис. 14.2 в, д, а коэффициенты  $r_{22}$  и  $R_{2P}$  определяются как в методе перемещений – вырезанием узлов единичного и грузового состояний по рис. 14.2 г, д. Коэффициент  $r'_{21}$  проще всего определяется как в методе перемещений – по рис. 14.2. Тогда, по второй теореме Релея, имеем  $\delta'_{12} = -r'_{21}$ .

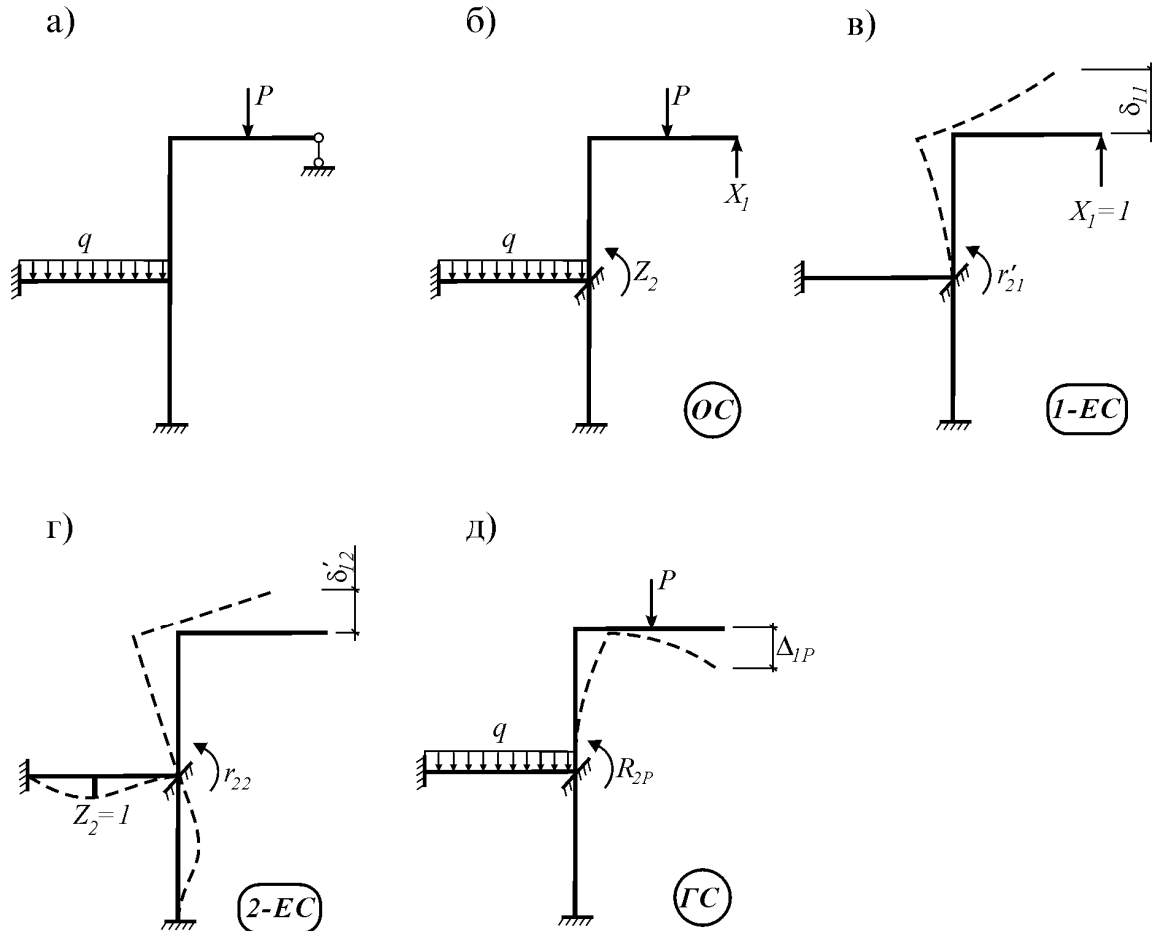


Рис. 14.2

Дальнейший расчет ведется, как обычно, по указанному выше алгоритму.

### 8.3. Комбинированный метод расчета

В этом методе основная система выбирается частично по методу сил (не удаляя все лишние связи) или частично по методу перемещений (не вводя дополнительные связи во все необходимые места). Поэтому, если основная система выбирается по методу сил, то она будет статически неопределимой. Если же она выбирается по методу перемещений, то будет кинематически неопределимой. В связи с этим, эпюры в единичных и грузовых состояниях основной системы смешанного метода нужно строить для нестандартных элементов. Поэтому, кроме основных неизвестных, в этом методе выбираются и вспомогательные неизвестные. Их общее число будет равно числу неизвестных смешанного метода.

Использование комбинированного метода обычно проще чем использование смешанного метода, т.к. основные неизвестные в нем рассматриваются отдельно от вспомогательных. Поэтому соответствующие два типа канонических уравнений рассматриваются раздельно. А в смешанном методе, как мы видели, оба типа канонических уравнений приходится рассматривать совместно.

При расчете симметричных рам комбинированный метод дает преимущества, если разложить нагрузку на симметричную и кососимметричную составляющие. Рассмотрим этот случай на примере рамы (рис. 14.3 а), число неизвестных которой по методам сил и перемещений будут

$$n_{mc} = 3n_k - n_{y\partial} = 3 \cdot 1 - 0 = 3,$$

$$n_{mn} = n_{y\partial} + n_{лин} = 2 + 1 = 3.$$

Внешнюю нагрузку представим как сумму симметричной (рис. 14.3 б) и кососимметричной (рис. 14.3 в) нагрузок.

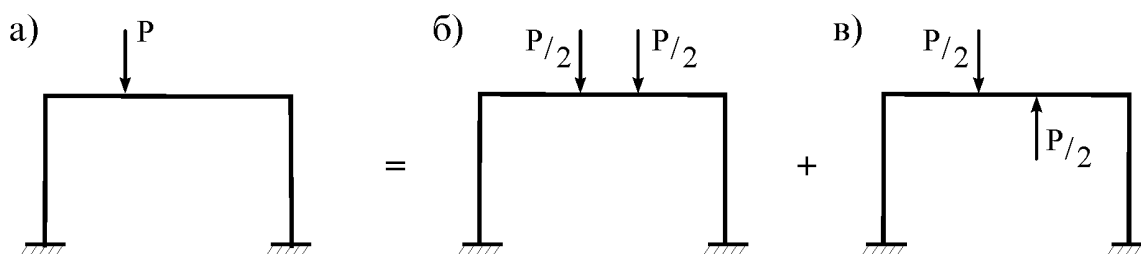


Рис. 14.3

Как было установлено при расчете симметричной рамы методом сил, метод сил выгоден при расчете на кососимметричную нагрузку. Действительно, при выборе основной системы как на рис. 14.3 б, симметричные неизвестные  $X_1$  и  $X_3$  будут обращаться в нуль, и поэтому из трех уравнений останется только одно каноническое уравнение

$$\boxed{\times}$$

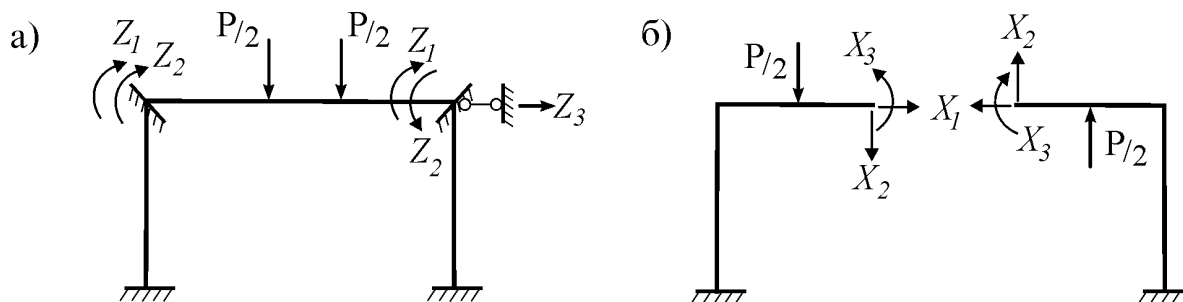


Рис. 14.4

Аналогично, при расчете на симметричную нагрузку, кососимметричные неизвестные  $Z_1$  и  $Z_3$  метода перемещений (рис. 14.4 а) также обратятся в нуль, и из трех уравнений остается только одно каноническое уравнение

$$r_{22}Z_2 + R_{2P}^c = 0.$$

Таким образом, расчет заданной системы с тремя неизвестными сводится к простым расчетам двух систем, имеющих по одной неизвестной. Окончательная эпюра изгибающих моментов определяется суммой двух решений:

$$M = M^c + M^{kc}.$$

### В о п р о с ы

1. В чем сущность смешанного метода?
2. Как формулируется вторая теорема Релея?
3. С какой целью применяется эта теорема?
4. Какое преимущество имеет комбинированный метод расчета?

### Л е к ц и я 15

## РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ ДИСКРЕТНЫМ МЕТОДОМ

### 1. Континуальный и дискретный подходы в механике

В механике существуют два разных взгляда на объект исследования: континуальный и дискретный подходы.

**Континуальный подход** (по-латыни *continuum* – непрерывный, сплошной) основан на рассмотрении сооружения как непрерывной системы, состоящей из бесконечного числа элементов. Такой подход позволяет определять напряженно-деформированное состояние (НДС) системы во всех ее точках. Однако для этого необходимо составлять и решать системы дифференциальных уравнений в частных производных. Например, в теории упругости составляется система дифференциальных уравнений, состоящая из уравнений равновесия, совместности деформаций и физических уравнений.

**Дискретный подход** (по-латыни *discretus* – прерывистый, состоящий из отдельных частей) основан на изучении НДС сооружения только в отдельных точках. Количество и место этих точек устанавливается расчетчиком.

При дискретном подходе рассматриваются элементы расчетной схемы конечного размера (например, отдельные стержни) и изучаются условия равновесия, внутренние усилия, деформации и перемещения лишь отдельных точек системы. Такой подход приводит к системе алгебраических уравнений – аналогу дифференциальных уравнений континуального подхода.

В последние годы дискретные методы расчета сооружений начали широко использоваться. Их преимущество состоит в матричном представлении статических, геометрических и физических свойств сооружения, проведении расчета различных по форме и сложности сооружений по единым методикам и алгоритмам на компьютере. Общая схема расчета сооружений дискретным методом выглядит так:

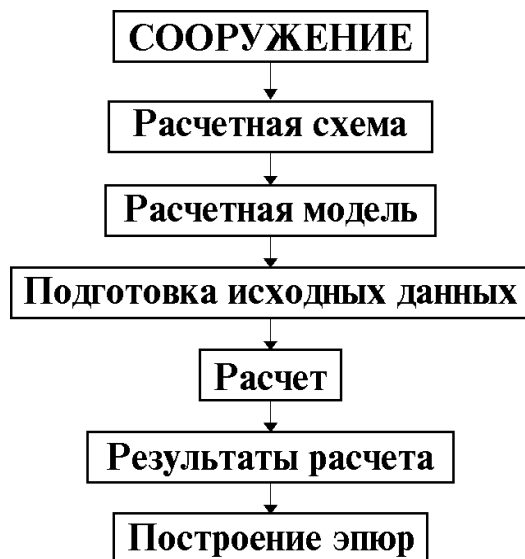


Рис. 15.1

## 2. Дискретная модель стержневой системы

Выбор дискретной расчетной модели стержневой системы начинается с разбиения расчетной схемы на элементы – на стержни постоянного сечения. В плоской стержневой системе эти элементы могут соединяться в шарнирном или жестком узлах (рис. 15.2):



Рис. 15.2

Здесь  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  – независимые перемещения узла ( $u_1$ ,  $u_2$  – линейные перемещения,  $u_3$  – угловое перемещение). У шарнирного узла число независимых перемещений равно двум, а у жесткого – трем. Они называются **степенями свободы узла**.

Общее число степеней свободы дискретной модели определяется суммой чисел степеней свободы отдельных узлов. Если обозначить его через  $n$ , а все перемещения узлов пронумеровать рядом натуральных чисел от 1 до  $n$  и объединить в единый вектор, получим

$$\mathbf{u} = \{u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n\}.$$

Он называется **вектором перемещений дискретной модели**.

Если в расчетной схеме имеются стержни переменного сечения, их следует представить в виде нескольких стержней постоянного сечения, а в места скачков сечений необходимо вводить узлы. В системах с криволинейными стержнями (в арках, кольцах и др.) криволинейные элементы следует заменять ломаной фигурой – многоугольником.

В дискретном методе нагрузка может быть приложена только в узлах.

Однако в расчетной схеме нагрузка может быть и распределенной, и приложенной в виде сосредоточенных сил в точках, не совпадающих с узлами. Такие нагрузки следует переносить в соседние узлы как узловые силы, действующие в направлении степеней свободы дискретной модели. В результате этого формируется **вектор внешней нагрузки**

$$\mathbf{P} = \{P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_n\}.$$

Внутренние усилия и деформации, которые требуется определить, также собираются в отдельные вектора

$$\mathbf{S} = \{S_1 \quad S_2 \quad \dots \quad S_m\},$$

$$\mathbf{\Delta} = \{\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \dots \quad \Delta_m\},$$

где  $\mathbf{S}$  – вектор усилий,  $\mathbf{\Delta}$  – вектор деформаций,  $m$  – число усилий.

Внешнюю нагрузку в узлы можно переносить по-разному.

В качестве примера рассмотрим три варианта переноса распределенной нагрузки  $q$ , действующей на балку (рис. 15.3 а), в узел расчетной модели, введенной в середине этой балки (рис. 15.3 б).

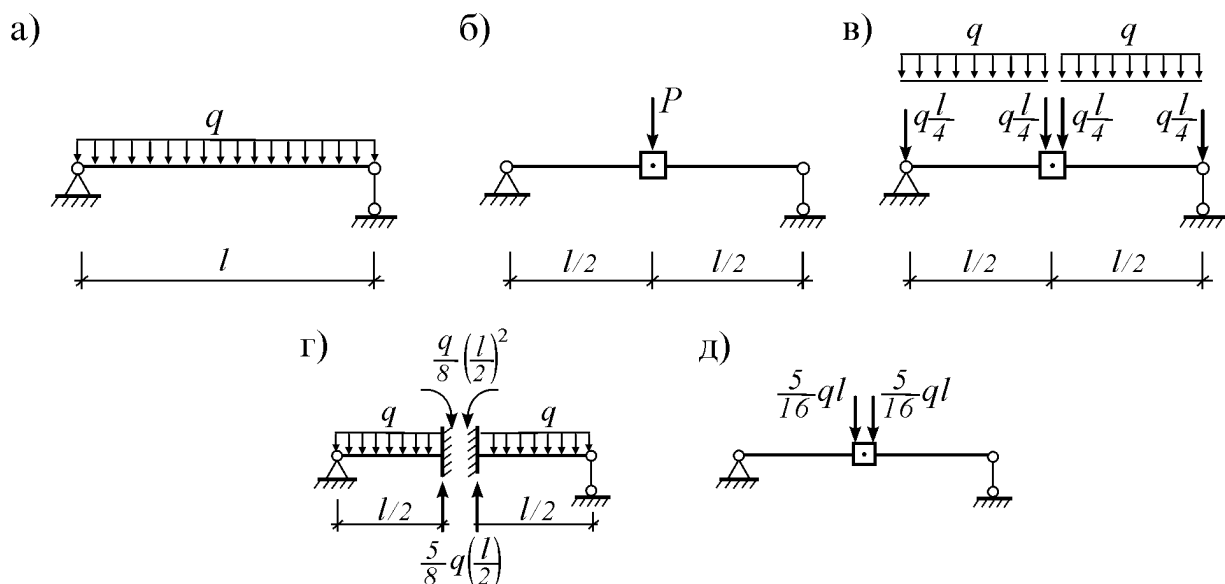


Рис. 15.3

#### а) Статически эквивалентный перенос

Поделим балку на два участка, а распределенную в них нагрузку учтем как давления  $ql/4$  на концы участков балки (рис. 15.3 в). Давления на концы балки воспринимаются ее опорами, поэтому их можно не учитывать. Объединив оставшиеся две силы в середине балки, получим статически эквивалентную нагрузку, приложенную в середине балки:

$$P = q \frac{l}{4} + q \frac{l}{4} = q \frac{l}{2} = 0,5ql.$$

#### б) Перенос с сохранением энергии

Решение этой задачи подробно рассматривать не будем. Отметим только, что для этого необходимо приравнять энергии рассматриваемой

балки (рис. 15.3 а) и балки с сосредоточенной силой (рис. 15.3 б). В результате получается «точный» результат:

$$P = \frac{2ql}{\pi} \cong 0,637 ql .$$

**в) Перенос по таблице метода перемещений**

Для этого следует исключить перемещения узла введением дополнительных связей и по таблице метода перемещений определить возникающие реакции во введенных связях (рис. 15.3 г). Если эти реакции сложить и приложить в обратном направлении (рис. 15.3 д), получим величину эквивалентной нагрузки:

$$P = \frac{5}{16} ql + \frac{5}{16} ql = \frac{5}{8} ql = 0,625 ql .$$

Теперь сравним три варианта расчета. Конечно, вариант б) дает точный результат. Однако он сложен для реализации. Вариант а) наиболее прост, но дает неточный результат. Поэтому в дальнейшем будем пользоваться вариантом в), вполне простым для использования и дающим вполне точный результат.

В качестве примера рассмотрим следующую раму (рис. 15.4 а) и выберем ее расчетную модель (рис. 15.4 б). Для переноса нагрузок  $P$  и  $q$  в двух элементах рамы в узлы расчетной модели воспользуемся таблицей метода перемещений. Соответствующие схемы показаны на рис. 15.4 в, г. Полученные реакции в обратном направлении прикладываем к узлам выбранной расчетной модели (рис. 15.4 б).

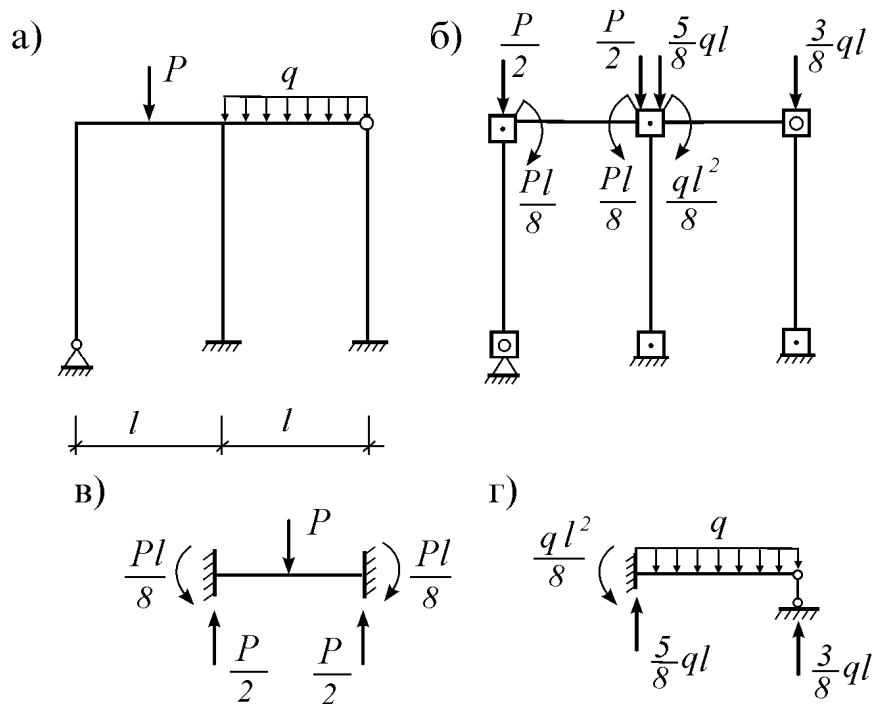


Рис. 15.4

### 3. Уравнения дискретного метода. Уравнение равновесия

Система уравнений, составляемая в дискретном методе, называется *полной системой уравнений строительной механики*. В нее входят три уравнения – уравнение равновесия (статики), геометрическое уравнение и физическое уравнение.

Составление уравнения равновесия основано на следующем рассуждении: если сооружение находится в равновесии, то его дискретная модель также находится в равновесии; следовательно, и отдельные элементы и узлы дискретной модели тоже находятся в равновесии.

В качестве примера рассмотрим ферму (рис. 15.5 а).

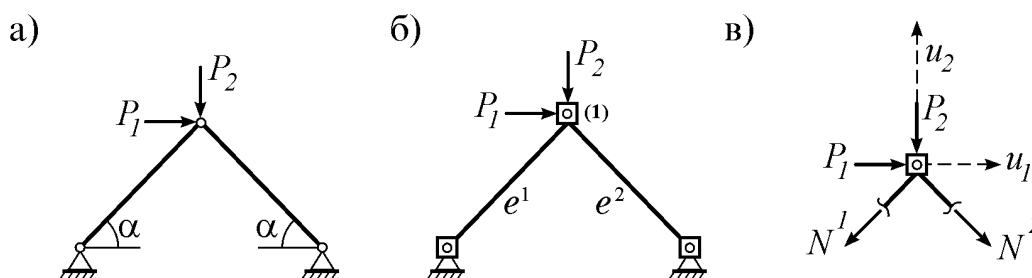


Рис. 15.5

Выберем дискретную модель фермы (рис. 15.5 б) и будем считать, что в ее элементах  $e^1$  и  $e^2$  возникают только продольные усилия. Поэтому, вырезав узел 1 (рис. 15.5 в), можно составить два уравнения равновесия узла как суммы проекций сил на направления перемещений узла  $u_1$  и  $u_2$ :

$$\sum u_1 = -N^1 \cos \alpha + N^2 \cos \alpha + P_1 = 0,$$

$$\sum u_2 = -N^1 \sin \alpha - N^2 \sin \alpha - P_2 = 0.$$

Представим эти уравнения в матричной форме

$$\begin{bmatrix} -\cos \alpha & \cos \alpha \\ -\sin \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^1 \\ N^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 \\ -P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и обозначим входящие сюда матрицы и вектора:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & \cos \alpha \\ -\sin \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} N^1 \\ N^2 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ -P_2 \end{bmatrix}, \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В результате получим матричное уравнение

$$\mathbf{AS} + \mathbf{P} = \mathbf{0},$$

которое называется *уравнением равновесия*, где  $\mathbf{A}$  – матрица равновесия,  $\mathbf{S}$  – вектор усилий,  $\mathbf{P}$  – вектор нагрузки,  $\mathbf{0}$  – нуль-вектор.

По матрице  $\mathbf{A}$  можно установить некоторые особенности расчетной модели. Возможны три случая.

1.  $n = m$  ( $\mathbf{A}$  – квадратная матрица размерности  $n \times n$ ). Если определитель матрицы  $\mathbf{A}$  не равняется нулю ( $\det \mathbf{A} \neq 0$ ), расчетная модель сооружения статически определима и геометрически неизменяема. В этом случае усилия определяются непосредственно из уравнения равновесия:

$$\mathbf{S} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}.$$

Рассмотренная нами ферма является именно такой ( $n=m=2$ ).

2.  $n < m$ . В этом случае система статически неопределима, а число  $m-n$  определяет степень ее статической неопределимости. Если ранг матрицы  $\mathbf{A}$  равняется  $n$ , то такая система геометрически неизменяема.

3.  $n > m$ . Такая система геометрически изменяема.

### В о п р о с ы

1. Какова сущность континуального подхода?
2. Что такое дискретный подход в механике?
3. Какова общая схема реализации расчета при дискретном подходе?
4. Как определяется дискретная модель стержневой системы?
5. Какой способ переноса нагрузки предпочтительнее и чем это обосновано?
6. Что такое уравнение равновесия и как оно получается?
7. Какие особенности расчетной модели можно установить по полученной матрице равновесия?

### Лекция 16

## РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ ДИСКРЕТНЫМ МЕТОДОМ (продолжение)

### 4. Геометрическое уравнение

Внешняя нагрузка приводит к деформации элементов сооружения, но при этом они не должны отрываться друг от друга. Это требование можно записать в виде уравнений совместности деформаций, отражающих геометрическую сторону задачи. Систему таких уравнений будем называть *геометрическим уравнением*.

Порядок составления геометрического уравнения изучим на примере рассмотренной в предыдущей лекции фермы (рис. 16.1 а).

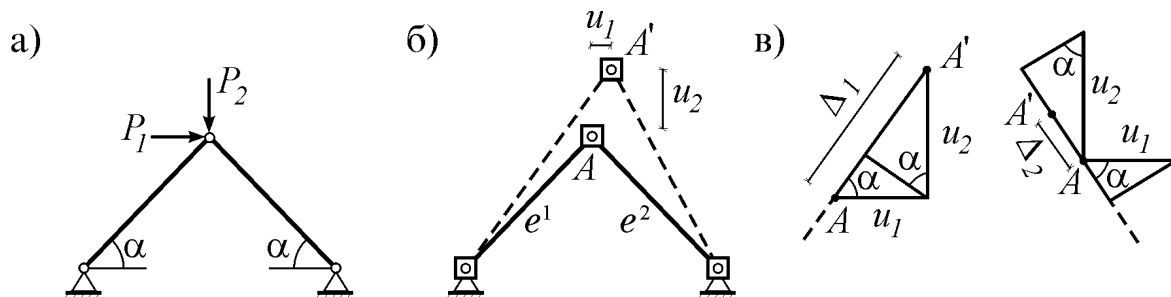


Рис. 16.1

Пусть под действием нагрузки элементы фермы получают только продольные деформации (рис. 16.1 б). Деформацию (удлинение) первого элемента  $e^1$  можно определить по левой схеме на рис. 16.1 в:

$$\Delta l_1 = u_1 \cos \alpha + u_2 \sin \alpha.$$

Деформация второго элемента  $e^2$  определяется по правой схеме рис. 16.1 в:

$$\Delta_2 = -u_1 \cos\alpha + u_2 \sin\alpha$$

(из-за сжатия  $e^2$  от перемещения  $u_1$  первое слагаемое взято со знаком «-»).

Перепишем эти уравнения в виде

$$-\cos\alpha \cdot u_1 - \sin\alpha \cdot u_2 + \Delta_1 = 0,$$

$$\cos\alpha \cdot u_1 - \sin\alpha \cdot u_2 + \Delta_2 = 0$$

и представим в матричной форме

$$\begin{bmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Это матричное уравнение можно записать в виде

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{u} + \mathbf{\Delta} = \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{u} = \{u_1 \ u_2\}$  и  $\mathbf{\Delta} = \{\Delta_1 \ \Delta_2\}$  – вектора перемещений и деформаций,

$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{bmatrix}$  – связующая матрица. Кроме того, из предыдущей

лекции нам известна матрица равновесия  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\cos\alpha & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & -\sin\alpha \end{bmatrix}$ . Сравнив их

между собой видим,  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}^t$  (символ  $t$  означает операцию транспонирования). Это свойство позволяет переписать полученное матричное уравнение в виде

$$\mathbf{A}^t \mathbf{u} + \mathbf{\Delta} = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Оно называется *геометрическим уравнением*.

Использование одной и той же матрицы  $\mathbf{A}$  в двух уравнениях – в уравнении статики и в геометрическом уравнении – соответствует известному в механике *принципу двойственности*.

## 5. Физическое уравнение

Изучим связь между деформациями и внутренними усилиями элементов расчетной модели стержневой системы.

Выбранная нами расчетная модель сооружения такова, что механические и геометрические характеристики ее отдельных элементов постоянны, а внешняя нагрузка действует только в узлах. В этом случае по нескольким конечным значениям усилий в элементах расчетной модели можно определять усилия во всех точках стержней.

В расчетных моделях плоской стержневой системы обычно встречаются три типовых элемента: 1) элемент с двумя жесткими узлами, 2) элемент с шарнирным и жестким узлами, 3) элемент с двумя шарнирными узлами. Рассмотрим их по отдельности, вводя следующие обозначения:  $e^r$  – некоторый элемент,  $r$  – номер этого элемента.

1) Элемент с двумя жесткими узлами (рис. 16.2 а). В нем продольная и поперечная силы постоянны, а  $Q$  можно выразить через конечный и начальный моменты элемента:  $Q = \frac{M_k - M_n}{l}$ .

2) Элемент с шарнирным и жестким узлами (рис. 16.2 б). В нем поперечную силу можно выразить через конечный момент:  $Q = \frac{M_k}{l}$ .

3) Элемент с двумя шарнирными узлами (рис. 16.2 в). В нем имеется лишь постоянная продольная сила  $N$ .

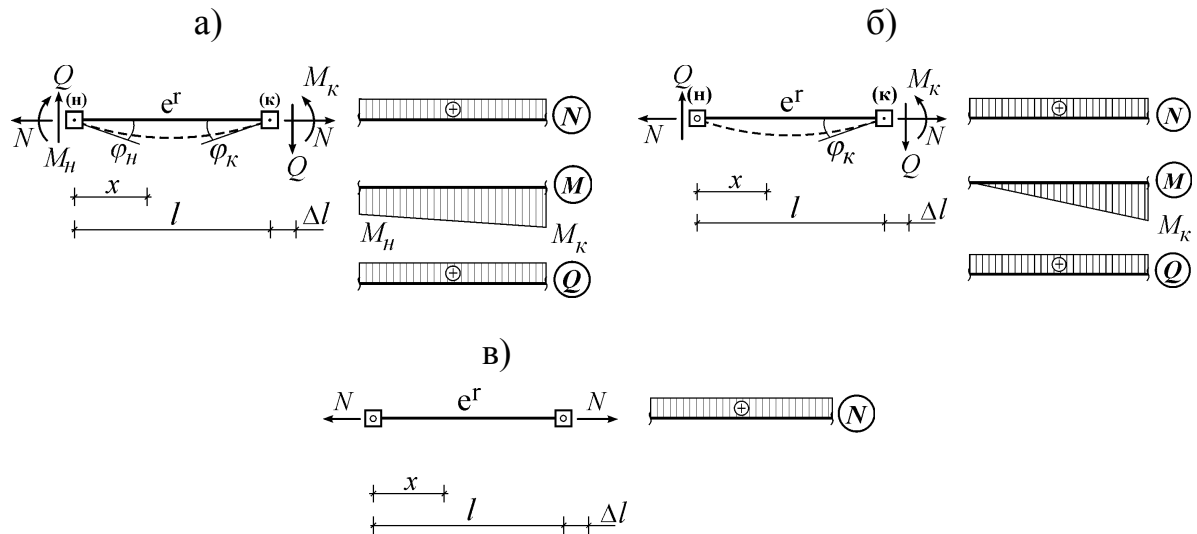


Рис. 16.2

Зависимость между внутренними усилиями и деформациями этих элементов может быть установлена через обобщенный закон Гука и записана в матричной форме

$$\Delta^r = B^r S^r, \quad (2)$$

где  $B^r$  – матрица податливости элемента, связывающая вектор перемещений элемента  $\Delta^r$  с вектором усилий  $S^r$ .

Например, в элементе 1-го типа связь между компонентами векторов перемещений  $\Delta^r = \{\Delta_l \varphi_n \varphi_k\}$  и внутренних усилий  $S^r = \{N M_n M_k\}$  выражается формулами (даются без вывода)

$$\Delta_l = \frac{l}{EF} N,$$

$$\varphi_n = \frac{l}{3EI} M_n + \frac{l}{6EI} M_k,$$

$$\varphi_k = \frac{l}{6EI} M_n + \frac{l}{3EI} M_k.$$

Если эти уравнения записать в матричной форме (2), то матрица податливости элемента будет

$$\mathbf{B}^r = \begin{bmatrix} \frac{l}{EF} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{3EI} & \frac{l}{6EI} \\ 0 & \frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix}.$$

Для элемента второго типа имеем

$$\mathbf{S}^r = \{N \ M_k\}, \quad \Delta^r = \{\Delta_l \ \varphi_k\}, \quad \mathbf{B}^r = \begin{bmatrix} \frac{l}{EF} & 0 \\ 0 & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix}.$$

Для элемента третьего типа

$$\mathbf{S}^r = \{N\}, \quad \Delta^r = \{\Delta_l\}, \quad \mathbf{B}^r = \left[ \frac{l}{EF} \right].$$

Теперь рассмотрим полную дискретную модель сооружения как системы, состоящей из  $m$  элементов  $e^1, e^2, \dots, e^m$ . Для всех этих элементов можно записать уравнения (2), связывающие вектора деформаций элементов  $\Delta^1, \Delta^2, \dots, \Delta^m$  с векторами усилий  $\mathbf{S}^1, \mathbf{S}^2, \dots, \mathbf{S}^m$ . Если объединить все эти уравнения в общую систему, а вектора деформаций и усилий отдельных элементов объединить в вектора  $\mathbf{S} = \{ \mathbf{S}^1 \ \mathbf{S}^2 \ \dots \ \mathbf{S}^r \ \dots \ \mathbf{S}^m \}$  и  $\Delta = \{ \Delta^1 \ \Delta^2 \ \dots \ \Delta^r \ \dots \ \Delta^m \}$ , то полученную систему уравнений можно записать в виде одного матричного уравнения

$$\Delta = \mathbf{B}\mathbf{S}.$$

Оно устанавливает связь между деформациями и усилиями расчетной модели и называется *физическим уравнением*, а матрица

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^1 & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{B}^2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{B}^m \end{bmatrix} = \left[ \mathbf{B}^1 \ \mathbf{B}^2 \ \dots \ \mathbf{B}^m \right]$$

называется *матрицей податливости* системы. Здесь знак  $\left[ \ \right]$  означает диагональность матрицы.

## 6. Решение полной системы уравнений

Итак, при расчете НДС плоской стержневой системы дискретным методом участвуют четыре вектора:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \{P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n\} && \text{– вектор нагрузки;} \\ \mathbf{u} &= \{u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n\} && \text{– вектор перемещений;} \\ \mathbf{S} &= \{S^1 \ S^2 \ \dots \ S^m\} && \text{– вектор усилий;} \\ \mathbf{\Delta} &= \{\Delta^1 \ \Delta^2 \ \dots \ \Delta^m\} && \text{– вектор деформаций.} \end{aligned}$$

Между этими векторами имеется три зависимости:

$$\mathbf{AS} + \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad \text{– уравнение равновесия;} \quad (3)$$

$$\mathbf{A}^t \mathbf{u} + \mathbf{\Delta} = \mathbf{0} \quad \text{– геометрическое уравнение;} \quad (4)$$

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{BS} \quad \text{– физическое уравнение.} \quad (5)$$

Уравнения (3)-(5) объединяются в общую систему уравнений и называются *полной системой уравнений строительной механики*. Ее решение дает полную картину НДС всего сооружения.

Систему уравнений (3)-(5) с тремя неизвестными  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{\Delta}$  можно решать тремя способами.

#### ***а) Решение в смешанной форме***

Для этого правую часть уравнения (5) нужно подставить вместо  $\mathbf{\Delta}$  в уравнение (4). Тогда останутся два уравнения:

$$\mathbf{AS} = -\mathbf{P}, \quad (6)$$

$$\mathbf{A}^t \mathbf{u} + \mathbf{BS} = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Объединим их в одно матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A}^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Из его решения определяются искомые внутренние усилия и деформации сооружения:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A}^t \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Однако, из-за большой размерности обрабатываемой матрицы и ее несимметричности, расчет этим способом сложен для реализации.

#### ***б) Решение в перемещениях***

Для этого из (7) найдем усилия:

$$\mathbf{S} = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{u} = -\mathbf{KA}^t \mathbf{u}, \quad (8)$$

где обратная к  $\mathbf{B}$  матрица  $\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1}$  называется *матрицей жесткости*.

Теперь подставим (8) в (6) и получим

$$\mathbf{AKA}^t \mathbf{u} = \mathbf{P}.$$

Из него определяется вектор перемещений

$$\mathbf{u} = (\mathbf{AKA}^t)^{-1} \mathbf{P}.$$

Если этот результат подставить в (8), то определяются и усилия.

#### ***в) Решение в усилиях***

Из-за сложности решения рассматривать его не будем.

### *Алгоритм дискретного метода*

Порядок расчета по способу б) определяется так:

1. Ввести в расчетную схему узлы и выбрать расчетную модель.
  2. Составить вектор узловых перемещений  $\mathbf{u}$  и вектор нагрузки  $\mathbf{P}$ .
  3. Составить вектора неизвестных усилий  $\mathbf{S}$  и деформаций  $\Delta$ .
  4. Перенести внешнюю нагрузку в узлы.
  5. Вырезая узлы, записать уравнения равновесия.
  6. Собрать матрицу равновесия  $\mathbf{A}$  и вектор нагрузки  $\mathbf{P}$ .
  7. Составить матрицы податливости отдельных элементов  $\mathbf{V}^T$  и собрать из них матрицу податливости необъединенных элементов  $\mathbf{B}$ .
  8. Решить полную систему уравнений строительной механики.
- Решение в перемещениях ведется в следующей последовательности:

- а)  $\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1}$ ;
- б)  $\mathbf{C} = \mathbf{K}\mathbf{A}^t$ ;
- в)  $\mathbf{K}_0 = \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{A}^t = \mathbf{A}\mathbf{C}$ ;
- г)  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{K}_0^{-1}$ ;
- д)  $\mathbf{u} = \mathbf{B}_0\mathbf{P}$ ;
- е)  $\mathbf{S} = -\mathbf{C}\mathbf{u}$ ;
- ж)  $\Delta = \mathbf{B}\mathbf{S}$ .

9. По вектору усилий  $\mathbf{S}$  построить эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ .

При необходимости по векторам  $\mathbf{u}$  и  $\Delta$  можно получить общую картину деформации сооружения.

### **В о п р о с ы**

1. Какой физический смысл имеет геометрическое уравнение?
2. В чем заключается принцип двойственности?
3. Какие типовые элементы рассматриваются в плоской стержневой системе?
4. Как составляются физические уравнения?
5. Что такое матрица податливости элемента?
6. Какими способами решается полная система уравнений?
7. Из каких этапов состоит алгоритм дискретного метода?

### Л е к ц и я 17

## **РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИСТЕМ**

### **1. Внутренние усилия пространственных систем**

Все сооружения являются пространственными, и на них действуют нагрузки, лежащие в разных плоскостях. Поэтому и расчетные схемы сооружений должны быть пространственными.

Как известно, в плоских стержневых системах есть три внутренних усилия  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  (рис. 17.1 а). В пространственных стержневых системах

таких усилий шесть: изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$ , крутящий момент  $M_x = H$ , поперечные силы  $Q_y$  и  $Q_z$ , продольная сила  $N$  (рис. 17.1 б).

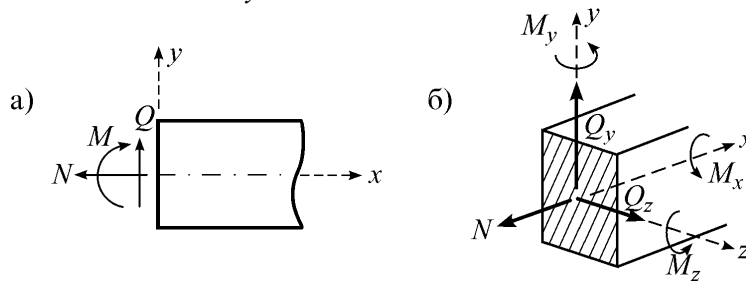


Рис. 17.1

## 2. Опоры пространственных систем и их реакции

Пространственные системы опираются на пространственные опоры со своими кинематическими и статическими свойствами. Обычно связи опор считаются жесткими, с нулевыми перемещениями по их направлениям. При определении опорных реакций используются уравнения равновесия.

В отличие от плоских систем, опоры пространственных систем могут быть 15 типов. Из них рассмотрим четыре типа опор.

1. **Шаровая подвижная опора** (рис. 17.2 а). На рисунке изображается как шарик, свободно качающийся между опорной плоскостью и элементом конструкции, а в расчетной схеме – как одна вертикальная связь. У этой опоры имеется пять степеней свободы – она дает возможность поступательных перемещений в двух и поворотов в трех направлениях. В ней возникает только одна опорная реакция  $R_y$ .

2. **Шаровая опора на цилиндрических катках** (рис. 17.2 б). На рисунке изображается как шарик между двумя балансирами, один из которых жестко связан с элементом конструкции, а другой находится на цилиндрических катках. В расчетной схеме изображается двумя связями. У этой опоры имеется четыре степени свободы – одно поступательное перемещение и три поворота. В ней возникают две реакции  $R_y$  и  $R_z$ .

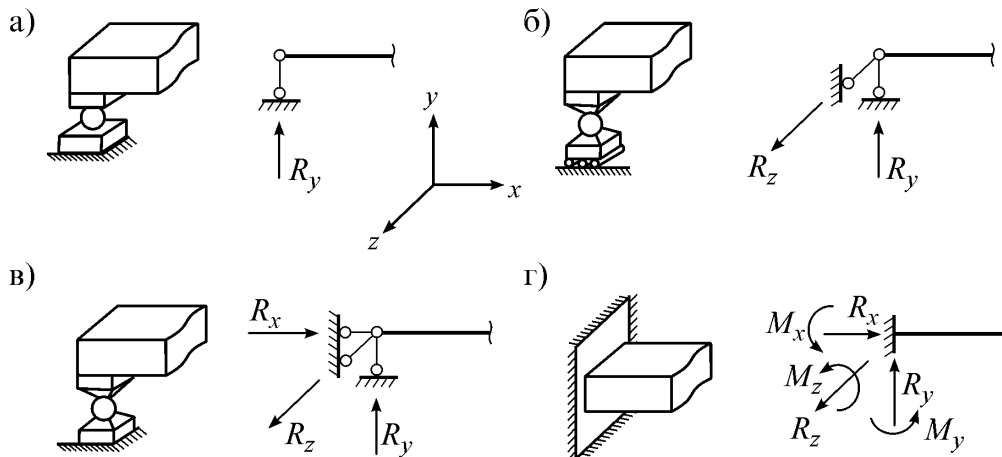


Рис. 17.2

3. **Шаровая неподвижная опора** (рис. 17.2 в). На рисунке изображается как шарик между двумя балансирами, жестко связанными с элементом конструкции и основанием, а в расчетной схеме - в виде трех связей. У этой опоры есть три степени свободы – возможность поворота в трех направлениях. В ней возникают три реакции  $R_x, R_y, R_z$ .

4. **Заделка** (рис. 17.2 г). На рисунке она изображается как заделанный брус (или стержень), а в расчетной схеме как обычная заделка. У заделки степеней свободы нет. В ней возникают три реакции  $R_x, R_y, R_z$  и три реактивных момента  $M_x, M_y, M_z$ .

Кроме рассмотренных здесь, еще имеется 11 различных опор.

Реакции статически определимых пространственных систем определяются из шести уравнений равновесия. Имеется четыре варианта записи этих уравнений, из которых рассмотрим только два:

$$1. \Sigma X=0; \Sigma Y=0; \Sigma Z=0; \Sigma M_x=0; \Sigma M_y=0; \Sigma M_z=0.$$

Здесь  $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$  – суммы проекций на три оси  $x, y, z$ , которые не должны лежать в одной плоскости и быть параллельными; суммы моментов не обязательно составлять относительно тех же осей.

$$2. \Sigma M_1=0; \Sigma M_2=0; \Sigma M_3=0; \Sigma M_4=0; \Sigma M_5=0; \Sigma M_6=0.$$

Здесь  $1, 2, \dots, 6$  – шесть любых осей в пространстве. Но:

- эти оси не должны пересекать одну прямую;
- число параллельных осей не должно быть больше трех;
- если три оси пересекаются в одной точке, остальные три не должны быть параллельными.

### 3. Кинематический анализ пространственных систем

Как известно, расчетная схема сооружения должна быть геометрически неизменяемой. Многие условия и выводы, полученные при кинематическом анализе плоских систем, применимы и при анализе пространственных систем. Однако их недостаточно. Потому при анализе пространственных систем вводятся новые понятия и рассматриваются новые способы анализа их геометрической неизменяемости.

Любую геометрически неизменяемую часть пространственной системы будем называть **телом**. Тело без связей имеет шесть степеней свободы – три независимых поступательных перемещения и три поворота. Следовательно, для исключения этих степеней свободы тело нужно закреплять как минимум шестью связями.

Простейший способ закрепления тела к земле показан на рис. 17.3 а, где имеется три типа опор – шаровая подвижная опора  $A$ , шаровая опора на цилиндрических катках  $B$  и шаровая неподвижная опора  $C$ . Из них опора  $C$  исключает три поступательных перемещения тела, опора  $B$  – два поворота и опора  $A$  – один поворот.

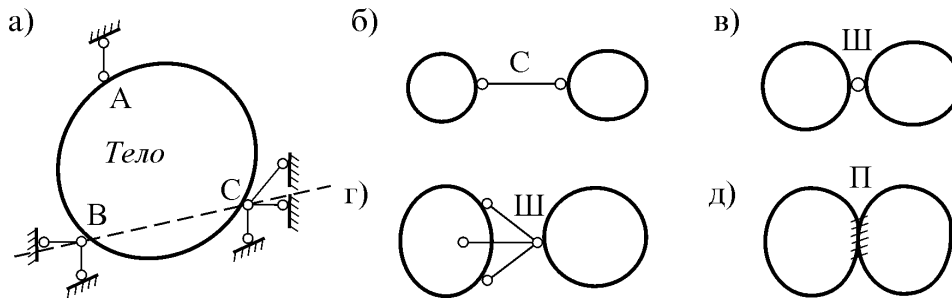


Рис. 17.3

Связи, соединяющие два тела, могут быть разными. Простейшая связь в виде стержня (С) показана на рис. 17.3 б. Если же два тела соединяются шаровым шарниром (рис. 17.3 в), то это соединение эквивалентно трем связям (рис. 17.3 г). Припайка, жестко связывающая два тела (рис. 17.3 д), эквивалентна шести связям.

Если в пространственной системе имеется  $n_T$  тел,  $n_{Ш}$  шаровых шарниров,  $n_C$  стержней,  $n_{C_0}$  опорных связей и  $n_{П}$  припаяек, то число степеней свободы такой системы определяется по формуле

$$W = 6n_T - 3n_{Ш} - n_C - n_{C_0} - 6n_{П}.$$

Как и для плоской системы, для геометрической неизменяемости пространственной системы необходимо выполнение условия  $W \leq 0$ .

#### 4. Расчет пространственных ферм

Расчет пространственных систем намного сложнее расчета плоских систем. Поэтому изучим только основы расчета ферм.

Кинематический анализ такой фермы проводится по формуле

$$W = 3n_U - n_C - n_{C_0},$$

где  $n_U$  – число узлов фермы.

Требование  $W \leq 0$  является необходимым условием геометрической неизменяемости фермы. Для статической определимости необходимо выполнение условия  $W = 0$ . Но, как известно, количественного анализа недостаточно, следует проводить и качественный анализ. Для этого можно использовать принципы образования геометрически неизменяемых пространственных систем. Например, простейшим принципом является присоединение к телу триады (шарового шарнира с тремя связями). При его использовании вначале в ферме выделяют простейшее геометрически неизменяемое тело – треугольную пирамиду. Затем к нему последовательно присоединяют отдельные триады.

Геометрическую неизменяемость пространственной системы можно проверять и методом нулевой нагрузки: *если при расчете системы без нагрузки усилия во всех стержнях и опорные реакции окажутся равными нулю, то система неизменяема; если же возникает неопределенность типа 0/0, система мгновенно изменяема.*

Изучим два метода расчета пространственных ферм.

**Метод сечений** применяется при расчете ферм с простейшим образованием. Имеется два его варианта.

**а) Метод вырезания узлов.** Основан на последовательном вырезании узлов фермы, в которых число неизвестных усилий не более трех. Составляются три уравнения проекций на три оси:

$$\Sigma X=0, \Sigma Y=0, \Sigma Z=0.$$

Эти оси не должны быть параллельными одной плоскости.

На этом методе основан признак определения нулевых стержней (стержней, усилия в которых равны нулю): *если узел с тремя пересекающимися стержнями не нагружен, то усилия во всех трех стержнях равны нулю.*

**б) Метод моментной оси.** Сущность метода: через ферму проводится сквозное сечение, затем составляется и решается уравнение момента относительно некоторой оси.

Ось, для которой составляется уравнение момента, называется **моментной осью**. Эта ось выбирается так, чтобы в уравнение вошла только одна неизвестная.

**Метод разложения на плоские фермы.** Когда стержни фермы располагаются группами на нескольких плоскостях, этот метод дает большой выигрыш в расчетах. Метод основан на следующей теореме: *если силы, действующие на пространственную ферму, лежат в одной плоскости, то усилия во всех стержнях фермы, лежащих вне этой плоскости, равны нулю.*

Порядок расчета фермы по этому методу состоит в следующем: внешняя нагрузка разлагается на несколько плоскостей; части фермы, лежащие в разных плоскостях, рассчитываются только на нагрузку в своей плоскости; затем применяется принцип суперпозиции.

Например, на следующую ферму (рис. 17.4 а) нагрузка действует только в двух плоскостях. Следовательно, ее расчет можно свести к расчету только двух плоских ферм (рис. 17.4 б, в). В стержнях фермы, лежащих на третьей боковой плоскости (рис. 17.4 г), все усилия равны нулю.

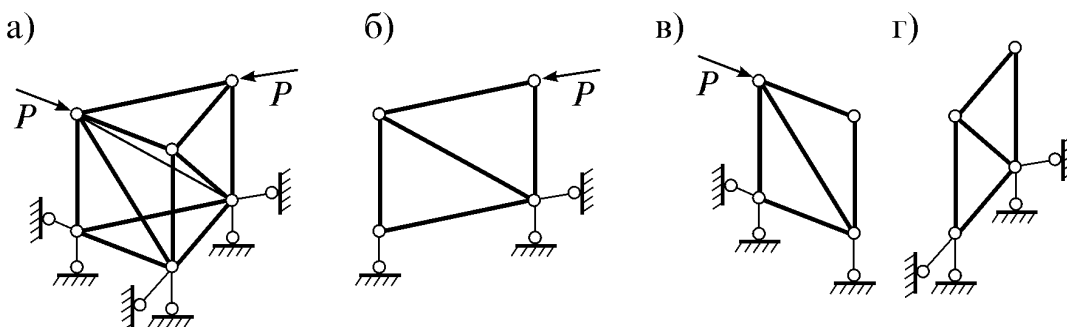


Рис. 17.4

## 5. Определение перемещений пространственных систем

В пространственных стержневых системах в общем случае могут возникать шесть внутренних усилий. Поэтому формула вычисления перемещений содержит шесть компонент:

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left( \frac{M_{Py} \bar{M}_y}{EI_y} + \frac{M_{Pz} \bar{M}_z}{EI_z} + \frac{H_P \bar{H}}{EI_k} + \mu_y \frac{Q_{Py} \bar{Q}_y}{GF} + \mu_z \frac{Q_{Pz} \bar{Q}_z}{GF} + \frac{N_P \bar{N}}{EF} \right) dx,$$

где индексом  $P$  обозначены усилия грузового состояния:  $M_{Py}, M_{Pz}, H_P$  – два изгибающих и крутящий моменты,  $Q_{Py}, Q_{Pz}, N_P$  – две поперечные и продольная силы; надчеркиванием обозначены соответствующие усилия единичного состояния;  $I_y, I_z, I_k$  – моменты инерции относительно осей  $y, z$  и полярный момент инерции;  $\mu_y, \mu_z$  – коэффициенты формы сечения.

Определение перемещений по этой формуле проводится, как и при определении перемещений плоских стержневых систем. В пространственных рамах влиянием продольных и поперечных сил обычно пренебрегают и учитывают только первые три члена этой формулы, а в фермах учитывается только последний член.

## 6. Расчет пространственных рам методом сил

Степень статической неопределимости пространственной рамы определяется по формуле

$$n = 6n_k - n_{y\partial},$$

где  $n_k$  – число замкнутых контуров,  $n_{y\partial}$  – число удаленных связей.

Для ферм используется другая формула:

$$n = n_C + n_{C_0} - 3n_y,$$

где  $n_C$  – число стержней,  $n_{C_0}$  – число опорных связей,  $n_y$  – число узлов.

Основная система и канонические уравнения метода сил имеют тот же смысл и вид, как и для плоских рам. Но входящие в них коэффициенты определяются с учетом изгибающих моментов в двух плоскостях и крутящего момента в каждом элементе рамы.

Построение промежуточных и окончательных эпюр внутренних усилий и их проверка такие же, как и при расчете плоских рам.

### В о п р о с ы

1. Какие усилия возникают в пространственных стержневых системах?
2. Чем отличается кинематический анализ пространственных систем от кинематического анализа плоских систем?
3. Какие методы используются при расчете пространственных ферм?
4. Какие особенности имеют определение перемещений и расчет методом сил пространственных систем по сравнению с плоскими?