

Тема 1 Основные понятия и определения

Соппротивление материалов – это наука о прочности, жесткости и устойчивости отдельных элементов конструкций, сооружений и машин.

Методами сопротивления материалов ведутся практические расчеты и определяются необходимые (надежные) размеры деталей элементов инженерных конструкций.

Основные положения сопротивления материалов опираются на законы и теоремы механики и в первую очередь на законы статики, без знания которых изучение данного предмета становится практически невозможным.

В отличие от теоретической механики, сопротивление материалов рассматривает задачи, где наиболее существенными являются свойства деформируемых тел, а законы движения тела, как жесткого целого, не только отступают на второй план, но в ряде случаев являются попросту не существенными.

Начало науки о сопротивлении материалов обычно связывают с именем знаменитого физика, математика и астронома Галилео Галилея. В 1660 году Р. Гук сформулировал закон, устанавливающий связь между нагрузкой и деформацией. В XVIII веке необходимо отметить работы Л. Эйлера по устойчивости конструкций. XIX и XX века являются временем наиболее интенсивного развития науки в связи с общим бурным ростом строительства и промышленного производства при безусловно огромном вкладе ученых – механиков России.

Сопротивление материалов – одна из сложных дисциплин, занятия по этому курсу должны обязательно сопровождаться составлением конспекта и решением задач.

Совершенно необходимо научиться решать задачи самостоятельно. Следует также научиться делать выводы формул. При этом необходимо обращать особое внимание на физическую сущность явления и на те допущения и ограничения, которые делаются в процессе выводов.

Задачи курса.

Первую задачу курса сопротивления материалов составляет изложение методов расчета элементов конструкций на прочность. Под *прочностью* мы будем понимать способность нагруженной конструкций сопротивляться разрушению.

Вторую задачу курса сопротивления материалов составляет изложение методов расчета элементов конструкций на *жесткость*, т. е. способность элемента конструкции сопротивляться деформациям.

И, наконец, изложение методов расчета элемента конструкции на устойчивость составляет третью задачу курса. Понятие *устойчивости* может быть сформулировано следующим образом: равновесие элемента устойчиво, если малому изменению нагрузки соответствует малое изменение деформаций, и

равновесие неустойчивое, если ограниченный рост нагрузки сопровождается неограниченным ростом деформаций.

При выполнении указанных видов расчета необходимо стремиться к максимальной экономии материала, т. е. к достаточным, но не завышенным размерам деталей машин и механизмов.

Таким образом, сопротивление материалов имеет целью создать практически приемлемые, простые приемы расчета типичных, наиболее часто встречающихся элементов конструкций.

Понятие о расчетной схеме.

Необходимость довести решение каждой практической задачи до некоторого числового результата заставляет в сопротивлении материалов прибегать к упрощающим гипотезам – т. е. предположениям, которые оправдываются в дальнейшем путем сопоставления расчетных данных с экспериментом.

Таким образом, приступая к расчету конструкции, следует прежде всего установить, что в данном случае является существенным и что не существенно.

Необходимо, как говорят, произвести схематизацию объекта конструкции (рис. 1.1), т. е. отбросить все те факторы, которые не могут сколько-нибудь заметным образом повлиять на работу системы в целом.

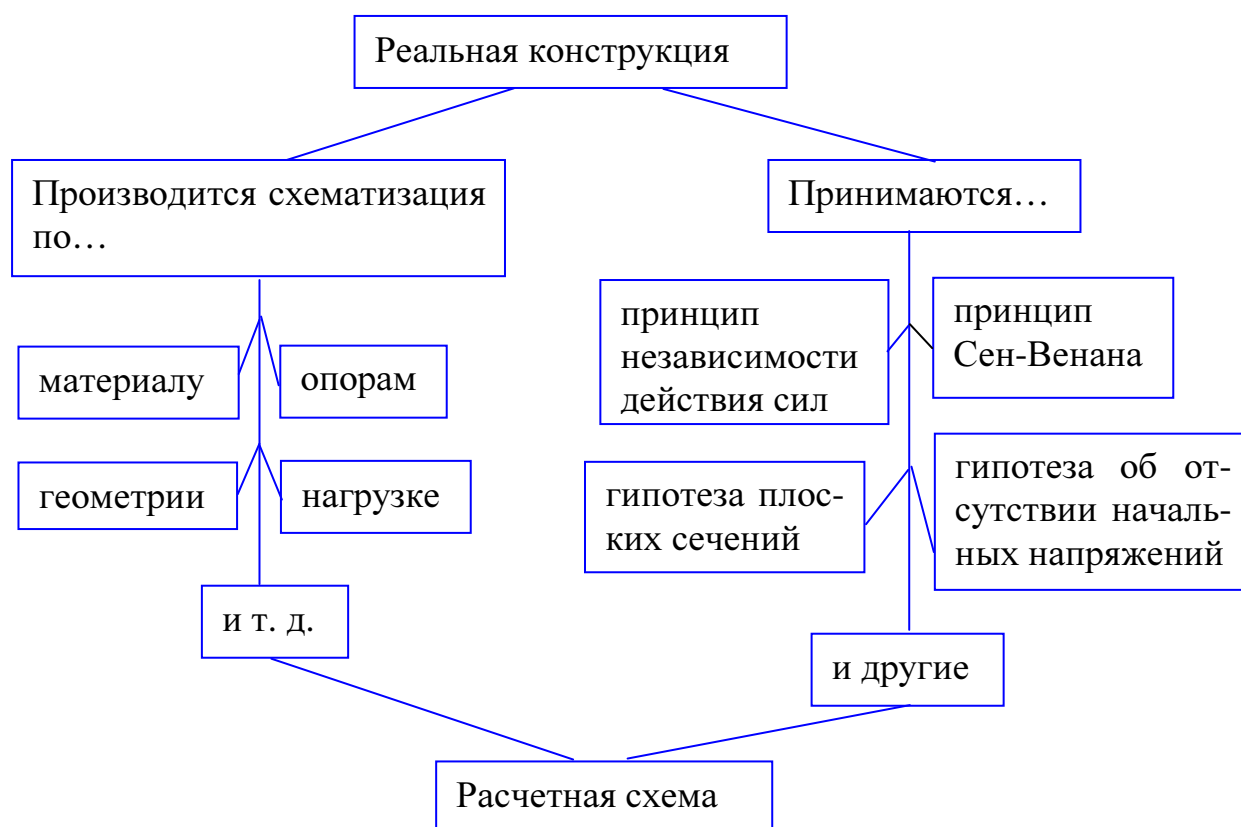


Рис. 1.1

Такого рода упрощения задачи совершенно необходимы, так как решение с полным учетом всех свойств реального объекта является принципиально невозможным в силу их очевидной неисчерпаемости.

Реальный объект, освобожденный от несущественных признаков, носит название расчетной схемы.

Схематически процесс получения расчетной схемы показан на рис. 1.1. Остановимся подробнее на отдельных этапах процесса превращения реальной конструкции в расчетную схему.

Схематизация по материалу.

Будем считать, что *материал* рассчитываемой конструкции *однороден*, т.е. его свойства не зависят от величины выделенного из тела объема.

Вводится *понятие сплошности среды*, как среды, непрерывно заполняющей отведенный ей объем. Вследствие чего к сплошной среде может быть применен анализ бесконечно малых.

Эти положения позволяют не принимать во внимание дискретную, атомистическую структуру вещества. Они применяются даже при расчете конструкций из такого неоднородного материала, как бетон.

Материал *изотропен*, т.е. обладает во всех направлениях одинаковыми свойствами. Это предпосылка используется при решении большинства задач сопротивления материалов, хотя для некоторых материалов (дерево, железобетон, медь, пластмассы и др.) она весьма условна.

Материалы, свойства которых в разных направлениях различны, называются *анизотропными*.

Материал конструкции обладает свойством идеальной *упругости*, т.е. способностью полностью восстанавливать первоначальную форму и размеры тела после снятия внешней нагрузки.

Эта предпосылка справедлива лишь при напряжениях, не превышающих для данного материала определенной, постоянной величины, называемой *пределом упругости*.

Предпосылка об идеальной упругости материала используется при решении большинства задач сопротивления материалов.

Схематизация по геометрии отдельных элементов конструкции.

Основное внимание в сопротивлении материалов уделяется изучению брусев, являющихся наиболее распространенным элементом многих конструкций.

Брусом называется элемент, длина которого значительно больше его поперечных размеров.

Осью бруса называется линия, соединяющая центры тяжести его поперечных сечений.

Плоская фигура, имеющая свой центр тяжести на оси и нормальная к ней, называется его *поперечным сечением*.

Брус с прямолинейной осью часто называют *стержнем* (рис. 1.2, а).

Элемент конструкции, длина и ширина которого во много раз превышают его толщину, называется *оболочкой* (рис. 1.2, б).

Геометрическое место точек, равноудаленных от наружной и внутренней поверхностей оболочки, называется *срединной поверхностью*.

Оболочка, срединная поверхность которой представляет собой плоскость, называется *пластинкой* (рис. 1.2, в).

Элемент конструкции, размеры которого во всех направлениях мало отличаются друг от друга (например, сплошная опора моста), называется *массивным телом* (рис. 1.2, г).

Методы расчета пластинок, оболочек и массивов рассматриваются в курсе «Прикладная теория упругости».

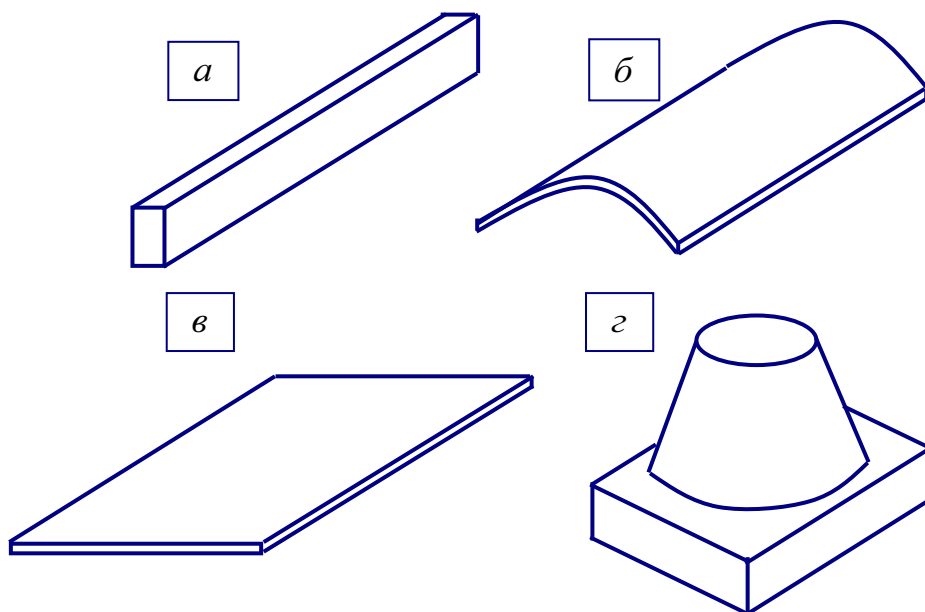


Рис. 1.2

Схематизация по опорным устройствам.

Для прикрепления сооружения к основанию служат опоры, обеспечивающие неподвижность опорных точек конструкции. Обычно в сопротивлении материалов рассматривают три основных типа опор: шарнирно подвижная опора, шарнирно неподвижная опора и жесткое защемление.

На рис. 1.3, а изображена простейшая схема устройства *шарнирно подвижной опоры*, а на рис. 1.3, б – ее условное изображение. Подвижная опора допускает вращение вокруг оси, проходящей через центр шарнира к опоры, и поступательное перемещение по линии k_l . В шарнирно подвижной опоре возникает реакция R_k , нормальная к направлению перемещения катков.

Шарнирно неподвижная опора (рис. 1.3, в) обеспечивает вращение верхнего балансира К вокруг оси, проходящей через центр шарнира к, и не допускает линейных перемещений. В расчетной схеме она представляется двумя опорными стержнями (рис. 1.3, г). В шарнирно неподвижной опоре возникает наклонная реакция, вертикальная и горизонтальная составляющие которой (R_k и H_k) показаны на рис. 1.3, г.

Жесткое защемление (рис. 1.3, д, е, з) не допускает каких либо линейных перемещений и поворота. В защемлении возникают две составляющие R_k ,

H_k и реактивный момент M_k (рис. 1.3, е). Жесткое защемление эквивалентно трем опорным стержням – рис. 1.3, з).

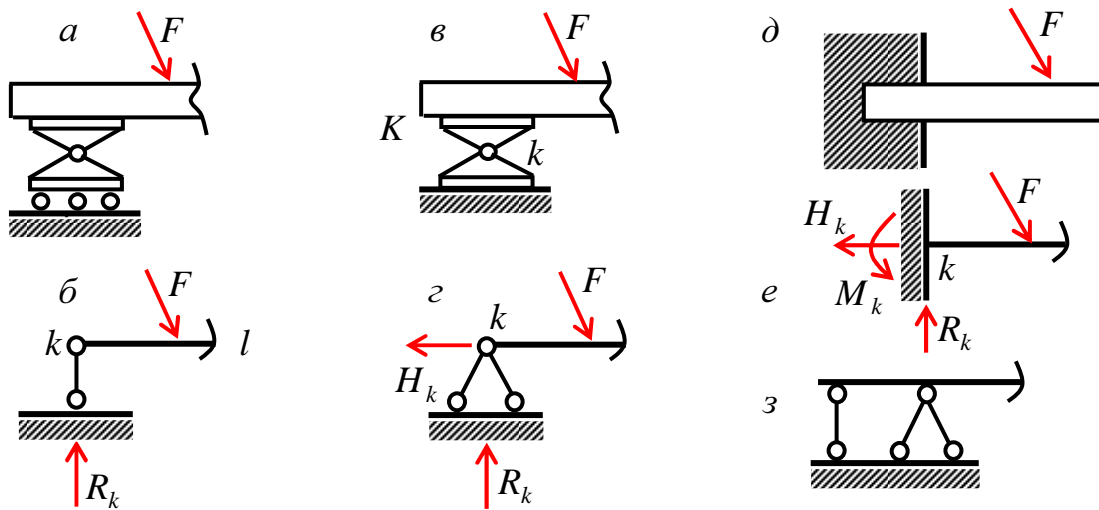


Рис. 1.3

Схематизация по нагрузке.

Распределенные нагрузки могут быть *поверхностными* (давление ветра, воды на стенку) или *объемными* (сила тяжести, силы инерции). Если давление q_1 (H/m^2) передается на элемент конструкции через площадку, размеры которой очень малы по сравнению с размерами всего элемента ($a \ll \ell$), то его на основании принципа Сен-Венана (см. ниже) можно привести к *сосредоточенной силе* F (рис. 1.4).

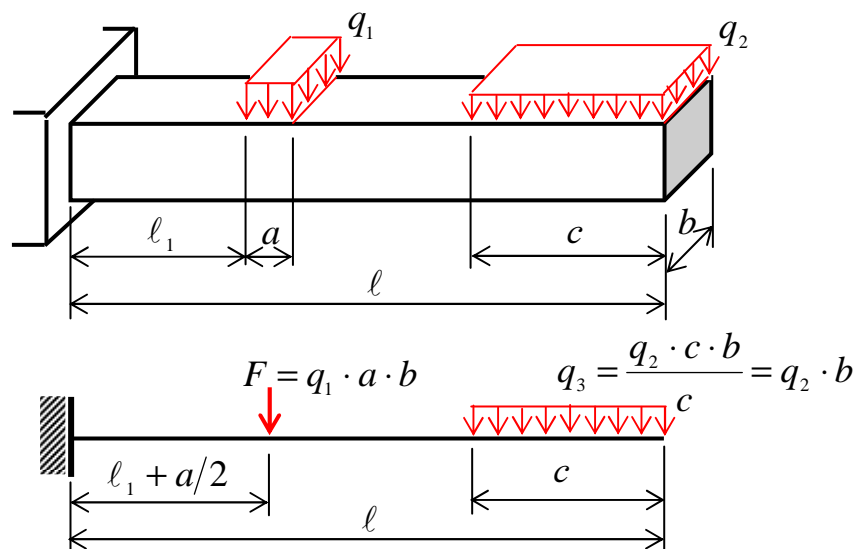


Рис. 1.4

Сосредоточенная сила F измеряется в ньютонах (H), килоньютонах ($кН$). Подобным образом вводятся понятия сосредоточенных изгибающих и крутящих моментов.

Если давление q_2 (H/m^2) передается на элемент конструкции через площадку, размеры которой сравнимы с размерами всего элемента ($c < \ell$), то его представляют в виде *распределенной или погонной нагрузки* q_3 с размерностью H/m (рис. 1.4).

На расчетной схеме вместо бруса изображается его ось.

Нагрузки, распределенные по линии и сосредоточенные в точках, реально не существуют. Их можно получить лишь в результате схематизации реальных нагрузок, распределенных по объему (объемных сил) или по поверхности.

Нагрузки различаются не только по способу их приложения (распределенные и сосредоточенные), но также по длительности действия (постоянные и временные) и характеру воздействия на конструкцию (статические и динамические).

Постоянные нагрузки (например, собственный вес конструкции) действуют на протяжении всего периода эксплуатации конструкции.

Временные нагрузки (например, вес поезда) действуют в течение ограниченного промежутка времени.

Статическими называются нагрузки, которые изменяют свою величину или точку приложения (или направление) с очень небольшой скоростью, так что возникающими при этом ускорениями можно пренебречь.

Если ускорения значительны и нагрузка изменяется во времени с большой скоростью, то мы имеем дело с *динамической* нагрузкой. Действие таких нагрузок сопровождается возникновением колебаний сооружений. При этом, согласно второму закону Ньютона, возникают силы инерции, пропорциональные массам и ускорениям, которыми при расчете пренебречь нельзя.

Временная нагрузка может сохранять более или менее постоянную величину в течение всего периода ее действия, а может непрерывно изменяться по некоторому закону; в последнем случае она называется *переменной нагрузкой*.

Если переменная нагрузка изменяется по циклическому (повторяющемуся) закону, то она называется *циклической*.

В заключение отметим, что если для одного объекта может быть предложено несколько расчетных схем, то, с другой стороны, одной расчетной схеме может быть поставлено в соответствие много различных реальных объектов.

Последнее обстоятельство является весьма важным, так как исследуя некоторую схему, можно получить решение целого конкретных задач, сводящихся к данной схеме.

Основные принципы и гипотезы сопротивления материалов

Принцип независимости действия сил гласит, что результат действия на тело системы сил равен сумме результатов воздействия тех же сил, прилагаемых к телу последовательно и в любом порядке.

Например, прогиб w конца бруса (рис. 1.5) от нагрузок F_1 и F_2 равен сумме прогибов w_1 и w_2 от действия каждой нагрузки в отдельности, т. е. $w = w_1 + w_2$.

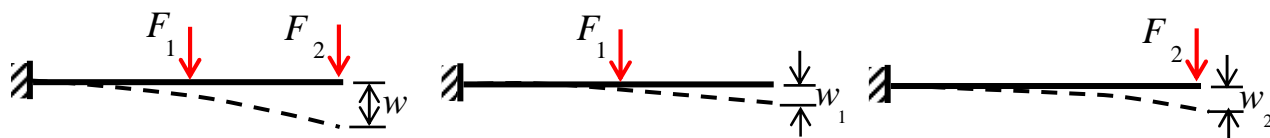


Рис. 1.5

Он применим к деформируемым телам лишь тогда, когда перемещения точек приложения сил, являющиеся результатом деформации тела, во-первых малы по сравнению с размерами тела и во-вторых линейно зависят от действующих сил (*закон Гука*).

Закон Гука используется при решении большинства задач сопротивления материалов.

На основании *принципа Сен-Венана* в точках тела, достаточно удаленных от мест приложения нагрузок, величина внутренних сил весьма мало зависит от конкретного способа приложения этих нагрузок, а зависит только от ее статического эквивалента (рис. 1.6).

Этот принцип во многих случаях позволяет производить замену одной системы сил другой системой, статически эквивалентной, что позволяет часто значительно упростить расчет.

Под *внутренними силами* будем понимать изменение взаимодействия между частицами материала, вызванное внешней нагрузкой.

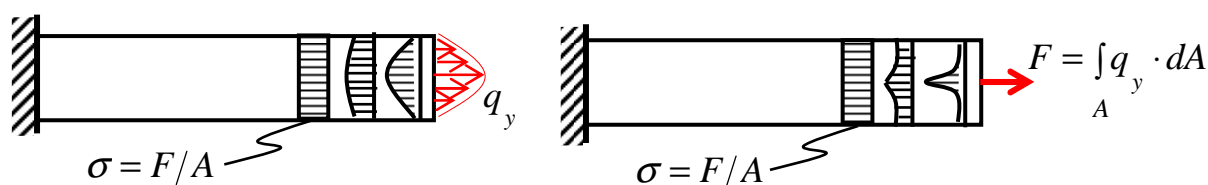


Рис. 1.6

Гипотеза плоских сечений предполагает, что сечение, плоское и перпендикулярное к продольной оси до деформации, остается таким же и после деформации (рис. 1.7).

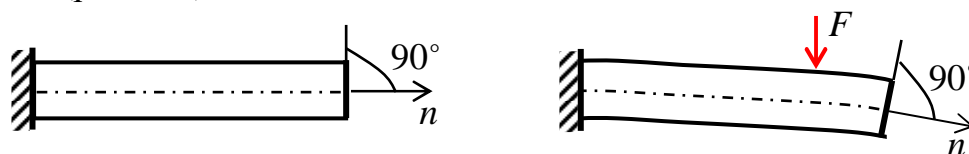


Рис. 1.7

Эта предпосылка впервые была введена Бернулли. Она играет исключительно важную роль в сопротивлении материалов и используется при

выводе большинства формул для расчета брусьев.

Гипотеза об отсутствии начальных напряжений отрицает наличие в теле внутренних сил до приложения внешней нагрузки.

Это допущение полностью не выполняется ни для одного материала. Например, в стальных деталях имеются внутренние силы, вызванные неравномерным остыванием, в дереве – неравномерным высыханием, в бетоне – в процессе твердения и т.д. Однако, часто они достаточно малы, чтобы их учитывать.

По мере необходимости, при выводе формул, будем принимать и другие гипотезы и предположения, основанные на опыте.

Внутренние силовые факторы. Метод сечений. Напряжения, перемещения и деформации

Внутренние силовые факторы

Силы являются мерилем механического взаимодействия тел. Действие окружающих тел на конструкцию заменяется силами, которые называют *внешними*. Взаимодействия между отдельными элементами или частями конструкции, возникающие под действием внешних сил, называются *внутренними силами*. Вообще внутренние силы возникают между всеми смежными частицами тела при нагружении.

В сопротивлении материалов считается, что если нет внешних сил, то отсутствуют и внутренние, то есть, справедлива гипотеза о ненапряженном начальном состоянии тела.

Рассмотрим некоторое тело, имеющее форму бруса (рис.1.8, а). Пусть к нему приложена некоторая система сил F_1, F_2, \dots, F_n , удовлетворяющая условиям равновесия: $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum F_z = 0$, $\sum M_x = 0$, $\sum M_y = 0$, $\sum M_z = 0$.

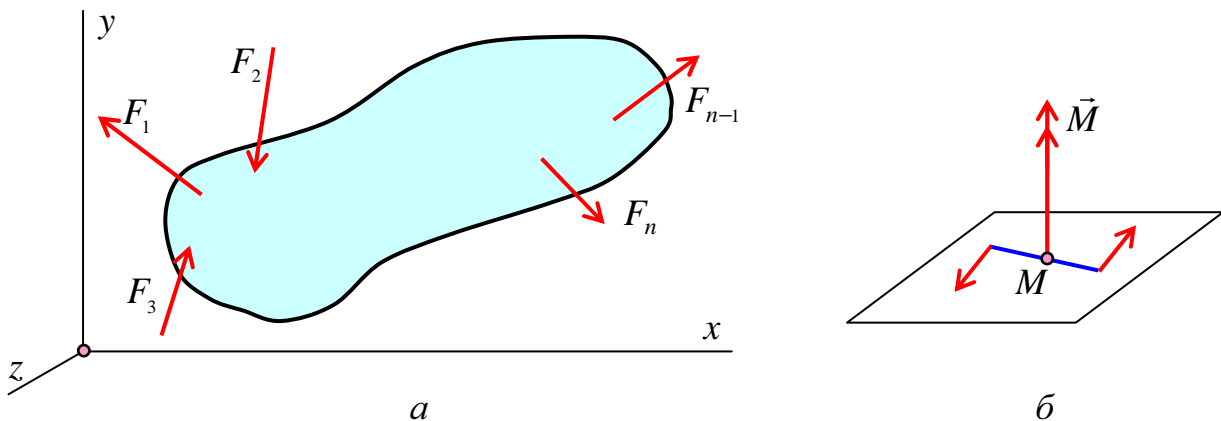


Рис. 1.8

Внутренние силы, возникающие в брус, выявляются только в том случае, если рассечь брус мысленно на две части, например, сечением I (рис.1.9). Такой прием выявления внутренних сил в сопротивлении материалов носит название *метода сечений*.

Внутренние силы по принципу действия и противодействия всегда взаимны. То есть, правая часть бруса действует на левую точно так же, как и левая на правую, и системы внутренних сил воздействия частей бруса друг на друга равны по величине и противоположны по направлению.

Внутренние силы должны быть распределены по сечению так, чтобы деформированные поверхности сечения I при совмещении правой и левой частей тела в точности совпадали (условие неразрывности деформаций).

Понятно, что внутренние силы должны быть такими, чтобы удовлетворялись условия равновесия для правой и левой частей бруса в отдельности. Очевидно, что при помощи уравнений равновесия можно определить не закон распределения внутренних сил, а только их равнодействующую, да и то при условии, если все внешние силы заданы.

Напомним, что при составлении уравнений равновесия, момент пары сил удобно изображать в виде вектора, перпендикулярного плоскости действия пары сил и направленного в ту сторону, откуда поворот, совершаемый парой сил, виден происходящим против хода часовой стрелки (рис.1.8, б).

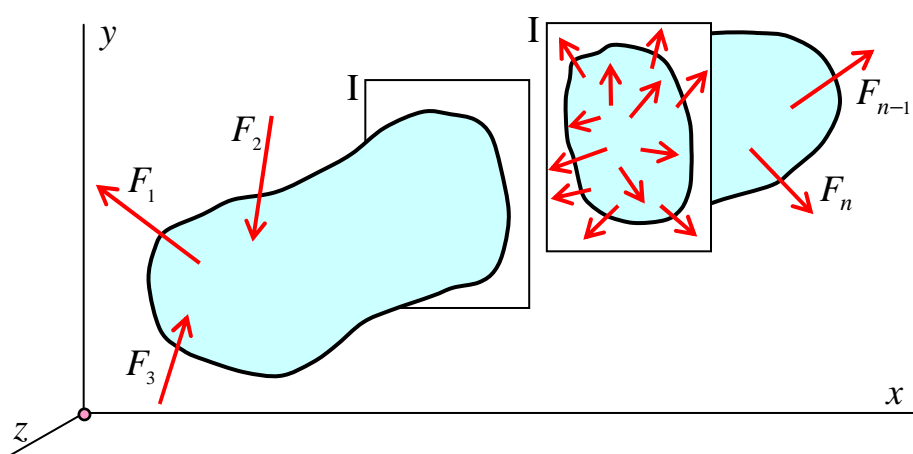


Рис.1.9

Воспользуемся правилами статики и приведем систему внутренних сил к центру тяжести сечения. В результате получим главный вектор \vec{R} и главный момент \vec{M} (рис 1.10,а). Выберем далее систему координат x , y , z .

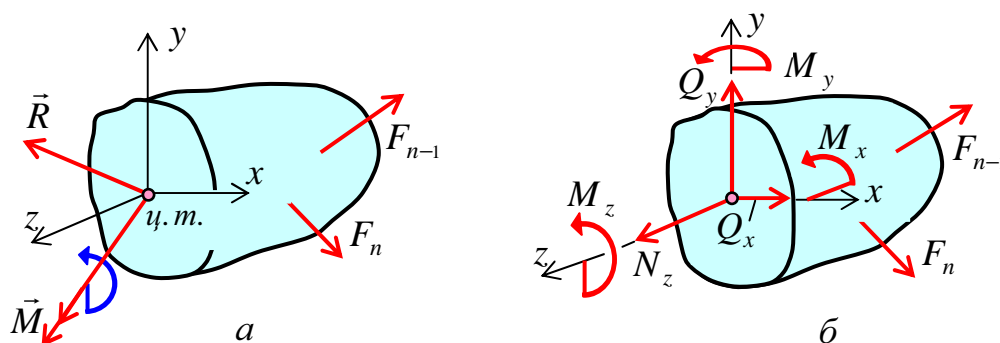


Рис.1.10

Ось z направим по нормали к сечению, а оси x и y расположим в его плоскости. Спроектировав главный вектор и главный момент на оси x , y , z ,

получаем шесть составляющих: три силы и три момента. Эти составляющие называются *внутренними силовыми факторами* в сечении бруса (рис 1.10, б).

Составляющая внутренних сил по нормали к сечению называется *нормальной* или *продольной силой* (N_z) в сечении. Силы Q_x и Q_y называются *поперечными силами*. Момент относительно нормальной оси z (M_z или $M_{кр}$) называется *крутящим моментом*, а моменты M_x и M_y – *изгибающими моментами* относительно осей x и y . При известных внешних силах все шесть внутренних силовых факторов определяются из шести уравнений равновесия, которые могут быть составлены для отсеченной части бруса.

Виды деформаций

Каждому из внутренних силовых факторов N_z , Q_x , Q_y , M_z , M_x и M_y соответствует определенный вид деформации бруса. Продольной силе N_z соответствует *растяжение* (или *сжатие*), поперечной силе Q_x (или Q_y) – *сдвиг*, крутящему моменту M_z – *кручение*, а изгибающему моменту M_x (или M_y) – *чистый изгиб* в плоскости yz (или xz).

Обычно в поперечном сечении наряду с изгибающим моментом (например M_x) возникает и поперечная сила (Q_y). Такой случай деформации называется *поперечным изгибом* (в плоскости yoz). Различные их сочетания, например, сжатие с изгибом, изгиб с кручением и т. п., представляют собой *сложное сопротивление*.

Метод сечений

Общий прием определения внутренних силовых факторов носит название *метода сечений*. Рассечем брус плоскостью I, совпадающей с поперечным сечением бруса (рис 1.9). В полученном поперечном сечении в общем случае действует шесть внутренних силовых факторов: N_z , Q_x , Q_y , M_z , M_x и M_y (рис.1.10, б).

Поскольку весь брус находился в равновесии (рис.1.8, а), то и оставленная его правая часть также находится в равновесии. Тогда внешние силы, приложенные к правой части, будут уравновешиваться внутренними силовыми факторами, действующими на эту часть бруса, т. е. они статически эквивалентны друг другу.

Таким образом, *проекция на какую-либо ось внутренних усилий в сечении (проекции остальных пяти равны нулю), равна проекции на эту же ось все внешних сил, приложенных к оставленной части*.

Аналогично, *момент относительно какой-либо оси внутренних усилий в сечении (моменты остальных пяти равны нулю), равен моменту относительно этой же оси всех внешних сил, приложенных к оставленной части*.

Например, сила N_z равна сумме проекций на ось z всех внешних сил, действующих на оставленную часть бруса, крутящий момент M_z в поперечном

сечении бруса равен сумме моментов относительно оси z всех внешних сил, приложенных к оставленной части бруса т. д.

Для уменьшения вычислительной работы обычно оставляется та часть бруса, на которую действует меньше сил.

Суть метода сечений можно в общем виде представить в виде последовательности следующих действий:

1. Мысленно рассекаем брус на две части в пределах исследуемого i – го участка.
2. Оставляем ту часть бруса, на которую действует меньше сил.
3. Заменяем действие условно отброшенной части бруса положительными внутренними силовыми факторами, приведенными к центру тяжести исследуемого сечения бруса.
4. Выбираем для оставленной части бруса скользящую систему координат (начало координат совмещаем с границей участка, положение исследуемого сечения определяется координатой z_i , где $0 \leq z_i \leq c$ и c – длина i – го участка).
5. Определяем искомые внутренние силовые факторы из уравнений равновесия, которые составляем для оставленной части бруса.

Напряжения

Чтобы характеризовать закон распределения внутренних сил по сечению, необходимо ввести для них числовую меру. За такую меру принимается *напряжение*. Размерность напряжений равна отношению размерности силы к размерности площади. В международной системе единиц СИ напряжения измеряются в паскалях: $1 \text{Па} = 1 \text{Н}/\text{м}^2$.

Рассмотрим сечение A некоторого тела (рис.1.11, а). Зафиксируем в нем точку k с единичным вектором нормали n . В окрестностях этой точки выделим малую площадку ΔA . Главный вектор внутренних сил, действующих на этой площадке, обозначим через ΔR . За *среднее напряжение* на площадке ΔA принимаем отношение

$$p_{cp} = \Delta R / \Delta A.$$

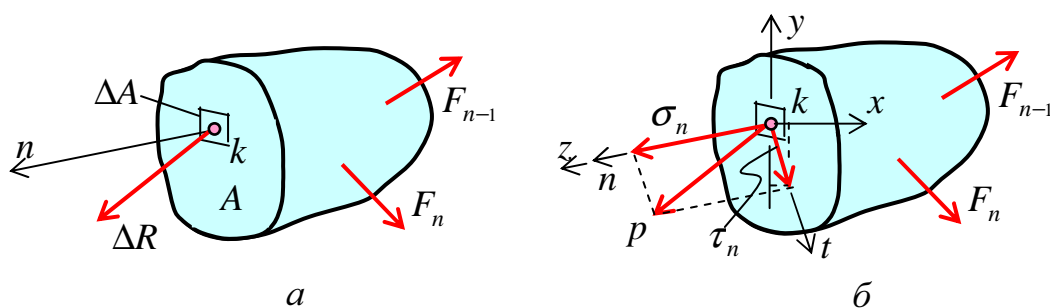


Рис.1.11

Будем уменьшать площадку ΔA , стягивая ее в точку k . Поскольку среда непрерывна, возможен предельный переход при $\Delta A \rightarrow 0$. В пределе получаем

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A} = \vec{p}.$$

Векторная величина \vec{p} представляет собой *полное напряжение* в точке k в сечении A . В общем случае направление вектора полного напряжения \vec{p} не совпадает с направлением вектора нормали n (рис.1.11, б). Полное напряжение \vec{p} может быть разложено на три составляющие по нормали к плоскости сечения и по двум осям в плоскости сечения. Проекция вектора \vec{p} на направление вектора n обозначается σ_n или σ_z называется *нормальным напряжением*. Составляющие в плоскости сечения называются *касательными напряжениями* и обозначаются через проекции τ_n на ось x (τ_x) и на ось y (τ_y). Очевидно, что

$$p^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_z^2 + \tau_x^2 + \tau_y^2.$$

Нормальное напряжение в данной точке по определенному сечению характеризует интенсивность сил отрыва или сжатия частиц элемента конструкции, расположенных по обе стороны этого сечения. а касательное напряжение – интенсивность сил, сдвигающих эти частицы в плоскости рассматриваемого сечения.

Если через точку k в теле провести другую секущую площадку, напряжение p в той же точке будет, вообще говоря, другим. Совокупность напряжений для множества площадок, проходящих через точку, образует *напряженное состояние* в точке.

Напряженное состояние является в сопротивлении материалов одним из наиболее важных понятий. Позже будут рассмотрены наиболее простые и часто встречающиеся частные случаи напряженного состояния.

На рис.1.12 в поперечном сечении показаны нормальные и касательные напряжения и их статические эквиваленты – внутренние силы.

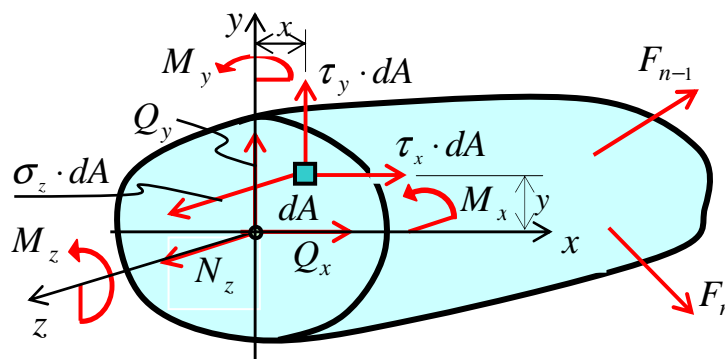


Рис. 1.12

Напряжения будут связаны с соответствующими внутренними силами следующими зависимостями:

$$\sum F_x = 0, \quad N_z = \int_A \sigma_z \cdot dA,$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0, N_z &= \int_A \sigma_z \cdot dA \\ \sum F_z = 0, N_z &= \int_A \sigma_z \cdot dA \\ \sum M_x = 0, M_x &= \int_A \sigma_z \cdot y \cdot dA \\ \sum M_y = 0, M_x &= \int_A \sigma_z \cdot y \cdot dA \\ \sum M_z = 0, M_x &= \int_A \sigma_z \cdot y \cdot dA \end{aligned}$$

Перемещения

При действии внешних сил наряду с возникновением напряжений происходит изменение объема тела и его формы, т. е. тело деформируется. При этом различают начальное (недеформированное) и конечное (деформированное) состояния тела.

Отнесем недеформированное тело к декартовой системе координат $oxuz$ (рис.1.13). Пусть положение некоторой точки M определено. Под действием внешних сил она меняет положение в пространстве (точка M_1).

Вектор, имеющий начало в точке недеформированного тела, а конец в той же точке деформированного тела, называется вектором *полного перемещения точки* ($\overrightarrow{MM_1}$). Его проекции на оси носят название *перемещений по осям*. Они обозначаются через u , v и w соответственно осям x , y и z .

Аналогично вводится понятие *углового перемещения*. Если рассмотреть отрезок прямой между двумя близкими точками до и после изменения формы тела, то легко установить, что этот отрезок поворачивается в пространстве на некоторый угол. Этот угол поворота также характеризуется вектором, который может быть разложен по осям x , y и z .

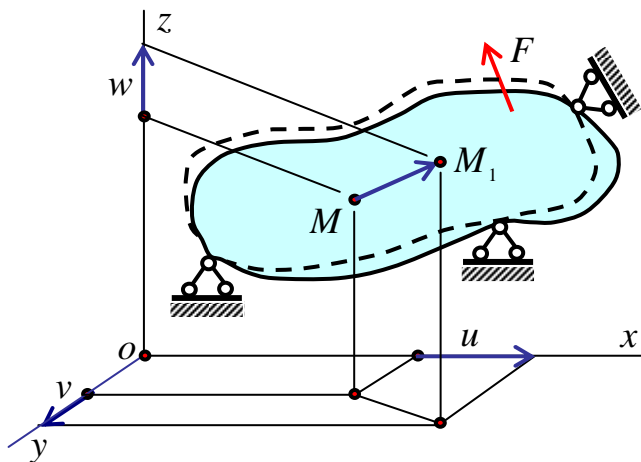


Рис.1.13

Допущение, при котором считается, что перемещения u , v и w любой точки являются малыми по сравнению с общими геометрическими размерами тела, носит название *принципа начальных размеров*.

Согласно этому принципу при составлении уравнений статики (уравнений равновесия) тело рассматривают как недеформированное, имеющее те же геометрические размеры, какое оно имело до нагружения внешними силами.

Деформации

Для того чтобы характеризовать интенсивность изменения формы и размеров вводится понятие деформации.

Через точку M в направлениях осей x , и y проведем бесконечно малые отрезки длиной dx и dy . После приложения нагрузки к телу точка M переместится в положение M_1 , а длины этих отрезков и угол между ними изменятся на Δdx , Δdy и γ_{xy} соответственно (рис. 1.14).

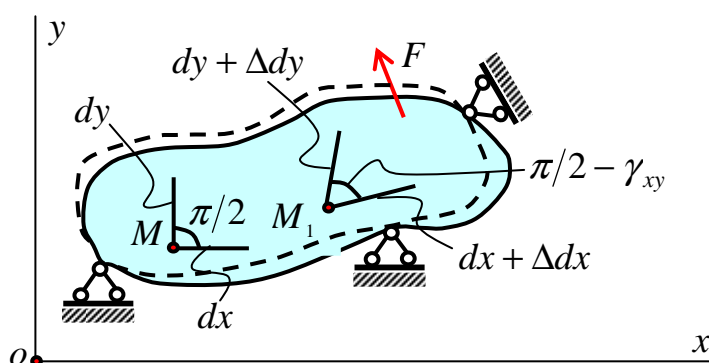


Рис. 1.14

Отношение $\frac{\Delta dx}{dx}$ приращения длины отрезка Δdx к его начальной длине dx будем называть *линейной деформацией* (эпсилон) в точке M вдоль оси x , т. е. $\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$. Если рассматривать деформации в направлении других координат-

ных осей, то имеем $\epsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}$ и $\epsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}$.

Изменение первоначально прямого угла между отрезками длиной dx и dy после приложения нагрузки к телу, выраженное в радианах, будем называть *угловой деформацией* γ_{xy} (гамма) в точке M в плоскости xu . Аналогично γ_{yz} и γ_{zx} будем называть угловыми деформациями в плоскостях yz и zx .

Линейные и угловые деформации – величины безразмерные. Деформацию ϵ_x часто называют *относительной линейной деформацией*, а γ_{xy} – *относительным сдвигом*.

Совокупность линейных деформаций по различным направлениям и угловых деформаций по различным плоскостям, проходящим через рассматриваемую точку, представляет собой *деформированное состояние* в этой точке.

Тема 2 Механические характеристики материалов

Введение

При решении простейших задач на растяжение и сжатие мы уже встретились с необходимостью иметь некоторые исходные экспериментальные данные, на основе которых можно было бы построить теорию. К этим экспериментальным данным можно отнести модуль продольной упругости E , коэффициент поперечной деформации μ (коэффициент Пуассона), допускаемые напряжения $[\sigma]$ и другие.

В связи с этим создано много различных видов испытаний, но наиболее распространенными являются испытания на растяжение (рис. 2.1, а). Для некоторых строительных материалов – камня, цемента, бетона и т. д. – основными являются испытания на сжатие (рис. 2.1, б, в). При их помощи удается получить наиболее важные характеристики материалов, находящие прямое применение в расчетной практике.

Для испытания используются специально изготовленные образцы с размерами, определенными ГОСТами (рис. 2.1).

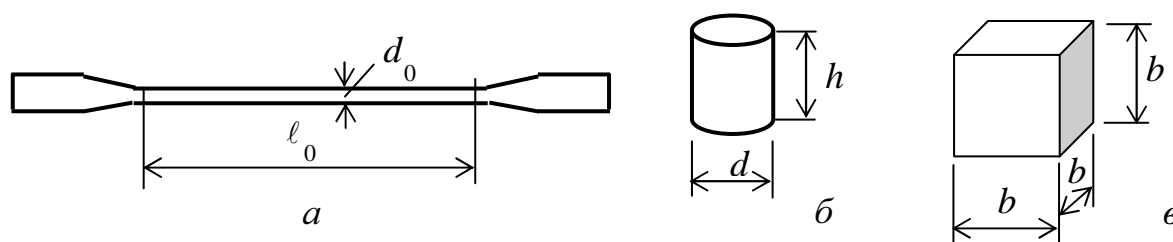


Рис. 2.1

Испытания производятся на машинах различных типов. В процессе испытания специальное устройство автоматически вычерчивает график, изображающий зависимость между действующей на образец (рис. 2.1, а) продольной силой и удлинением образца (рис. 2.2, а). Для более удобного изучения свойств материалов этот график представляют в виде условной диаграммы, построенной в координатах «напряжение – относительная деформация» (рис. 2.4, а), где ординаты уменьшены в « A_0 » раз, а абсциссы в « ℓ_0 » раз.

Диаграмма растяжения

На рис. 2.2, а представлена диаграмма растяжения малоуглеродистой стали (марки Ст. 3). Полученная кривая может быть условно разделена на следующие четыре зоны.

В зоне упругости материал подчиняется закону Гука и диаграмма представляет собой прямую линию. На рис. 2.2, а этот участок для большей

наглядности показан с отступлением от масштаба, поскольку удлинения и, следовательно, относительные деформации очень малы. Прямая, будучи вычерченной в масштабе, совпала бы в пределах ширины линии с осью ординат.

Далее идет зона общей текучести, включающая в себя горизонтальный участок диаграммы, который называется площадкой текучести. Здесь происходит существенное изменение длины образца без заметного увеличения нагрузки. Напряжение, соответствующее площадке текучести, называется *пределом текучести* σ_T (рис.2.3 , а), который представляет собой отношение силы, соответствующей площадке текучести, к первоначальной площади его

поперечного сечения: $\sigma_T = \frac{F_T}{A_0}$, где $A_0 = \frac{\pi \cdot d_0^2}{4}$.

Наличие площадки текучести для большинства металлов не является характерным. В этом случае за предел текучести принимается условно величина напряжения, при котором остаточная деформация $\varepsilon_{ост} = 0,002$ или 0,2% (рис.2.2 , б). В некоторых случаях устанавливается предел $\varepsilon_{ост} = 0,5\%$. Условный предел текучести обозначается через $\sigma_{0,2}$ или $\sigma_{0,5}$ в зависимости от принятой величины допуска на остаточную деформацию.

Предел текучести легко поддается определению и является одной из основных механических характеристик материала.

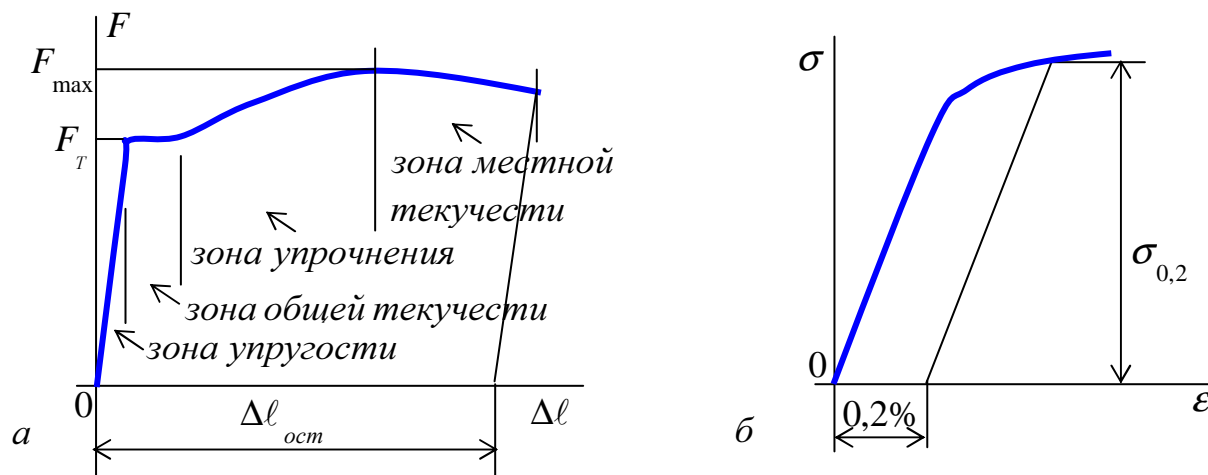


Рис.2.2

Участок диаграммы от конца площадки текучести до наивысшей точки называется зоной упрочнения. В зоне упрочнения (рис.2.2 , а) удлинение образца сопровождается возрастанием нагрузки, но неизмеримо более медленным (в сотни раз), чем на упругом участке. В стадии упрочнения на образце намечается место будущего разрыва и начинает образовываться так называемая *шейка* – местное сужение образца (рис.2.3).

Отношение наибольшей силы, которую выдерживает образец, к первоначальной площади его поперечного сечения называется *пределом прочности*,

или *временным сопротивлением*: $\sigma_{\sigma} = \frac{F_{\max}}{A_0}$ (рис. 2.4, а). В силу удобства и простоты ее определения она прочно вошла в расчетную практику как основная сравнительная характеристика прочностных свойств материала.

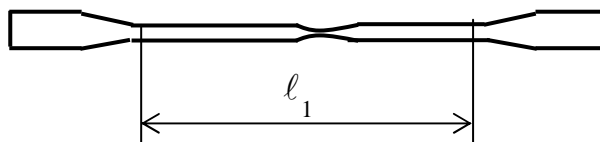


Рис. 2.3

Дальше удлинение образца носит местный характер, т.е. в пределах шейки, где и происходит разрыв образца. Поэтому последний участок диаграммы растяжения малоуглеродистой стали называется зоной местной текучести (рис. 2.2, а). Здесь условное напряжение уменьшается (рис. 2.4, а) соответственно уменьшению величины растягивающей силы (рис. 2.2, а). Истинное напряжение по сечению шейки при этом возрастает, как показано на рис. 2.4, а штриховой линией. Различие между истинным и условным напряжениями имеется и до образования шейки, но оно весьма мало и в расчетной практике не учитывается. Правый конец кривой соответствует разрушению образца. У многих материалов разрушение происходит без заметного образования шейки.

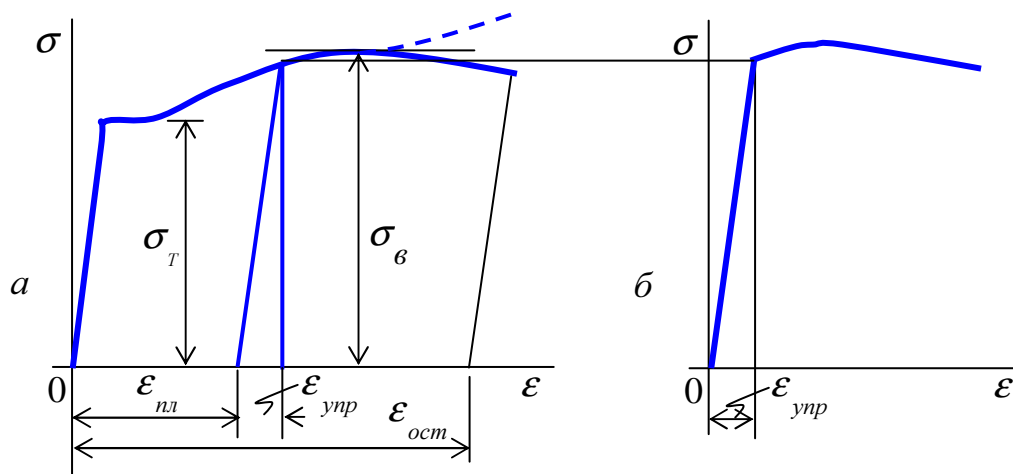


Рис. 2.4

Если испытываемый образец, не доводя до разрушения, разгрузить, то в процессе разгрузки зависимость $\sigma = f(\epsilon)$ изобразится прямой параллельной упругому участку диаграммы. При разгрузке видно, что $\epsilon = \epsilon_{упр} + \epsilon_{nl}$ (рис. 2.4, а) или $\Delta l = \Delta l_{упр} + \Delta l_{nl}$, т.е. удлинение полностью не исчезает. Оно умень-

шается на величину упругой части удлинения $\Delta\ell_{упр}$. Величину $\Delta\ell_{пл}$ называют остаточным удлинением или пластическим удлинением, а соответствующую ему деформацию $\varepsilon_{пл}$ пластической деформацией.

Если образец был нагружен в пределах упругого участка и затем разгружен, то удлинение будет чисто упругим, и $\Delta\ell = 0$.

При повторном нагружении образца диаграмма растяжения принимает вид прямой, параллельной упругому участку диаграммы, и далее по кривой. В результате получаем укороченную диаграмму (рис. 2.4, б). Весьма существенным является то, что в результате предварительной вытяжки материал приобретает способность воспринимать без остаточных деформаций большие нагрузки.

Явление повышения упругих свойств материала в результате предварительного пластического деформирования носит название *наклепа*, или *нагартовки*, и широко используется в технике. Если требуется снять наклеп, то деталь подвергается отжигу.

Материалы, разрушению которых предшествует возникновение значительных остаточных деформаций, называются *пластичными*. К ним, в частности, относится Ст. 3, диаграмма растяжения которой представлена на рис. 2.4, а.

Степень пластичности материала может быть охарактеризована так называемым удлинением при разрыве ($\delta\%$). Чем больше эта величина, тем пластичнее материал.

Удлинение при разрыве представляет собой величину средней остаточной деформации, которая образуется к моменту разрыва на определенной стандартной длине образца (ℓ_0).

Удлинение при разрыве будет следующим:

$$\delta = \frac{\ell_1 - \ell_0}{\ell_0} \cdot 100\% = \frac{\Delta\ell_{ост}}{\ell_0} \cdot 100\% ,$$

где ℓ_1 – длина образца после разрыва, измеряемая после соединения частей разорванного образца (рис. 2.3).

К числу весьма пластичных материалов относятся отожженная медь, алюминий, латунь, малоуглеродистая сталь и др.

Противоположным свойству пластичности является свойство *хрупкости*, т.е. способность материала разрушаться без образования заметных остаточных деформаций.

Материалы, обладающие этим свойством, называются *хрупкими*. К хрупким материалам относятся чугун, высокоуглеродистая инструментальная сталь, стекло, кирпич, камни и др.

Диаграмма сжатия

При испытании на сжатие разрушение образца из хрупких материалов происходит с образованием трещин по наклонным и продольным плоскостям (рис. 2.5, а – чугун, б – бетон, в – дерево).

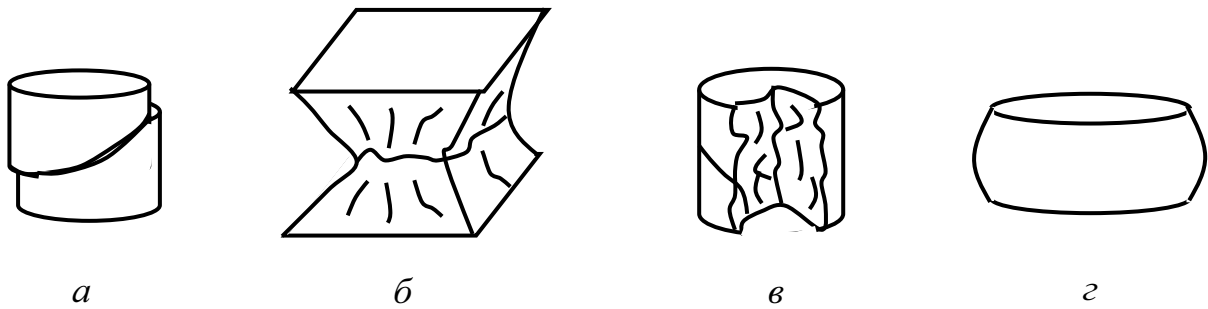


Рис. 2.5

Диаграмма сжатия этих материалов (рис. 2.6, а) сохраняет качественные особенности диаграммы растяжения. Предел прочности хрупкого материала при сжатии определяется так же, как и при растяжении. Сопоставление предела прочности хрупких материалов при сжатии с пределом прочности при растяжении показывает, что эти материалы обладают, как правило, более высокими прочностными показателями при сжатии, нежели при растяжении.

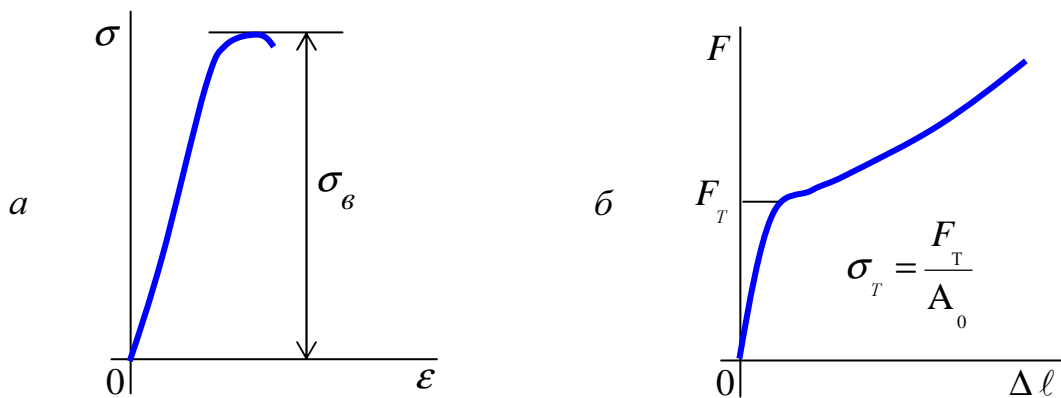


Рис. 2.6

Существуют материалы, способные воспринимать при растяжении большие нагрузки, чем при сжатии. Это обычно материалы, имеющие волокнистую структуру. – дерево и некоторые типы пластмасс. Этим свойством обладают и некоторые металлы, например магний.

Иначе ведут себя при сжатии пластичные материалы. На рис. 2.6, б представлена диаграмма сжатия малоуглеродистой стали. Здесь, как и для растяжения, обнаруживается площадка текучести с последующим переходом к зоне упрочнения. В дальнейшем, однако, нагрузка не падает, а резко возрастает. Происходит это в результате того, что образец расплющивается (рис. 2.5, г), и площадь его сечения увеличивается, в связи с чем увеличивается величина сжимающей силы. Довести образец до разрушения практически не удастся.

Таким образом, понятие предела прочности при сжатии пластичной стали лишено физического смысла. Пределы текучести при растяжении и сжатии для одной и той же пластичной стали практически одинаковы.

Деление материалов на пластичные и хрупкие является условным. В зависимости от условий испытания один и тот же материал может вести себя и как пластичный и как хрупкий. Например, чугунный образец при испытании на растяжение под большим давлением окружающей среды разрывается с образованием шейки. Многие горные породы, находящиеся под давлением вышележащих слоев, при сдвигах земной коры претерпевают пластические деформации.

В зависимости от условий эксплуатации конструкции может быть исследовано влияние на проявление свойств пластичности и хрупкости – времени нагружения (фактора времени), температурного воздействия и др.

Заметим, что все выше сказанное о свойствах материалов относится к испытаниям в так называемым нормальным условиям.

Коэффициент запаса

В результате испытания на растяжение и сжатие мы получаем основные данные о механических свойствах материала. Теперь рассмотрим вопрос о том, как использовать полученные результаты испытаний в практических расчетах инженерных конструкций на прочность.

Как уже отмечалось, основным и наиболее распространенным является метод расчета по напряжениям. Согласно этому методу, прочность конструкции считается обеспеченной, если наибольшее расчетное напряжение σ_{\max} , возникающее в некоторой точке конструкции, не превышает некоторой величины, свойственной данному материалу и условиям работы и называемой *допускаемым напряжением* $[\sigma]$: $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$.

Значение допускаемого напряжения устанавливается путем деления некоторого предельного для данного материала напряжения на число, большее единицы, называемое *коэффициентом запаса* или просто *запасом*: $[\sigma] = \sigma_{np} / n$.

Остается решить вопрос, какое напряжение принимать за предельное σ_{np} и как назначить величину коэффициентом запаса n .

Для того чтобы избежать в работающей конструкции образования заметных остаточных деформаций, за величину σ_{np} для пластичных материалов принимается обычно предел текучести. Коэффициент в этом случае обозначается через n_T и называется *коэффициентом запаса по текучести*:

$$[\sigma] = \sigma_{np} / n_T .$$

Для хрупких, а в некоторых случаях и умеренно пластичных материалов, за σ_{np} принимается предел прочности σ_{σ} . Тогда получаем

$$[\sigma] = \sigma_{\sigma} / n_{\sigma} ,$$

где n_{σ} – *коэффициент запаса по пределу прочности*.

Тема 3 Растяжение и сжатие

Основные понятия

Под растяжением понимается такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор – *продольная сила* N_z , а все прочие внутренние силовые факторы (поперечные силы, крутящий и изгибающий моменты) равны нулю.

Это самый простой и часто встречающийся вид деформации. Обычно он наблюдается когда внешняя нагрузка действует вдоль продольной оси стержня.

Продольной осью стержня называется линия, проходящая через центры тяжести поперечных сечений.

Обычным является растяжение стержня силами, приложенными к его концам. Передача усилий к стержню может быть осуществлена различными способами, как это показано на рис. 3.1.

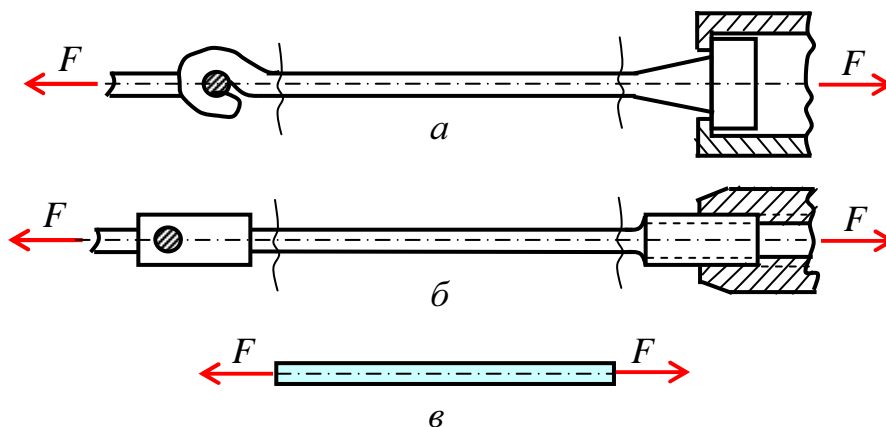


Рис. 3.1

Во всех случаях, однако, система внешних сил образует равнодействующую F , направленную вдоль оси стержня. Поэтому независимо от условий крепления растянутого стержня, расчетная схема в рассматриваемых случаях (рис. 3.1, а, б) оказывается единой (рис. 3.1, в) согласно принципу Сен – Венана.

Если воспользоваться методом сечений (рис. 3.2), то становится очевидным, что во всех поперечных сечениях стержня возникают нормальные силы N_z , равные силе F (рис. 3.2, б).

Сжатие отличается от растяжения, формально говоря, только знаком силы N_z . При растяжении нормальная сила N_z направлена от сечения (рис. 3.2, б), а при сжатии – к сечению.

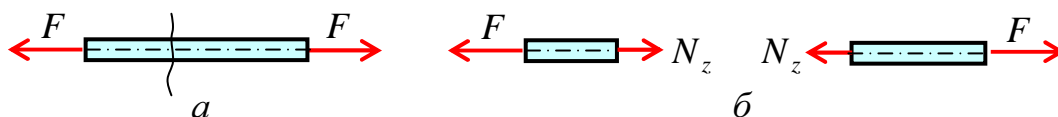


Рис. 3.2

Растягивающие продольные силы принято считать положительными (рис. 3.3, а), а сжимающие – отрицательными (рис. 3.3, б).

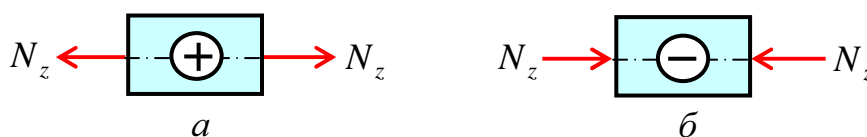


Рис. 3.3

Вместе с тем между растяжением и сжатием могут обнаружиться и качественные различия, как, например, при изучении процессов разрушения материала или при исследовании поведения длинных и тонких стержней, для которых сжатие сопровождается, как правило, изгибом.

При расчете стержней, испытывающий деформацию растяжения, на прочность и жесткость при статическом действии нагрузки, надо решить две основные задачи. Это определение напряжений (от N_z), возникающих в стержне, и нахождение линейных перемещений в зависимости от внешней нагрузки.

Продольная сила

График, показывающий изменение продольных сил по длине оси стержня, называется *эпюрой продольных сил* (эп. N_z). Он дает наглядное представление о законе изменения продольной силы.

Продольные силы (N_z), возникающие в поперечных сечениях стержня, определяются по внешней нагрузке с помощью метода сечений.

Рассмотрим стержень постоянного поперечного сечения, жестко заземленный правым концевым сечением и нагруженный заданной внешней сосредоточенной нагрузкой F и распределенной q (рис. 3.4, а).

Прежде всего определим опорную реакцию R_1 , задавшись ее направлением вдоль оси z .

$$\Sigma F_z = 0, \quad -R_1 - 22 + 24 \cdot 0.6 = 0, \quad R_1 = -7.6 \text{ кН}.$$

Знак минус говорит о том, что действительное направление опорной реакции R_1 противоположно показанному на рис. 3.4, а. Исправляем его и в дальнейших расчетах знак минус у опорной реакции R_1 не учитываем (рис. 3.4, в, г).

Под *участком* будем понимать часть стержня, на которой N_z представляется некоторым аналитическим выражением. На другом участке N_z будет определяться другой функцией.

Границами участка являются начало и конец стержня, сечения, где приложены сосредоточенные нагрузки, начинается и заканчивается распределенная нагрузка.

В нашем случае стержень разбивается на два участка. В пределах первого участка мысленно разрежем стержень на две части нормальным сечением (рис. 3.4, б, в).

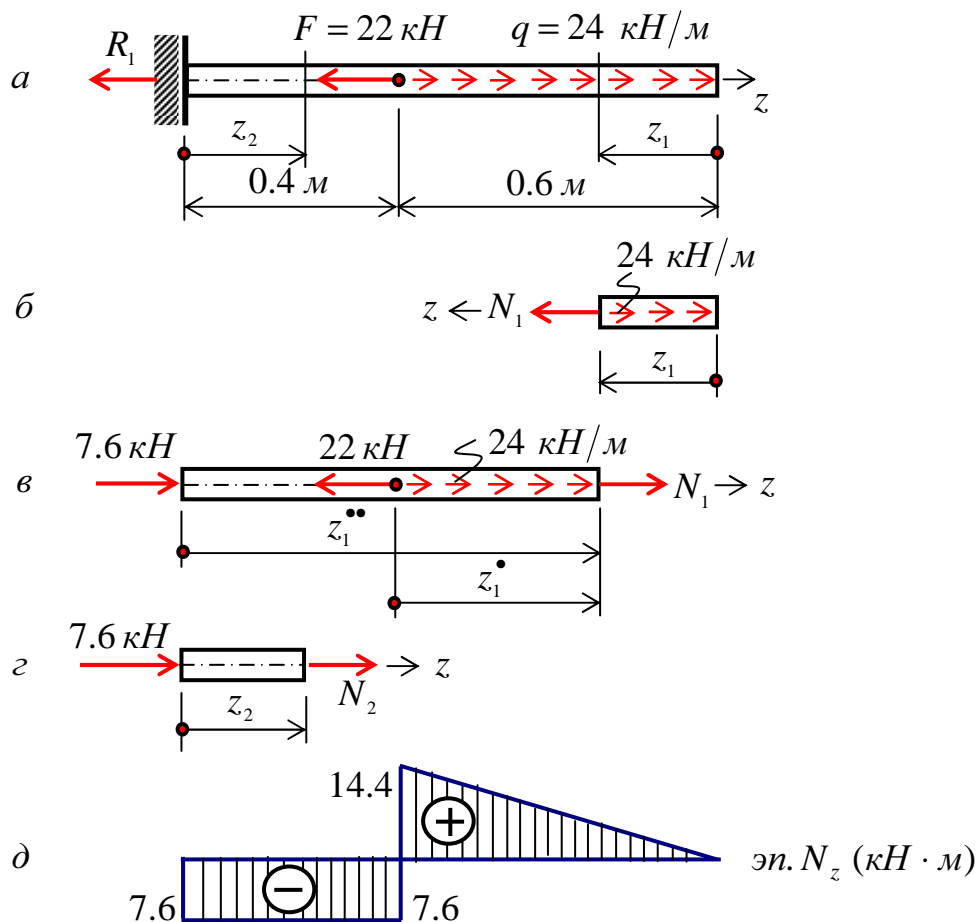


Рис. 3.4

Направления продольных сил (рис. 3.4, б – г) приняты в предположении, что они являются растягивающими (т. е. положительными). Если в результате расчета значение N_i получится со знаком «минус», то это будет означать, что в действительности стержень в этом сечении сжат.

Поскольку обе части стержня являются равноправными, то N_1 на первом участке в сечении, определяемом координатой z_1 , можно определить рассматривая равновесие его правой (рис. 3.4, б) либо левой (рис. 3.4, в) частей.

В нашем случае для определения N_1 предпочтительнее рассмотреть равновесие правой части – к ней приложено меньше сил (рис. 3.4, б). Начало координат совмещаем с правым концевым сечением первого участка. Ось z направляем налево. Пределы изменения положения сечения вдоль продольной оси $0 \leq z_1 \leq 0.6 \text{ м}$. Спроектируем все силы, действующие на правую часть, на продольную ось.

$$\Sigma F_z = 0, \quad N_1 - 24 \cdot z_1 = 0, \quad N_1 = 24 \cdot z_1, \quad N_1(0) = 0, \quad N_1(0.6) = 14.4 \text{ кН}.$$

Поскольку функция $N_1 = 24 \cdot z_1$ получилась линейная, то для построения графика ее изменения вдоль продольной оси (эн. N_z) достаточно вычислить значения продольной силы на границах первого участка, отложить их перпендикулярно продольной оси вверх (стержень растянут) и провести через них прямую линию (рис. 3.4, д).

Таким образом, в пределах первого участка стержень растянут и нормальная сила изменяется по линейному закону.

Этот же результат можно получить, рассматривая равновесие левой части стержня. Здесь при выборе системы координат рассмотрим два варианта. При первом варианте начало координат совмещаем с левым концевым сечением второго участка. Ось z направляем направо. Пределы изменения положения сечения вдоль продольной оси $0.4 \text{ м} \leq z_1^{**} \leq 1.0 \text{ м}$,
 $\Sigma F_z = 0, \quad N_1 + 7.6 - 22 + 24 \cdot (z_1^{**} - 0.4) = 0, \quad N_1 = 24 - 24 \cdot z_1^{**},$
 $N_1(0.4) = 14.4 \text{ кН}, \quad N_1(1.0) = 0.$

Во втором варианте введем скользящую систему координатных осей. Начало координат совмещаем с левым концевым сечением первого участка. Ось z направляем направо. Имеем

$$0 \leq z_1^{\bullet} \leq 0.6 \text{ м}, \quad \Sigma F_z = 0, \quad N_1 + 7.6 - 22 + 24 \cdot z_1^{\bullet} = 0, \quad N_1 = 14.4 - 24 \cdot z_1^{\bullet},$$

$$N_1(0) = 14.4 \text{ кН}, \quad N_1(0.6) = 0.$$

Заметим, что при выборе скользящей системы координат, функция $N_1 = f(z, q)$ меняется от нуля, что делает последующие расчеты менее трудоемкими.

Сравнивая все три варианта определения N_1 , приходим к выводу, что когда мы оставляем ту часть стержня, к которой приложено меньше внешних нагрузок, то расчеты оказываются более простыми.

При некотором навыке можно сразу составить выражение для N_1 , не изображая отдельные части бруса, на которые он расчленяется поперечными сечениями (рис. 3.4, б, в). Например,

$$\text{при } 0 \leq z_1 \leq 0.6 \text{ м}, \quad N_1 = 24 \cdot z_1;$$

$$\text{при } 0.4 \text{ м} \leq z_1^{**} \leq 1.0 \text{ м}, \quad N_1 = -7.6 + 22 - 24 \cdot (z_1^{**} - 0.4);$$

$$\text{при } 0 \leq z_1^{\bullet} \leq 0.6 \text{ м}, \quad N_1 = -7.6 + 22 - 24 \cdot z_1^{\bullet}.$$

Таким образом, на основании метода сечений *продольная сила в произвольном поперечном сечении стержня численно равна алгебраичес-*

кой сумме проекций внешних сил, приложенных к стержню по одну сторону от рассматриваемого сечения, на его продольную ось.

Причем проекция внешней силы берется со знаком плюс, если сила растягивает часть стержня от точки ее приложения до рассматриваемого сечения и, наоборот, со знаком минус – если сжимает.

Осталось определить значение продольной силы N_2 в произвольном сечении, определяемом координатой z_2 , на втором участке (рис. 3.4, г). Так как продольная сила N_2 численно равна алгебраической сумме внешних сил, приложенных к стержню слева от сечения (рассматриваем равновесие левой части стержня), то $N_2 = -7.6 \text{ кН}$ (реакция $R_1 = 7.6 \text{ кН}$ сжимает часть стержня длиной z_2). Здесь принимаем скользящую систему координат, с началом в левом концевом сечении второго участка. Ось z направляем направо.

Эюра N_z на втором участке представлена на рис. 5. 4, д в виде прямоугольника со знаком минус, поскольку $N_2 = -7.6 \text{ кН} = \text{const}$. Т. о., в пределах второго участка стержень претерпевает сжатие постоянной нормальной силой.

Каждая ордината *эп.* N_z (рис. 3.4, д) в принятом масштабе равна величине продольной силы, действующего в том поперечном сечении стержня, которому соответствует эта ордината.

Видно, что на участке между точками приложения сосредоточенных сил R_1 и F продольная сила имеет постоянное значение, а на участке, где приложена распределенная внешняя нагрузка, меняется по линейному закону (рис. 3.4, д).

Характерно, что скачки на *эп.* N_z обусловлены наличием в соответствующих сечениях сосредоточенных сил R_1 и F .

Напряжения и деформации

Переходя к изучению деформации растяжения (сжатия), ограничимся рассмотрением стержней постоянного поперечного сечения с прямолинейной осью, т. е. призматических стержней

Для того, чтобы сформулировать предпосылки теории растяжения (сжатия) призматического стержня, обратимся к эксперименту. Представим себе стержень, изготовленный из какого – либо податливого материала (например, резины), на боковую поверхность которого нанесена система продольных и поперечных рисок (рис. 3.5, а).

Эта ортогональная система рисок остается таковой и после приложения растягивающей нагрузки, за исключением небольшого участка вблизи точки приложения силы F , который согласно принципу Сен – Венана из рассмотрения можно исключить (рис. 3.5, б).

Поскольку поперечные риски являются следами поперечных сечений на поверхности стержня и остаются прямыми и перпендикуляр-

ными к оси стержня, то это свидетельствует о выполнении *гипотезы плоских сечений* (Бернулли).

С учетом *гипотезы об отсутствии поперечного взаимодействия продольных волокон* ($\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$) приходим к выводу, что деформация растяжения стержня сводится к одноосному растяжению его продольных волокон, и в поперечном сечении стержня возникают лишь нормальные напряжения $\sigma_z \neq 0$.

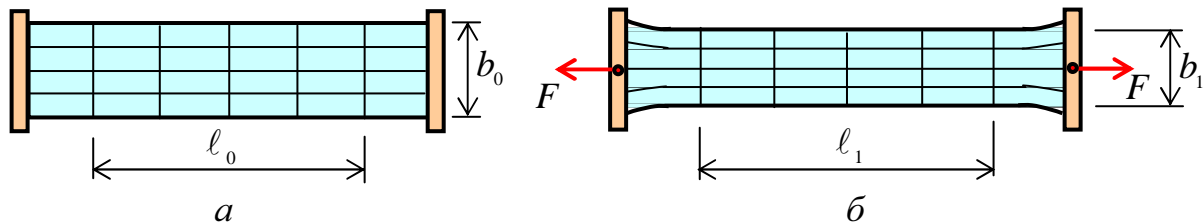


Рис. 3.5

Ортогональность продольных и поперечных рисок свидетельствует также об отсутствии сдвигов, а, следовательно, и связанных с ними касательных напряжений в поперечных и продольных сечениях стержня.

Как показывает эксперимент (рис. 3.5), при растяжении стержня его длина увеличивается, а размеры его поперечного сечения уменьшаются. Изменение его длины $\Delta l = l_1 - l_0$ называется *абсолютной продольной деформацией* или удлинением. В большинстве случаев оно мало по сравнению с его первоначальной длиной l_0 ($\Delta l \ll l_0$).

Относительную продольную деформацию определим как отношение

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{np} = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Аналогично, изменение размеров его поперечного сечения будем называть *абсолютной поперечной деформацией* ($\Delta b = b_1 - b_0$, $\Delta b < 0$), а $\varepsilon_{non} = \Delta b / b_0$ – *относительной поперечной деформацией*.

Явление уменьшения размеров поперечного сечения стержня при растяжении, а при сжатии – увеличения, получило название *эффекта Пуассона*. Он оценивается при помощи коэффициента поперечной деформации (*коэффициента Пуассона*), который равен отношению относительной поперечной деформацией к относительной продольной, взятому по абсолютной величине

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_{non}}{\varepsilon_{np}} \right|.$$

В сопротивлении материалов *коэффициент Пуассона* μ , наряду с *модулем продольной упругости материала стержня* E , характеризует упругие свойства материала.

Величина коэффициента Пуассона μ определяется экспериментально и для различных материалов имеет значения от нуля (для пробки) и до величины близкой к 0.5 (для пластика).

Таким образом, теория растяжения (сжатия) призматического стержня, основывается на следующих предположениях:

1. справедлива гипотеза плоских сечений или гипотеза Бернулли,
2. материал стержня подчиняется закону Гука,
3. по ширине стержня напряженно-деформированное состояние не меняется.

Поскольку задача по определению напряжений является статически неопределимой, т. е. неизвестных больше чем независимых уравнений равновесия, то для получения полной системы уравнений необходимо рассмотреть кроме статической также геометрическую и физическую стороны задачи.

Статическая сторона задачи.

Продольная сила N_z , возникающая в поперечном сечении стержня, представляет собой статический эквивалент внутренних нормальных сил (рис. 3.6, а), распределенных по площади сечения, и связана с возникающими в этом сечении нормальными напряжениями (рис. 3.6, б) зависимостью

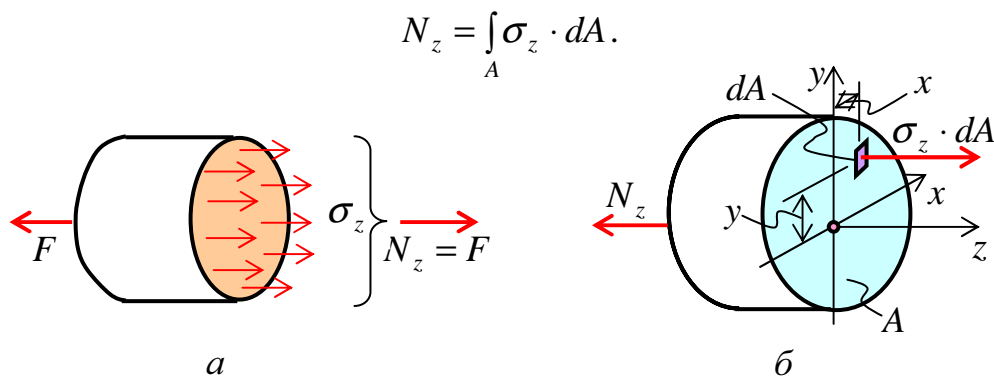


Рис. 3.6

Это соотношение является уравнением равновесия и нормальное напряжение σ_z , которое в общем случае является функцией координат x и y , не может быть найдено из одного лишь уравнения равновесия. Таким образом, задача определения напряжений даже в самом простом случае деформирования стержня (растяжения или сжатия) оказывается статически неопределимой.

Геометрическая сторона задачи.

Необходимое для решения этой задачи геометрическое уравнение вытекает из гипотезы плоских сечений. Поскольку поперечные сечения стержня, оставаясь плоскими и перпендикулярными к оси стержня, в процессе деформирования лишь поступательно перемещаются вдоль оси

стержня (что приводит к одинаковому удлинению всех продольных волокон), то приходим к уравнению

$$\varepsilon_z = const .$$

Физическая сторона задачи.

Величина напряжений, на основании закона Гука, прямо пропорциональна относительным продольным деформациям

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z .$$

Синтез.

Итак, после рассмотрения трех сторон задачи, мы получили совместную систему из трех уравнений (условие равновесия, геометрическое и физическое уравнения): $N_z = \int_A \sigma_z \cdot dA$, $\varepsilon_z = const$, $\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z$, решая которую получаем все необходимые формулы для определения напряжений и деформаций, геометрических характеристик, которые соответствуют деформации растяжения.

Если $\varepsilon_z = const$, то ввиду однозначности связи σ_z и ε_z (для линейно - упругого материала это – закон Гука: $\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z$) вытекает, что $\sigma_z = const$.

$$\text{Отсюда } N_z = \int_A \sigma_z \cdot dA = \sigma_z \cdot \int_A dA = \sigma_z \cdot A, \text{ или}$$

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A} .$$

Таким образом, при растяжении (сжатии) призматического стержня нормальные напряжения равномерно распределены по поперечному сечению, а касательные напряжения в сечениях отсутствуют, что является следствием гипотезы плоских сечений.

Указанное, несмотря на, казалось бы, очевидность и простоту, является фундаментальным результатом, справедливым, строго говоря, лишь для призматического стержня. Однако на практике его используют и для приближенной оценки σ_z в стержнях переменного сечения при условии достаточно плавного изменения площади поперечного сечения вдоль продольной оси.

Осталось определить продольные деформации ε_z . С учетом полученных зависимостей закон Гука принимает следующий вид:

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z \text{ или } \frac{N_z}{A} = E \cdot \frac{\Delta \ell}{\ell} \text{ или } \Delta \ell = \frac{N_z \cdot \ell}{E \cdot A} .$$

Произведение EA принято называть *жесткостью поперечного сечения стержня при растяжении (сжатии)*, так как удлинение обратно пропорционально EA .

Формула для удлинения стержня $\Delta \ell$ применима только в случае, когда по длине стержня ни жесткость поперечного сечения, ни продольная сила не изменяются ($EA = const$, $N_z = const$). Удлинение стержня со

ступенчатым изменением EA и N_z может быть определено как сумма удлинений ступеней, у которых EA и N_z постоянны.

В случае, когда EA и N_z меняются по длине стержня ℓ непрерывно и их можно считать постоянными лишь в пределах ступеней длиной dz , обобщая предыдущий случай, получаем

$$\Delta\ell = \int_0^{\ell} \frac{N_z \cdot dz}{E \cdot A}.$$

Условия прочности и жесткости

По условию прочности для стержня из пластического материала (т. е. материала, одинаково работающего на растяжение и сжатие) наибольшие нормальные напряжения σ_{\max} не должны превышать соответствующих допускаемых напряжений на растяжение $[\sigma]$:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad \frac{\max N_z}{A} \leq [\sigma].$$

Напряжение σ_z в этом условии подставляется по модулю, так как знак σ_z в этом случае роли не играет.

Для стержней из хрупких материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, знак напряжений имеет принципиальное значение, и условие прочности приходится формулировать отдельно для растяжения и сжатия:

$$\sigma_{\max}^{раст} \leq [\sigma_{раст}] \quad \text{или} \quad \frac{\max N_z^{раст}}{A} \leq [\sigma_{раст}]; \quad \sigma_{\max}^{сж} \leq [\sigma_{сж}], \quad \frac{\max N_z^{сж}}{A} \leq [\sigma_{сж}],$$

где $[\sigma_{раст}]$ и $[\sigma_{сж}]$ допускаемые напряжения на растяжение и сжатие.

Условие жесткости при растяжении имеет вид:

$$\Delta\ell \leq [\Delta\ell] \quad \text{или} \quad \text{в относительном виде} \quad \varepsilon_{\max} \leq [\varepsilon], \quad \text{последнее можно представить в виде} \quad \frac{\max N_z}{E \cdot A} \leq [\varepsilon].$$

Типы задач

В практике инженерных расчетов обычно решаются три основные задачи. Это *проверочный расчет (проверка прочности)*. В этом случае известны внешняя нагрузка, сечение стержня и его материал. Необходимо убедиться, что выполняется условие прочности или жесткости. То есть, проверочный расчет заключается в том, что определяется фактический запас прочности стержня n и сравнивается с нормативным коэффициентом запаса прочности $[n]$:

$$n \geq [n] \quad \text{или} \quad \frac{\sigma_{пред}}{\sigma_{\max}} \geq [n], \quad \text{где } \sigma_{пред} \text{ – предельное (или опасное) напряжение,}$$

т. е. напряжение, вызывающее отказ элемента конструкции (напомним,

что, например, для стержня из пластичного материала это – предел текучести σ_m или условный предел текучести $\sigma_{0,2}$).

Подбор сечения (проектировочный расчет). По заданной нагрузке определяются размеры поперечного сечения стержня из известного материала $A \geq \frac{\max N_z}{[\sigma]}$.

Определение *допускаемой нагрузки*, то есть максимального значения нагрузки, которое допускает данный элемент конструкции при выполнении условия прочности $\max N_z \leq [\sigma] \cdot A$ или жесткости $\max N_z \leq [\varepsilon] \cdot E \cdot A$.

Определение перемещений

С продольными деформациями стержня при растяжении (сжатии) связаны продольные перемещения его сечений. Можно выделить три случая определения таких перемещений.

Это перемещение свободного торцевого сечения при неподвижном другом торцевом сечении, которое численно равно удлинению стержня. Во втором случае это перемещение промежуточного сечения, численно равное удлинению части стержня, заключенной между данным сечением и сечением неподвижным. И, наконец, взаимное перемещение сечений, численно равное удлинению части стержня, заключенной между этими сечениями.

Напряженное состояние при растяжении (сжатии)

Напряженное состояние при растяжении стержня является одноосным (рис. 3.7, а). Поскольку на поперечных и продольных площадках касательные напряжения не возникают, то эти площадки являются главными.

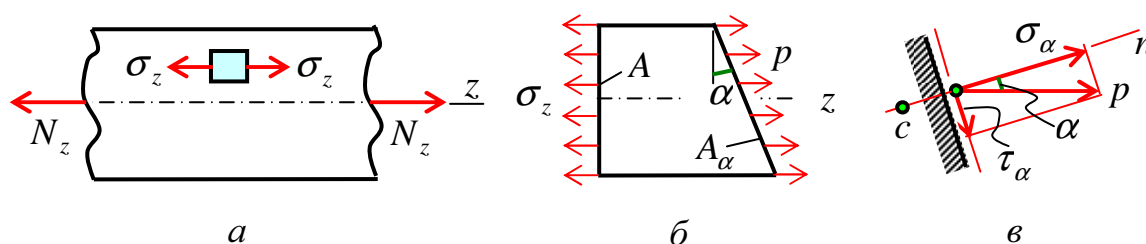


Рис. 3.7

Причем в случае растяжения $\sigma_1 = \sigma_z > 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, а в случае сжатия $\sigma_3 = \sigma_z < 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

Таким образом, для однородного растянутого стержня ($N_z = const$) напряжения остаются постоянными как по сечению, так и по длине. Такое напряженное состояние называется *однородным*.

Напряжения на площадках, наклоненных к оси стержня под углом α (рис. 3.7, б), определяются из уравнений равновесия:

$\sigma_z \cdot A = p \cdot A_\alpha$, где $A = A_\alpha \cdot \cos \alpha$, отсюда $\sigma_z \cdot A_\alpha \cdot \cos \alpha = p \cdot A_\alpha$ или $p = \sigma_z \cdot \cos \alpha$. С другой стороны (рис. 3.7, в) имеем $\sigma_\alpha = p \cdot \cos \alpha$ и $\tau_\alpha = p \cdot \sin \alpha$. Окончательно имеем

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cdot \cos^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = 0.5 \cdot \sigma_z \cdot \sin 2\alpha.$$

Заметим, что касательное напряжение положительно (рис. 3.7, в), если изображающий его вектор стремится вращать тело относительно любой точки s , лежащей на внутренней нормали к сечению, по часовой стрелке.

Исследуем на экстремум полученные формулы.

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = \sigma_z \cdot 2 \cdot \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha) = 0, \text{ отсюда } \sin 2\alpha = 0, \text{ и } \alpha = 0, \pi/2, \dots. \text{ Таким}$$

образом, наибольшие (по абсолютной величине) нормальные напряжения ($\sigma_{\max} = \sigma_z$) имеют место в поперечных сечениях стержня (при $\alpha = 0$) и где $\tau_\alpha = 0$. Аналогично

$$\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = 0.5 \cdot \sigma_z \cdot \cos 2\alpha \cdot 2 = 0, \cos 2\alpha = 0, 2\alpha = \pi/2, 3\pi/2, \dots, \text{ т. е., наибольшие}$$

(по абсолютной величине) касательные напряжения ($\tau_{\max} = 0.5 \cdot \sigma_z$) имеют место в сечениях стержня, наклоненных под углом $\alpha = \pi/4 = 45^\circ$ к продольной оси, и где $\sigma_\alpha = 0.5 \cdot \sigma_z$.

При $2\alpha = 3\pi/2$, $\tau_\alpha = 0.5 \cdot \sigma_z \cdot \sin(3\pi/2) = -0.5 \cdot \sigma_z$. Таким образом, касательные напряжения в двух взаимно – перпендикулярных площадках равны друг другу по величине и обратны по знаку (рис. 3.8).

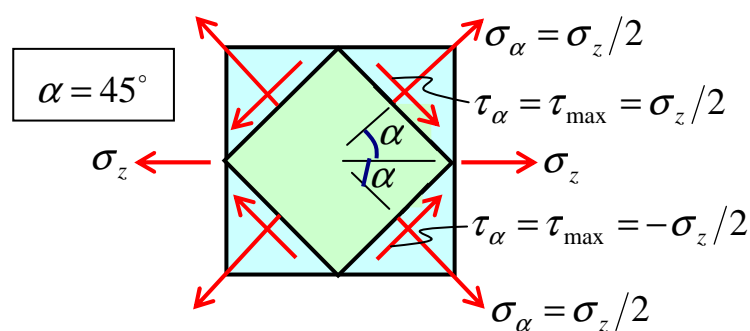


Рис. 3.8

Именно с действием τ_{\max} связывается появление на боковой поверхности образца из малоуглеродистой стали, испытываемого на растяжение, линий скольжения, ориентированных под углом $\alpha = 45^\circ$ к оси образца.

На площадках с экстремальными τ_{\max} действуют и нормальные напряжения, равные $\sigma_\alpha = \sigma_z/2$ (рис. 3.8).

Тема 4 Геометрические характеристики плоских сечений

Основные понятия

При решении задач, связанных с различными видами деформаций (например, растяжение, кручение, изгиб) возникает необходимость оперировать некоторыми геометрическими характеристиками поперечных сечений бруса.

Остановимся более подробно на них. Возьмем некоторое поперечное сечение площадью A и свяжем его с системой координат xoy (рис. 4.1).

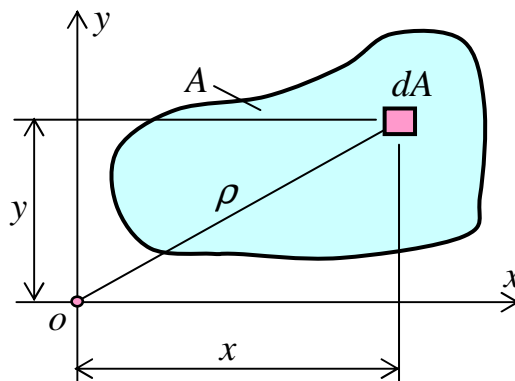


Рис. 4.1

Выделим элементарную площадку dA и рассмотрим следующие интегралы:

$$A = \int_A dA \quad (m^2), \quad S_x = \int_A y \cdot dA \quad (m^3), \quad S_y = \int_A x \cdot dA \quad (m^3), \quad I_x = \int_A y^2 \cdot dA \quad (m^4),$$

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA \quad (m^4), \quad I_\rho = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA = I_y + I_x \quad (m^4),$$

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA \quad (m^4),$$

где индекс A у знака интеграла указывает на то, что интегрирование ведется по всей площади сечения.

Здесь: A – *площадь* поперечного сечения бруса. Является простейшей геометрической характеристикой поперечного сечения; S_x , S_y – *статические моменты* сечения относительно соответствующих осей x и y . Они равны взятой по всей площади A сумме произведений элементарных площадок dA на их расстояния от этих осей; I_x , I_y – *осевые моменты инерции* сечения относительно соответствующих осей x и y ; I_ρ – *полярный момент инерции* сечения относительно некоторой точки (полюса). Он равен взятой по всей площади A сумме произведений элементарных площадок dA на квадраты их расстояния от этой точки; I_{xy} – *центробежный момент инерции* сечения относительно некоторых двух взаимно – перпендикулярных осей x и y .

Центробежный момент инерции сечения

Очевидно, что A , I_x , I_y и I_ρ всегда положительны. Прочие величины могут быть как положительными так и отрицательными и равными нулю. Последнее возможно при переходе от любой старой к любой новой системе координат, что в самом общем случае можно рассматривать как два последовательных преобразования старой системы координат:

1. путем параллельного переноса осей координат в новое положение,
2. путем поворота их относительно нового начала координат.

Центробежный момент инерции I_{xy} сечения, показанного на рис. 4.2, а, относительно осей x и y положителен, так как для основной части этого сечения, расположенной в первом квадранте, значения x и y , а следовательно, и $\int_A x \cdot y \cdot dA$ положительны. Аналогично, $I_{x_1y_1}$ будет отрицательным по той же причине.

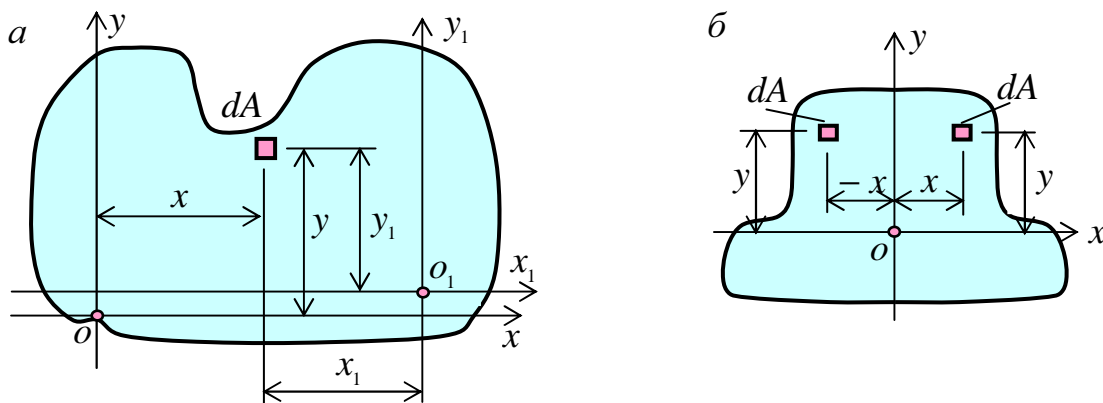


Рис. 4.2

Для фигуры, симметричной относительно оси y (рис. 4.2, б), каждой элементарной площадке dA , расположенной справа от оси y , соответствует такая же площадка dA , расположенная симметрично первой, но слева от оси y . Центробежный момент инерции каждой пары таких симметрично расположенных площадок равен:

$$dI_{xy} = x \cdot y \cdot dA + (-x) \cdot y \cdot dA = 0 \text{ и следовательно, } I_{xy} = 0.$$

Таким образом, центробежный момент инерции сечения относительно осей, из которых одна или обе совпадают с его осями симметрии, равен нулю.

Статические моменты сечения

Посмотрим, как меняются геометрические характеристики при параллельном переносе осей координат. Рассмотрим две пары параллельных осей xoy и $x_1o_1y_1$ (рис. 4.3). Пусть расстояния между осями x и x_1 равно a , а между осями y и y_1 равно b . В этом случае будут справедливы соотношения $y_1 = y + a$ и $x_1 = x + b$. Кроме того известны площадь сечения A и статические моменты сечения S_{x_1} и S_{y_1} относительно осей x_1 и y_1 . Тогда

$$S_x = \int_A y \cdot dA = \int_A (y_1 - a) \cdot dA = S_{x_1} - a \cdot A \quad \text{и} \quad S_y = \int_A x \cdot dA = \int_A (x_1 - b) \cdot dA = S_{y_1} - b \cdot A.$$

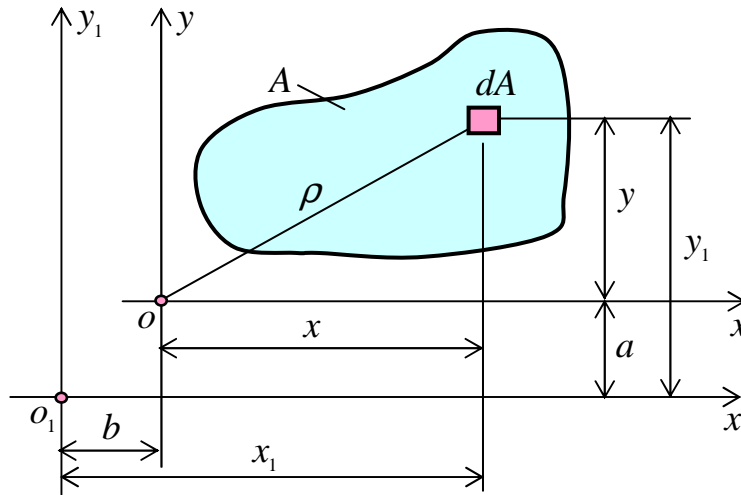


Рис. 4.3

Очевидно, что можно подобрать такие a и b , что $S_x = 0$ и $S_y = 0$. Оси, относительно которых статические моменты равны нулю, называются *центрными*. Причем расстояния до центральных осей x и y от некоторых, произвольно выбранных осей x_1 и y_1 равны $a = y_c = \frac{S_{x_1}}{A}$ и $b = x_c = \frac{S_{y_1}}{A}$.

Точка пересечения центральных осей называется *центром тяжести сечения*.

Выражения $a = y_c = \frac{S_{x_1}}{A}$ и $b = x_c = \frac{S_{y_1}}{A}$ дают возможность определить положение центра тяжести сечения, если найдены статические моменты, или, наоборот, найти статические моменты, если известно положение центра тяжести сечения и его площадь $S_{x_1} = A \cdot y_c$ (рис. 4.4).

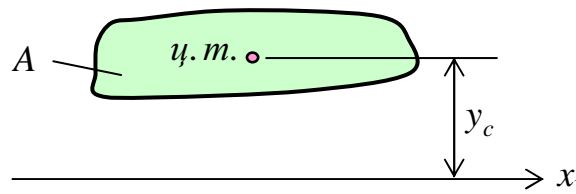


Рис. 4.4

Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей

Итак, положение центра тяжести сечения найдено, определены геометрические характеристики A , I_x , I_y и I_{xy} относительно центральных осей xoy , причем $S_x = 0$ и $S_y = 0$. Посмотрим, как I_x , I_y и I_{xy} изменятся при переходе от центральных осей xoy к произвольным осям $x_1o_1y_1$ (рис. 4.3).

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 \cdot dA = \int_A (y + a)^2 \cdot dA = I_x + 2 \cdot a \cdot S_x + a^2 \cdot A = I_x + a^2 \cdot A ,$$

$$I_{y_1} = \int_A x_1^2 \cdot dA = \int_A (x + b)^2 \cdot dA = I_y + 2 \cdot b \cdot S_y + b^2 \cdot A = I_y + b^2 \cdot A ,$$

$$I_{x_1 y_1} = \int_A x_1 y_1 \cdot dA = \int_A (x + b)(y + a) \cdot dA = I_{xy} + a \cdot S_y + b \cdot S_x + a \cdot b \cdot A = I_{xy} + a \cdot b \cdot A .$$

Таким образом, при переходе от центральных осей к нецентральному, осевые моменты инерции увеличиваются на величины $(a^2 \cdot A)$ и $(b^2 \cdot A)$, а при переходе от нецентральных к центральным уменьшаются на эти же величины.

Главные оси инерции. Главные моменты инерции

Две взаимно – перпендикулярные оси x и y называются *главными осями инерции*, если центробежный момент инерции сечения относительно их равен нулю ($I_{xy} = 0$), а осевые моменты инерции I_x и I_y достигают экстремальных (максимальные и минимальные) значений I_{\max} , I_{\min} .

Экстремальные значения осевых моментов инерции сечения называются главными моментами инерции.

Обычно это достигается путем поворота взаимно – перпендикулярных осей x и y на произвольный угол α относительно начала координат. При этом сумма осевых моментов инерции сохраняет постоянную величину при повороте осей на любой угол.

Этот результат объясняется также тем, что сумма моментов инерции относительно двух взаимно – перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно начала координат, величина же которого не изменяется, если начало координат остается на месте, а координатные оси поворачиваются.

Главные оси инерции можно провести через любую точку, взятую в плоскости сечения. Однако практическое значение для расчетов элементов конструкций имеют лишь главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, т. е. *главные центральные оси инерции*.

Заметим, что ось симметрии всегда является главной центральной осью.

Вычисления моментов инерции сечений простой формы

Используем полученные формулы для вычисления геометрических характеристик некоторых простейших фигур (рис. 4.5).

Из прямоугольного сечения (рис. 4.5, а) выделим линиями, параллельными оси симметрии x , элементарную полоску высотой dy и шириной b . Площадь этой полоски $dA = b \cdot dy$, расстояние от полоски до оси x равно y . Тогда

$$A = \int_{-h/2}^{h/2} dA = \int_{-h/2}^{h/2} b \cdot dy = b \cdot (y)_{-h/2}^{h/2} = b \cdot \left[\frac{h}{2} - \left(-\frac{h}{2} \right) \right] = b \cdot h ,$$

$$I_x = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot b \cdot dy = b \cdot \left(\frac{y^3}{3} \right)_{-h/2}^{h/2} = \frac{b}{3} \cdot \left[\frac{h^3}{8} - \left(-\frac{h^3}{8} \right) \right] = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

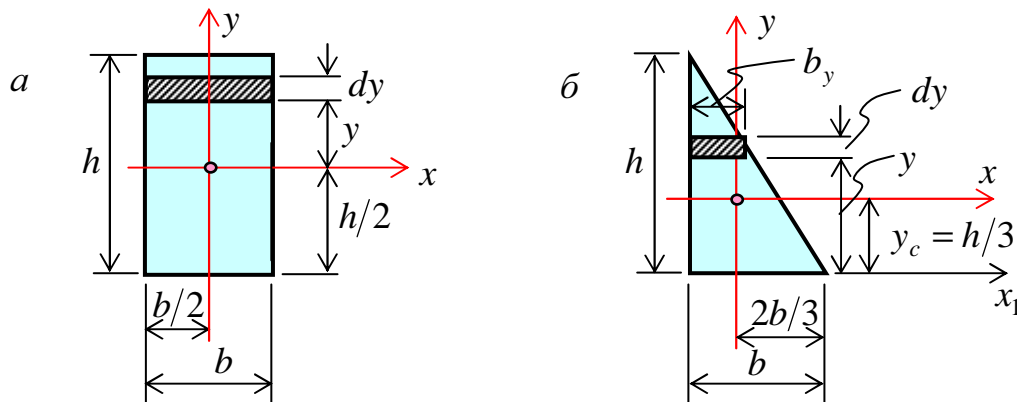


Рис. 4.5

Аналогичным путем для момента инерции относительно оси другой симметрии y можно получить выражение $I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}$. Заметим, что в выражениях для I_x и I_y в куб возводится размер, перпендикулярный оси, относительно которой вычисляется геометрическая характеристика.

Для прямоугольного треугольного сечения имеем (рис.4.5, б)

$$\frac{b_y}{b} = \frac{h-y}{h}, \quad \text{или} \quad b_y = b \cdot \frac{h-y}{h}. \quad \text{Площадь элементарной полоски}$$

$$dA = b_y \cdot dy = b \cdot \frac{h-y}{h} \cdot dy. \quad \text{Тогда}$$

$$A = \int_0^h dA = \int_0^h b \cdot \frac{h-y}{h} \cdot dy = \frac{b}{h} \cdot \left(h \cdot y - \frac{y^2}{2} \right)_0^h = \frac{b}{h} \cdot \left[h^2 - \left(\frac{h^2}{2} \right) \right] = \frac{b \cdot h}{2},$$

$$S_{x_1} = \int_0^h y \cdot dA = \int_0^h y \cdot b \cdot \frac{h-y}{h} \cdot dy = \frac{b}{h} \cdot \left(h \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right)_0^h = \frac{b}{6 \cdot h} \cdot [3 \cdot h^3 - 2 \cdot h^3] = \frac{b \cdot h^2}{6},$$

$$y_c = \frac{S_{x_1}}{A} = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot \frac{2}{b \cdot h} = \frac{h}{3}, \quad \text{аналогично} \quad x_c = \frac{b}{3},$$

$$I_{x_1} = \int_0^h y^2 \cdot dA = \int_0^h y^2 \cdot b \cdot \frac{h-y}{h} \cdot dy = \frac{b}{h} \cdot \left(h \cdot \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right)_0^h = \frac{b}{12 \cdot h} \cdot [4 \cdot h^4 - 3 \cdot h^4] = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

Поскольку ось x центральная и параллельна случайной оси x_1 , то справедливо соотношение $I_{x_1} = I_x + (y_c)^2 \cdot A$ или $\frac{b \cdot h^3}{12} = I_x + \left(\frac{h}{3} \right)^2 \cdot \frac{b \cdot h}{2}$ или

$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36}$. Аналогично относительно другой центральной оси y получаем

$I_y = \frac{b^3 \cdot h}{36}$. Здесь в куб возводится размер, перпендикулярный оси, относительно которой вычисляется геометрическая характеристика.

Равнобедренный треугольник (оси xoy на рис.4.6^а, а) можно представить в виде двух одинаковых прямоугольных треугольников (оси $x_1o_1y_1$). Тогда согласно формулам параллельного переноса имеем

$$I_x = 2 \cdot I_{x_1} = 2 \cdot \frac{(b/2) \cdot h^3}{36} = \frac{b \cdot h^3}{36},$$

$$I_y = 2 \cdot [I_{y_1} + (y_c)^2 \cdot A] = 2 \cdot \left[\frac{h \cdot (b/2)^3}{36} + (b/6)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot h \right] = \frac{h \cdot b^3}{48}.$$

Для круглого сечения, относительно любой оси, проходящей через центр круга, мы будем иметь одно и тоже значение осевого момента инерции I_x . Тогда

$I_\rho = I_y + I_x = 2 \cdot I_x$. Чтобы получить формулу для полярного момента инерции сечения относительно центра, выделим из круга элементарное кольцо толщиной $d\rho$, радиусом ρ и площадью $dA = 2\pi\rho \cdot d\rho$ (рис. 4.6, б) и вычислим интеграл

$$I_\rho = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_0^R \rho^2 \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho = 2\pi \cdot \left(\frac{\rho^4}{4} \right)_0^R = \frac{\pi \cdot R^4}{2}, \text{ отсюда } I_x = \frac{\pi \cdot R^4}{4} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}.$$

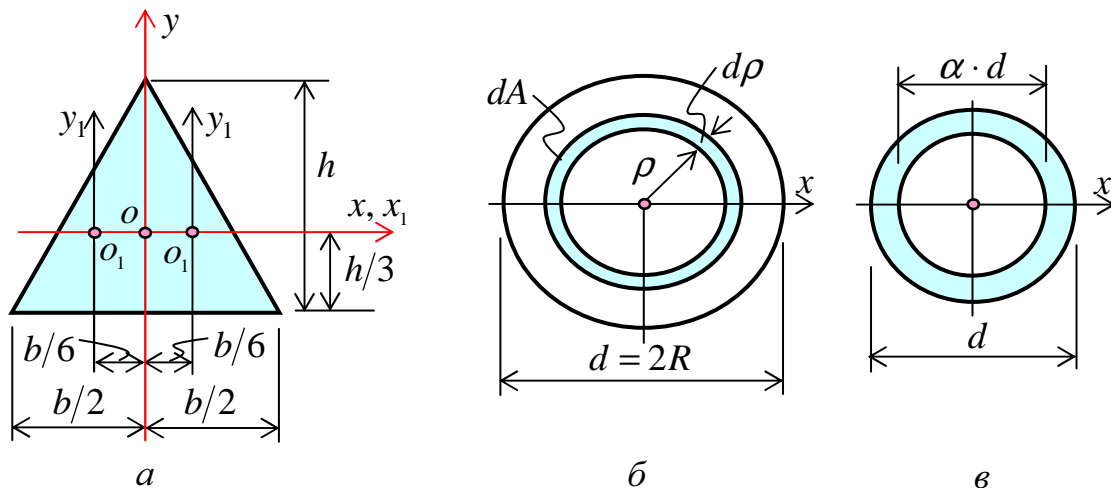


Рис. 4.6

Моменты инерции (полярный и осевой) сечения, имеющего форму кругового кольца с наружным диаметром d и внутренним $(\alpha \cdot d)$ (рис. 4.6, в), можно определить как разности между соответствующими моментами инерции наружного и внутреннего кругов:

$$I_{\rho} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} - \frac{\pi \cdot (\alpha \cdot d)^4}{32} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} (1 - \alpha^4), \quad I_x = \frac{\pi \cdot d^4}{64} - \frac{\pi \cdot (\alpha \cdot d)^4}{64} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} (1 - \alpha^4).$$

Вычисления моментов инерции сложных сечений с одной осью симметрии

Способ вычисления моментов инерции сложных сечений основан на том, что любой интеграл можно рассматривать как сумму интегралов и, следовательно, момент инерции любого сечения вычислять как сумму моментов инерции отдельных его частей.

Поэтому для вычисления моментов инерции сложное сечение разбивается на ряд простых частей (фигур) с таким расчетом, чтобы их геометрические характеристики можно было вычислить по известным формулам или найти по специальным справочным таблицам.

Для каждой простой фигуры выбирается прямоугольная центральная система координат, причем все они принимаются параллельными друг другу для того, чтобы затем путем параллельного переноса осей можно было подсчитать моменты инерции всех частей относительно системы координат, общей для всего сложного сечения, которая совпадает с главными центральными осями..

Поскольку конечной целью вычисления геометрических характеристик сложного сечения является определение его главных центральных моментов инерции и положения главных центральных осей инерции, то следующим этапом вычисления является определение координат центра тяжести заданного сечения по формуле

$$y_c = \frac{\sum S_{x_k}^i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + \dots + A_n \cdot y_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где n – количество простых фигур; x_k – вспомогательная ось, относительно которой определяются координаты центра тяжести сложной фигуры; y_i – расстояние от вспомогательной оси x_k до центра тяжести i простой фигуры.

Ограничимся рассмотрением сложных сечений, имеющих хотя бы одну ось симметрии, поскольку такие типы сечений получили наибольшее распространение в технике и строительстве. В этом случае определение положения главных центральных осей инерции сечения значительно упрощается. Вторая главная центральная ось (первая – ось симметрии) будет перпендикулярна оси симметрии и пройдет через центр тяжести заданного сечения.

Тема 5 Теория напряженного и деформированного состояния. Теория прочности

Тензор напряжений

Вектор напряжений p является физическим объектом, имеющим длину, направление и точку приложения. В этом смысле он обладает векторными свойствами. Однако этому объекту присущи некоторые свойства, не характерные для векторов. В частности, величина и направление вектора напряжений зависит от ориентации вектора n нормали бесконечно малого элемента поверхности dA .

Совокупность всех возможных пар векторов n и p в точке определяет напряженное состояние в данной точке.

Для полного описания напряженного состояния в точке нет необходимости задавать бесконечное множество направлений вектора n , достаточно определить векторы напряжений на трех взаимно перпендикулярных элементарных площадках (рис. 5.1, а). Напряжения на произвольно ориентированных площадках могут быть выражены через эти три вектора напряжений (рис. 5.1, б).

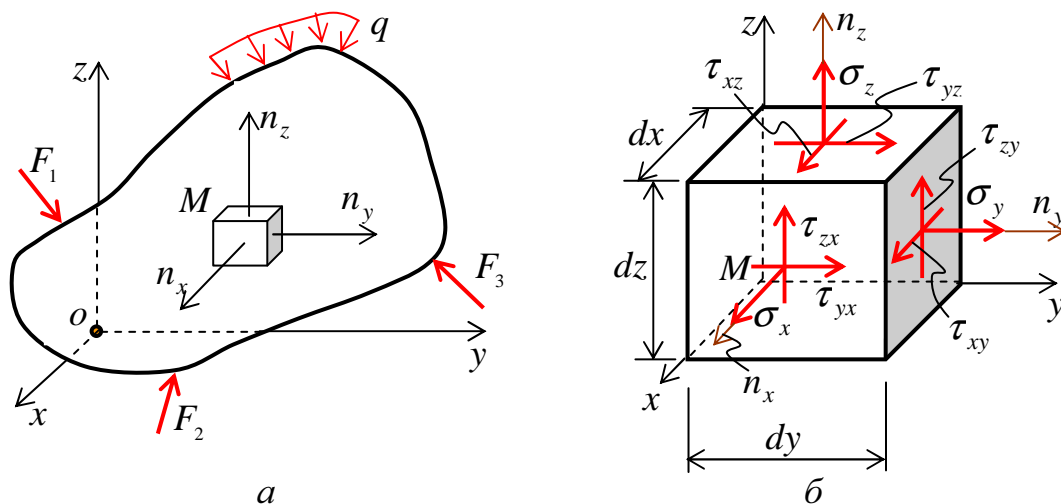


Рис. 5.1

Проведем через произвольно выбранную точку M нагруженного тела, находящегося в равновесии (рис. 5.1, а), три взаимно перпендикулярные плоскости с векторами нормалей, направления которых совпадают с направлениями координатных осей (рис. 5.1).

Элементарные площадки образуем дополнительными сечениями, параллельными исходным плоскостям и отстоящими от них на бесконечно малые расстояния dx , dy , dz . В результате в окрестности точки M получим бесконечно малый параллелепипед, поверхность которого образована элементарными площадками $dA_x = dy \cdot dz$, $dA_y = dz \cdot dx$, $dA_z = dx \cdot dy$.

Начало координат совместим с точкой M , а координатные оси направим вдоль соответствующих ребер, так чтобы грани параллелепипеда были перпендикулярны к направлениям координатных осей x , y , z (рис. 5.1, б).

Напомним, что такое выделение бесконечно малого параллелепипеда возможно только в пределах принятой ранее *гипотезы сплошной среды*, допускающей переход к предельно малым объемам, где напряженное состояние можно считать *однородным*.

Если размеры параллелепипеда уменьшать, он будет стягиваться в точку M , и в пределе все его грани проходят через эту точку. Поэтому напряжения по граням элемента рассматривают как напряжения в исследуемой точке M , но в различном образом ориентированных площадках.

Действующие по этим площадкам полные вектора напряжений разложим на составляющие вдоль координатных осей: одну по нормали к площадке (нормальные напряжения), и две в плоскости сечения (касательные напряжения) (рис. 5.1, б).

Нормальные напряжения обозначают буквами σ_x , σ_y , σ_z с индексами, обозначающими направление вектора нормали к площадке. Растягивающие напряжения σ_x , σ_y , σ_z будем считать положительными, сжимающие – отрицательными.

Касательные напряжения обозначают буквами с двумя индексами (τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} и т. п.), из которых первый указывает направление действия компоненты напряжения, второй – направление вектора нормали к площадке. Если направление внешней нормали (n_x , n_y , n_z) совпадает с положительным направлением соответствующей координатной оси, то положительные касательные напряжения направлены в сторону соответствующих положительных направлений координатных осей.

Положительные напряжения, возникающие на трех видимых взаимно перпендикулярных гранях элемента (на трех взаимно перпендикулярных плоскостях, проходящих через точку M) показаны на рис. 5.1, б. На невидимых гранях элемента возникают соответственно такие же напряжения, но противоположно направленные.

Система сил, приложенных к элементу, должна удовлетворять условиям равновесия. Поскольку на противоположных гранях возникают противоположные по направлению силы, то суммы проекций всех сил на оси x , y , z равны нулю, независимо от величины возникающих напряжений.

Осталось проверить, обращаются ли в нуль суммы моментов всех сил относительно осей x , y и z . Видно, что момент каждой продольной силы уравновешивается моментом противоположной продольной силы, расположенной на невидимой задней грани. Исключение составляют касательные силы. Например, для оси x условие равенства нулю суммы моментов соблюдается в

том случае, если момент силы $\tau_{yz} \cdot dx \cdot dy$ равен моменту силы $\tau_{zy} \cdot dx \cdot dz$, т. е. $\tau_{yz} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \tau_{zy} \cdot dx \cdot dz \cdot dy$.

Аналогично могут быть записаны еще два уравнения равновесия. Тогда получаем $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Таким образом, на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к общему ребру, равны и направлены обе либо к ребру, либо от ребра. Это и есть закон парности касательных напряжений, сформулированный в общем виде. Он справедлив для всех точек нагруженного тела, независимо от вида приложенных нагрузок и свойств материала. Следствием из условия парности касательных напряжений является то, что на гранях выделенного элемента (рис. 5.1, б) имеем не девять, а только шесть независимых компонентов напряжений, поскольку касательные напряжения попарно равны.

Т. о., напряженное состояние в точке определяется только 6 независимыми компонентами (числами) и в отличие от понятий числа, вектора (определяемого 3 числами) представляет собой некоторый физический объект, называемый *тензором напряжений* в точке.

Тензору в отличие от вектора не может быть дано простое геометрическое толкование. Его можно представить в виде матрицы (таблицы), симметричной относительно главной диагонали, соответствующим образом упорядочив девять компонент:

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Заметим, что из условия парности касательных напряжений вытекают и условия симметрии тензора напряжений.

Главные напряжения

При изменении ориентации граней выделенного элемента меняются также и действующие на его гранях напряжения. При этом можно выделить такие площадки, на которых касательные напряжения равны нулю, а нормальные напряжения принимают экстремальные значения.

Площадки, на которых касательные напряжения отсутствуют, называются *главными площадками*, а нормальные напряжения – *главными напряжениями*.

В теории упругости доказывается, что как бы ни было загружено тело, в каждой его точке всегда можно выделить по крайней мере три главных площадки, причем они взаимно перпендикулярны.

Главные напряжения условимся обозначать σ_1 , σ_2 , σ_3 ; при этом должно выполняться неравенство $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, которое понимается в алгебраическом смысле. Например, $\sigma_1 = 60 \text{ МПа}$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -140 \text{ МПа}$.

Напряженное состояние, в котором только одно главное напряжение отлично от нуля, а два других равны нулю, называется *одноосным* или *линейным* (рис. 5.2, а).

Напряженное состояние, в котором два главных напряжения отличны от нуля, а одно равно нулю, называется *двухосным* или *плоским* (рис. 5.2, б).

Напряженное состояние, в котором все три главных напряжения отличны от нуля называется *трехосным* или *объемным* напряженным состоянием (рис. 5.2, в).

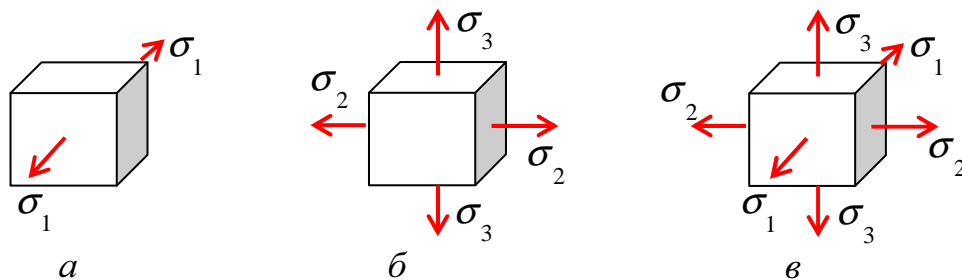


Рис. 5.2

Кроме того, различают *однородные* и *неоднородные* напряженные состояния. Напомним, что в *однородном* напряженном состоянии напряжения одинаковы в каждой точке какого-либо сечения и во всех параллельных ему сечениях. Например, при центральном растяжении.

В более полных курсах сопротивления материалов можно познакомиться со способами определения главных напряжений.

Обобщенный закон Гука

В дальнейшем нам понадобится для изотропного тела знание зависимости между напряжениями и деформациями при плоском напряженном состоянии. В пределах малых деформаций эта зависимость является линейной и носит название обобщенного закона Гука.

Для того чтобы составить аналитическое выражение обобщенного закона Гука, воспользуемся принципом независимости действия сил и рассмотрим отдельно силы, возникающие на гранях элементарного параллелепипеда (рис. 5.3).

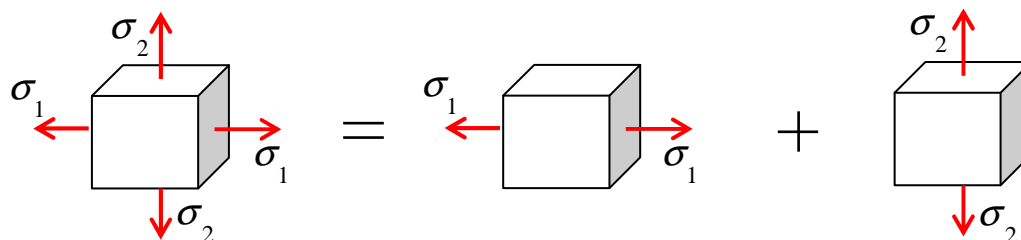


Рис. 5.3

Пусть его грани являются главными площадками. Под действием главных напряжений этот элементарных кубик деформируется. Поскольку интерес

представляют деформации элемента, определяемые относительным смещением его точек, одно из торцевых сечений элемента можно считать неподвижным. Вычислим значения относительных деформаций $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}$. В результате воздействия σ_1 имеем $\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E}$, $\varepsilon_{21} = -\mu\varepsilon_{11} = -\mu \cdot \frac{\sigma_1}{E}$ (рис. 5.4, а).

Здесь принята двойная индексация относительно деформаций. Первый индекс указывает направление относительной деформации, а второй – причину деформации.

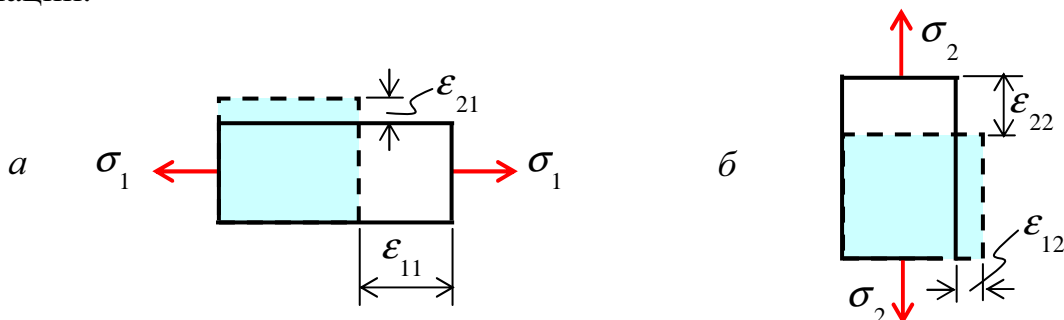


Рис. 5.4

Аналогично, В результате воздействия σ_2 имеем $\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_2}{E}$, $\varepsilon_{12} = -\mu\varepsilon_{22} = -\mu \cdot \frac{\sigma_2}{E}$ (рис. 5.4, б).

Очевидно, что относительные деформации, вызванные одновременным воздействием напряжений σ_1 и σ_2 , на основании принципа независимости

действия сил будут равны $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_2}{E} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_1 - \mu \cdot \sigma_2)$, и

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} = -\mu \cdot \frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_2}{E} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_2 - \mu \cdot \sigma_1).$$

Аналогичные формулы можно получить и для случая, когда грани элементарного параллелепипеда не совпадают с главными площадками (т. е. когда по этим граням, кроме нормальных напряжений, действуют также и касательные). Это связано с тем, что касательные напряжения не вызывают удлинения ребер параллелепипеда, а вызывают лишь изменения прямых углов между его гранями

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x).$$

Чистый сдвиг

Чистым сдвигом называется такой случай плоского напряженного состояния, при котором в окрестностях данной точки k (рис. 5.5, а) можно выделить элементарный параллелепипед, по боковым граням которого действуют только касательные напряжения.

Посмотрим, как при чистом сдвиге изменяются напряжения в зависимости от ориентации секущих площадок. Для этого из элементарного кубика, находящегося в состоянии чистого сдвига, выделим трехгранную призму ABC (рис. 5.5, б).

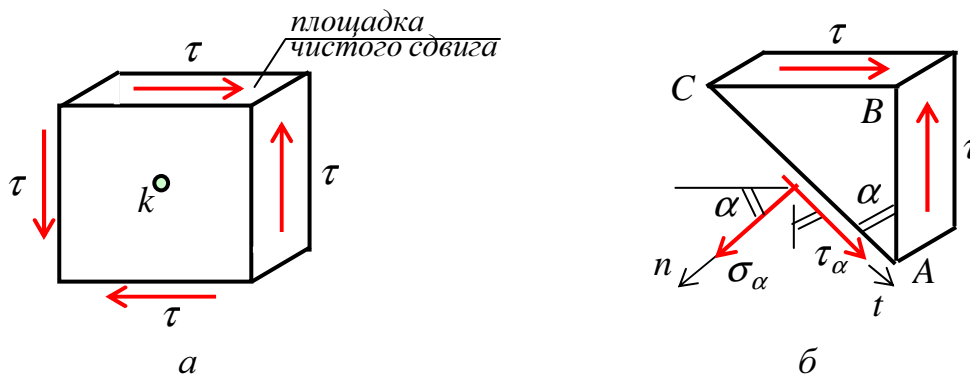


Рис. 5.5

На гранях AB и BC, по условию, действуют касательные напряжения τ . На грани AC в зависимости от угла α возможно возникновение как нормальных так и касательных напряжений (рис. 5.5, б).

С учетом $AB = AC \cdot \cos \alpha$ и $BC = AC \cdot \sin \alpha$, условия равновесия дают:
 $\sum F_n = 0, \sigma_\alpha \cdot AC - \tau \cdot BC \cdot \cos \alpha - \tau \cdot AB \cdot \sin \alpha = 0$ или $\sigma_\alpha = \tau \cdot \sin 2\alpha$,
 $\sum F_t = 0, \tau_\alpha \cdot AC + \tau \cdot BC \cdot \sin \alpha - \tau \cdot AB \cdot \cos \alpha = 0$ или $\tau_\alpha = \tau \cdot \cos 2\alpha$.

Отсюда видно, что $\sigma_\alpha^{\max} = \pm \tau$ при $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$ ($\tau_\alpha = 0$, это главные площадки), $\tau_\alpha^{\max} = \tau$ при $\alpha = 0$ ($\sigma_\alpha = 0$, грань AB).

Следовательно, касательные напряжения, действующие по боковым граням параллелепипеда, являются экстремальными, а эти грани являются площадками сдвига и образуют с главными площадками углы, равные 45° .

Площадки сдвига отличаются от аналогичных площадок в общем случае напряженного состояния тем, что на них не действуют нормальные напряжения. В связи с этим их называют *площадками чистого сдвига*.

Заметим, что при чистом сдвиге, главные напряжения и экстремальные касательные напряжения по абсолютной величине равны друг другу – $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$ (рис. 5.6, а).

Таким образом, чистый сдвиг может быть представлен как одновременное растяжение и сжатие по двум взаимно перпендикулярным направлениям.

При чистом сдвиге полное напряжение p по любой площадке равно

$$p = \sqrt{\sigma_\alpha^2 + \tau_\alpha^2} = \tau.$$

Деформации при сдвиге

В состоянии чистого сдвига (рис. 5.6, б) длины ребер элементарного параллелепипеда не изменяются, а изменяются лишь углы между боковыми

гранями: первоначально прямые углы становятся равными $(90^\circ + \gamma)$ и $(90^\circ - \gamma)$. Каждая из граней параллелепипеда при деформации чистого сдвига перемещается относительно противоположной грани на величину BB_1 , называемую *абсолютным сдвигом* (рис. 5.6, б).

Отношение абсолютного сдвига к расстоянию между противоположными гранями BC называется *относительным сдвигом*, при малых деформациях оно равно величине угла сдвига γ – изменения первоначально прямых углов между боковыми гранями параллелепипеда: $\frac{BB_1}{BC} = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$.

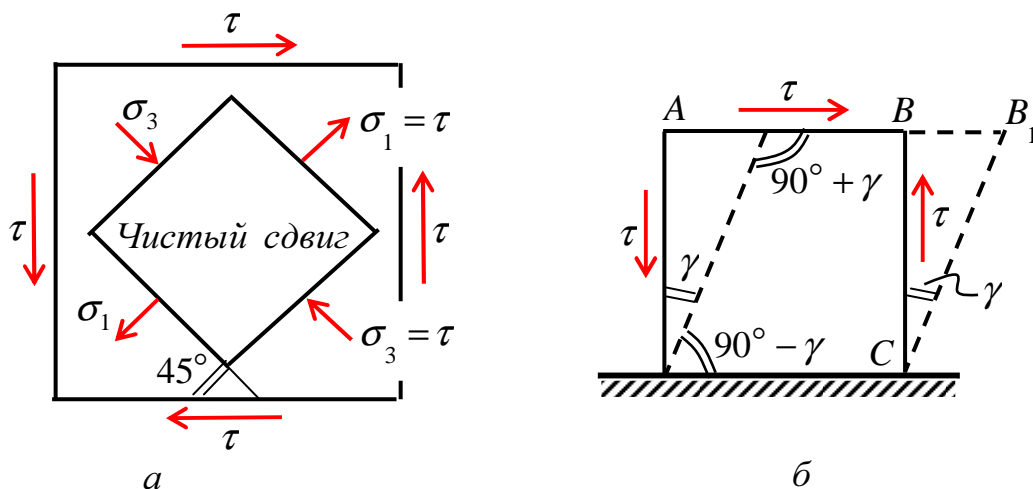


Рис. 5.6

Закон Гука при сдвиге

Величина γ , как показывает опыт, прямо пропорциональна величине касательных напряжений. Эта зависимость между γ и τ , называемая законом Гука при сдвиге, выражается в виде $\gamma = \tau/G$ или $\tau = \gamma \cdot G$.

Коэффициент пропорциональности G называется *модулем сдвига*, или *модулем упругости второго рода*.

Модуль сдвига является физической постоянной материала, характеризующей его жесткость (т. е. способность сопротивляться упругим деформациям) при сдвиге, и может быть выражен через две независимые характеристики материала E и μ . Получим эту зависимость.

На рис. 5.7, а показан квадратный элемент $ABCD$, находящийся в состоянии чистого сдвига ($\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$). Относительную деформацию его диагонали BD , каждая частица которой находится в плоском напряженном состоянии (рис. 5.7, б), можно записать в виде

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{13} = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_1 - \mu \cdot \sigma_3) = \frac{1}{E} \cdot (\tau - \mu \cdot (-\tau)) = \frac{\tau}{E} \cdot (1 + \mu).$$

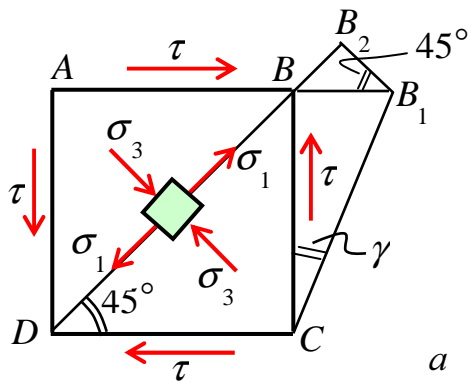
С другой стороны $\gamma = \frac{BB_1}{BC}$, и чтобы правый конец диагонали BD (точка B) совместить с его конечным положением (точка B_1), надо диагональ BD

растянуть на величину BB_2 и повернуть по часовой стрелке по касательной B_2B_1 к радиусу DB_2 (рис. 5.7, а). Напомним, что при малых деформациях, перемещение по дуге окружности принято для линеаризации задачи заменять перемещением по касательной. В этом случае

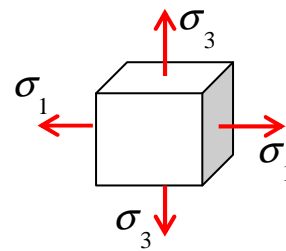
$$\varepsilon_1 = \frac{BB_2}{BD} = \frac{BB_1 \cdot \cos 45^\circ}{BC \cdot \sqrt{2}} = \frac{BB_1}{BC} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\gamma}{2}.$$

Сравнивая оба полученных выражения для ε_1 , получим

$$\frac{\tau}{E} \cdot (1 + \mu) = \frac{\gamma}{2} \text{ или } \tau = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \gamma \text{ или } \tau = G \cdot \gamma, \text{ где } G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}.$$



а



б

Рис. 5.7

Тема 6 Сдвиг

Если на брус действуют две равные силы F , весьма близко расположенные друг к другу, перпендикулярные к оси бруса и направленные в противоположные стороны, как это бывает при разрезании металлических прутков или листов ножницами (рис. 6.1, *a*), то при достаточной величине сил происходит срез.

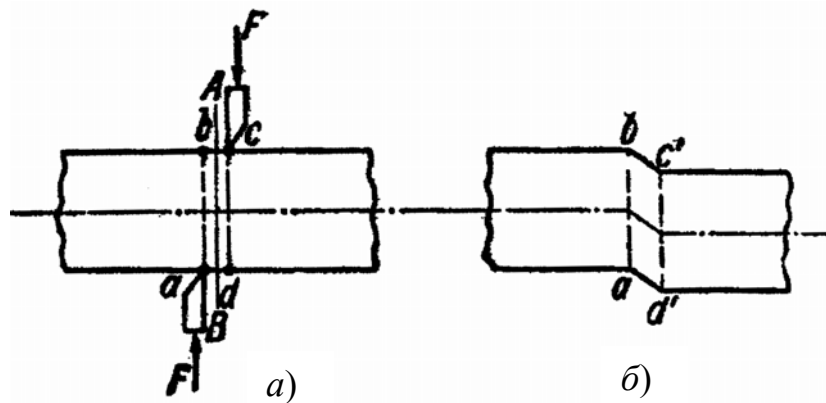


Рис. 6.1

Левая часть тела отделяется от правой по некоторому сечению AB . Характерным для среза является близость расположения сил F . Деформация, предшествующая срезу, заключается в перекашивании прямых углов элементарного параллелепипеда. Эта деформация называется сдвигом. На рис. 6.1, *б* показан сдвиг, происходящий в параллелепипеде до среза, прямоугольник $abcd$ превращается в параллелограмм $abc'd'$.

Чистый сдвиг почти не встречается как самостоятельное явление. Обычно он сопровождается каким-либо другим явлением, например, растяжением или изгибом. Это свойство сдвига создает некоторые трудности при его изучении.

Рассмотрим более подробно деформацию элемента $abcd$ (рис. 6.1, а, б). Изобразим в более крупном масштабе на рис. 6.2.

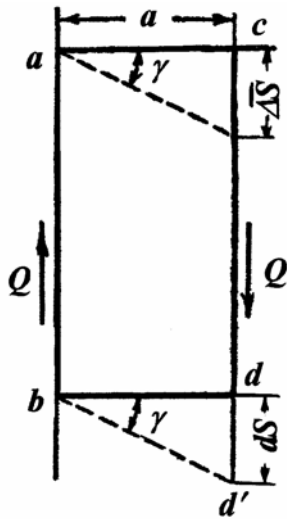


Рис. 6.2

Условно считаем грань ab неподвижной. Величина $cc' = dd' = \Delta S$, на которую сечение cd сдвинулось относительно соседнего сечения ab , очень близко от него расположенного, называется *абсолютным сдвигом*.

Абсолютный сдвиг зависит от расстояния a между смежными сечениями. Чем больше это расстояние, тем больше будет и величина абсолютного сдвига при прочих одинаковых условиях.

Угол γ , на который изменяются прямые углы параллелепипеда, называется *относительным сдвигом*. В упругом состоянии этот угол очень мал.

Относительный сдвиг может быть определен из отношения

$$\frac{cc'}{ac} = \frac{\Delta S}{a} = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma. \quad (6.1)$$

Вследствие малости угла γ тангенс его можно принимать равным самому углу, выраженному в радианах.

Величину поперечной силы Q можно определить методом сечений. Проведем сечение между двумя срезающими силами (рис. 6.3) и отбросим одну часть, а действие отброшенной части заменим внутренним усилием Q .

Из условия равновесия $\sum y = 0$, $Q = F$. Поперечная сила является равнодействующей внутренних сил, т.е.

$$Q = \int_A \tau dA. \quad (6.2)$$

Из рассмотренной схемы деформации следует, что в любой точке бруса прямой угол изменяется на одну и ту же величину, т.е. деформации

сдвига во всех точках бруса одинаковы. Отсюда приходим к выводу, что касательные напряжения одинаковы, следовательно

$$\tau \int_A dA = Q; \quad \tau \cdot A = Q.$$

Из последнего выражения получаем формулу для определения касательного напряжения при сдвиге

$$\tau = \frac{Q}{A}. \quad (6.3)$$

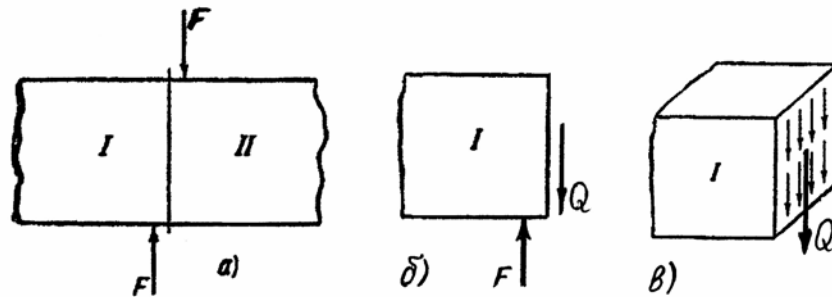


Рис. 6.3

В большинстве практически встречающихся случаев сдвиг осложняется каким-либо другим явлением, например, изгибом. При этом касательные напряжения уже не будут одинаковы во всех точках сечения и формула дает не истинное, а его среднее значение.

Закон Гука при сдвиге

На основании опыта и теоретических соображений можно принять, что в пределах упругости материала между величиной сдвигающей силы $F = Q$ и вызываемым сдвигом ΔS существует прямая пропорциональность.

Вместо всей силы удобнее брать величину внутренней силы, отнесенной к единице площади. Тогда получается, что между касательным напряжением τ и относительным сдвигом γ существует прямая пропорциональность.

$$\tau = G\gamma. \quad (6.4)$$

Эта зависимость выражает собой закон Гука при сдвиге и читается так: касательное напряжение при сдвиге прямо пропорционально углу сдвига. Величина G называется модулем упругости при сдвиге и характеризует собой способность материала сопротивляться деформации сдвига.

Так как γ – число отвлеченное, то G имеет такую же размерность, как и τ , т.е. Па или МПа.

Подставив в формулу (6.4) значения $\tau = \frac{Q}{A}$ и $\gamma = \frac{\Delta S}{a}$ получим, что абсолютный сдвиг

$$\Delta S = \frac{Q \cdot a}{G \cdot A}. \quad (6.5)$$

Напряженное состояние при сдвиге – частный случай плоского напряженного состояния. По граням элементарного параллелепипеда будут действовать только касательные напряжения (рис. 6.4), а нормальные напряжения $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$.

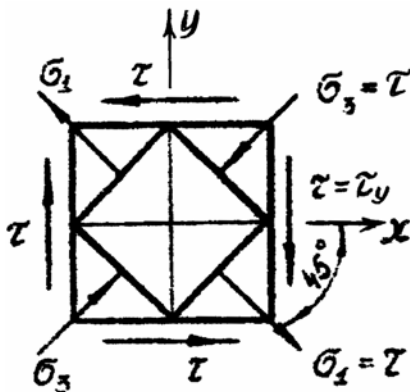


Рис.6.4

Определяем величину главных напряжений σ_{\max} и σ_{\min} .

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} = \pm \tau.$$

Отсюда

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \tau;$$

$$\sigma_3 = \sigma_{\min} = -\tau;$$

$$\sigma_2 = 0.$$

Полагаем

$$\sigma_x = +0, \quad \sigma_y = -0, \quad \tau_y > 0.$$

Положение главных площадок определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_y}{\sigma_x - \sigma_y} = -\infty; \quad \alpha_0 = -45^\circ.$$

Поворот исходных площадок производим на угол $\alpha_0 = 45^\circ$ по часовой стрелке.

Чистый сдвиг можно получить при растяжении и сжатии бруса по двум взаимно перпендикулярным направлениям с напряжениями $\sigma_1 = \sigma$; $\sigma_3 = -\sigma$.

Определим величину потенциальной энергии при сдвиге, равную работе внешних сил при сдвиге,

$$U = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta S = \frac{1}{2} Q \cdot \frac{Qa}{Ga} = \frac{Q^2 a}{2GA}. \quad (6.6)$$

Удельная потенциальная энергия при сдвиге

$$u = \frac{U}{V}.$$

Объем тела, подвергающегося сдвигу,

$$V = A \cdot a.$$

Тогда

$$u = \frac{Q^2 \cdot a}{2GA \cdot A \cdot a} = \frac{Q^2}{2GA^2} = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{\tau \cdot \gamma G}{2G} = \frac{1}{2} \tau \gamma;$$
$$u = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{1}{2} \tau \cdot \gamma. \quad (6.7)$$

Удельную потенциальную энергию деформации можно получить и через главные напряжения.

Так как при сдвиге не происходит изменения объема, то вся удельная потенциальная энергия идет на изменение формы, т.е.

$$u = u_\phi.$$

А по формуле

$$u_\phi = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1).$$

Учитывая, что $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$, получим

$$u_\phi = \frac{1+\nu}{3E} (\tau^2 + \tau^2 + \tau^2) = \frac{1+\nu}{E} \tau^2. \quad (6.8)$$

Приравнивая выражения (6.7) и (6.8), имеем

$$\frac{\tau^2}{2G} = \frac{1+\nu}{E} \tau^2.$$

Отсюда

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (6.9)$$

Формула (6.9) выражает собой зависимость между тремя упругими постоянными: модулем упругости при сдвиге, модулем упругости при растяжении или сжатии и коэффициентом Пуассона.

Если коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$, то $G = 0,4E$,

если $\nu = 0,3$, то $G = 0,375E$.

Так, для стали Ст.3 с $E = 2 \cdot 10^5$ МПа при $\gamma = 0,25$ $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Понятие о расчете заклепочных и сварных соединений

Условие прочности по допускаемым напряжениям при сдвиге по форме аналогично, как и при растяжении

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau]. \quad (6.10)$$

Вопрос выбора допускаемого напряжения при сдвиге (срезе) сложнее, чем при растяжении и сжатии. При выборе допускаемого напряжения исходят из предела текучести или предела прочности материала. Однако непосредственное определение этих характеристик материала при сдвиге усложняется тем, что трудно практически воспроизвести чистый сдвиг без изгиба и других добавочных явлений, влияющих на результаты испытания. Поэтому допускаемое напряжение при сдвиге устанавливается из теоретических соображений, проверенных практическим применением.

При чистом сдвиге нами уже установлено, что $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$.

Согласно первой теории прочности, $[\sigma] \geq \sigma_1 = \tau$, т.е. касательное напряжение при сдвиге должно быть не больше допускаемого напряжения на растяжение, т.е.

$$[\tau] \leq [\sigma].$$

По второй теории прочности будем иметь

$$[\sigma] \geq \sigma_1 - \gamma\sigma_3 = \tau + \gamma\tau..$$

Если для стали принять $\gamma = 0,3$, то допускаемое касательное напряжение должно быть

$$[\tau] \approx 0,77[\sigma]..$$

Аналогично согласно третьей теории прочности получим

$$[\sigma] \geq \sigma_1 - \sigma_3 = \tau + \tau = 2\tau.$$

Следовательно,

$$[\tau] = 0,5[\sigma].$$

Наконец, по четвертой (энергетической) теории прочности получим

$$[\sigma] = \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)} = \sqrt{\tau^2 + \tau^2 + \tau^2} = \tau\sqrt{3}.$$

Следовательно,

$$[\tau] = 0,57[\sigma].$$

В практике обычно принимают для хрупких материалов

$$[\tau] = (0,8 \div 1,0)[\sigma]; \quad (6.11)$$

для пластичных

$$[\tau] = (0,5 \div 0,6)[\sigma]. \quad (6.12)$$

Волокнистые материалы, такие, например, как дерево, сопротивляются сдвигу вдоль волокон (скалыванию) иначе, чем изотропные. Для таких материалов выбор допускаемого напряжения делается на основании опытов.

Так, для сосны допускаемое напряжение на скалывание $[\tau]$ составляет всего $0,1[\sigma]$ вдоль волокон.

Заклепки употребляются для соединения между собой элементов металлических конструкций. Соединение может быть выполнено внахлестку (рис. 6.5, а) или встык с накладками (рис. 6.5, б).

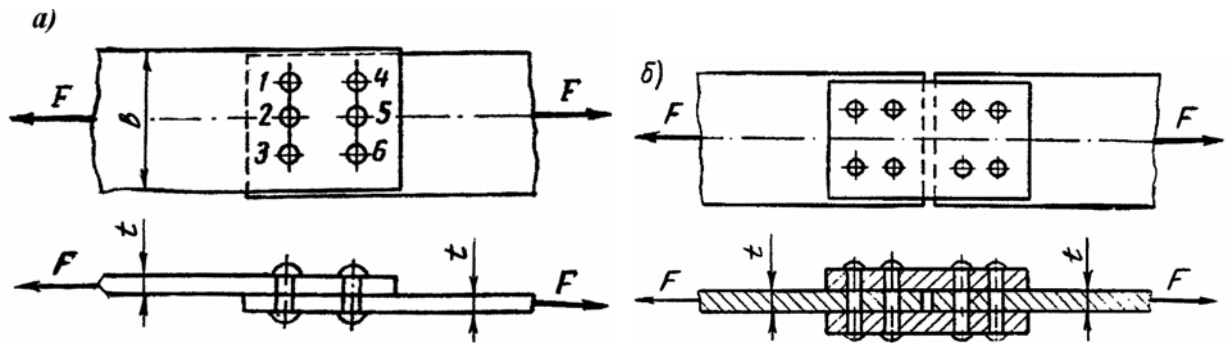


Рис. 6.5

При расчете заклепочных соединений вводятся следующие допущения:

- не учитываются силы трения между соединяемыми элементами;
- усилия распределяются между всеми заклепками равномерно. Это не вполне верно, но все же достаточно близко к действительности при небольшом числе рядов (не больше 5);

– заклепки работают только на срез и смятие.

При соединении внахлестку срез заклепки происходит в одной плоскости (рис. 6.6, а, б).

Условие прочности на срез

$$\tau_{cp} = \frac{Q}{A_{cp}} \leq [\tau_{cp}] \quad (6.13)$$

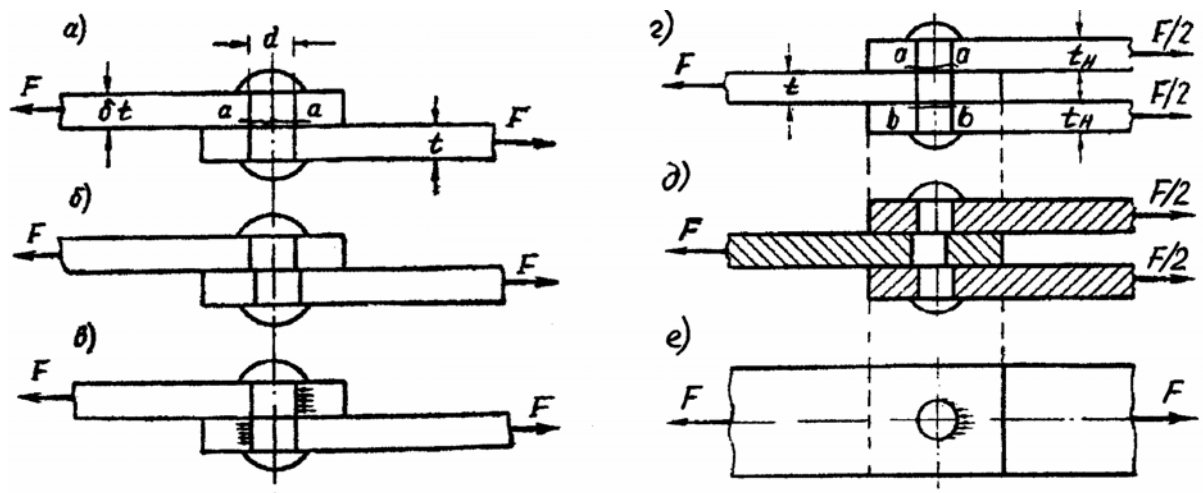


Рис. 6.6

Величина перерезывающей силы $Q = F$, а площадь среза при соединении внахлестку равна

$$A_{cp} = n \frac{\pi d^2}{4},$$

где n – число заклепок, а d – диаметр заклепки.

С учетом этого условие прочности (4.13) примет вид

$$\tau_{cp} = \frac{4Q}{n\pi d^2} \leq [\tau_{cp}]. \quad (6.14)$$

При соединении встык с накладками срез каждой заклепки происходит по двум плоскостям (рис. 4.6, з, д). Тогда площадь среза

$$A_{cp} = 2n \frac{\pi d^2}{4} = n \frac{\pi d^2}{2},$$

где n – число заклепок по одну сторону от стыка. Тогда условие прочности для заклепочного соединения, выполненного встык с накладками примет вид

$$\tau_{cp} = \frac{2Q}{n\pi d^2} \leq [\tau_{cp}]. \quad (6.15)$$

Кроме среза, возможно еще смятие заклепки.

Под действием силы F верхний лист прижимается к заклепке с правой стороны, а нижний – с левой (рис. 6.6, в). При этом может произойти смятие одного из двух соприкасающихся тел – либо листа, либо заклепки. Как правило, заклепки выполняются из более мягкого материала, чем соединяемые листы, поэтому больше приходится заботиться о прочности заклепки.

Смятие происходит в плане по полуокружности и распределяется по ней неравномерно: в средней части полуокружности оно наибольшее (рис. 6.6, е), к краям убывает. Для упрощения расчета полуокружность заменяется диаметром, а напряжение принимается средним – равномерным. Опытами установлено, что допускаемое напряжение смятия при этом можно принять равным удвоенному допускаемому напряжению на сжатие, т.е.

$$[\sigma_{см}] = 2[\sigma].$$

Условие прочности на смятие можно записать так:

$$\sigma_{см} = \frac{Q}{A_{см}} \leq [\sigma_{см}]. \quad (6.16)$$

Суммарная площадь смятия всех n заклепок при соединении внахлестку равна

$$A_{см} = n \cdot d \cdot t, \quad (6.17)$$

где t – толщина листа.

Если заклепки соединяют два листа различной толщины, то в формулу (6.16) нужно вставить меньшую из двух толщин. После подстановки (6.16) в (6.15) получим условие прочности на смятие заклепочного соединения, выполненного внахлестку,

$$\sigma_{см} = \frac{Q}{ndt} \leq [\sigma_{см}]. \quad (6.18)$$

При соединении встык с накладками смятие может произойти либо по толщине основного листа, либо по толщине $2t_n$ двух накладок вместе. В формулу (6.16) вводим ту из этих величин, которая меньше, а именно:

$$\text{при } t < 2t_n \quad A_{см} = ndt$$

$$\text{при } t > 2t_n \quad A_{см} = 2t_n \cdot d \cdot n,$$

где n – число заклепок по одну сторону от стыка.

Расчет на срез по предельным состояниям ведется по формуле

$$N \leq m \cdot m_c \cdot R_{ср} \cdot n \cdot n_{ср} \cdot \frac{\pi d^2}{4}, \quad (6.19)$$

где N – расчетное усилие в рассматриваемом соединении;

m – коэффициент условий работы конструкции или ее элементов, в большинстве случаев принимается равным или близким к единице, например, для сжатых элементов стропильной фермы – 0,95, для растянутых – 1;

m_c – коэффициент условий работы самого типа заклепочного соединения, например, заклепки могут быть с потайными головками или работающими кроме среза и смятия еще и на отрыв головок. В большинстве случаев этот коэффициент принимается равным единице;

n – число заклепок в соединении внахлестку или число заклепок по одну сторону от стыка при соединении встык с накладками;

n_{cp} – число рабочих срезов одной заклепки;

R_{cp} – расчетное сопротивление заклепок срезу;

d – диаметр заклепок.

Полагая $m = m_c = 1$, можем записать формулу (6.19) так:

$$N \leq R_{cp} \left(n n_{cp} \frac{\pi d^2}{4} \right) \quad \text{или} \quad N \leq R_{cp} \cdot A_{cp}.$$

Расчет заклепок на смятие ведется по формуле

$$N \leq m \cdot m_c \cdot R_{cp} \cdot n \cdot d \sum t, \quad (6.20)$$

где R_{cm} – расчетное сопротивление заклепок смятию;

$\sum t$ – наименьшая суммарная толщина элементов, сминаемых в одном направлении (для двухсрезной заклепки толщина либо среднего листа, либо двух накладок).

Остальные величины те же, что и в предшествующей формуле.

Полагая $m = m_c = 1$, можно формулу (6.20) записать так:

$$N \leq R_{cm} (n d \sum t) \quad \text{или} \quad N \leq R_{cm} \cdot A_{cm},$$

т.е. расчетное усилие должно быть равно или меньше расчетного сопротивления на сжатие, умноженного на площадь смятия.

В строительных конструкциях применяются различные типы сварных соединений. Наиболее употребительны сварные швы:

- стыковые (рис.6.7, а)
- угловые или валиковые (рис. 6.7, б).

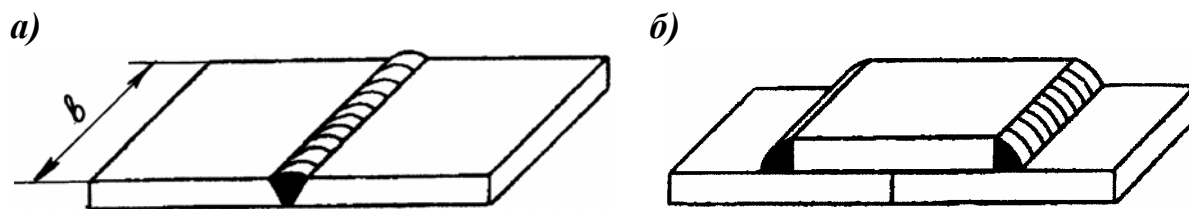


Рис.6.7

Стыковым называется соединение двух листов, расположенных в одной плоскости; листы располагаются один возле другого с небольшим зазором, который заливается наплавленным металлом. Из соединений наиболее употребительны два вида.

1. Соединение встык V-образным швом с двусторонней заваркой (рис. 6.8, а). При этом соединении кромки листов состругиваются под углом так, что между листами образуется V-образный зазор, который заполняется наплавленным металлом. Соединение такого типа применяется при сварке тонких листов (толщиной до 15 мм).

2. Соединение встык X-образным швом с двусторонней заваркой (рис. 6.8, б). Оно применяется в случае толстых листов (толще 15 мм).

При сварке наплавленный металл заполняет весь зазор между листами и немного выступает наружу, образуя так называемый наплыв.

При соединении внахлестку один лист накладывается на другой и обваривается по краям.

В зависимости от расположения швов различают два основных вида соединений внахлестку:

– фланговыми швами, т.е. расположенными параллельно действию силы (рис. 6.8, в);

– лобовыми или торцовыми швами, т.е. расположенными перпендикулярно действию силы (рис. 6.8, г).

Иногда для увеличения длины швов применяют косые швы. Исследования таких швов показали, что они работают очень хорошо, поэтому применение их желательно, особенно в комбинированных соединениях, т.е. образованных из швов нескольких видов. На рис. 6.8, д показано соединение двух двутавров, осуществленное с помощью V-образных швов встык, которыми соединены полки двутавров, и двух накладок, приваренных к стенке двутавров лобовыми, фланговыми и косыми швами.

X- и V-образные швы при соединении встык рассчитываются на растяжение, сжатие, изгиб. Толщина шва при расчете принимается равной толщине соединяемых листов; небольшой наплыв, который получается при сварке, в расчет не вводится.

Условие прочности по допускаемым напряжениям такого шва, работающего на растяжение, следующее:

$$\sigma = \frac{F}{A_{ш}} \leq [\sigma_3], \quad (6.21)$$

где F – растягивающая сила;

$A_{ш}$ – расчетная площадь поперечного сечения шва;
 $[\sigma_с]$ – допускаемое напряжение для наплавленного металла.
 Расчетная площадь $A_{ш} = t \cdot l_{ш}$.

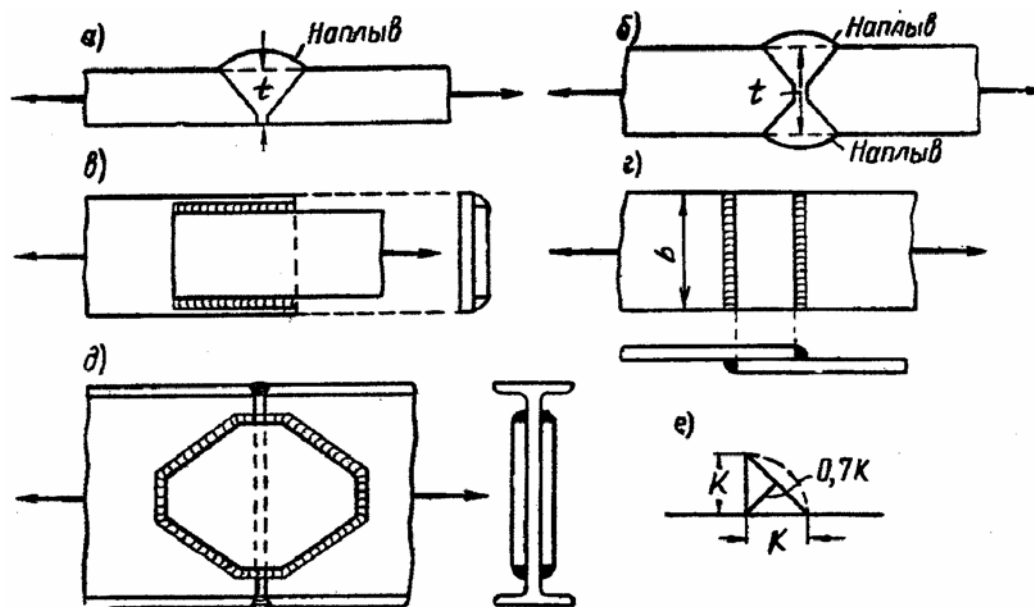


Рис. 6.8

Толщину шва t принимают равной меньшей толщине соединяемых листов, а расчетную длину шва $l_{ш}$ принимают на 1-2 см меньше ширины соединяемой полосы b (рис. 6.7, а), т.е. $l_p = b - (1 \div 2)$ см. Этим учитывается непровар в начале и усадочные раковины в конце каждого шва.

Условие прочности для данного типа сварного соединения можно переписать в такой форме:

$$\sigma = \frac{F}{t \cdot l_{ш}} \leq [\sigma_с]. \quad (6.22)$$

Допускаемые напряжения для наплавленного металла назначаются меньшей величины, чем допускаемые напряжения для основного металла, из которого изготовлены свариваемые элементы. Они зависят от вида сварки, электрода, опытности сварщика.

В фланговых и лобовых швах наименьшая толщина шва имеет место по перпендикуляру, опущенному из вершины прямого угла сварки на гипотенузу (рис. 6.8, е), и составляет $0,7 K$. Фланговые швы работают в основном на срез и рассчитываются по допускаемому напряжению или же расчетному сопротивлению на срез. Срез происходит по всей длине шва.

Работа лобового шва довольно сложна. Однако ради упрощения его рассчитывают условно на срез по площади, проходящей через биссектрису угла сварки.

Условие прочности для фланговых и лобовых швов по допускаемым напряжениям имеет вид

$$\tau = \frac{F}{0,7K \cdot l_{\text{ш}} t} \leq [\tau_3], \quad (6.23)$$

где F – растягивающая или сжимающая сила;
 K – размер катета шва;
 $l_{\text{ш}}$ – расчетная суммарная длина фланговых и лобовых швов;
 $[\tau_3]$ – допускаемое напряжение на срез наплавленного металла.

По предельным состояниям сварные соединения встык, работающие на растяжение, рассчитываются по формуле

$$N \leq mR_p^{c6} l_{\text{ш}} t, \quad (6.24)$$

работающие на сжатие – по формуле

$$N \leq mR_c^{c6} l_{\text{ш}} t. \quad (6.25)$$

В этих формулах

N – расчетная продольная сила, действующая на соединение;
 m – коэффициент условий работы конструкции или группы однотипных элементов, обычно близкий к единице;

R_p^{c6} – расчетное сопротивление сварного шва встык растяжению;

R_c^{c6} – расчетное сопротивление сварного шва встык сжатию;

$l_{\text{ш}}$ – расчетная длина сварного шва;

t – толщина соединяемых встык элементов (если толщины соединяемых элементов различны, то в формулу вводится меньшая из них).

Сварные швы, выполняемые при соединении элементов внахлестку (угловые и валиковые швы), рассчитываются по формуле

$$N \leq 0,7mR_y^{c6} l_{\text{ш}} t, \quad (6.26)$$

где R_y^{c6} – расчетное сопротивление углового шва, которое берется одно и то же независимо от вида работы шва.

Для тонкообмазанных электродов $R_y^{c6} = 90$ МПа, а для толстообмазанных $R_y^{c6} = 140$ МПа.

Тема 7 Кручение

Основные понятия

Кручением называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент ($M_{кр}$, другое обозначение – M_z).

Кручение возникает в валах, винтовых пружинах, в элементах пространственных конструкций и т.п.

Валом обычно называется стержень, испытывающий деформацию кручения совместно с изгибом.

Деформация кручения наблюдается, если прямой брус нагружен внешними моментами (парами сил M), плоскости действия которых перпендикулярны к его продольной оси

В чистом виде деформация кручения встречается редко, обычно присутствуют и другие внутренние силовые факторы (изгибающие моменты, продольные силы).

Внешние крутящие моменты передаются на вал в местах посадки на него шкивов, зубчатых колес, там, где поперечная нагрузка смещена относительно оси вала.

Мы будем рассматривать прямой брус только в состоянии покоя или равномерного вращения. В этом случае алгебраическая сумма всех внешних скручивающих моментов, приложенных к брусу, будет равна нулю.

При расчете брусев, испытывающий деформацию кручения, на прочность и жесткость при статическом действии нагрузки надо решить две основные задачи. Это определение напряжений (от $M_{кр}$), возникающих в брусе, и нахождение угловых перемещений в зависимости от внешних скручивающих моментов.

Крутящий момент

В ряде случаев величины внешних скручивающих моментов определяются по величине потребляемой мощности и по скорости вращения вала. Если вал делает в минуту n оборотов, то угол поворота вала за 1 секунду (1 с), выраженный в радианах, равен $\frac{n}{60} \cdot 2\pi = \frac{\pi \cdot n}{30}$. Работа скручивающего момента M за 1 с,

т. е. мощность N , передаваемая валом, равна произведению величины момента на угол поворота вала (в радианах) за 1 с:

т. е. мощность N , передаваемая валом, равна произведению величины момента на угол поворота вала (в радианах) за 1 с:

$$N = M \cdot \frac{\pi \cdot n}{30}, \text{ откуда } M (\text{кГ} \cdot \text{м}) = \frac{30 \cdot N (\text{кГ} \cdot \text{м/с})}{\pi \cdot n (\text{об/мин})}.$$

Если мощность N задана в лошадиных силах (л.с.), то

$$M(\text{кг} \cdot \text{м}) = \frac{30 \cdot 75 \cdot N}{\pi \cdot n} = 716,2 \cdot \frac{N(\text{л.с.})}{n(\text{об/мин})} \quad \text{или} \quad M(\text{н} \cdot \text{м}) = 7024 \cdot \frac{N(\text{л.с.})}{n(\text{об/мин})}.$$

Если мощность N задана в киловаттах, то, учитывая, что 1 л.с. равна 0,736 кВт, получаем

$$M(\text{кг} \cdot \text{м}) = 973,6 \cdot \frac{N(\text{квт})}{n(\text{об/мин})} \quad \text{или} \quad M(\text{н} \cdot \text{м}) = 9548 \cdot \frac{N(\text{квт})}{n(\text{об/мин})}$$

Крутящие моменты $M_{кр}$ (M_z), возникающие в поперечных сечениях бруса, определяются по внешним скручивающим моментам M с помощью метода сечений.

В простейшем случае, когда брус нагружен только двумя внешними моментами (эти моменты из условия равновесия вала $\sum M_z = 0$ всегда равны друг другу по величине и направлены в противоположные стороны), как показано на рис. 7.1, крутящий момент $M_{кр}$ в любом поперечном сечении бруса (на участке между внешними моментами) по величине равен внешнему моменту $|M_1| = |M_2|$.

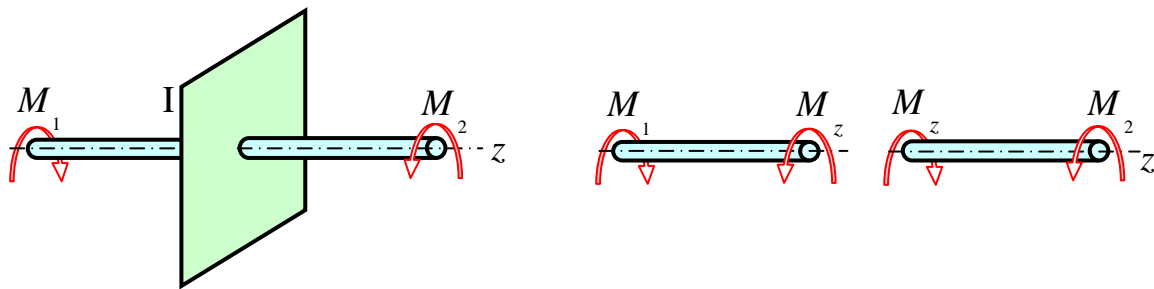


Рис. 7.1

В более сложных случаях, когда к прямому брусу приложено несколько внешних моментов, крутящие моменты $M_{кр}$ в поперечных сечениях различных участков бруса неодинаковы.

На основании метода сечений *крутящий момент в произвольном поперечном сечении бруса численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных к брусу по одну сторону от рассматриваемого сечения.*

При расчетах на прочность знак крутящего момента не имеет никакого значения, но для удобства построения эп. $M_{кр}$ примем следующее правило знаков: *крутящий момент считается положительным, если при взгляде в торец отсеченной части бруса действующий на него момент представляется направленным по ходу часовой стрелки* (рис. 7.2).

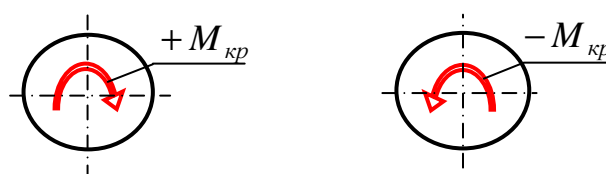


Рис. 7.2

На рис. 7.3, а изображен стержень, жестко защемленный в правом конце-вом сечении, к которому приложены три внешних скручивающих момента.

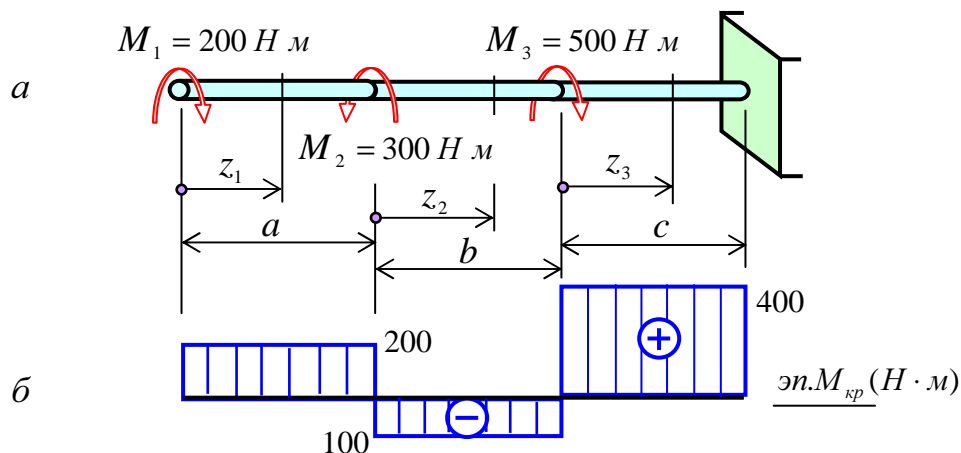


Рис. 7.3

В нашем случае крутящие моменты $M_{кр}$ в их поперечных сечениях удобно выразить через внешние моменты, приложенные со стороны свободного конца стержня.

Это позволяет определять крутящие моменты, не вычисляя реактивного момента, возникающего в заделке.

Крутящий момент $M_{кр}$ в сечении 1–1 ($0 \leq z_1 \leq a$) численно равен $M_1 = 200 \text{ H}\cdot\text{м}$ и, согласно принятому правилу знаков, положителен.

Крутящий момент $M_{кр}$ в сечении 2–2 ($0 \leq z_2 \leq b$) численно равен алгебраической сумме моментов M_1 и M_2 , т.е. $M_{кр} = 200 - 300 = -100 \text{ H}\cdot\text{м}$, а его знак зависит от соотношения этих моментов.

Аналогичным образом вычисляется крутящий момент $M_{кр}$ в сечении 3–3 ($0 \leq z_3 \leq c$): $M_{кр} = 200 - 300 + 500 = 400 \text{ H}\cdot\text{м}$.

График, показывающий изменение крутящих моментов по длине вала, называется эпюрой крутящих моментов. На рис. 7.3, б показана такая эпюра для стержня, изображенного на рис. 7.3, а.

Каждая ордината эп. $M_{кр}$ в принятом масштабе равна величине крутящего момента, действующего в том поперечном сечении стержня, которому соответствует эта ордината.

В сечении, в котором к стержню приложен внешний скручивающий момент, ордината эпюры изменяется скачкообразно на величину, равную значению этого момента.

Следует учитывать, что наибольший внешний скручивающий момент, приложенный к брусу, не всегда равен наибольшему крутящему моменту, по которому ведется расчет бруса на прочность и жесткость.

Напряжения и деформации

Рассмотрим прямой брус с поперечным сечением в виде круга, нагруженный на концах скручивающими моментами M (рис. 7.4, а).

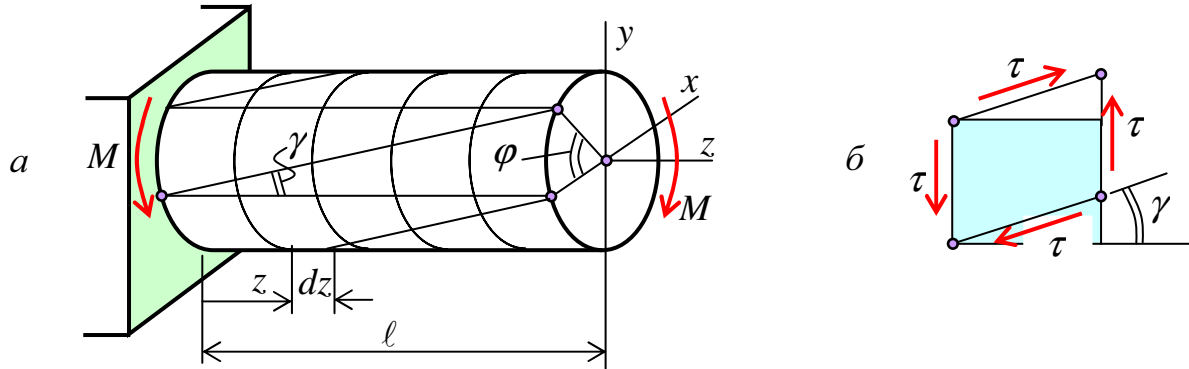


Рис. 7.4

Для наглядного представления характера деформации бруса при кручении проводится следующий опыт. На цилиндрическую поверхность бруса наносится равномерная сетка линий, состоящая из окружностей и образующих. Как видно, поворот правого торцевого сечения относительно неподвижного левого на угол φ (назовем его углом закручивания стержня) вызывает поворот продольных волокон на угол γ (угол сдвига), поскольку на величину γ искажаются углы ортогональной сетки продольных и поперечных рисок модели (рис. 7.4, б).

Отношение угла закручивания φ к длине участка l называется *относительным углом закручивания*, который обозначается $\theta = \frac{\varphi}{l}$, или в дифференциальной форме $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$.

При деформации все образующие остаются параллельными друг другу и сдвигаются на один и тот же угол γ (рис. 7.4, а), а прямоугольники, нанесенные на поверхность бруса сетки, становятся параллелограммами (рис. 7.4, б). При этом длина l остается постоянной ($l = \text{const}$), что говорит об отсутствии нормальных напряжений в поперечном сечении бруса ($\sigma_z = 0$).

Все это позволяет сделать следующее предположение, которое будет в дальнейшем принято при выводе формул: материал бруса на поверхности находится в состоянии чистого сдвига, где $\gamma = \frac{\tau}{G}$.

Теория кручения брусев, имеющих круглое сплошное поперечное сечение, основана на следующих предположениях:

1. Поперечные сечения бруса, плоские и нормальные к его оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к ней и после деформации (справедлива гипотеза плоских сечений или гипотеза Бернулли).
2. Расстояния (вдоль оси бруса) между поперечными сечениями не изменяются, следовательно $\varepsilon_z = 0$.

3. Контуры поперечных сечений и их радиусы не деформируются. Это означает, что поперечные сечения ведут себя как жесткие круговые пластинки, поворачивающиеся при деформировании относительно оси стержня z . Отсюда следует, что любые деформации в плоскости пластинки равны нулю, в том числе и $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$.

4. Материал стержня подчиняется закону Гука. Поскольку $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$, то и $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$. Это означает, что в поперечных сечениях стержня возникают лишь *касательные напряжения* τ , а вследствие закона парности касательных напряжений, равные им напряжения действуют и в сопряженных продольных сечениях. Следовательно напряженное состояние стержня – *чистый сдвиг*.

Формулы, выведенные на основе этих положений, совпадают с формулами, полученные точными методами теории упругости, и подтверждаются экспериментально.

Поскольку задача по определению напряжений является статически неопределимой, т. е. неизвестных больше чем независимых уравнений равновесия, то для получения дополнительных уравнений необходимо рассмотреть геометрическую и физическую стороны задачи.

Геометрическая сторона задачи.

Двумя смежными сечениями вырежем элемент стержня длиной dz и, поскольку нас интересуют деформации элемента, левое сечение его будем считать неподвижным (рис. 7.5, а, б).

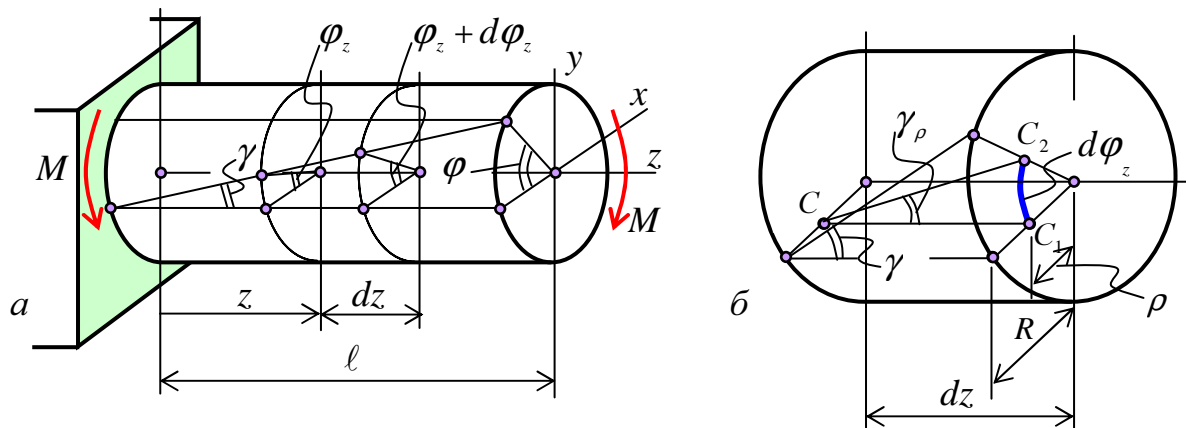


Рис. 7.5

При повороте правого сечения на угол $d\varphi_z$ в соответствии с гипотезой о недеформируемости радиусов, правый конец волокна CC_1 (отстоящий от оси элемента на величину полярного радиуса ρ) будет перемещаться по дуге C_1C_2 , вызывая поворот волокна на угол сдвига

$$\gamma_\rho = C_1 C_2 / C C_1 = \frac{\rho \cdot d\phi_z}{dz} = \rho \cdot d\theta.$$

Статическая сторона задачи.

Рассмотрим две элементарные площадки dA поперечного сечения бруса, расположенные на общем диаметре на равных расстояниях ρ от центра тяжести круглого сечения o (рис. 7.6, а).

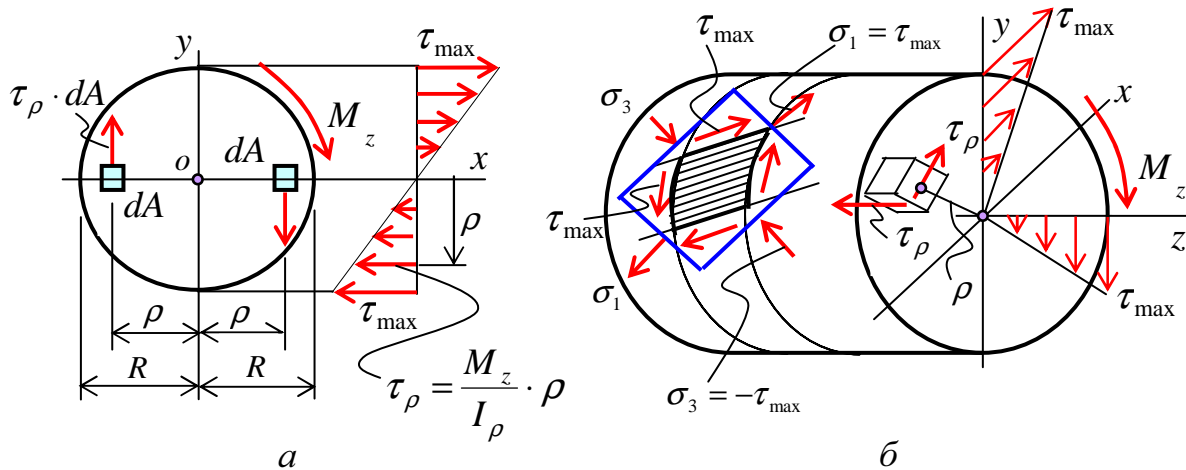


Рис. 7.6

Силы, действующие на каждую из этих площадок, равны $(\tau_\rho \cdot dA)$, расположены в плоскости поперечного сечения бруса и направлены перпендикулярно к диаметру в противоположные стороны. Они образуют элементарную пару сил.

Таких пар возникает в поперечном сечении бесконечное множество. Все они приводятся к одному моменту, действующему в плоскости поперечного сечения и представляющего собой крутящий момент M_z , который из условия статики будет равен:

$$M_z = \int_A \tau_\rho \cdot \rho \cdot dA.$$

Физическая сторона задачи.

Величина касательных напряжений, на основании закона Гука при сдвиге, равна

$$\tau_\rho = G \cdot \gamma_\rho.$$

Синтез.

Итак, после рассмотрения трех сторон задачи, мы получили следующую совместную систему из трех уравнений (условие равновесия, геометрическое и физическое уравнения).

Решая эту систему мы получаем все необходимые формулы для определения напряжений и деформаций, а также геометрические характеристики, которые соответствуют деформации кручения.

$$\left\{ \begin{array}{l} M_z = \int_A \tau_\rho \cdot \rho \cdot dA \\ \gamma_\rho = \frac{\rho \cdot d\varphi_z}{dz} \\ \tau_\rho = G \cdot \gamma_\rho \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} M_z = \int_A \tau_\rho \cdot \rho \cdot dA \\ \tau_\rho = G \cdot \frac{\rho \cdot d\varphi_z}{dz} \end{array} \right. \quad \text{или} \quad M_z = G \cdot \frac{d\varphi_z}{dz} \cdot \int_A \rho^2 \cdot dA.$$

С учетом $I_\rho = \int_A \rho^2 \cdot dA$, имеем относительный или погонный угол закручивания θ , который является мерой деформации стержня при кручении и определяется выражением $\theta = \frac{d\varphi_z}{dz} = \frac{M_z}{G \cdot I_\rho}$. Отсюда угол закручивания элемента длиной dz равен $d\varphi_z = \frac{M_z \cdot dz}{G \cdot I_\rho}$, а полный угол закручивания стержня длиной l при $M_z = const$ и $(G \cdot I_\rho) = const$ будет равен $\varphi = \frac{M_z \cdot l}{G \cdot I_\rho}$ (закон Гука при кручении), и, следовательно, $\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_z}{G \cdot I_\rho}$.

Касательные напряжения в любой точке сечения определяются выражением $\tau_\rho = G \cdot \rho \cdot \frac{M_z}{G \cdot I_\rho} = \frac{M_z}{I_\rho} \cdot \rho$. Значение напряжений при кручении не зависят от физических свойств материала вала, так как величина G в формулы напряжений не входит. Значения же деформаций зависят от свойств материала. График изменения величины касательных напряжений τ_ρ вдоль какого-либо радиуса (т.е. эпюра касательных напряжений) изображается прямой линией (см. рис. 7.6, а).

Видно, что углы сдвига и касательные напряжения пропорциональны расстояниям от оси стержня. В центре (при $\rho=0$) касательные напряжения равны нулю, в точках же, расположенных в непосредственной близости от внешней поверхности бруса, т.е. точках контура его поперечного сечения они наибольшие.

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_\rho} \cdot \rho_{\max} = \frac{M_z}{I_\rho} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_z}{W_\rho}, \quad \text{где} \quad I_\rho = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot R^4}{2} \quad \text{и} \quad W_\rho = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{\pi \cdot R^3}{2}.$$

Полярным моментом сопротивления сечения W_ρ называется отношение полярного момента инерции I_ρ к расстоянию от центра тяжести сечения до наиболее удаленной его точки ρ_{\max} ($W_\rho = I_\rho / \rho_{\max}$).

Произведение модуля поперечного сдвига на полярный момент инерции ($G \cdot I_\rho$) называется *жесткостью поперечного сечения* стержня при кручении.

Забегая вперед, отметим, что полученные формулы для напряжений и деформаций по структуре аналогичны формулам для напряжений и деформаций при изгибе стержня.

Напряжения в продольных сечениях бруса

Касательные напряжения в поперечных сечениях бруса направлены в каждой точке перпендикулярно к текущему радиусу ρ . Из условия парности следует, что точно такие же напряжения возникают и в продольных сечениях бруса (рис. 7.7, а).

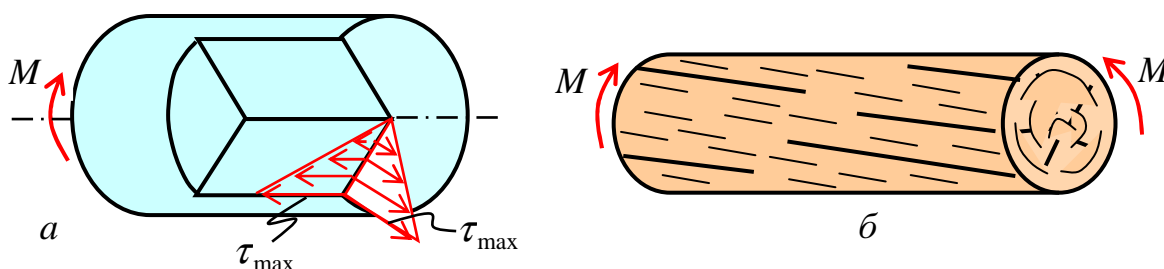


Рис. 7.7

Наличие этих напряжений проявляется при испытании на кручение деревянных образцов. Так, разрушение стержня из дерева, имеющего сравнительно низкую прочность на скалывание вдоль волокон, начинается с образования продольных трещин (рис. 7.7, б). Разрушение стержня из хрупкого металла (например, чугуна) происходит по сложной винтовой поверхности, соответствующей максимальным растягивающим напряжениям, т.е. по траектории главного напряжения σ_3 (рис. 7.6, б).

Кручение стержней, имеющих поперечное сечение в форме кольца

Все формулы, полученные для расчета на кручение прямых стержней круглого сплошного сечения, применимы и для стержней кольцевого поперечного сечения (рис. 7.8). Полярный момент инерции здесь определяется как разность моментов инерции кругов с диаметрами d и $(\alpha \cdot d)$:

$$I_\rho = \frac{\pi \cdot d^4}{32} - \frac{\pi \cdot (\alpha \cdot d)^4}{32} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} (1 - \alpha^4), \quad W_\rho = \frac{\pi \cdot d^4 \cdot (1 - \alpha^4) \cdot 2}{32 \cdot d} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} (1 - \alpha^4).$$

Отметим, что полярный момент сопротивления кольцевого сечения *не равен* разности полярных моментов сопротивления, подсчитанных для двух сплошных сечений: одного с диаметром, равным наружному диаметру кольца, а другого – внутреннему (часто встречающаяся ошибка).

При одинаковой площади поперечного сечения (т.е. при одинаковом расходе материала) полярные моменты инерции и момент сопротивления для кольцевого сечения, которое не имеет площадок, близко расположенных к центру, значительно больше чем для сплошного круглого сечения. Поэтому

Стержень кольцевого сечения при кручении является более экономичным, чем стержень сплошного круглого сечения, т. е. требует меньшего расхода материала. Но при проектировании брусков следует учитывать, что в случае кольцевого сечения их изготовление сложнее, а значит, и дороже.

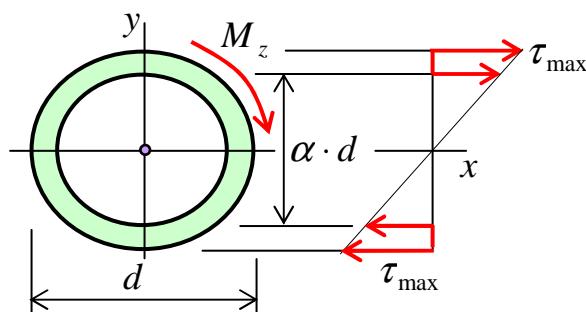


Рис. 7.8

Условие прочности

Наибольшие касательные напряжения, возникающие в скручиваемом стержне, не должны превышать соответствующих допускаемых напряжений:

$$\tau_{\max} \leq [\tau]$$

или при постоянном сечении стержня

$$\frac{\max M_z}{W_\rho} \leq [\tau].$$

Это требование называется условием прочности.

Допускаемое напряжение при кручении $[\tau]$ зависит от свойств материала рассчитываемого стержня и от принятого коэффициента запаса прочности $[n]$:

$$[\tau] = \tau_{\text{пред}} / [n].$$

В случае пластичного материала в качестве опасного (предельного) напряжения $\tau_{\text{пред}}$ принимается τ_m – предел текучести при сдвиге, а в случае хрупкого материала τ_e – предел прочности.

Часто допускаемые напряжения на кручение принимают в зависимости от допускаемых напряжений на растяжение для того же материала. Например, для стали $[\tau] \approx 0.5 \cdot [\sigma]$; для чугуна $[\tau] \approx [\sigma_p]$, где $[\sigma_p]$ – допускаемое напряжение при растяжении чугуна.

Эти значения допускаемых напряжений относятся к случаям работы элементов конструкций на чистое кручение при статическом нагружении.

Валы, являющиеся основными объектами, рассчитываемыми на кручение, кроме кручения, испытывают также изгиб. Кроме того, возникающие в них напряжения переменны во времени. Поэтому, в зависимости от материала и условий работы для стальных валов принимают пониженные значения допускаемых напряжений $[\tau]$.

Величина τ_{\max} в условии прочности представляет собой значение наибольшего касательного напряжения в опасном сечении бруса в непосредственной

близости к его внешней поверхности. Опасным сечением бруса является сечение, для которого абсолютная величина отношения M_z/W_ρ имеет наибольшее значение. Для бруса постоянного сечения наиболее опасным является сечение, в котором крутящий момент имеет наибольшее абсолютное значение.

Условие жесткости

Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\theta_{\max} \leq [\theta] \quad \text{или} \quad \frac{\max M_z}{G \cdot I_\rho} \leq [\theta].$$

Типы задач

В практике инженерных расчетов обычно решаются три основные задачи. Это *проверочный расчет (проверка напряжений)*. В этом случае известны внешняя нагрузка, сечение стержня и его материал. Необходимо убедиться, что выполняется условие прочности или жесткости

$$\tau_{\max} \leq [\tau] \quad \text{или} \quad \theta_{\max} \leq [\theta].$$

Подбор сечения (проектный расчет). По заданной нагрузке определяются размеры поперечного сечения стержня из известного материала

$$W_\rho \geq \frac{\max M_z}{[\tau]} \quad \text{или} \quad I_\rho \geq \frac{\max M_z}{G \cdot [\theta]}.$$

Определение *допускаемой нагрузки*, то есть максимального значения нагрузки, которое допускает данный элемент конструкции при выполнении условия прочности или жесткости

$$\max M_z \leq [\tau] \cdot W_\rho \quad \text{или} \quad \max M_z \leq [\theta] \cdot G \cdot I_\rho.$$

Тема 8 Изгиб

Основные понятия

Деформация прямого изгиба возникает в том случае, когда на стержень действует поперечная нагрузка, расположенная в одной плоскости (силовой плоскости), проходящей через ось симметрии сечения (рис. 8.1, а). В этой же плоскости располагается изогнутая ось стержня (упругая линия) – рис. 8.1, б. Стержень, работающий на изгиб, называется *балкой*.

При деформации прямого изгиба в поперечном сечении балки возникают два внутренних силовых фактора (рис. 8.1, в): поперечная сила Q_y , где y – ось симметрии (главная центральная ось), и действующий в силовой плоскости изгибающий момент M_x , где x – другая главная центральная ось сечения, нормальная к оси симметрии.

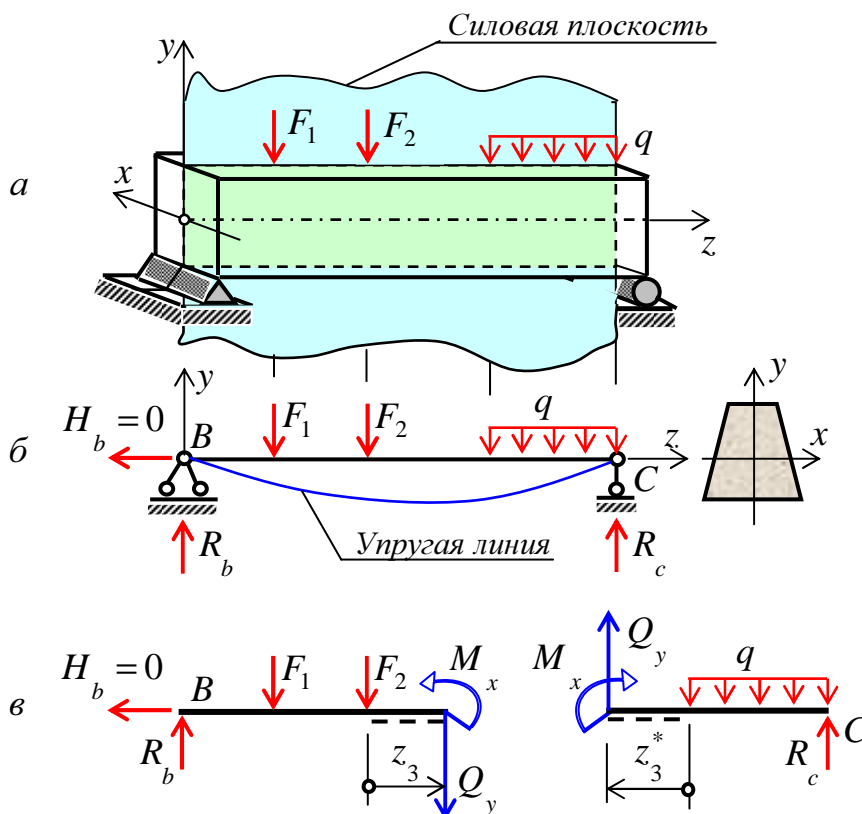


Рис. 8.1

Вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса действует только изгибающий момент, называется *чистым изгибом*.

Деформация изгиба является наиболее распространенной при расчете элементов конструкций. Балки широко используются как несущие элементы в строительных и машиностроительных конструкциях.

Правило знаков для M_x и Q_y

Изгибающий момент M_x в поперечном сечении балки считается *положительным*, когда на левом торце правой отсеченной части балки он направлен по часовой стрелке, а на правом торце левой отсеченной части – против часовой стрелки (рис. 8.1, в). При таком направлении момента растягиваются (удлиняются) нижние волокна балки, помеченные пунктирной линией, а верхние волокна сжаты (укорачиваются).

Поперечная сила Q_y в поперечном сечении балки *положительна*, когда на левом торце правой отсеченной части балки она направлена снизу вверх, а на правом торце левой отсеченной части – сверху вниз (рис. 8.1, в). Положительная поперечная сила стремится вращать выделенную часть балки по часовой стрелке относительно любой точки, расположенной внутри выделенной части балки.

Определение M_x и Q_y методом сечений

На основании метода сечений поперечная сила и изгибающий момент в сечении балки могут быть определены через внешние силы, действующие на отсеченную часть балки с использованием соответствующих уравнений равновесия.

Изгибающий момент M_x , действующий в поперечном сечении балки, по величине равен сумме моментов всех внешних сил, приложенных к рассматриваемой отсеченной части бруса, относительно центральной оси x этого сечения:

$$M_x = \sum_{\text{лев}} M_{\text{внешн}} = \sum_{\text{прав}} M_{\text{внешн}} .$$

Если внешняя сила в данном сечении растягивает нижние волокна балки, то момент этой силы в этом сечении считается положительным, если растягиваются верхние волокна балки, то момент этой силы будет отрицательным.

Поперечная сила Q_y в сечении бруса, по величине равна сумме проекций всех внешних сил, действующих на отсеченную часть бруса, на ось перпендикулярную оси бруса (ось y):

$$Q_y = \sum_{\text{лев}} F_y^{\text{внешн}} = \sum_{\text{прав}} F_y^{\text{внешн}} .$$

Если данная внешняя сила вращает выделенную часть балки относительно центра тяжести рассматриваемого сечения по часовой стрелке, то она учитывается со знаком плюс, если против часовой стрелки, то со знаком минус.

Дифференциальные зависимости при изгибе

Двумя бесконечно близкими сечениями выделим элемент балки длиной dz с распределенной нагрузкой (рис. 8.2) и рассмотрим его равновесие.

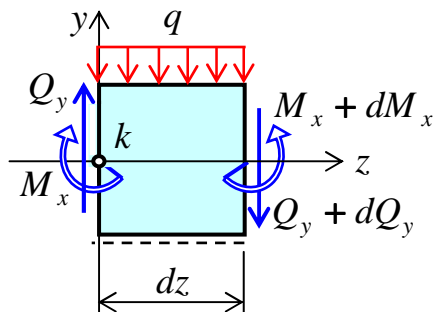


Рис. 8.2

$$\sum M_k = 0 \text{ или } M_x + q \cdot dz \cdot dz/2 + (Q_y + dQ_y) \cdot dz - (M_x + dM_x) = 0.$$

Откуда, пренебрегая бесконечно-малыми второго порядка малости, получим $Q_y = \frac{dM_x}{dz}$.

Первая производная от изгибающего момента по абсциссе z равна поперечной силе.

$$\sum F_y = 0 \text{ или } Q_y - q \cdot dz - (Q_y + dQ_y) = 0, \text{ отсюда } q = -\frac{dQ_y}{dz}.$$

Полученные дифференциальные зависимости широко используются при проверке правильности построения эпюр внутренних сил при изгибе. Так первая дифференциальная зависимость позволяет определять на участке балки сечение с наибольшим по модулю значением изгибающего момента. Если в сечении балки поперечная сила равна нулю, то функция момента в этом сечении имеет экстремум (максимум или минимум по знаку деформации).

Построение эпюр M_x и Q_y при изгибе

Эюра внутренней силы – график, показывающий изменение этой силы по длине балки.

Для построения эпюр балка разбивается на участки, в пределах которых функция внутренней силы не меняет своего аналитического выражения. За границы участков принимаются сечения, в которых приложены внешние нагрузки: сосредоточенные силы, сосредоточенные моменты, начинается или заканчивается распределенная нагрузка одного направления и изменяющаяся по одному закону, а также начало и конец балки.

Последовательно на каждом участке вводится скользящая система координатных осей (начало координат совмещается с началом участка) и для произвольного сечения составляются выражения для определения

поперечной силы и изгибающего момента. Затем по этим выражениям в пределах каждого участка строятся графики (эпюры) внутренних сил.

Рассмотрим несколько характерных примеров построения эпюр внутренних сил при изгибе.

Пример 1. Рассмотрим консоль – балку, жестко заделанную одним концом, свободную на другом конце и нагруженную силой F (рис. 8.3, а). Для построения эпюр имеем один участок.

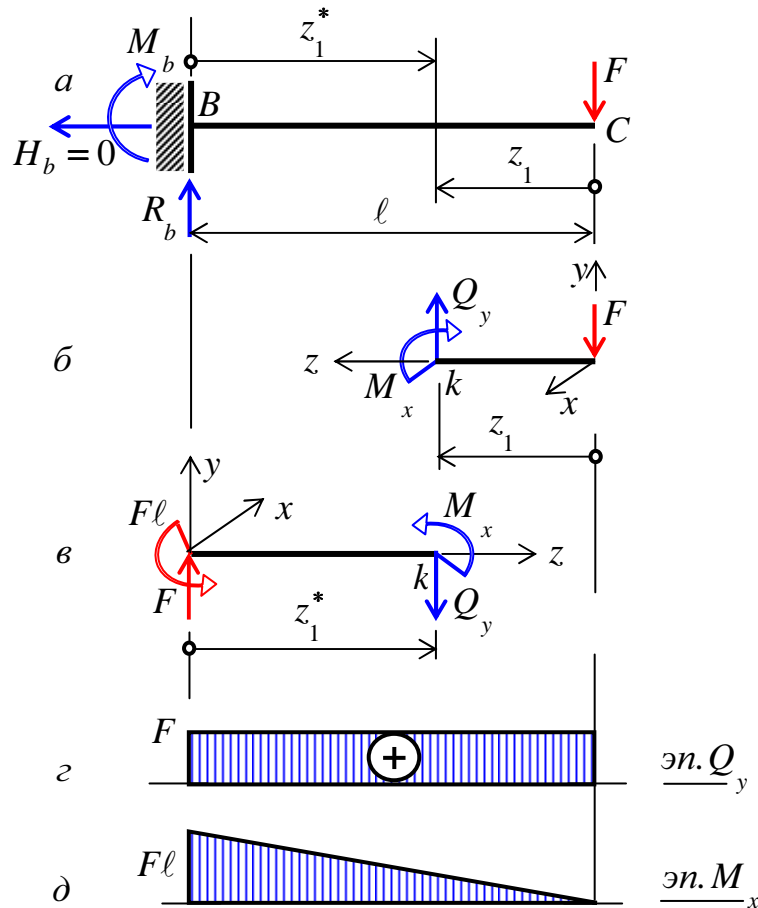


Рис. 8.3

После мысленного рассечения участка балки нормальным сечением удобнее рассмотреть равновесие правой отсеченной части (рис. 8.3, б). В этом случае не придется определять реакции в заделке, да и сил, приложенных к оставленной части, меньше – будут проще выражения для Q_y и M_x .

Начало координат совмещаем с правым концевым сечением балки ($0 \leq z_1 \leq l$). Тогда, из уравнений равновесия получим $\sum F_y = 0$, $Q_y - F = 0$,

$Q_y = F$, аналогично для M_x имеем $\sum M_k = 0$, $M_x + F \cdot z_1 = 0$,

$M_x(z_1) = -F \cdot z_1$.

Можно сразу определить Q_y по формуле $Q_y = \sum_{\text{прав}} F_y^{\text{внешн}} = F$. Знак плюс у Q_y появился потому что сила F вращает правую часть балки относительно центра тяжести сечения « k » по часовой стрелке и поэтому положительна.

Аналогично $M_x(z_1) = \sum_{\text{прав}} M_{\text{внешн}} = -F \cdot z_1$. Для определения знака M_x в сечении « k » мысленно вводим заделку (рис. 8.4, а). Видно, что сила F растягивает в сечении « k » верхние волокна, что соответствует отрицательному изгибающему моменту.

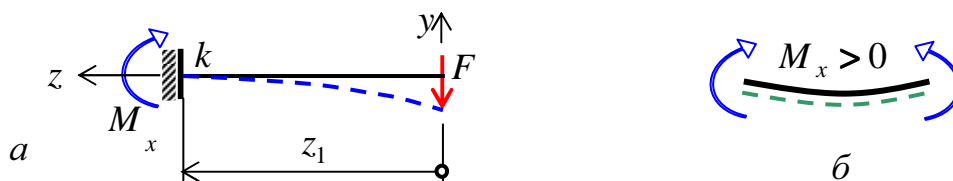


Рис. 8.4

При построении *эн. Q_y* положительные ординаты откладываем вверх, а отрицательные вниз. Обязательно по концам участка указываем значения ординат и на эпюре в кружке ставим знак (рис. 8.3, г).

Выражение для M_x – уравнение прямой линии. Для ее построения определим значения изгибающего момента в начале и конце участка:

$$M_x(z_1 = 0) = 0, \quad M_x(z_1 = \ell) = -F \cdot \ell.$$

По этим значениям строим *эн. M_x* (рис. 8.3, д). Отрицательные значения моментов откладываем вверх, со стороны растянутых волокон. Знак на эпюре не ставим, так как направление момента уже определено. Если растянуты нижние волокна, то момент будет положителен (рис. 8.4, б). Таким образом, принято правило построения *эн. M_x* на растянутых волокнах.

Те же результаты получим, если рассмотрим равновесие левой части балки (рис. 8.3, в), предварительно определив реакции в жесткой заделке (рис. 8.3, а).

$$\sum F_y = 0, \quad R_b - F = 0, \quad R_b = F, \quad \sum M_b = 0, \quad M_b + F \cdot \ell = 0, \quad M_b = -F \cdot \ell.$$

Знак минус у реактивного момента M_b означает, что действительное его направление противоположное, поэтому изменяем его на действительное и в дальнейших расчетах знак минус не учитываем (рис. 8.3, в). Делаем проверку реакций – $\sum M_c = 0, \quad R_b \cdot \ell - M_b = 0, \quad F \cdot \ell - F \cdot \ell = 0, \quad 0 = 0$.

Выражения для Q_y и M_x принимают следующий вид:

$$Q_y = \sum_{\text{лев}} F_y^{\text{внешн}} = R_b = F, \quad M_x(z_1^*) = \sum_{\text{лев}} M_{\text{внешн}} = R_b \cdot z_1^* - M_b = F \cdot z_1^* - F \cdot \ell,$$

$$M_x(z_1^* = 0) = -F \cdot \ell, \quad M_x(z_1^* = \ell) = 0.$$

Таким образом, на участке поперечная сила положительная и постоянная, а внутренний изгибающий момент изменяется по линейному закону.

Отметим скачки (разрывы функции первого рода) на *эн. Q_y* в тех сечениях, где приложены сосредоточенные силы на величину этих сил, и на *эн. M_x* в тех сечениях, где приложены сосредоточенные моменты на величину этих моментов.

Сечение в жесткой заделке является наиболее опасным в данной расчетной схеме ($M_x^{\text{max}} = F \cdot \ell$).

Пример 2. Рассмотрим балку, шарнирно опертую по концам и нагруженную силой F в пролете (рис. 8.5, а). Для построения эпюр имеем два участка.

При действии вертикальной нагрузки в шарнирно неподвижной опоре «В» горизонтальная составляющая опорной реакции равна нулю (рис. 8.5, а). Начнем расчет с определения опорных реакций:

$$\sum M_c = 0, \quad R_b \cdot \ell - F \cdot b = 0, \quad \text{откуда } R_b = F \cdot b / \ell,$$

$$\sum M_b = 0, \quad R_c \cdot \ell - F \cdot a = 0, \quad \text{откуда } R_c = F \cdot a / \ell.$$

Обязательно должна быть выполнена проверка найденных реакций:

$$\sum F_y = 0, \quad R_b + R_c - F = 0, \quad F \cdot b / \ell + F \cdot a / \ell - F = 0, \quad F(a + b) / \ell - F = 0, \\ 0 = 0, \quad \text{реакции найдены верно.}$$

Для упрощения вычислений на первом (левом) участке будем идти слева, начало участка полагая на опоре «В» (рис. 8.5, б), на втором (правом) участке будем идти справа, начало участка полагая на опоре «С» (рис. 8.5, в).

Участок № 1, ($0 \leq z_1 \leq a$).

$$Q_y = R_b = F \cdot b / \ell, \quad M_x(z_1) = R_b \cdot z_1 = F \cdot b \cdot z_1 / \ell, \quad M_x(0) = 0, \quad M_x(a) = F \cdot a \cdot b / \ell.$$

Участок № 2, ($0 \leq z_2 \leq b$).

$$Q_y = -R_c = -F \cdot a / \ell, \quad M_x(z_2) = R_c \cdot z_2 = F \cdot a \cdot z_2 / \ell, \quad M_x(b) = F \cdot a \cdot b / \ell.$$

Эпюры для Q_y и M_x представлены соответственно на рис. 8.5, г и 8.5, д.

Отметим скачки на *эн. Q_y* в тех сечениях, где приложены сосредоточенные силы на величину этих сил.

Опасным в данном примере является сечение балки с $M_x^{\text{max}} = F \cdot a \cdot b / \ell$ (т. е. сечение, где приложена сосредоточенная сила F). Очевидно, что по этому сечению и произойдет разрушение балки при достаточно большой величине внешней нагрузки.

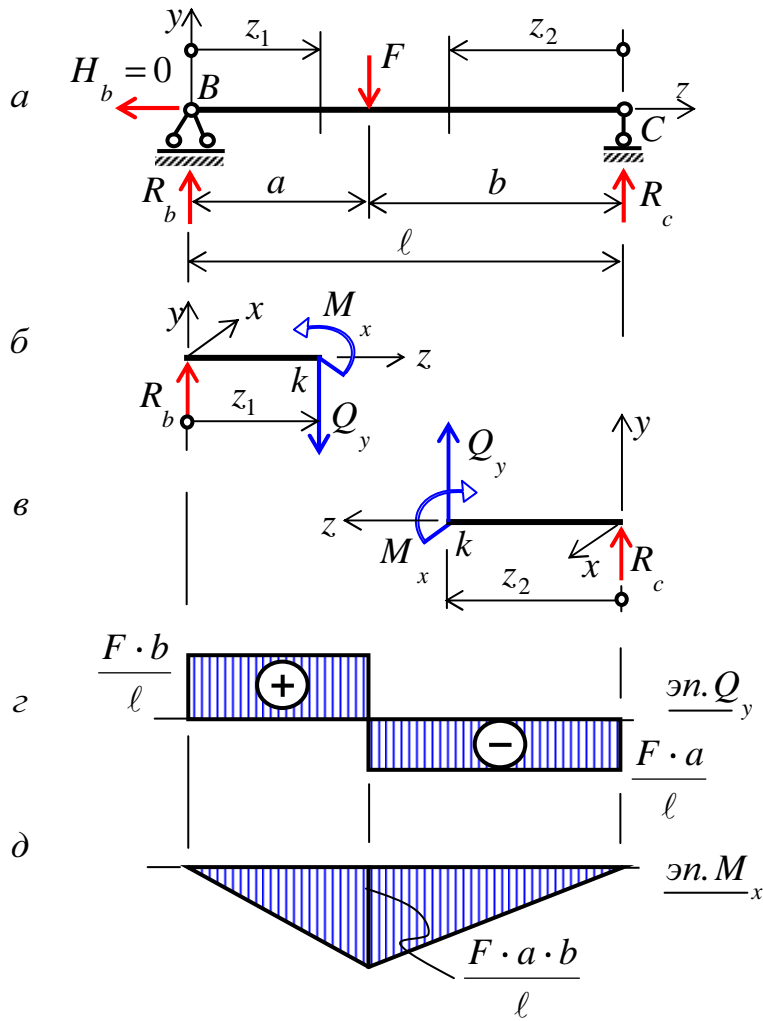


Рис. 8.5

Пример 3. Рассмотрим балку, шарнирно опертую по концам и нагруженную равномерно распределенной нагрузкой q в пролете (рис. 8.6, а). Для построения эпюр имеем один участок.

При действии вертикальной нагрузки в шарнирно неподвижной опоре «В» горизонтальная составляющая опорной реакции равна нулю (рис. 8.6, а). Начнем расчет с определения опорных реакций:

$$\sum M_c = 0, R_b \cdot l - q \cdot l \cdot l/2 = 0, \text{ откуда } R_b = q \cdot l/2,$$

$$\sum M_b = 0, R_c \cdot l - q \cdot l \cdot l/2 = 0, \text{ откуда } R_c = q \cdot l/2.$$

Обязательно должна быть выполнена проверка найденных реакций:

$$\sum F_y = 0, R_b + R_c - q \cdot l = 0, 0 = 0, \text{ реакции найдены верно.}$$

Начало участка совместим с опорным сечением «В» (рис. 8.6, б). Равнодействующая распределенной нагрузки на участке длиной z_1 равна $q \cdot z_1$ и приложена посередине участка так, что расстояние от нее до центра тяжести поперечного сечения k , будет равно $z_1/2$.

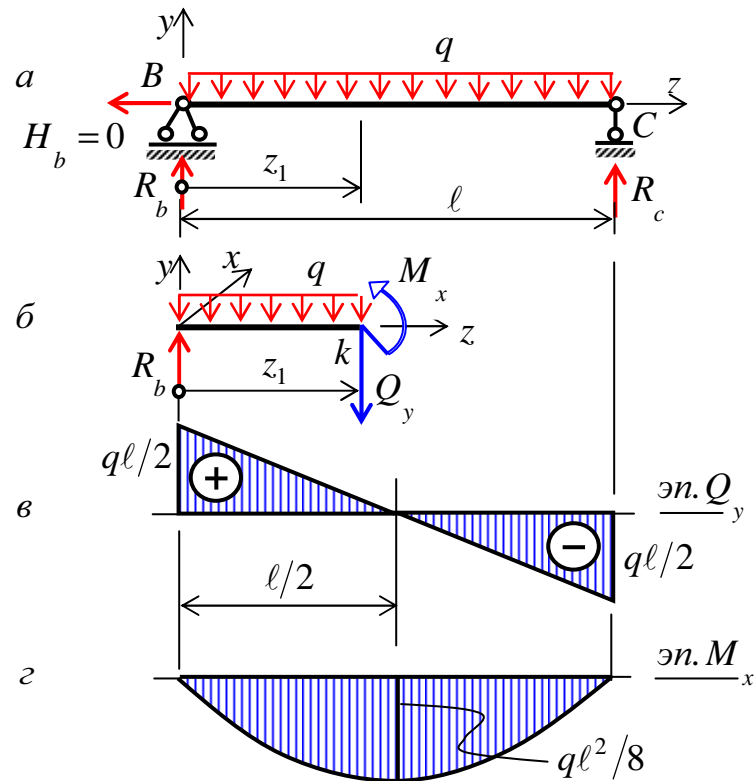


Рис. 8.6

Участок № 1, ($0 \leq z_1 \leq \ell$).

$$Q_y(z_1) = R_b - q \cdot z_1 = q \cdot \ell/2 - q \cdot z_1 .$$

Получено уравнение прямой, которую строим по значениям в начале и в конце участка: $Q_y(z_1 = 0) = q \cdot \ell/2$, $Q_y(z_1 = \ell) = -q \cdot \ell/2$ (рис. 8.6, в).

Проводя прямую замечаем, что на участке есть сечение в котором поперечная сила равна нулю. Найдем положение этого сечения, приравняв нулю выражение для поперечной силы:

$$Q_y(z_1^0) = q \cdot \ell/2 - q \cdot z_1^0 = 0, \text{ откуда } z_1^0 = \ell/2 .$$

В этом сечении, как следует из дифференциальной зависимости между M_x и Q_y , изгибающий момент имеет экстремальное значение. Следуя методике, принятой ранее, получим

$$M_x(z_1) = R_b \cdot z_1 - q \cdot z_1 \cdot z_1/2 = q \cdot \ell \cdot z_1/2 - q \cdot z_1^2/2 .$$

Изгибающий момент меняется по закону квадратной параболы. Так будет всегда на участках с равномерно распределенной нагрузкой. Для построения эпюры определяем значение момента в трех точках:

$$M_x(z_1 = 0) = 0, \quad M_x(z_1^0 = \ell/2) = q \cdot \ell^2/8, \quad M_x(z_1 = \ell) = 0 .$$

На обоих опорах изгибающий момент отсутствует. Положительное значение момента в центре пролета откладываем вниз (растянутые волокна нижние) и проводим параболу так, чтобы в сечении с экстремальным (в

данном случае максимум) значением момента касательная к эпюре моментов была параллельна оси балки. Знак на эпюре не ставим (рис. 8.6, г).

Отметим скачки на эп. Q_y в тех сечениях, где приложены сосредоточенные силы на величину этих сил.

Опасным будет сечение, в котором изгибающий момент больше по величине $M_x^{\max} = q \cdot \ell^2 / 8$. Это центр пролета при $z_1^0 = \ell / 2$.

Напряжения и деформации при чистом изгибе

При чистом изгибе в поперечном сечении балки возникает только изгибающий момент M_x , а поперечная сила $Q_y = 0$. Для тех участков однородной балки, где соблюдается это условие, $M_x = const$ и, следовательно, изменение кривизны будет одним и тем же. Таким образом, упругая линия однородной балки принимает форму дуги окружности.

Для наглядного представления характера деформаций стержней при изгибе, а также для установления упрощающих предпосылок проведем следующий опыт.

На боковые поверхности модели стержня из низко модульного материала наносится сетка продольных и поперечных линий на равных расстояниях друг от друга (рис. 8.7, а).

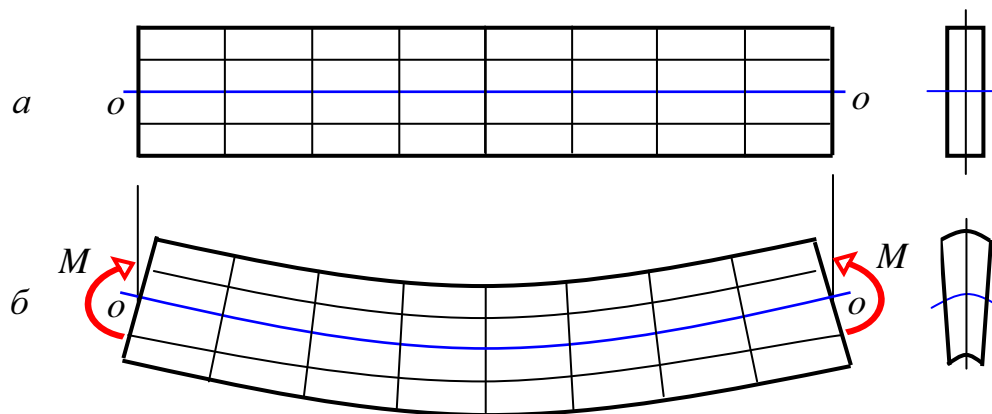


Рис. 8.7

При изгибе такого бруса двумя парами сил (M), приложенными по концам (рис. 8.7, б), можно видеть, что продольные линии искривляются по дуге окружности, причем расстояние между ними не меняется (справедлива гипотеза о ненадавливании продольных волокон – $\sigma_x = \sigma_y = 0$).

У выпуклой стороны бруса (снизу) эти волокна удлиняются, тогда как у вогнутой (сверху) – укорачиваются. Так как переход от удлинения к укорочению происходит непрерывно, то внутри бруса существует слой волокон, которые искривляются, но не меняют своей длины. Такой слой называется *нейтральным слоем*, а его след на плоскости сечения – *нейтральной (нулевой) линией* или осью (волокно $o-o$).

Деформации удлинения и укорочения обусловлены нормальными растягивающими напряжениями на выпуклой части балки, и сжимающими – на вогнутой. В нейтральном слое нормальные напряжения равны нулю ($\sigma_z = 0$).

Поперечные же линии сетки, оставаясь прямыми и перпендикулярными к искривленным продольным линиям, только поворачиваются на некоторые углы по отношению к первоначальному положению (справедлива гипотеза плоских сечений).

Ортогональность продольных и поперечных линий до и после деформирования (как отражение гипотезы плоских сечений) указывает также на отсутствие сдвигов, касательных напряжений в поперечных и продольных сечениях балки.

Естественно предположить, что картина распределения деформаций, наблюдаемая на поверхности бруса, имеет место и внутри него (по ширине сечения деформации не изменяются).

Заметим, что так как волокна, лежащие выше и ниже нейтральной оси соответственно, сжимаются и растягиваются, то в этом случае наблюдается эффект Пуассона, т. е. в верхней половине поперечные размеры увеличиваются, а в нижней – уменьшаются (рис. 8.7, б).

Прежде чем приступить к определению нормальных напряжений, действующих в поперечном сечении при чистом изгибе, сформулируем основные предположения (в том числе и те, которые помог установить опыт), которыми мы будем пользоваться:

- 1) справедлив закон Гука ($\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z$) для каждого продольного волокна,
 - 2) продольные волокна друг на друга не давят ($\sigma_x = \sigma_y = 0$),
 - 3) справедлива гипотеза плоских сечений,
 - 4) при чистом изгибе в поперечном сечении возникают только нормальные напряжения ($\tau = 0, \sigma_z \neq 0$),
 - 5) по ширине сечения деформации и напряжения постоянны.
- б) силовая плоскость совпадает с плоскостью симметрии yoz .

Статическая сторона задачи.

Рассмотрим условия равновесия выделенного элемента балки длиной dz , который находится в условиях чистого изгиба (рис. 8.8).

Действие левой отброшенной части представим в виде изгибающего момента M_x , который является равнодействующей нормальных напряжений (статическим эквивалентом напряжений).

Действие правой отброшенной части балки на элемент dz представим в виде элементарных сил $\sigma_z \cdot dA$ (рис. 8.8), приложенных к каждой элементарной площадке dA поперечного сечения и параллельных оси балки oz (в соответствии с предположением о наличии в поперечном сечении только нормальных напряжений).

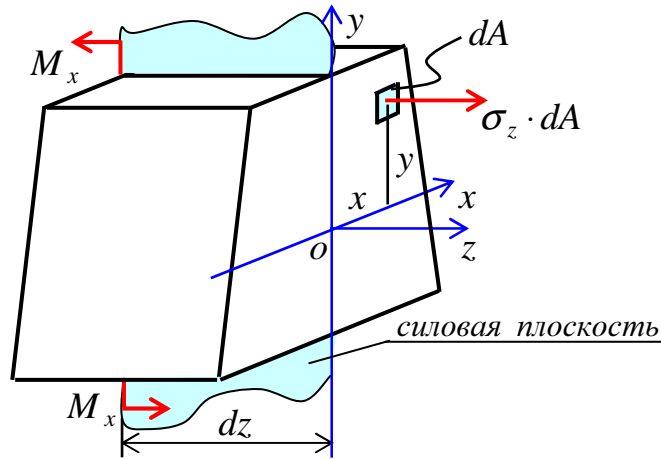


Рис. 8.8

Поскольку силовая плоскость совпадает с координатной плоскостью yoz , то из шести независимых уравнений равновесия три обращаются в тождества: $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ и $\sum M_z = 0$.

Остаются

$$\sum F_z = 0, \quad \int_A \sigma_z \cdot dA = 0,$$

$$\sum M_x = 0, \quad \int_A \sigma_z \cdot y \cdot dA = M_x,$$

$$\sum M_y = 0, \quad \int_A \sigma_z \cdot x \cdot dA = 0.$$

Полученных интегральных зависимостей не хватает для определения напряжений, поскольку неизвестных больше чем уравнений равновесия. Поэтому для получения дополнительных уравнений необходимо рассмотреть геометрическую и физическую стороны задачи.

Геометрическая сторона задачи.

Рассмотрим вырезанный из стержня элемент длиной dz который в масштабе с искаженными в интересах наглядности пропорциями изображен на рис. 8.9.

Пусть его крайние поперечные сечения под действием под действием момента M_x симметрично повернутся на угол $d\alpha/2$. Причем продолжение сторон этих поперечных сечений пересекутся в точке o , которая является *центром кривизны* продольных волокон элемента dz . В нашем случае верхние волокна окажутся растянутыми, а нижние – сжатыми. Волокна некоторого промежуточного слоя $m-n$, перпендикулярные к плоскости действия изгибающего момента, сохраняют свою длину и называются нейтральными ($\sigma_z = 0$), как мы отмечали ранее.

Ввиду малости $d\alpha$ считаем, что точки поперечного сечения при повороте на этот угол перемещаются не по дугам, а по соответствующим касательным.

Здесь $\rho = om = on$ – радиус кривизны нейтрального волокна $m-n$ (изогнутой оси балки).

При чистом изгибе это постоянная величина и волокна изгибаются по дугам окружности этого радиуса. Очевидно, что $dz = BC = mn = \rho \cdot d\alpha$. Величина обратная радиусу кривизны называется кривизной нейтральной оси балки и определяется так $\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{dz}$.

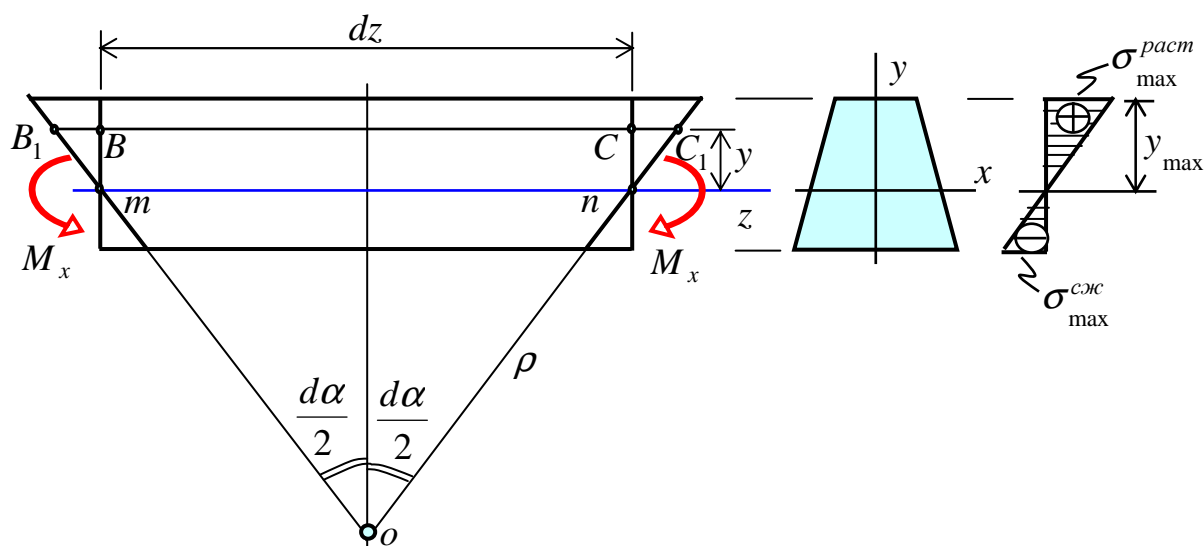


Рис. 8.9

Рассмотрим относительную деформацию волокна BC , находящегося на расстоянии y от нейтрального волокна $m-n$:

$$\varepsilon_z = \frac{B_1C_1 - BC}{BC} = \frac{(\rho + y) \cdot d\alpha - \rho \cdot d\alpha}{\rho \cdot d\alpha} = \frac{y}{\rho}.$$

Отсюда видно, что удлинение волокон балки по высоте сечения прямо пропорциональны расстоянию от нейтрального волокна.

Полученное выражение и есть искомое геометрическое уравнение. Оно отражает условие совместности деформаций волокон, расположенных на расстоянии y от нейтральной оси. Оно позволяет определить относительную линейную деформацию любого волокна при изгибе.

Физическая сторона задачи.

Связать между собой статические и геометрическое уравнения поможет закон Гука, на основании которого

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z.$$

Синтез.

Итак, после рассмотрения трех сторон задачи, мы получили следующую совместную систему из пяти уравнений (три статические, одно геометрическое и одно физическое), решая которую получаем все необхо-

димые формулы для определения положения нулевого слоя, напряжений и деформаций, геометрических характеристик, которые соответствуют деформации чистого изгиба.

Нормальное напряжение, растягивающее волокно ВС, с учетом закона Гука будет равно $\sigma_z = E \cdot \frac{y}{\rho}$.

Эта формула не пригодна для практического использования, так как содержит две неизвестные: кривизну нейтрального слоя $1/\rho$ и положение нейтральной оси m , от которой отсчитывается координата y . Для определения этих неизвестных воспользуемся тремя уравнениями равновесия. Первое статическое уравнение дает

$$\int_A E \cdot \frac{y}{\rho} \cdot dA = 0, \text{ отсюда } \int_A y \cdot dA = 0 \text{ или } S_x = \int_A y \cdot dA = 0.$$

Этот интеграл представляет собой статический момент сечения относительно нейтральной оси. Поскольку он равен нулю, то *нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения* и т. о. является центральной.

Определимся с системой координат x, y, z , связанной с сечением. Начало координат совместим с центром тяжести сечения. Ось z направим по нормали к сечению, а ось x по нейтральной линии. Ось y перпендикулярна оси x и совпадает с осью симметрии и следовательно лежит в силовой плоскости, которая одновременно является и плоскостью изменения кривизны (рис. 8.9).

Второе уравнение равновесие дает

$$\int_A E \cdot \frac{y}{\rho} \cdot y \cdot dA = M_x, \text{ или } \frac{E}{\rho} \cdot \int_A y^2 \cdot dA = M_x \text{ или } \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x}, \text{ где } I_x = \int_A y^2 \cdot dA.$$

Здесь $I_x = \int_A y^2 \cdot dA$ представляет собой осевой момент инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной оси x , проходящей через центр тяжести сечения. Т. о. кривизна нейтрального слоя $1/\rho$ является мерой деформации балки и она ($1/\rho$) тем меньше, чем больше величина $E \cdot I_x$, называемая *жесткостью поперечного сечения при изгибе* (по аналогии с жесткостью поперечного сечения при растяжении – $E \cdot A$).

Подставив значение $1/\rho$ в формулу для напряжений получим

$$\sigma_z = E \cdot \frac{y}{\rho} = E \cdot y \cdot \frac{M_x}{E \cdot I_x} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y.$$

Таким образом, нормальные напряжения в поперечном сечении изменяются по линейному закону. Причем, наибольшие растягивающие или наибольшие сжимающие напряжения возникают в точках, *наиболее удаленных от нейтральной оси* и расположенных по обе стороны от нее (рис. 8.9).

Заметим, что в полученную формулу для напряжений следует подставлять абсолютные значения изгибающего момента M_x и ординаты y . Знак же напряжений всегда легко устанавливается по знаку момента M_x или по характеру деформации балки.

И наконец

$$\int_A E \cdot \frac{y}{\rho} \cdot x \cdot dA = 0, \text{ отсюда } \int_A y \cdot x \cdot dA = 0 \text{ или } I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA = 0.$$

Интеграл представляет центробежный момент инерции площади сечения относительно осей x и y и он равен нулю. Следовательно, оси x и y – *главные центральные оси инерции* этого сечения (действительно, ось y является осью симметрии поперечного сечения балки, а ось x – центральной).

Формула, определяющая нормальное напряжение в произвольной точке рассматриваемого поперечного сечения балки, применима при условии, что плоскость действия изгибающего момента M_x (которая совпадает с силовой плоскостью) проходит через ось симметрии сечения y (которая одновременно является и главной центральной).

При этом другая главная центральная ось x – перпендикулярна к плоскости действия изгибающего момента и является нейтральной осью поперечного сечения.

При чистом изгибе ($M_x = const$) балки постоянного сечения ($E \cdot I_x = const$) радиус кривизны ρ изогнутой оси балки имеет постоянное значение, т. е. *балка изгибается по дуге окружности*

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x} = const, \text{ с учетом } \frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{dz} \text{ имеем } d\alpha = \frac{M_x \cdot dz}{E \cdot I_x}.$$

Таким образом, концевые сечения такой балки длиной ℓ повернутся относительно друг друга на угол $\alpha = \frac{M_x \cdot \ell}{E \cdot I_x}$ (рис. 8.9).

Условие прочности

По условию прочности наибольшие нормальные напряжения не должны превышать соответствующих допускаемых напряжений:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \text{ или } \frac{M_x^{\max}}{I_x} \cdot y_{\max} \leq [\sigma], \text{ вводя } W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}, \text{ получим } \frac{M_x^{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Здесь W_x – осевой момент сопротивления сечения при изгибе (зависит только от размеров и формы поперечного сечения); y_{\max} – расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленной точки сечения (рис. 8.9); $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение, задаваемое нормами проектирования и зависящее от материала балки, M_x^{\max} – максимальное значение изгибающего момента (легко определяемое по его эпюре).

Записанное выше условие прочности справедливо для балок из материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию.

Как это принято при расчетах на прочность в сопротивлении материалов, должно соблюдаться следующее неравенство, позволяющее обеспечить экономичное расходование материала при выполнении условия прочности

$$0.95 \cdot [\sigma] \leq \sigma_{\max} \leq 1.05 \cdot [\sigma].$$

Определим осевые моменты сопротивления для прямоугольного и круглого сечений.

Для прямоугольного сечения шириной b и высотой h

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{I_x}{h/2} = \frac{b \cdot h^3 / 12}{h/2} = \frac{b \cdot h^2}{6}.$$

Для круглого сечения диаметром d

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{I_x}{d/2} = \frac{\pi \cdot d^4 / 64}{d/2} = \frac{\pi \cdot d^3}{32}.$$

Если материал балок по разному сопротивляется растяжению и сжатию, то следует различать наибольшие растягивающие σ_{\max}^p и наибольшие сжимающие σ_{\max}^c напряжения, которые определяются по модулю непосредственно и сравниваются с допускаемыми. Условие прочности в этом случае будет иметь вид:

$$\sigma_{\max}^p \leq [\sigma_p], \quad \frac{M_x^{\max}}{I_x} \cdot y_{\max}^p \leq [\sigma_p], \quad \sigma_{\max}^c \leq [\sigma_c], \quad \frac{M_x^{\max}}{I_x} \cdot y_{\max}^c \leq [\sigma_c].$$

Здесь y_{\max}^p – расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленных растянутых волокон, y_{\max}^c – расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленных сжатых волокон, $[\sigma_p]$ – допускаемые напряжения на растяжение, $[\sigma_c]$ – допускаемые напряжения на сжатие.

Рациональные формы поперечных сечений при изгибе

Наиболее рациональным следует признать сечение, обладающее минимальной площадью при заданной нагрузке (изгибающем моменте) на балку и у которого получается наибольшая величина момента сопротивления W_x .

Для этого нужно, чтобы по возможности наибольший объем материала работал при напряжениях, равным допускаемым или близким к ним. Другими словами, возможно большую часть материала переместить в зоны, максимально удаленные от нейтральной оси.

Очевидно, что при этом должно удовлетворяться условие прочности растянутой и сжатой зон балки.

Таким образом, приходим к рациональному для пластичного материала сечению в форме симметричного двутавра, у которого возможно большая часть материала сосредоточена на полках, соединенных стенкой, толщина которой (δ) назначается из условий прочности стенки по касательным напряжениям, а также из соображений ее устойчивости (рис. 8.10, а).

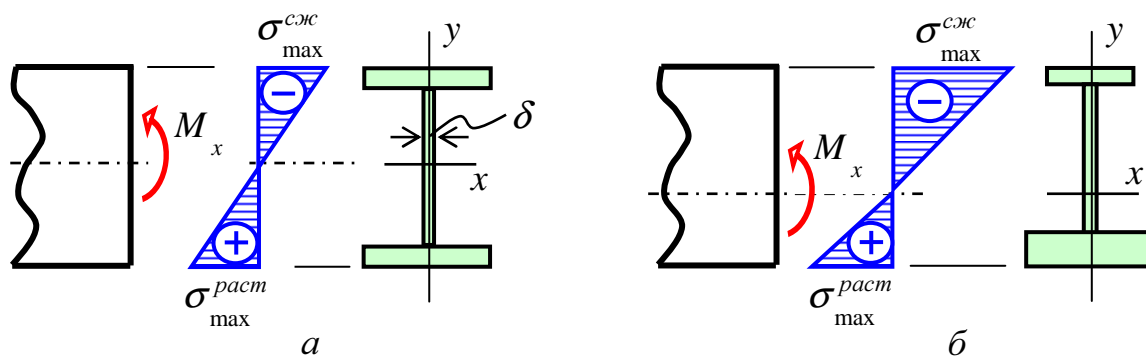


Рис 8.10

К двутавровому сечению близко по критерию рациональности так называемое коробчатое сечение (рис. 8.11, а).

Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что для балок из хрупкого материала наиболее рациональным будет сечение в форме несимметричного двутавра (рис. 8.10, б).

Идея рациональности поперечного сечения балок реализована в стандартных тонкостенных профилях, получивших широкое распространение в строительстве, машиностроении, авиационном машиностроении. Широко распространены двутавр (рис. 8.11, б), швеллер (рис. 8.11, в), неравнобокий уголок (рис. 8.11, г), равнобокий уголок (рис. 8.11, д).

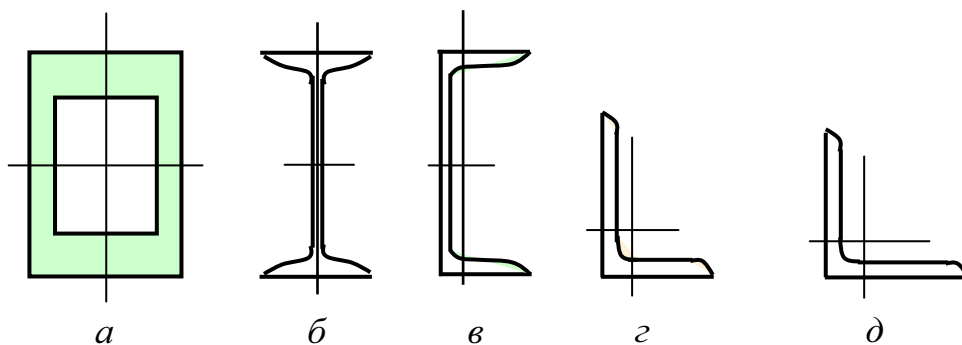


Рис. 8.11

Типы задач

При расчете на прочность элементов конструкций, работающих на изгиб, возможны три следующих вида задач, различающихся формой использования условия прочности.

Это *проверочный расчет (проверка прочности)*. В этом случае известны внешняя нагрузка, сечение стержня и его материал. Необходимо убедиться, что выполняется условие прочности

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma].$$

Подбор сечения (проектный расчет). По заданной нагрузке определяются размеры поперечного сечения стержня из известного материала через осевой момент сопротивления:

$$W_x \geq \frac{\max M_x}{[\sigma]}.$$

Определение *допускаемой нагрузки*, то есть максимального значения нагрузки, которое допускает данный элемент конструкции при выполнении условия прочности

$$\max M_x \leq [\sigma] \cdot W_x.$$

Поперечный изгиб

При поперечном изгибе в сечении балки возникают изгибающий момент (M_x) и поперечная сила (Q_y). Поперечная сила представляет собой равнодействующую неравномерно распределенных по высоте поперечного сечения, лежащих в плоскости сечения касательных напряжений (τ).

В свою очередь, касательные напряжения способствуют появлению угловых деформаций γ , которые также по высоте сечения будут неравномерно распределены. Поперечные сечения не остаются плоскими, они искривляются (депланируются), т. е. гипотеза плоских сечений не выполняется.

Выясним условия, при которых влиянием депланации сечения, вызываемой поперечной силой, можно пренебречь. Для этого выясним зависимость касательных напряжений от поперечной силы и от геометрических характеристик сечения.

Все гипотезы, принятые при выводе формулы для нормальных напряжений при чистом изгибе, остаются справедливыми и в нашем случае.

Выделим из балки, которая испытывает деформацию поперечного изгиба, элемент длиной dz (рис. 8.12, а). Здесь изгибающие моменты, возникающие в левом и правом сечениях элемента, не одинаковы и отличаются на величину dM_x .

Уравнение равновесия элемента dz в виде суммы моментов действующих на него сил относительно точки k (см. рис. 8.12, а):

$$\sum M_k = 0, \quad M_x - (M_x + dM_x) + Q_y \cdot dz = 0, \quad Q_y = \frac{dM_x}{dz}.$$

Таким образом, *первая производная от изгибающего момента по длине балки равна поперечной силе*. Эта зависимость называется *теоремой Журавского*.

Продольным горизонтальным сечением, проведенным на расстоянии y от нейтральной оси (рис. 8.12, б), разделим элемент на две части и рассмотрим условия равновесия верхней части.

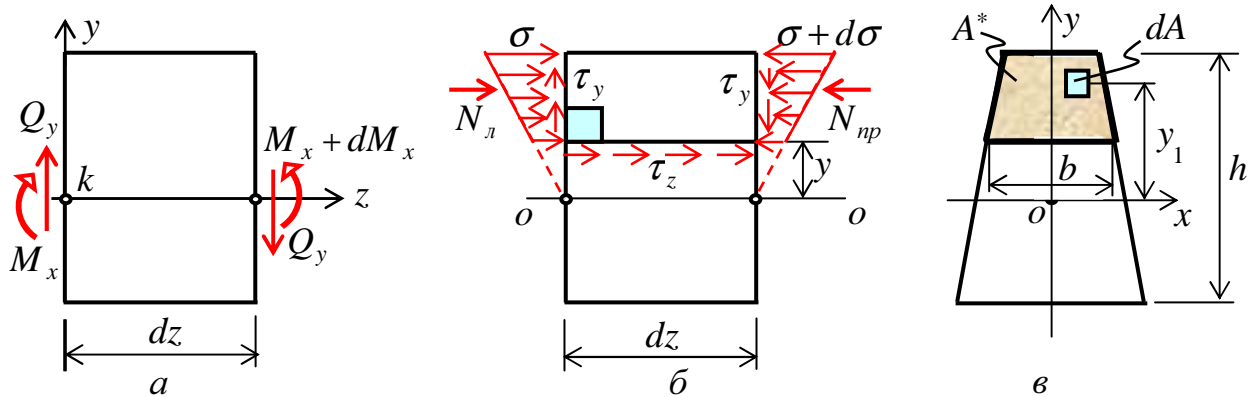


Рис. 8.12

Равнодействующая нормальных сил в левом сечении $\sigma \cdot dA$ в пределах заштрихованной площади A^* равна, очевидно,

$$N_l = \int_{A^*} \sigma \cdot dA = \int_{A^*} \frac{M_x}{I_x} \cdot y_1 \cdot dA = \frac{M_x}{I_x} \cdot \int_{A^*} y_1 \cdot dA = \frac{M_x \cdot S_x^{omc}}{I_x}.$$

Здесь через y_1 обозначена в отличие от y текущая ордината площадки dA в отсеченной части сечения и для простоты индекс z при σ не указан (рис. 8.12, в).

Полученный интеграл представляет собой статический момент относительно оси x части площади, расположенной выше продольного сечения (выше уровня y). Обозначим этот статический момент через S_x^{omc} .

В правом сечении нормальная сила будет другой

$$N_{np} = \int_{A^*} (\sigma + d\sigma) \cdot dA = \int_{A^*} \frac{(M_x + dM_x)}{I_x} \cdot y_1 \cdot dA = N_l + \frac{dM_x \cdot S_x^{omc}}{I_x}.$$

Разность этих сил $\frac{dM_x \cdot S_x^{omc}}{I_x}$ должна уравниваться касательными силами, возникающими в продольном сечении элемента $\tau_z \cdot b \cdot dz$.

В качестве первого приближения примем, что касательные напряжения распределены по ширине сечения b равномерно. Тогда

$$\frac{dM_x \cdot S_x^{omc}}{I_x} = \tau_z \cdot b \cdot dz, \text{ откуда } \tau_z = \frac{dM_x \cdot S_x^{omc}}{dz \cdot I_x \cdot b} = \frac{Q_y \cdot S_x^{omc}}{I_x \cdot b}.$$

Полученное выражение позволяет вычислить величину касательных напряжений, возникающих в продольных сечениях балки. Напряжения в поперечных сечениях (τ_y) равны им, как парные.

Таким образом, величина касательных напряжений τ в поперечных сечениях балки и в сечениях ее плоскостями, параллельными нейтральному слою, определяются по формуле

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{omc}}{I_x \cdot b},$$

где Q – поперечная сила в рассматриваемом поперечном сечении балки; S_x^{omc} – статический момент (относительно нейтральной оси) отсеченной части поперечного сечения, расположенной по одну сторону от уровня, на котором определяются касательные напряжения; I_x – момент инерции всего поперечного сечения относительно нейтральной оси; b – ширина поперечного сечения на том уровне, на котором определяются касательные напряжения τ . Здесь для простоты индекс y при τ и Q не указан.

Определим в качестве примера касательные напряжения в прямоугольном сечении балки, изображенном на рис. 8.13, а.

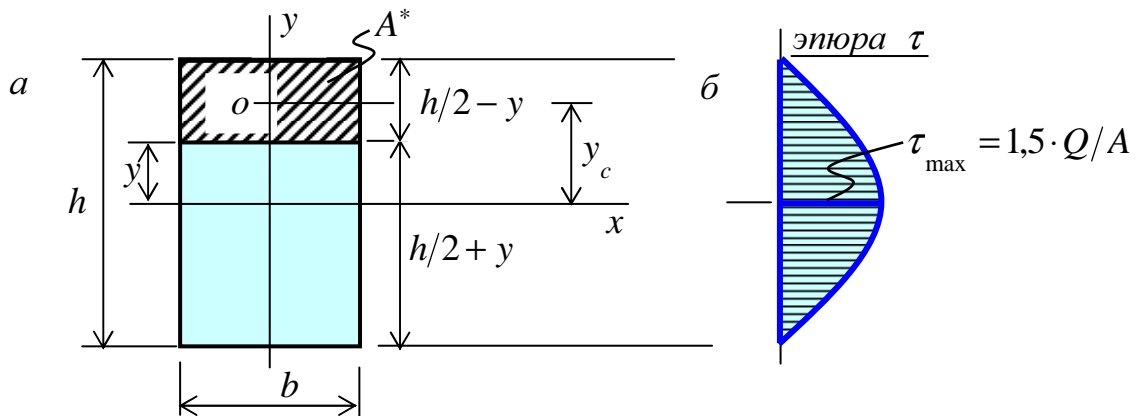


Рис. 8.13

В нашем случае $I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$, $S_x^{omc} = A^* \cdot y_c = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left[y + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right)\right] =$

$$= b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y\right)\right] = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right). \text{ Тогда}$$

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{omc}}{I_x \cdot b} = \frac{Q}{b} \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \cdot \frac{12}{b \cdot h^3} = \frac{6 \cdot Q}{b \cdot h^3} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

Из этого выражения следует, что касательные напряжения изменяются по высоте поперечного сечения по закону квадратной параболы. При $y = \pm h/2$ напряжения $\tau = 0$. Наибольшие напряжения имеют в точках нейтральной оси, т. е. при $y = 0$: $\tau_{\max} = \frac{3 \cdot Q}{2 \cdot b \cdot h} = \frac{3 \cdot Q}{2 \cdot A} = 1,5 \cdot \tau_{cp}$.

При сечении любой другой формы характер изменения τ по высоте сечения будет зависеть от того, по какому закону изменится отношение S_x^{omc} / b .

Таким образом, в случае прямоугольного сечения наибольшие касательные напряжения в 1,5 раза больше среднего его значения, равного Q/A .

Эпюра касательных напряжений, показывающая их изменение по высоте сечения балки, изображена на рис. 8.13, б.

Для сопоставления абсолютных величин τ_{\max} и σ_{\max} , возникающих в поперечных сечениях балки, рассмотрим следующий пример (рис. 8.14, а).

На рис. 8.14, б, в показаны эпюры поперечных сил и изгибающих моментов соответственно.

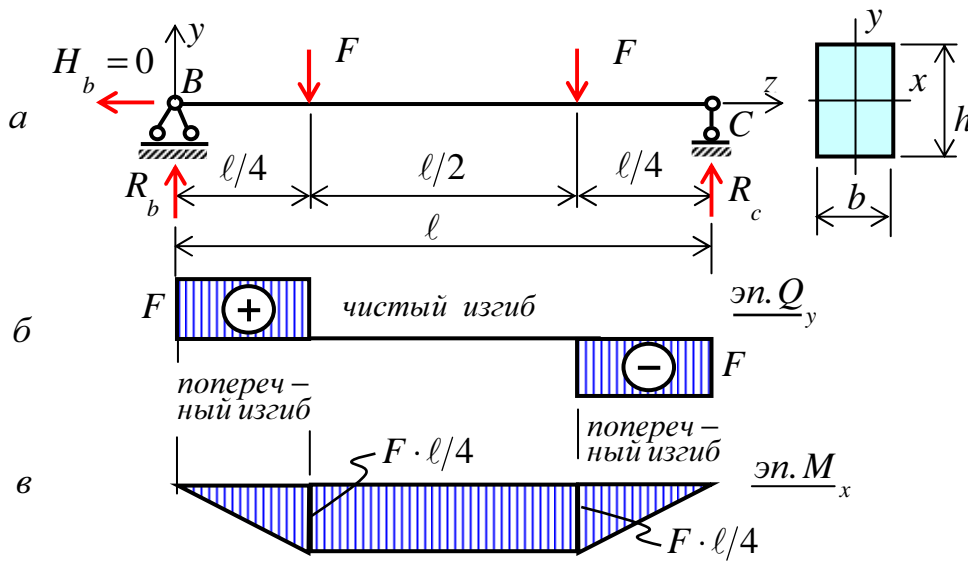


Рис. 8.14

В нашем случае максимальные нормальные напряжения будут равны $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{F \cdot l}{4} \cdot \frac{6}{b \cdot h^2} = \frac{3 \cdot F \cdot l}{2 \cdot b \cdot h^2}$, максимальные касательные напряже-

ния — $\tau_{\max} = \frac{3 \cdot Q_{\max}}{2 \cdot A} = \frac{3 \cdot Q_{\max}}{2 \cdot b \cdot h} = \frac{3 \cdot F}{2 \cdot b \cdot h}$, а их отношение дает нам

$$\frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{3 \cdot F}{2 \cdot b \cdot h} \cdot \frac{2 \cdot b \cdot h^2}{3 \cdot F \cdot l} = \frac{h}{l}.$$

Таким образом, для достаточно больших отношений $l/h \geq 10$ (длинные балки), касательные напряжения существенно меньше нормальных напряжений. Указанная порядковая оценка, за небольшими возможными исключениями, сохраняется вообще для всех нетонкостенных балок.

По этой причине расчет на прочность длинных балок при поперечном изгибе обычно производится только по нормальным напряжениям и формула $\sigma_{\max} = M_{\max} / W$ является основной формулой.

Здесь для простоты индекс x при M и W не указан.

Тема 9 Перемещение в упругой системе при произвольной нагрузке

Линейные и угловые перемещения балки

Под действием внешних сил, расположенных в силовой плоскости, проходящей через ось симметрии поперечного сечения прямой балки, ее ось искривляется в той же плоскости; при этом точки оси перемещаются (рис. 9.1). Напомним, что изогнутая ось балки называется *упругой линией*.

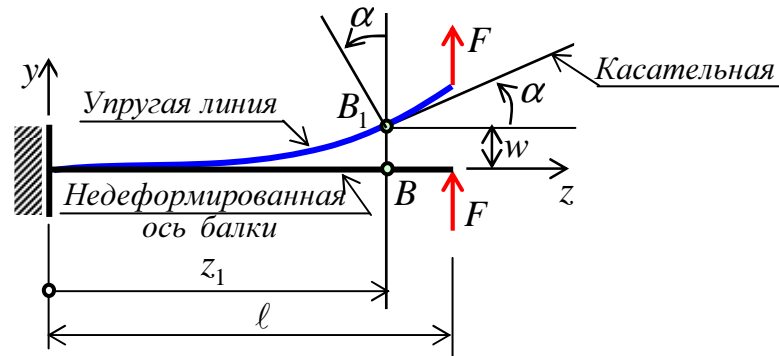


Рис. 9.1

Рассмотрим произвольное поперечное сечение B , соответствующее одноименной точке на оси балки и отстоящей от начала координат на расстоянии z_1 .

Перемещение центра тяжести сечения B по направлению перпендикулярному к недеформированной оси балки (вдоль оси $y - BB_1$) будем называть *прогибом* балки в этом сечении и обозначать как w ($w = BB_1$). На рис. 9.1 прогиб показан положительным.

Смещение центра тяжести сечения B по горизонтали u (вдоль оси z) будем считать весьма малым по сравнению с прогибом и поэтому при расчетах его не учитывать ($u \ll w$).

Угол поворота сечения B_1 обозначим как α , который вследствие гипотезы плоских сечений оказывается равным углу наклона между касательной, проведенной к упругой линии, и недеформированной осью балки, и в силу малости $\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = dw/dz$.

Прогиб w и угол поворота α будем считать новыми характеристиками происходящей деформации.

Новые характеристики деформации балки w и α являются переменными, зависящими от координаты сечения z_1 и позволяют количественно оценить искажения формы конструкции при действии внешних сил при изгибе.

Часто прогибы называют *линейными перемещениями* оси балки, а углы поворота – *угловыми перемещениями*.

Дифференциальное уравнение упругой линии

Ранее было установлено, что мерой деформации стержня при прямом чистом изгибе является кривизна нейтрального слоя

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x}.$$

С достаточной для инженерных расчетов точностью этим тезисом можно пользоваться и в случае прямого поперечного изгиба стержня. Тогда возникает задача составления уравнения для функции прогиба по известному закону изменения ее кривизны.

Воспользуемся известным из дифференциальной геометрии выражением для кривизны, в прямоугольных декартовых координатах (yOz):

$$K = \frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2 w / dz^2}{\sqrt{[1 + (dw/dz)^2]^3}}.$$

Сравнивая две последние формулы, получаем

$$\frac{M_x}{E \cdot I_x} = \pm \frac{d^2 w / dz^2}{\sqrt{[1 + (dw/dz)^2]^3}}.$$

Это точное нелинейное дифференциальное уравнение упругой линии. Однако, учитывая, что в инженерной практике применяются достаточно жесткие балки, для которых наибольший прогиб w_{\max} мал по сравнению с длиной ℓ ($w_{\max}/\ell \ll 1$), а первая производная от прогиба имеет порядок

$$\frac{dw}{dz} = \operatorname{tg} \alpha \approx \frac{w}{\ell},$$

и, следовательно, величиной $(dw/dz)^2 \ll 1$, стоящей в знаменателе точного дифференциального уравнения упругой линии, можно пренебречь по сравнению с единицей.

Тогда получим следующее линейное дифференциальное уравнение упругой линии

$$\frac{M_x}{E \cdot I_x} = \pm \frac{d^2 w}{dz^2}.$$

Это приближенное дифференциальное уравнение, описывающее малые прогибы балки, иногда называют линеаризованным уравнением упругой линии.

Выбор знака определяется принятой системой координат. Для системы координат, показанной на рис. 9.2, имеем одинаковые знаки для момента M_x и кривизны $K \approx d^2 w / dz^2$. Следовательно, дифференциальное уравнение упругой линии будет иметь следующий вид

$$\frac{M_x}{E \cdot I_x} = \frac{d^2 w}{dz^2}.$$

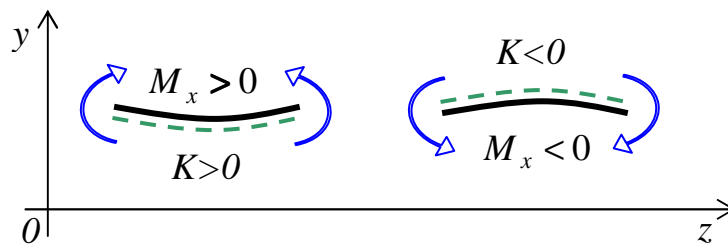


Рис. 9.2

Для системы координат, принятой на рис. 9.3, имеем разные знаки для момента M_x и кривизны $K \approx d^2w/dz^2$. Следовательно, в этом случае будет иметь

$$\frac{M_x}{E \cdot I_x} = -\frac{d^2w}{dz^2}.$$

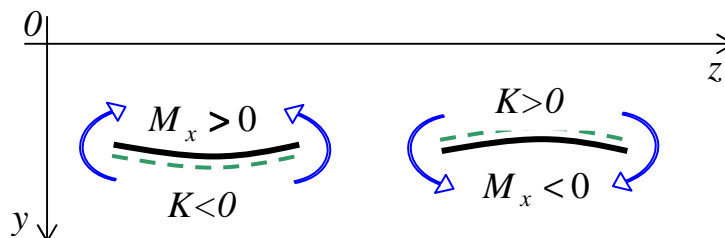


Рис. 9.3

В дальнейшем будем пользоваться системой координат, показанной на рис. 9.2, и дифференциальным уравнением упругой линии в виде

$$M_x = E \cdot I_x \cdot \frac{d^2w}{dz^2}.$$

Метод непосредственного интегрирования

Решение уравнения получаем путем двукратного почленного интегрирования (метод непосредственного интегрирования). При первом интегрировании получаем выражение

$$E \cdot I_x \cdot \frac{dw}{dz} = E \cdot I_x \cdot \alpha = \int M_x \cdot dz + C,$$

которое дает также закон изменения углов поворота поперечных сечений по длине балки.

Повторным интегрированием получаем функцию прогиба

$$E \cdot I_x \cdot w = \int dz \int M_x \cdot dz + C \cdot z + D,$$

где постоянные интегрирования C и D находятся из граничных условий.

Рассмотрим несколько характерных примеров определения перемещений при изгибе.

Пример 1. Рассмотрим консоль – балку, жестко заделанную одним концом, свободную на другом конце и нагруженную силой F (рис. 9.4). Найдем перемещения точки приложения силы F (w_c и α_c).

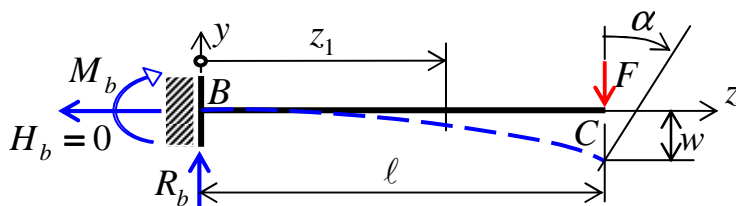


Рис. 9.4

Итак, имеем

$$\frac{M_x}{E \cdot I_x} = \frac{d^2 w}{dz^2}, \quad M_x = F \cdot z_1 - F \cdot \ell = F \cdot (z_1 - \ell), \quad \alpha = \frac{dw}{dz} = \frac{F}{E \cdot I_x} \cdot \left(\frac{z_1^2}{2} - \ell \cdot z_1 \right) + C,$$

$$w = \frac{F}{E \cdot I_x} \cdot \left(\frac{z_1^3}{6} - \ell \cdot \frac{z_1^2}{2} \right) + C \cdot z + D,$$

со следующими двумя граничными условиями (условия, накладываемые на прогиб и угол поворота сечения, получили название *кинематических граничных условий*):

при $z = 0$ $w(0) = 0$ и $\alpha(0) = 0$.

Отсюда $C = 0$, $D = 0$ и

$$\alpha(\ell) = \frac{F}{E \cdot I_x} \cdot \left(\frac{\ell^2}{2} - \ell \cdot \ell \right) = -\frac{F \cdot \ell^2}{2 \cdot E \cdot I_x}, \quad w(\ell) = \frac{F}{E \cdot I_x} \cdot \left(\frac{\ell^3}{6} - \ell \cdot \frac{\ell^2}{2} \right) = -\frac{F \cdot \ell^3}{3 \cdot E \cdot I_x}.$$

Отрицательные знаки перемещений говорят о том, что центр тяжести сечения перемещается вниз и сечение поворачивается по часовой стрелке.

Пример 2. Рассмотрим балку, шарнирно опертую по концам и нагруженную силой F в пролете (рис. 9.5). Найдем перемещение точки приложения силы F (w_k) и угол поворота сечения B .

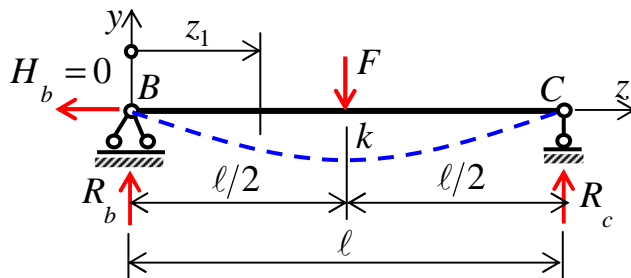


Рис. 9.5

После двукратного почленного интегрирования дифференциального уравнения упругой линии имеем

$$\frac{M_x}{E \cdot I_x} = \frac{d^2 w}{dz^2}, \quad M_x = \frac{F}{2} \cdot z_1, \quad \alpha = \frac{dw}{dz} = \frac{F}{2 \cdot E \cdot I_x} \cdot \frac{z_1^2}{2} + C = \frac{F}{4 \cdot E \cdot I_x} \cdot z_1^2 + C,$$

$$w = \frac{F}{4 \cdot E \cdot I_x} \cdot \frac{z_1^3}{3} + C \cdot z + D = \frac{F}{12 \cdot E \cdot I_x} \cdot z_1^3 + C \cdot z + D.$$

Постоянные интегрирования C и D находим из двух кинематических граничных условий:

при $z = 0$ $w(0) = 0$ и вследствие симметрии при $z = \ell/2$ имеем $\alpha(\ell/2) = 0$. Отсюда из $w(0) = 0$ вытекает $D = 0$, а из $\alpha(\ell/2) = 0$

$$\alpha(\ell/2) = \frac{F}{4 \cdot E \cdot I_x} \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + C = 0, \quad C = -\frac{F \cdot \ell^2}{16 \cdot E \cdot I_x}.$$

Таким образом, искомые перемещения будут равны

$$w(\ell/2) = \frac{F}{12 \cdot E \cdot I_x} \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^3 + \left(-\frac{F \cdot \ell^2}{16 \cdot E \cdot I_x}\right) \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{F \cdot \ell^3}{48 \cdot E \cdot I_x} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = -\frac{F \cdot \ell^3}{48 \cdot E \cdot I_x},$$

$$\alpha(0) = C = -\frac{F \cdot \ell^2}{16 \cdot E \cdot I_x}.$$

Обратим внимание на физический смысл постоянных интегрирования $C = E \cdot I_x \cdot \alpha_0$ и $D = E \cdot I_x \cdot w_0$. Они связаны с углом поворота и прогибом в начале координат.

Простота решения рассмотренных задач объясняется тем, что в обоих случаях был всего лишь один силовой участок. Если участков два и больше, то метод непосредственного интегрирования становится весьма трудоемким и по этой причине для определения перемещений применяются другие методы, которые рассматриваются в более полных курсах по сопротивлению материалов.

Простые статически неопределимые балки

Во всех приведенных выше примерах функция изгибающего момента $M_x(z)$ предполагалась известной, что возможно лишь для статически определимых балок.

При расчете статически неопределимых балок дифференциальное уравнение

$$\frac{M_x}{E \cdot I_x} = \frac{d^2 w}{dz^2}$$

непригодно, так как оно содержит неизвестный изгибающий момент M_x . Попробуем это уравнение преобразовать. Для этого, с его учетом, еще раз перепишем дифференциальные зависимости при изгибе:

$$\frac{dw}{dz} = \alpha,$$

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{M_x}{E \cdot I_x},$$

$$\frac{d^3 w}{dz^3} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \frac{dM_x}{dz} = \frac{Q_y}{E \cdot I_x},$$

$$\frac{d^4 w}{dz^4} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \frac{dQ_y}{dz} = -\frac{q}{E \cdot I_x}.$$

Каждая производная имеет четкий физический смысл и четкую математическую запись. А в дифференциальном уравнении упругой линии, записанном в виде

$$\frac{d^4 w}{dz^4} = -\frac{q}{E \cdot I_x}$$

нагрузка q известна. При интегрировании уравнения необходимо задать четыре граничных условия (по два на каждом конце балки) в том числе так называемые силовые граничные условия – условия, накладываемые на силовые величины (изгибающий момент и поперечную силу), которые выражаются через производные от прогиба.

Рассмотрим два характерных примера определения перемещений в простых статически неопределимых балках при изгибе.

Пример 3. Имеем балку, жестко заделанную в левом концевом сечении и свободно опертую на другом конце, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q (рис. 9.6). Найдём угол поворота сечения С (α_c).

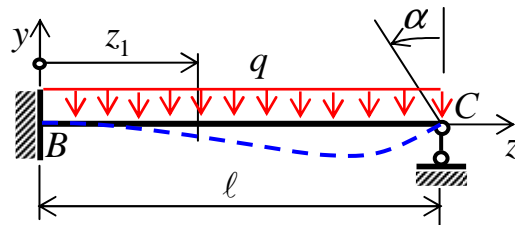


Рис. 9.6

В нашем случае имеем при $z = 0$ $w(0) = 0$ и $\alpha(0) = 0$, при $z = l$ $w(l) = 0$ и $M_x(l) = 0$.

Удовлетворяя дифференциальные зависимости при изгибе граничным условиям:

$$\frac{d^4 w}{dz^4} = -\frac{q}{E \cdot I_x}, \quad \frac{d^3 w}{dz^3} = -\frac{q}{E \cdot I_x} \cdot \int dz + C = -\frac{q \cdot z}{E \cdot I_x} + C,$$

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = -\frac{q \cdot z^2}{2 \cdot E \cdot I_x} + C \cdot z + D, \quad \frac{dw}{dz} = -\frac{q \cdot z^3}{6 \cdot E \cdot I_x} + C \cdot \frac{z^2}{2} + D \cdot z + G,$$

$$w = -\frac{q \cdot z^4}{24 \cdot E \cdot I_x} + C \cdot \frac{z^3}{6} + D \cdot \frac{z^2}{2} + G \cdot z + H,$$

получим $w(0) = 0$ или $H = 0$, $\alpha(0) = 0$ или $G = 0$, $w(\ell) = 0$ или $0 = -\frac{q \cdot \ell^4}{24 \cdot E \cdot I_x} + C \cdot \frac{\ell^3}{6} + D \cdot \frac{\ell^2}{2}$ или $0 = -\frac{q \cdot \ell^2}{12 \cdot E \cdot I_x} + C \cdot \frac{\ell}{3} + D$, $M_x(\ell) = 0$ или $\frac{M_x(\ell)}{E \cdot I_x} = \frac{d^2 w}{dz^2} = -\frac{q \cdot \ell^2}{2 \cdot E \cdot I_x} + C \cdot \ell + D = 0$.

Решая последние два уравнения относительно постоянных интегрирования C и D получим

$$\begin{cases} -\frac{q \cdot \ell^2}{12 \cdot E \cdot I_x} + C \cdot \frac{\ell}{3} + D = 0 \\ -\frac{q \cdot \ell^2}{2 \cdot E \cdot I_x} + C \cdot \ell + D = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} C = -\frac{5 \cdot q \cdot \ell}{8 \cdot E \cdot I_x} \\ D = -\frac{q \cdot \ell^2}{8 \cdot E \cdot I_x} \end{cases}.$$

Тогда, угол поворота сечения C (α_c) будет равен

$$\alpha_c = \frac{dw}{dz} = -\frac{q \cdot \ell^3}{6 \cdot E \cdot I_x} + \left(\frac{5 \cdot q \cdot \ell}{8 \cdot E \cdot I_x}\right) \cdot \frac{\ell^2}{2} + \left(-\frac{q \cdot \ell^2}{8 \cdot E \cdot I_x}\right) \cdot \ell = \frac{q \cdot \ell^3}{48 \cdot E \cdot I_x}.$$

Пример 4. Рассмотрим балку, жестко заделанную в левом концевом сечении и свободно опертую на другом конце, нагруженную как показано на рис. 9.7. Найдем угол поворота сечения C (α_c).

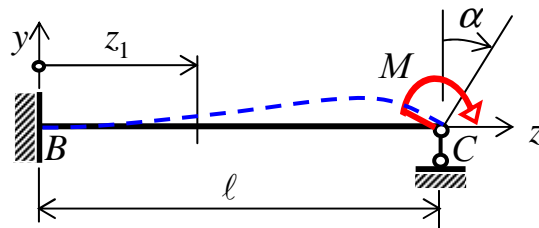


Рис. 9.7

Граничные условия остаются прежними: при $z = 0$ $w(0) = 0$ и $\alpha(0) = 0$, при $z = \ell$ $w(\ell) = 0$. Изменится только граничное силовое условие – при $z = \ell$ $M_x(\ell) = -M$.

Удовлетворяя дифференциальные зависимости при изгибе граничным условиям и учитывая, что $q = 0$,

$$E \cdot I_x \cdot \frac{d^4 w}{dz^4} = 0, \quad E \cdot I_x \cdot \frac{d^3 w}{dz^3} = C, \quad E \cdot I_x \cdot \frac{d^2 w}{dz^2} = C \cdot z + D,$$

$$E \cdot I_x \cdot \alpha = E \cdot I_x \cdot \frac{dw}{dz} = C \cdot \frac{z^2}{2} + D \cdot z + G, \quad E \cdot I_x \cdot w = C \cdot \frac{z^3}{6} + D \cdot \frac{z^2}{2} + G \cdot z + H,$$

получим $w(0) = 0$ или $H = 0$, $\alpha(0) = 0$ или $G = 0$, $w(\ell) = 0$ или

$$0 = C \cdot \frac{\ell^3}{6} + D \cdot \frac{\ell^2}{2} \quad \text{или} \quad 0 = C \cdot \frac{\ell}{3} + D, \quad M_x(\ell) = -M \quad \text{или}$$

$$M_x = E \cdot I_x \cdot \frac{d^2 w}{dz^2}, \quad E \cdot I_x \cdot \frac{d^2 w}{dz^2} = C \cdot z + D, \quad C \cdot \ell + D = -M.$$

Решая последние два уравнения относительно постоянных интегрирования C и D получим

$$\begin{cases} C \cdot \frac{\ell}{3} + D = 0 \\ C \cdot \ell + D = -M \end{cases}, \quad \begin{cases} C = -\frac{3 \cdot M}{2 \cdot \ell} \\ D = \frac{M}{2} \end{cases}.$$

Тогда, угол поворота сечения C (α_c) будет равен

$$E \cdot I_x \cdot \alpha_c = \left(-\frac{3 \cdot M}{2 \cdot \ell}\right) \cdot \frac{\ell^2}{2} + \left(\frac{M}{2}\right) \cdot \ell = -\frac{M \cdot \ell}{4}, \quad \alpha_c = -\frac{M \cdot \ell}{4 \cdot E \cdot I_x}.$$

Тема 10 Сложное нагружение

К сложному сопротивлению относятся виды деформаций бруса, при которых в его поперечных сечениях одновременно возникает более одного внутреннего силового фактора. Исключением является прямой поперечный изгиб, который не принято рассматривать как случай сложного сопротивления, хотя при этом в сечениях и возникают два внутренних силовых фактора: изгибающий момент и поперечная сила. Этот вид деформации рассматривается как простой потому, что в подавляющем большинстве случаев расчеты на прочность и жесткость ведутся без учета влияния поперечных сил, т.е. по одному силовому фактору – изгибающему моменту.

При сложном нагружении необходимо научиться определять внутренние усилия, напряжения в любой произвольной точке, находить опасные сечения и самые опасные точки, чтобы потом сделать выводы о прочности элемента конструкции. Кроме того, необходимо уметь определять и деформации, чтобы рассчитать элемент конструкции на жесткость.

Общий случай действия сил на брус и разложение на частные случаи

При самом сложном нагружении прямого бруса (рис.10.1) в его поперечном сечении возникают 6 внутренних факторов: изгибающие моменты M_z , M_y , крутящий момент T_x , продольная сила N_x и поперечные силы Q_y и Q_z .

Внутренние силовые факторы в произвольных сечениях определяются с использованием метода сечений.

Внутренние силовые факторы в произвольном сечении, расположенном на расстоянии x от левого конца бруса, изображенного на рис.10.1, a можно определить через внешние нагрузки, расположенные слева от этого сечения.

В сечении внутренние силовые факторы изображены положительными. Для определения продольной и поперечной силы необходимо спроектировать внешние нагрузки на направления N_x , Q_y , Q_z .

$$N_x = F_1 + F_4;$$

$$Q_y = F_2 - F_2 - F_3 - q(x - a) = -F_3 - q(x - a);$$

$$Q_z = -F_5.$$

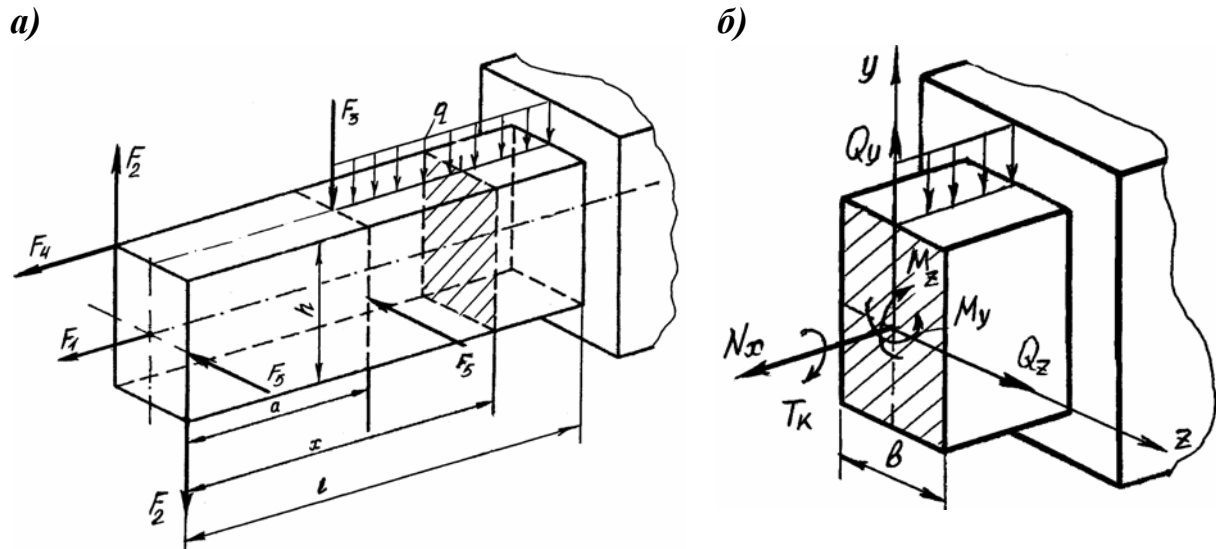


Рис. 10.1

Для определения крутящего и изгибающего моментов определяют величину моментов всех внешних сил, расположенных слева от сечения, относительно главных центральных и продольных осей.

Знак момента внешней силы определяется положительным направлением M_z , M_y , T_x .

$$M_z = (F_1 - F_2) \cdot (x - a) - F_4 \cdot \frac{h}{2} - F_3(x - a) - q \frac{(x - a)^2}{2} =$$

$$= -\frac{F_4 h}{2} - F_3(x - a) - q \frac{(x - a)^2}{2};$$

$$M_y = F_4 \frac{b}{2} - F_5 \cdot x;$$

$$T_x = F_2 \cdot \frac{b}{2} + F_2 \frac{b}{2} = F_2 \cdot b.$$

Для линейно-деформируемых систем, которые мы рассматриваем в курсе «Сопротивление материалов», можно применять принцип суперпозиции, и любое сложное нагружение бруса можно заменить суммой простых нагружений или некоторым их сочетанием. Часто эти сочетания могут встречаться самостоятельно. Они будут рассмотрены ниже.

Косой изгиб

Косым изгибом называется такой вид изгиба, при котором плоскость действия изгибающего момента в данном поперечном сечении бруса

не проходит ни через одну из главных центральных осей инерции этого сечения. Элемент бруса, примыкающий к этому сечению, находится в условиях косоугольного изгиба.

Случай косоугольного изгиба, при котором в поперечном сечении бруса возникает лишь изгибающий момент, называется *чистым косоугольным изгибом*. Если же в сечении действует, кроме того, поперечная сила, то имеется *поперечный косоугольный изгиб*.

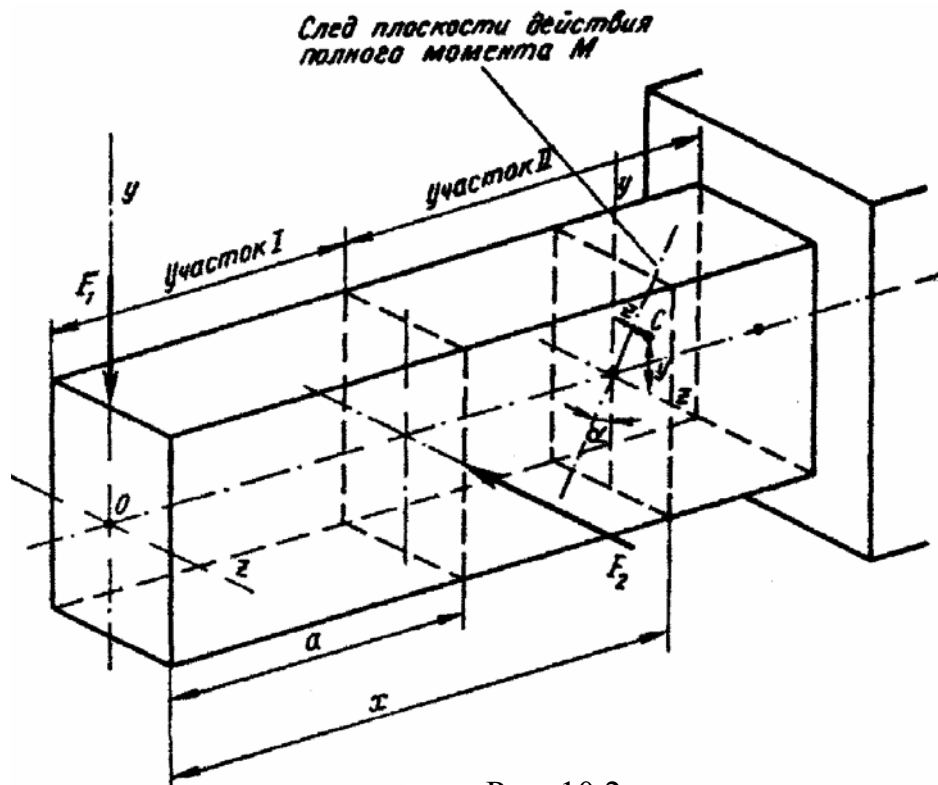


Рис. 10.2

На рис. 10.2 изображен брус с прямоугольным поперечным сечением, заделанный правым концом. К брусу на свободном конце приложена вертикальная сила F_1 , а в сечении на расстоянии a от свободного конца – горизонтальная сила F_2 .

В каждом поперечном сечении участка I возникают изгибающий момент M_z , действующий в плоскости yx , и поперечная сила $Q_y = -F_1$; этот участок испытывает прямой поперечный изгиб. В поперечном сечении участка II бруса с абсциссой x действуют изгибающий момент $M_z = -F_1x$ в главной плоскости yx , изгибающий момент $M_y = -F_2(x - a)$ в главной плоскости zx и поперечные силы $Q_y = -F_1$ и $Q_z = -F_2$. Полный изгибающий момент $M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$ действует в плоскости, не совпадающей ни с

одной из главных плоскостей бруса. Следовательно, на участке II возникает поперечный кривой изгиб.

Таким образом, *кривой изгиб можно рассматривать, как сочетание двух прямых изгибов*, вызванных изгибающими моментами относительно главных центральных осей инерции поперечного сечения y и z .

На основании принципа независимости действия сил полные нормальные напряжения в поперечных сечениях участка II равны сумме напряжений от раздельного действия моментов M_z и M_y . Следовательно, в точке C поперечного сечения (рис.10.2) полное напряжение

$$\sigma = -\frac{M_z}{J_z} \cdot y - \frac{M_y}{J_y} \cdot z. \quad (10.1)$$

Если в формуле (10.1) брать абсолютные значения изгибающих моментов, то формулу можно переписать в виде

$$\sigma = \pm \frac{M_z}{J_z} \cdot y \pm \frac{M_y}{J_y} \cdot z. \quad (10.2)$$

Перед первым членом правой части берется знак плюс, когда момент M_z вызывает растяжение в точках сечения с положительными координатами y , а перед вторым членом – когда момент M_y вызывает растяжение в точках с положительными координатами z .

На рис. 10.3 показаны эпюры нормальных напряжений σ_{M_z} и σ_{M_y} в поперечном сечении участка II бруса (рис.10.2) от раздельного действия изгибающих моментов M_z и M_y .

Полный изгибающий момент M связан с его составляющими M_z и M_y зависимостями

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}; \quad (10.3)$$

$$|M_z| = M \cos \alpha; |M_y| = M \sin \alpha, \quad (10.4)$$

где α – угол между осью y и плоскостью действия полного момента (рис.10.3).

Из выражений(10.4)найдем

$$|\operatorname{tg}\alpha| = \left| \frac{M_y}{M_z} \right|. \quad (10.5)$$

Положение плоскости действия полного момента устанавливается с учетом того обстоятельства, что эта плоскость проходит через центр тяже-

сти сечения и два квадранта, в которых оба момента M_z и M_y вызывают нормальные напряжения одного знака (в нашем примере I и III квадранта).

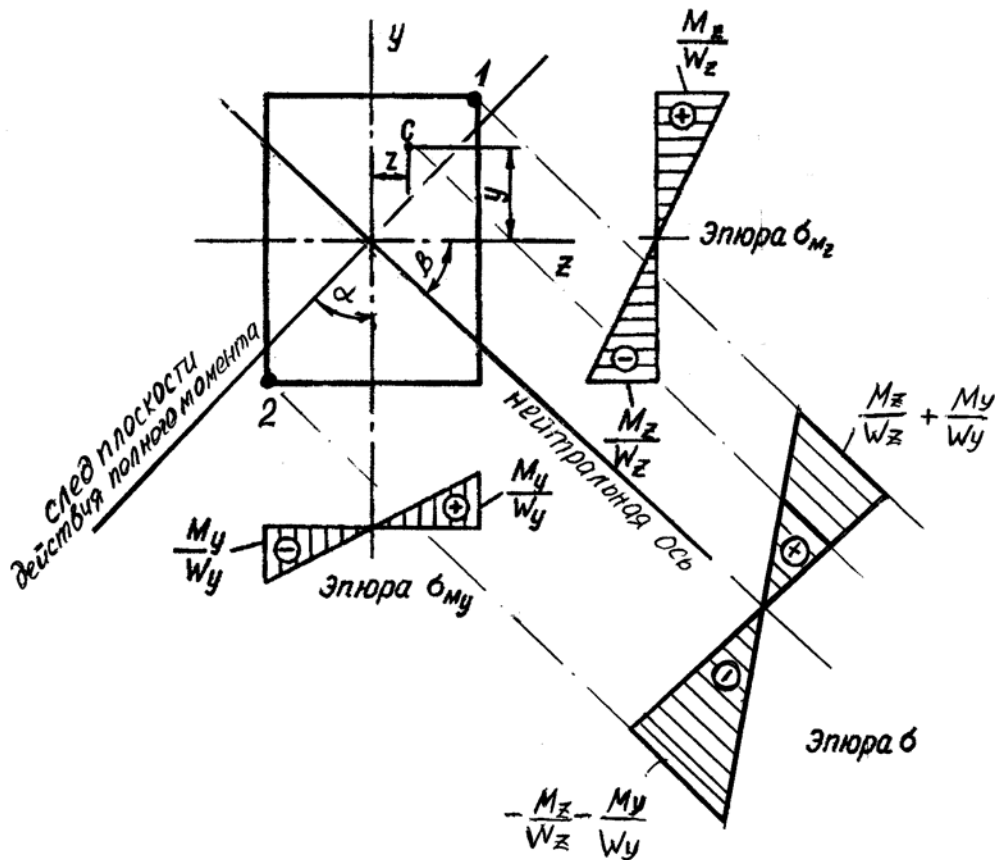


Рис.10.3

Для сечений, имеющих две оси симметрии и угловые точки, всегда находится угловая точка, где напряжения складываются

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}. \quad (10.6)$$

Для произвольных сечений необходимо найти положение нейтральной оси в системе главных центральных осей инерции поперечного сечения бруса. Уравнение нейтральной оси легко получить, приравняв напряжения в произвольной точке при косом изгибе к нулю.

$$\sigma = -\frac{M_z}{J_z} \cdot y - \frac{M_y}{J_y} \cdot z = 0.$$

Решим это уравнение относительно y и получим

$$y = -\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{J_z}{J_y} \cdot z. \quad (10.7)$$

В выражении (10.7) $-\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{J_z}{J_y}$ представляет угловой коэффициент наклона нейтральной оси к оси z , и он равен тангенсу угла наклона нейтральной оси относительно оси z , т.е.

$$|\operatorname{tg}\beta| = \left| \frac{M_y}{M_z} \right| \cdot \frac{J_z}{J_y}, \text{ но } \left| \frac{M_y}{M_z} \right| = |\operatorname{tg}\alpha| \text{ и тогда}$$

$$|\operatorname{tg}\beta| = |\operatorname{tg}\alpha| \cdot \frac{J_z}{J_y}. \quad (10.8)$$

Угол β – угол наклона нейтральной оси к оси z .

Нейтральная ось никогда не проходит через квадранты, которые пересекают след плоскости действия полного момента M .

Наиболее опасными точками при косом изгибе будут точки наиболее удаленные от нейтральной оси. Для этого необходимо провести линии параллельно нейтральной оси, касающиеся контура сечения.

Расчеты на прочность при косом изгибе

Для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, и сечением, имеющим две оси симметрии с угловыми точками, условие прочности по допускаемым напряжениям примет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (10.9)$$

При расчете по предельным состояниям

$$\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq m_u R_u, \quad (10.10)$$

где M_z, M_y – составляющие расчетного, т.е. определенного по расчетным нагрузкам, момента относительно осей z и y ;

W_z, W_y – моменты сопротивления сечения относительно осей z и y ;

m_u – коэффициент условий работы элемента на косой изгиб, при обычных условиях работы близок к единице;

R_u – расчетное сопротивление материала изгибу.

Для материалов, различно работающих на растяжение и сжатие, и сечением произвольной формы, условие прочности на косоу изгиб при расчете по допускаемым напряжениям будет иметь вид

$$\max \sigma_{\rho} = \frac{M_z}{J_z} y_{\max}^{\rho} + \frac{M_y}{J_y} z_{\max}^{\rho} \leq [\sigma_{\rho}]; \quad (10.11)$$

$$|\max \sigma_c| = \left| \frac{M_z}{J_z} y_{\max}^c + \frac{M_y}{J_y} z_{\max}^c \right| \leq [\sigma_c]. \quad (10.12)$$

В формулах(10.9,10.11,10.12) M_z и M_y – изгибающие моменты относительно главных центральных осей, полученные при расчете на нормативную нагрузку, а y_{\max}^{ρ} , y_{\max}^c и z_{\max}^{ρ} , z_{\max}^c – координаты опасных (наиболее удаленных от нейтральной оси) точек в растянутой и сжатой зонах в системе главных центральных осей поперечного сечения бруса.

При расчете на прочность по предельным состояниям получаем аналогичные по форме формулы, только вместо допускаемых напряжений – расчетные сопротивления на растяжение R_t и на сжатие R_c .

Внецентренное растяжение (сжатие)

Внецентренным растяжением или *сжатием* называется такой вид деформации, когда в поперечном сечении бруса одновременно действуют продольная сила и изгибающий момент.

Вызывается действием нагрузки, параллельной оси бруса, но не совпадающей с осью бруса.

Будем рассматривать жесткие брусья, в которых можно не учитывать дополнительные изгибающие моменты за счет изгиба бруса.

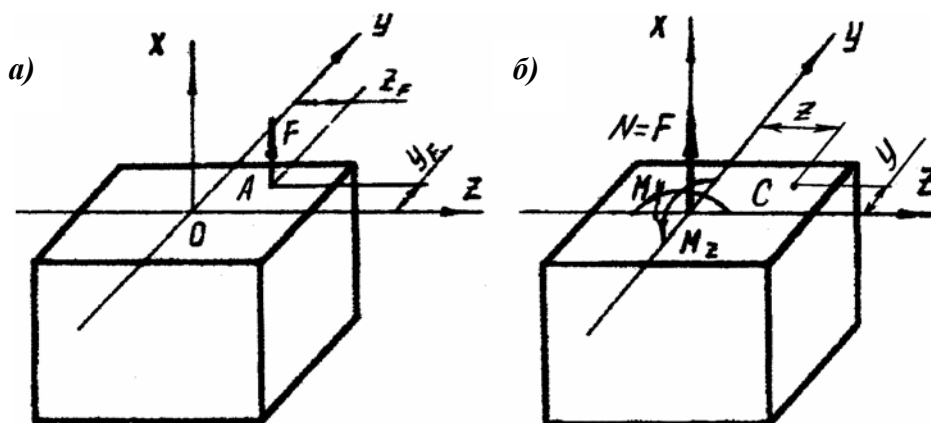


Рис. 10.4

Пусть на жесткий брус действует растягивающая сила F , приложенная в точке A с координатами z_F и y_F , которые называют эксцентриситетами этой силы относительно главных центральных осей инерции z и y (рис.10.4, а).

Приведем силу F к центру тяжести сечения (рис.10.4, б). Она приводится к продольной силе $N = F$ и двум изгибающим моментам M_z и M_y .

Тогда напряжение в произвольной точке C с координатами z и y равно сумме напряжений от продольной силы N и изгибающих моментов M_z и M_y , т.е.

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_z} + \sigma_{M_y} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot z. \quad (10.13)$$

Подставим в формулу (10.13) выражения $M_z = F \cdot y_F$ и $M_y = F \cdot z_F$, получим

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot y_F}{J_z} \cdot y + \frac{F \cdot z_F}{J_y} \cdot z. \quad (10.14)$$

В формуле (10.14) растягивающая сила F подставляется со знаком плюс, а сжимающая – со знаком минус; координаты y_p, z_p, y и z в эту формулу подставляются со своими знаками.

Формулу (10.14) можно представить в следующем виде:

$$\sigma = F \left(\frac{1}{A} + \frac{y_F \cdot y}{J_z} + \frac{z_F \cdot z}{J_y} \right) \quad (10.15)$$

или

$$\sigma = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z}{i_y^2} \right), \quad (10.16)$$

где $i_z = \sqrt{J_z/A}$ и $i_y = \sqrt{J_y/A}$ – радиусы инерции поперечного сечения бруса относительно главных центральных осей инерции.

Уравнение нейтральной оси можно получить из формулы (10.16), приравняв $\sigma = 0$. Так как $\frac{F}{A} \neq 0$, то

$$1 + \frac{y_F \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z}{i_y^2} = 0. \quad (10.17)$$

Выражение (10.17) является уравнением прямой линии и представляет собой уравнение нейтральной оси. Определим отрезки, отсекаемые нейтральной осью на главных центральных осях инерции поперечного сечения.

Пусть $z = 0$, тогда из выражения (10.17) отрезок, отсекаемый нейтральной осью на главной центральной оси y ,

$$y_n = -\frac{i_z^2}{y_F}. \quad (10.18)$$

Пусть $y = 0$, тогда из выражения (10.17) отрезок, отсекаемый нейтральной осью на главной центральной оси z ,

$$z_n = -\frac{i_y^2}{z_F}. \quad (10.19)$$

Из выражений (10.18, 10.19) следует:

- положение нейтральной оси не зависит от величины и знака силы F ;
- нейтральная ось и полюс (точка приложения силы F) лежат по разные стороны от начала координат;
- чем дальше от начала координат расположен полюс, тем ближе к центру сечения проходит нейтральная ось;
- если полюс расположен на одной из главных центральных осей инерции, то нулевая линия перпендикулярна этой оси.

При внецентренном растяжении и сжатии нормальные напряжения в каждой точке поперечного сечения бруса, как и при изгибе, прямо пропорциональны расстоянию от этой точки до нейтральной оси.

Наибольшие напряжения возникают в точках поперечного сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси.

Расчеты на прочность при внецентренном растяжении и сжатии

При внецентренном растяжении и сжатии расчет на прочность производится обычно по нормальным напряжениям, возникающим в поперечных сечениях бруса, т.е. как при одноосном напряженном состоянии. Поэтому теория прочности при таком расчете не используется.

Условие прочности по допускаемым напряжениям при внецентренном растяжении (сжатии) для материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие имеет вид

$$|\sigma_{\max}| = \left| \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F \cdot y_{\max}}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z_{\max}}{i_y^2} \right) \right| \leq [\sigma], \quad (10.20)$$

где y_{\max} , z_{\max} – координаты наиболее удаленной от нейтральной оси точки поперечного сечения.

Для материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, условия прочности запишутся так:

$$\max \sigma_p = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F \cdot y_{\max}^p}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z_{\max}^p}{i_y^2} \right) \leq [\sigma_p]; \quad (10.21)$$

$$|\max \sigma_c| = \left| \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F \cdot y_{\max}^c}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z_{\max}^c}{i_y^2} \right) \right| \leq [\sigma_c], \quad (10.22)$$

где y_{\max}^p, y_{\max}^c и z_{\max}^p, z_{\max}^c – координаты точек, наиболее удаленных от нейтральной оси, в растянутой и сжатой зонах поперечного сечения бруса.

При расчете по предельным состояниям структура формул (10.20), (10.21, 10.22) остается такой же, только F – расчетная нагрузка, а вместо $[\sigma], [\sigma_p], [\sigma_c]$ подставляются расчетные сопротивления R, R_t и R_c .

Некоторые материалы (бетон, кирпичная кладка) могут воспринимать лишь весьма незначительные растягивающие напряжения, а другие (например грунт) не могут вовсе сопротивляться растяжению. Такие материалы используются для изготовления лишь элементов конструкций, в которых не возникают растягивающие напряжения. Поэтому они не применяются для изготовления элементов конструкций, испытывающих изгиб, кручение, центральное и внецентренное растяжение.

Из таких материалов могут изготавливаться и внецентренно-сжатые элементы, если в них не возникают растягивающие напряжения. Это происходит в том случае, когда точка приложения сжимающей силы расположена внутри некоторой центральной области поперечного сечения, называемой ядром, или на границе этой области.

Ядром сечения называется его некоторая центральная область, обладающая тем свойством, что сжимающая сила, приложенная в любой ее точке, вызывает во всех точках поперечного сечения бруса сжимающие напряжения, т.е. напряжения одного знака.

Существуют два основных метода построения ядра сечения: метод полюсов, метод касательных.

Рассмотрим определение ядра сечения прямоугольной формы методом касательных (рис.10.5).

Положение главных центральных осей для данного сечения известно. Ими являются оси симметрии сечения z, y .

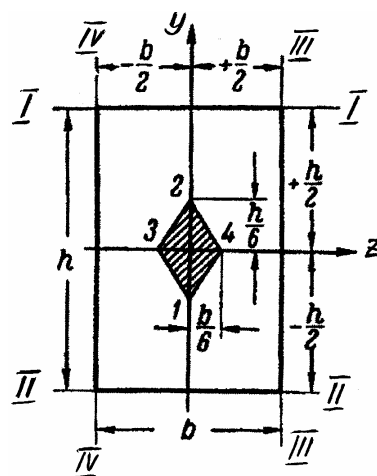


Рис. 10.5

1. Задаемся положением нейтральной оси (касательной к контуру сечения) I-I.

Отрезки, отсекаемые этой нейтральной осью на главных центральных осях равны

$$z_n = \infty; \quad y_n = \frac{h}{2}$$

Тогда из формул (10.18, 10.19) найдем координаты приложения нагрузки, соответствующие нейтральной оси I-I,

$$z_F = -\frac{i_y^2}{z_n}, \text{ но } i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{bh^3}{12 \cdot bh} = \frac{h^2}{12},$$

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{hb^3}{12 \cdot bh} = \frac{b^2}{12}.$$

$$z_F = -\frac{i_y^2}{\infty} = 0; \quad y_F = -\frac{i_z^2}{y_n} = -\frac{h^2 \cdot 2}{12 \cdot h} = -\frac{h}{6}.$$

Нейтральной оси I-I соответствует полюс 1 $\left(0; -\frac{h}{6}\right)$.

2. Задаемся положением нейтральной оси II-II. Отрезки, отсекаемые этой нейтральной осью на главных центральных осях

$$z_n = \infty; \quad y_n = -\frac{h}{2}.$$

Координаты приложения нагрузки

$$z_F = -\frac{i_y^2}{z_n} = -\frac{i_y^2}{\infty} = 0; \quad y_F = -\frac{i_z^2}{y_n} = -\frac{h^2 \cdot 2}{12 \cdot h} = -\frac{h}{6}.$$

Координаты полюса 2 $\left(0; \frac{h}{6}\right)$.

3. Задаемся положением нейтральной оси III-III.

Отрезки, отсекаемые этой нейтральной осью на главных центральных осях инерции,

$$z_n = \frac{b}{2}, \quad y_n = \infty.$$

Координаты приложения нагрузки

$$z_F = -\frac{i_y^2}{z_n} = -\frac{b^2 \cdot 2}{12 \cdot 6} = -\frac{b}{6}; \quad y_F = -\frac{i_z^2}{y_n} = -\frac{i_z^2}{\infty} = 0.$$

Координаты полюса 3 $\left(-\frac{b}{6}; 0\right)$.

4. Задаемся положением нейтральной оси IV-IV.

Отрезки, отсекаемые нейтральной осью на главных центральных осях инерции

$$z_n = -\frac{b}{2}, \quad y_n = \infty, \text{ тогда}$$

$$z_F = -\frac{i_y^2}{z_n} = \frac{b^2 \cdot 2}{12 \cdot b} = \frac{b}{6}; \quad y_F = -\frac{i_z^2}{y_n} = -\frac{i_z^2}{\infty} = 0.$$

Координаты полюса 4 $\left(\frac{b}{6}; 0\right)$.

Соединив полюса 1, 2, 3, 4, получим ядро сечения (рис.10.5).

Изгиб с растяжением

Пусть брус прямоугольного поперечного сечения нагружен силой F , вызывающей осевое растяжение, а также силами F_1 и F_2 , вызывающими изгиб в двух плоскостях (рис.10.6).

Для определения опасного сечения построим эпюры N , M_z и M_y , используя метод сечений

$$N = F; \quad M_z = -F_1 x; \quad \text{и} \quad M_y = -F_2 x.$$

При $x = 0$ $M_z = M_y = 0$, а при $x = l$ $M_z = -F_1 l$; $M_y = -F_2 l$.

Опасным является сечение B , для которого построены эпюры нормальных напряжений от растяжения и изгиба в двух плоскостях (рис.10.6, ∂).

Для произвольной точки C с координатами z и y нормальное напряжение равно

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot z. \quad (10.23)$$

Уравнение нейтральной оси можно получить, приравняв $\sigma = 0$

$$\frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot z = 0. \quad (10.24)$$

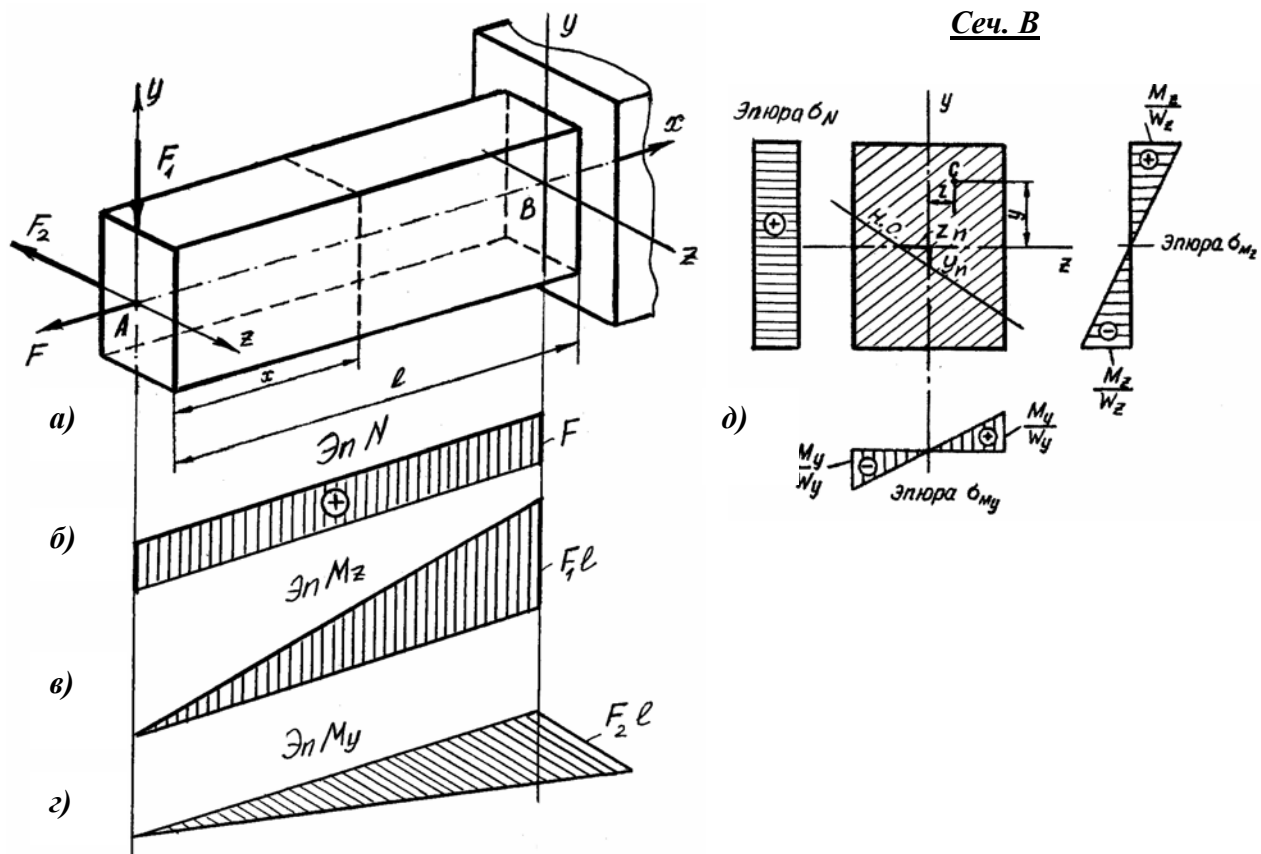


Рис. 10.6

Отрезки, отсекаемые нейтральной осью на главных центральных осях, будут равны:

$$y = 0, \quad z_n = -\frac{N}{A} \cdot \frac{J_y}{M_y}; \quad (10.25)$$

$$z = 0, \quad y_n = -\frac{N}{A} \cdot \frac{J_z}{M_z}$$

Нейтральная ось уходит в противоположный квадрант по отношению к квадранту, где нормальные напряжения σ_N , σ_{M_z} , σ_{M_y} одного знака.

Для сечений с двумя осями симметрии и угловыми точками всегда найдется угловая точка, в которой напряжения от N , M_z и M_y суммируются. Если материал одинаково работает на растяжение и сжатие, то условие прочности при расчете по допускаемым напряжениям примет вид

$$|\sigma_{\max}| = \left| \frac{N}{A} \right| + \left| \frac{M_z}{W_z} \right| + \left| \frac{M_y}{W_y} \right| \leq [\sigma]. \quad (10.26)$$

Для произвольных сечений опасные точки определяются после определения положения нейтральной оси. Ими будут точки, расположенные на наибольшем удалении от нейтральной оси.

Если материал различно сопротивляется растяжению и сжатию, то условие прочности по допускаемым напряжениям получается из условия

$$\max \sigma_p \leq [\sigma_p]; \quad |\max \sigma_{сж}| \leq [\sigma_c].$$

Изгиб с кручением

С сочетанием изгиба и кручения брусьев круглого поперечного сечения наиболее часто приходится встречаться при расчете валов. Значительно реже встречаются случаи изгиба с кручением брусьев некруглого сечения.

Если моменты инерции сечения относительно главных центральных осей равны между собой, кривой изгиб брусьев круглого поперечного сечения невозможен. Поэтому в общем случае действия внешних сил брус круглого сечения испытывает сочетание следующих видов деформаций: прямого поперечного изгиба, кручения и центрального растяжения (или сжатия).

Рассмотрим такой частный случай расчета бруса круглого сечения, когда в его поперечных сечениях продольная сила равна нулю. В этом случае брус работает на совместное действие изгиба и кручения. Для отыскания опасной точки бруса необходимо установить, как изменяются по длине бруса изгибающие и крутящие моменты, т.е. построить эпюры полных изгибающих моментов M и крутящих моментов T_k . Построение этих эпюр рассмотрим на конкретном примере вала (рис.10.7). Вал опирается на подшипники A и B и приводится во вращение двигателем C .

На вал насажены шкивы с диаметрами $D_1 = 0,4$ м и $D_2 = 0,6$ м, через которые перекинута приводные ремни, имеющие натяжения T_1 и t_1 , T_2 и t_2 . Число оборотов вала $n = 980$ об/мин, суммарная передаваемая мощность $N = 15$ кВт, причем со шкива, диаметром D_1 снимается мощность $N_1 = 9$ кВт, а со шкива диаметром D_2 – 6 кВт. Углы наклона ветвей $\alpha_1 = 30^\circ$ и $\alpha_2 = 45^\circ$.

Предположим, что вал вращается в подшипниках без трения; собственной массой вала и шкивов пренебрегаем. Для ременной передачи принимаем $T_1 = 2t_1$ и $T_2 = 2t_2$.

К валу в сечениях, в которых расположены шкивы 1 и 2, прикладываются скручивающие моменты m_1 и m_2 , которые определяются по формулам

$$m_1 = 9550 \frac{N_1}{n} = 9550 \frac{9}{980} = 87,7 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$m_2 = 9550 \frac{N_2}{n} = 9550 \frac{6}{980} = 58,47 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Окружные силы можно определить, зная скручивающие моменты из условия

$$m_1 = T_1 \cdot \frac{D_1}{2} - t_1 \cdot \frac{D_1}{2} = \frac{(2t_1 - T_1) \cdot D_1}{2};$$

$$t_1 = \frac{2m_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 87,7}{0,4} = 438,5 \text{ Н}.$$

Аналогично

$$t_2 = \frac{2m_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 58,47}{0,6} = 194,9 \text{ Н}.$$

Теперь можно определить силы давления на вал. Каждая равна трем окружным усилиям:

$$F_1 = 3t_1 = 3 \cdot 438,5 = 1315,5 \text{ Н};$$

$$F_2 = 3t_2 = 3 \cdot 194,9 = 584,7 \text{ Н}.$$

Разложим силы давления на вал F_1 и F_2 на вертикальную и горизонтальную составляющие:

$$F_{1y} = F_1 \sin 30^\circ = 1315,5 \cdot 0,5 = 657,8 \text{ Н}; \quad F_{1z} = F_1 \cos 30^\circ = 1315,5 \cdot 0,866 = 1139,2 \text{ Н}$$

$$F_{2y} = F_2 \sin 45^\circ = 584,7 \cdot 0,707 = 413,4 \text{ Н}; \quad F_{2z} = F_2 \cos 45^\circ = 584,7 \cdot 0,707 = 413,4 \text{ Н}.$$

Момент, передаваемый от электродвигателя на вал,

$$m = 9550 \frac{N}{n} = 9550 \frac{15}{980} = 146,17 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Используя метод сечений, определим величину крутящих моментов по участкам вала и построим эпюру крутящих моментов.

$$T_{1к} = 0; \quad T_{2к} = m_1 = 87,7 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad T_{3к} = m = 146,17 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

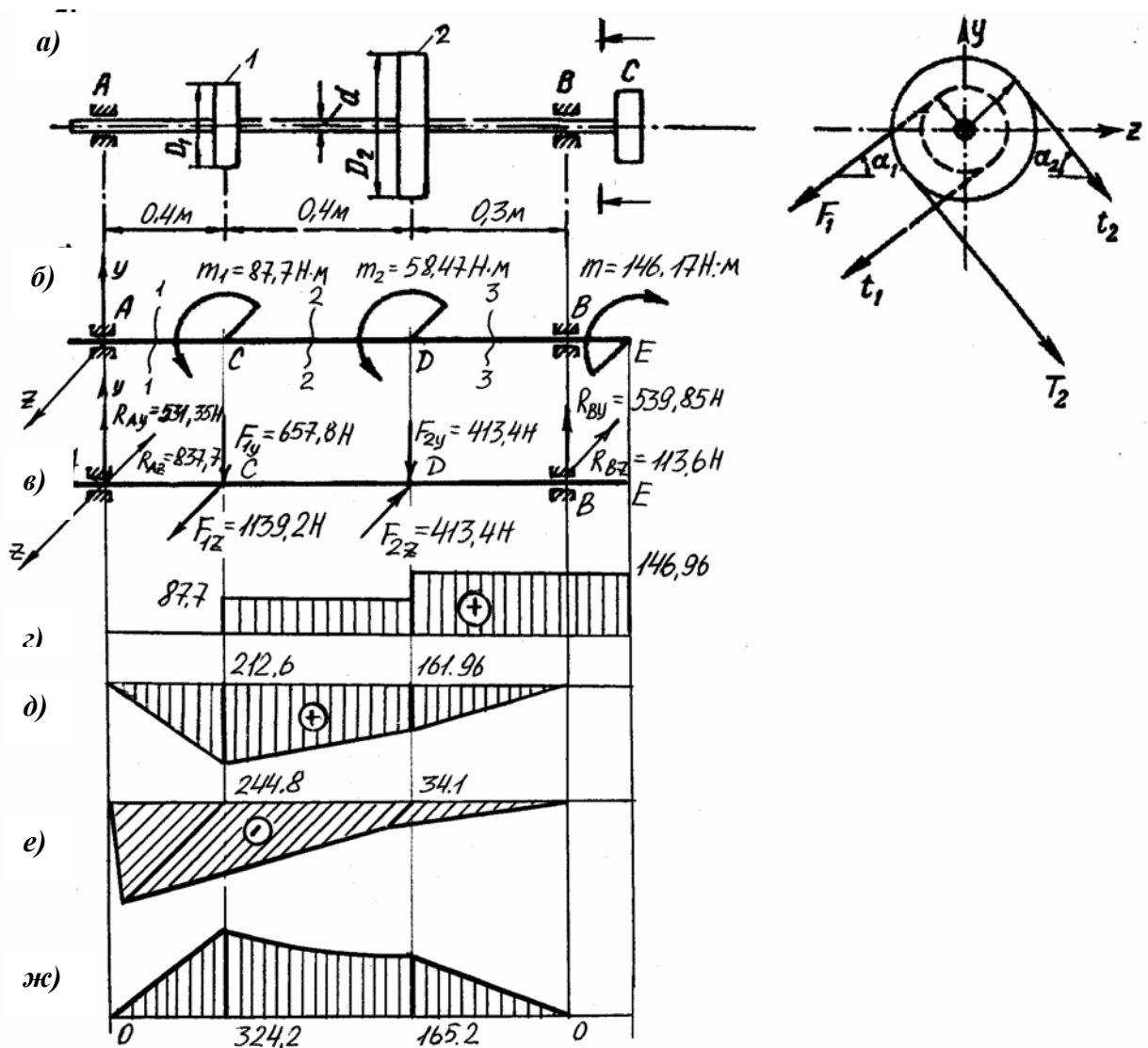


Рис. 10.7

Определим величину опорных реакций от действия вертикальной и горизонтальной нагрузок:

– от вертикальной нагрузки

$$\sum M_A = 0. \quad 675,8 \cdot 0,4 + 413,4 \cdot 0,8 - 1,1R_{By} = 0; \quad R_{By} = 539,85 \text{ H};$$

$$\sum M_B = 0. \quad -413,4 \cdot 0,3 - 675,8 \cdot 0,7 + 1,1R_{Ay} = 0; \quad R_{Ay} = 531,35 \text{ H}.$$

Проверка: $\sum y = 531,35 + 539,85 - 675,8 - 413,4 = 1071,2 - 1071,2 = 0.$

– от горизонтальной нагрузки

$$\sum M_A = 0. \quad 1139,2 \cdot 0,4 - 413,4 \cdot 0,8 - 1,1R_{Bz} = 0; \quad R_{Bz} = 113,6 \text{ H};$$

$$\sum M_B = 0. \quad 413,4 \cdot 0,3 - 1139,2 \cdot 0,7 + 1,1R_{Az} = 0; \quad R_{Az} = 612,2 \text{ H}.$$

Проверка: $\sum z = -612,2 - 113,6 + 1139,2 - 413,4 = -725,8 + 725,8 = 0$

Определим величину изгибающих моментов в характерных сечениях вала от вертикальной и горизонтальной нагрузок и построим эпюры изгибающих моментов M_z и M_y (рис.10.7, *д*, *е*).

– от вертикальной нагрузки

$$M_{Az} = 0; M_{Bz} = 0; M_{Cz} = 531,5 \cdot 0,4 = 212,6 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{Dz} = 539,85 \cdot 0,3 = 161,96 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

– от горизонтальной нагрузки

$$M_{Ay} = 0; M_{By} = 0; M_{Cy} = -612,2 \cdot 0,4 = 244,8 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{Dy} = -113,6 \cdot 0,3 = -34,1 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

По эпюрам M_z и M_y можно определить в любом поперечном сечении круглого вала полный изгибающий момент M по формуле

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}. \quad (10.27)$$

Для каждого сечения плоскость действия изгибающего момента своя, но для вала круглого поперечного сечения суммарную эпюру изгибающих моментов можно совместить в одной плоскости (рис.10.7, *ж*). На тех участках вала, на которых прямые, ограничивающие эпюры M_z и M_y , пересекают оси эпюр в точках, расположенных на одной вертикали, эпюра M ограничена прямыми, а на остальных участках – кривыми.

$$M_A = 0, \quad M_C = \sqrt{212,6^2 + 244,8^2} = 324,2 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_D = \sqrt{161,96^2 + 34,1^2} = 165,5 \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad M_B = 0.$$

Опасное сечение вала устанавливается с помощью эпюр полных изгибающих моментов M и крутящих моментов T_k .

В нашем примере таким сечением является сечение C , где $T_k = 87,7 \text{ Н} \cdot \text{м}$ и $M = 324,2 \text{ Н} \cdot \text{м}$. А теперь определим опасные точки поперечного сечения. Для этого рассмотрим напряжения, возникающие в поперечном сечении бруса, когда в нем одновременно действуют изгибающий момент M и крутящий момент T_k .

В брусках круглого сечения, длина которых во много раз больше диаметра, наибольшие касательные напряжения от поперечной силы невелики и при расчете прочности брусков на совместное действие изгиба и кручения не учитываются.

На рис.10.8, а показана эпюра нормальных напряжений от полного изгибающего момента.

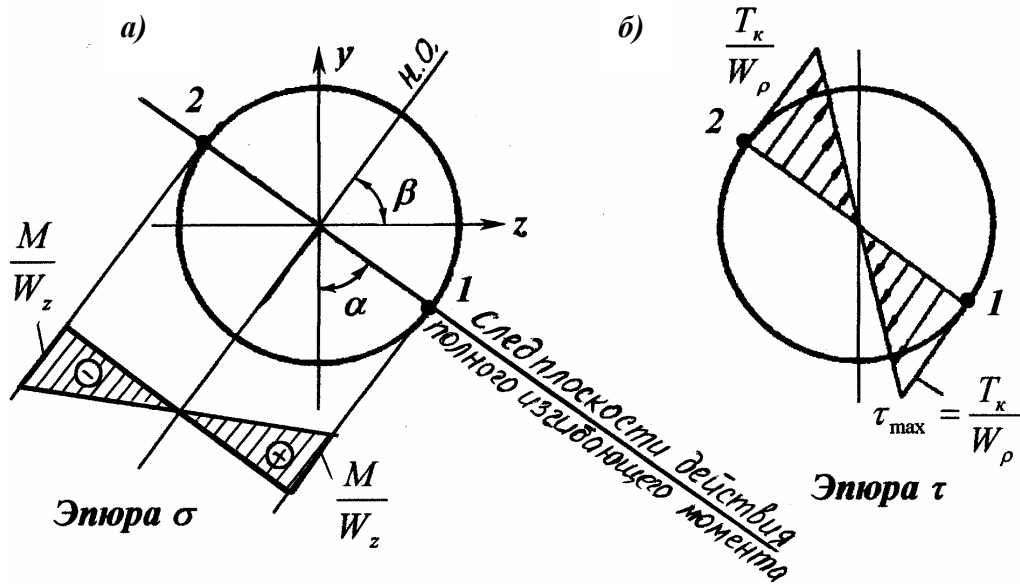


Рис. 10.8

Плоскость действия суммарного изгибающего момента определяется углом α к оси y , определяемого по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_y}{M_z} = \frac{244,8}{212,6} = 1,1515; \quad \alpha = 49^\circ.$$

Нейтральная ось перпендикулярна следу плоскости действия полного изгибающего момента $\beta = \alpha = 49^\circ$.

Опасными точками являются точки 1 и 2. В точке 1 будут наибольшие растягивающие напряжения

$$\sigma_{(1)} = \frac{M}{W_z},$$

а в точке 2 – наибольшие сжимающие напряжения

$$\sigma_{(2)} = -\frac{M}{W_z}.$$

Эпюра касательных напряжений изображена на рис.10.8, б. Касательные напряжения τ определяются по формуле

$$\tau = \frac{T_k}{J_\rho} \cdot \rho.$$

Наибольшие касательные напряжения возникают в точках, расположенных по периметру сечения. Они равны

$$\tau = \frac{T_{\kappa}}{W_{\rho}} = \frac{T_{\kappa}}{2W_z}, \quad (10.28)$$

где $W_{\rho} = 2W_z$ – полярный момент сопротивления, равный двум осевым моментам сопротивления поперечного сечения бруса.

При пластичном материале точки 1 и 2 поперечного сечения, в которых одновременно и нормальные, и касательные напряжения достигают наибольшего значения, являются равноопасными. При хрупком материале опасной является та из точек, в которой от изгибающего момента M возникают растягивающие напряжения.

Напряженное состояние элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности точки 1, считая совпадающими плоскость действия полного изгибающего момента M с главной плоскостью uox , изображено на рис.10.9, а.

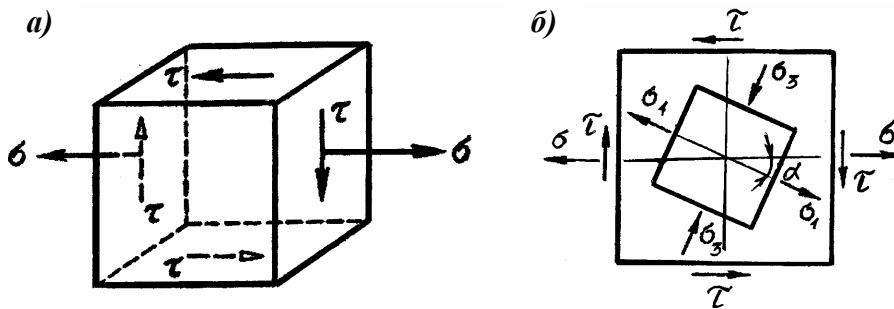


Рис. 10.9

Таким образом, в данном случае в рассматриваемой точке создается плоское напряженное состояние (рис.10.9, б), где $\sigma_x = \sigma$; $\sigma_y = 0$. $\tau_y = \tau$.

Положение главных площадок определяется формулой

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau}{\sigma_x},$$

угол α в нашем случае отрицателен, и главные площадки будут повернуты по часовой стрелке.

Главные напряжения σ_1 и σ_3 определяются по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_y^2}.$$

σ_{\min}

В нашем случае они равны

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (10.29)$$

Расчет брусьев на прочность при изгибе с кручением производится с применением теорий прочности. При этом расчет брусьев из пластичных материалов выполняется обычно на основе третьей или четвертой теории прочности.

По третьей теории прочности

$$\sigma_{\text{эКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma],$$

подставив в это неравенство выражения σ_1 и σ_3 , получим

$$\sigma_{\text{эКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (10.30)$$

Подставив в формулу (6.30) $\sigma = \frac{M}{W_z}$ и $\tau = \frac{T_k}{2W_z}$, получим

$$\sigma_{\text{эКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\left(\frac{M}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{T_k}{2W_z}\right)^2} = \frac{\sqrt{M^2 + T_k^2}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Вводя значение

$$M_{\text{III}} = \sqrt{M^2 + T_k^2} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + T_k^2}$$

в (10.30) окончательно получаем условие прочности

$$\frac{M_{\text{III}}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (10.31)$$

Величину $M_{\text{III}} = \sqrt{M^2 + T_k^2}$ называют приведенным (или эквивалентным) моментом по третьей теории прочности.

По четвертой теории прочности

$$\sigma_{\text{эКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma].$$

Подставляя значения главных напряжений (10.29), после некоторых преобразований получаем

$$\sigma_{\text{эКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (10.32)$$

После подстановки значений σ и τ получим

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\left(\frac{M}{W_z}\right)^2 + 3\left(\frac{T_k}{2W_z}\right)^2} \leq [\sigma]$$

или

$$\frac{\sqrt{M^2 + 0,75T_k^2}}{W_z} = \frac{M_{\text{IV}}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (10.33)$$

где $M_{\text{IV}} = \sqrt{M^2 + 0,75T_k^2}$ – приведенный момент по 4-й теории прочности.

Для опасного сечения вала C определим приведенный момент по 3-й теории прочности

$$M_{\text{III}} = \sqrt{M^2 + T_k^2} = \sqrt{324,2^2 + 87,7^2} = 335,9 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Для круглого поперечного сечения $W_z = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{III}}}{0,1d^3} \leq [\sigma].$$

Отсюда

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{III}}}{0,1[\sigma]}}.$$

Величина $[\sigma]$ для валов, испытывающих знакопеременную нагрузку, устанавливается более низкой. Для стали 30 ее можно принять

$$[\sigma] = 80 \text{ МПа} = 80 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2};$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{335,9 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 80}} = 10 \sqrt[3]{41,99} = 34,6 \text{ мм} \approx 35 \text{ мм}.$$

При расчете на изгиб с кручением брусьев с некруглым поперечным сечением трудно сразу определить опасное сечение. Если для бруса (вала) с круглым поперечным сечением сразу можно определить приведенный момент по одной из теорий прочности, то для сечения произвольной формы сделать это нельзя, а поэтому могут быть несколько опасных сечений, которые необходимо проверить на прочность.

Рассмотрим проверку на прочность брусьев прямоугольного поперечного сечения, испытывающих изгиб с кручением.

Пусть в предполагаемом опасном сечении действуют положительные изгибающие моменты M_z и M_y и крутящий момент T_k (рис.10.10, a).

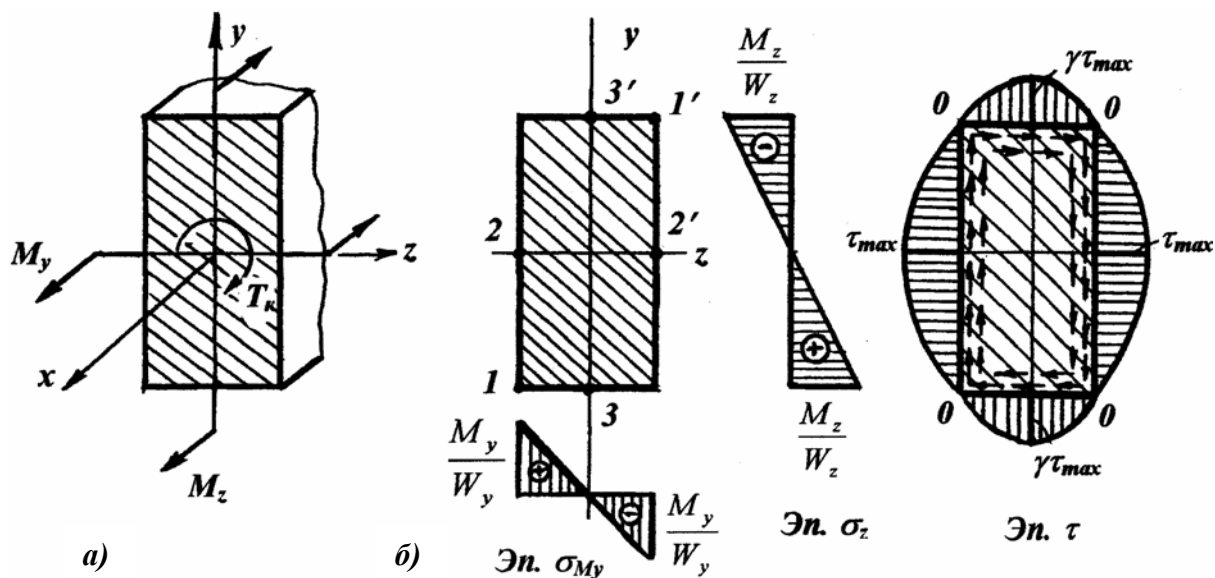


Рис. 10.10

Опасными точками в опасном сечении могут быть точки 1 (1'), 2 (2'), 3 (3'). Для пластичного материала точки 1, 2, 3 равноопасны точкам 1', 2', 3'.

Остановимся на рассмотрении опасных точек 1, 2, 3.

В точке 1 $\sigma_{(1)} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}$, а $\tau_{(1)} = 0$.

При расчете на прочность нет необходимости применять теории прочности, а $\sigma_{(1)} \leq [\sigma]$.

В точке 2 $\sigma_{(2)} = \frac{M_y}{W_y}$, а $\tau_{(2)} = \tau_{\max} = \frac{T_K}{W_K}$,

где W_K – момент сопротивления кручению для прямоугольного сечения.

Применяя, например, III теорию прочности, определим эквивалентное напряжение

$$\sigma_{(2)_{\text{экв}}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{(2)}^2 + 4\tau_{(2)}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{T_K}{W_K}\right)^2} \leq [\sigma].$$

В точке 3 $\sigma_{(3)} = \frac{M_z}{W_z}$, а $\tau_3 = \gamma\tau_{\max} = \gamma \frac{T_K}{W_K}$.

Эквивалентное напряжение по третьей теории прочности в точке 3 должно быть меньше или равно допускаемому напряжению

$$\sigma_{(3)_{\text{экв}}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{(3)}^2 + 4\tau_{(3)}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{T_K}{W_K}\right)^2} \leq [\sigma].$$

Элементы строительных конструкций, работающие на изгиб с кручением, могут рассчитываться и по предельным состояниям. Внутренние силовые факторы M_z , W_z , T_k определяются от расчетной нагрузки. Эквивалентные расчетные напряжения, определенные по одной из теорий прочности, должны быть меньше или равными расчетным сопротивлениям при изгибе.

Краткие выводы

Сложное нагружение бруса можно разложить на простейшие виды нагружений или их сочетаний и для определения внутренних усилий можно использовать метод сечений и принцип суперпозиции. Напряжения в характерных точках также определяются методом сложения.

Для таких видов сложного нагружения, как кривой изгиб, изгиб с растяжением, внецентренное растяжение или сжатие, где суммируются нормальные напряжения, для оценки прочности нет необходимости применять теории прочности, а достаточно лишь определить опасные точки и значения напряжений в них и сравнить их с величиной допускаемых напряжений или расчетных сопротивлений, как при простом растяжении.

В общем случае для отыскания опасных точек определяется опасное сечение и положение нейтральной оси. Точки, наиболее отдаленные от нейтральной оси и будут опасными.

Для таких видов сложного нагружения, как изгиб с кручением, кручение с растяжением, для оценки прочности необходимо использовать теории прочности.

В случае изгиба с кручением для вала с круглым поперечным сечением опасное сечение легко определяется по приведенному (расчетному) моменту соответствующей теории прочности. Так по третьей теории прочности приведенный момент

$$M_{III} = \sqrt{M^2 + T_k^2} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + T_k^2}.$$

При изгибе с кручением брусьев с другой формой поперечного сечения сразу установить опасное сечение трудно, а поэтому первоначально их может предполагаться несколько. Последующее исследование с использованием теорий прочности выясняет истинно опасное сечение и опасные точки в этом сечении.

Тема 11 Продольный изгиб прямых стержней

Понятие об устойчивости

Соблюдение условий прочности и жесткости еще не гарантирует способности конструкции выполнять предназначенные ей функции. Так система при некотором значении нагрузки может потерять устойчивость своего начального состояния.

Под устойчивостью понимается свойство системы сохранять свое состояние при внешних воздействиях. Если система таким свойством не обладает, она называется неустойчивой. В равной мере можно сказать, что неустойчивым является и ее состояние.

При потере устойчивости реализуется переход к некоторому новому положению равновесия, что в подавляющем большинстве случаев сопровождается большими перемещениями, возникновением пластических деформаций или полным разрушением.

Наиболее простым случаем является потеря стержня устойчивости центрально сжатого стержня (рис. 11.1). При достаточно большой силе стержень не может сохранять прямолинейную форму (рис. 11.1, а) и неминуемо изогнется. Произойдет потеря устойчивости (рис. 11.1, б или рис. 11.1, в).

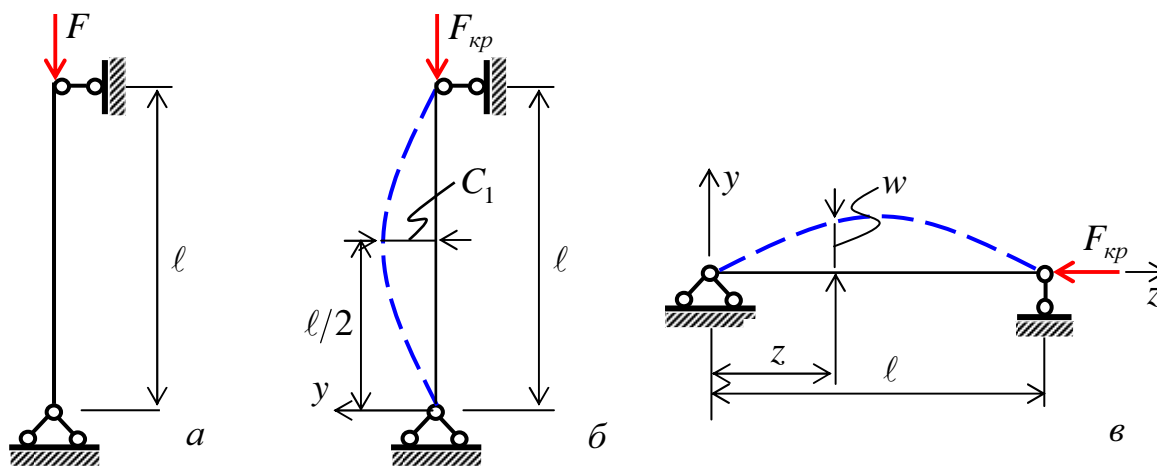


Рис. 11.1

Значение силы, нагрузки, напряжения, при котором первоначальная форма равновесия упругого тела становится неустойчивой, называется соответственно критической силой, критической нагрузкой и критическим напряжением.

Продольный изгиб

Потерю устойчивости прямолинейной формы равновесия центрально сжатого прямого стержня часто называют *продольным изгибом*, так как она влечет за собой значительное искривление стержня под действием продольной силы.

Термин «проверка на продольный изгиб» является условным, так как здесь речь идет не о проверке на изгиб, а о проверке на устойчивость прямолинейной формы стержня.

Это наиболее простая и в то же время одна из наиболее важных инженерных задач, связанных с проблемой устойчивости.

Формула Эйлера

Рассмотрим прямой стержень постоянного сечения с шарнирно закрепленными концами, нагруженный на верхнем конце центрально приложенной сжимающей силой F (рис. 11.1, а).

Наименьшее значение центрально приложенной сжимающей силой F , при котором прямолинейная форма равновесия стержня становится неустойчивой, называется *критической силой* ($F_{кр}$).

Для ее определения отклоним стержень в положение, показанное пунктиром, и установим, при каком наименьшем значении силы $F = F_{кр}$ стержень может не вернуться в прежнее положение (рис. 11.1, б или рис. 11.1, в). Т.е. рассмотрим условия, при которых возможно равновесие стержня с изогнутой осью.

Заметим, что сама постановка задачи иная, чем во всех ранее рассмотренных отделах курса. Если раньше мы определяли деформацию стержня при заданных внешних нагрузках, то здесь ставится обратная задача: задавшись искривлением оси сжатого стержня, следует определить, при каком значении осевой сжимающей силы F такое искривление возможно.

Координаты точек упругой линии стержня обозначим через z и w (рис. 11.1, в). Начало координат считаем расположенным у нижнего конца стержня, а ось z направленной вверх (рис. 11.1, б).

При малых прогибах, приближенное дифференциальное уравнение упругой линии имеет вид

$$EI \cdot \frac{d^2 w}{dz^2} = M.$$

Изгиб стержня происходит в плоскости минимальной жесткости, и поэтому под величиной I понимается минимальный момент инерции сечения.

Изгибающий момент в сечении с абсциссой z равен

$$M = -F_{кр} \cdot w$$

Подставим выражение M в уравнение упругой линии

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{F_{кр} \cdot w}{EI_{\min}} = 0 \text{ или } \frac{d^2 w}{dz^2} + k^2 \cdot w = 0, \text{ где } k^2 = \frac{F_{кр}}{EI_{\min}}.$$

Интеграл полученного дифференциального уравнения имеет вид

$$w = C_1 \cdot \sin kz + C_2 \cdot \cos kz.$$

Это решение включает в себе три неизвестных: постоянные интегрирования C_1 и C_2 и значение k , так как величина критической силы пока нам неизвестна.

Произвольные постоянные C_1 и C_2 подбираются так, чтобы были удовлетворены граничные условия: при $z=0$ $w=0$ и при $z=\ell$ и $w=0$. Из первого условия вытекает, что $C_2 = 0$.

Таким образом, изогнутая ось стержня является синусоидой с уравнением $w = C_1 \cdot \sin kz$.

Второе условие дает

$$C_1 \cdot \sin k\ell = 0.$$

Это уравнение имеет два возможных решения: либо $C_1 = 0$, либо же $\sin k\ell = 0$.

Если $C_1 = 0$, то перемещения w обращаются тождественно в нуль, и стержень, следовательно, имеет прямолинейную форму. Это противоречит исходным предпосылкам нашего вывода. Следовательно, $\sin k\ell = 0$, и величина $k\ell$ может иметь следующий бесконечный ряд значений:

$$k\ell = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, \pi \cdot n,$$

где n – произвольное целое число.

Таким образом, имеем $k\ell = \pi \cdot n$ или $k = \pi \cdot n / \ell$. С учетом $k^2 = F_{кр} / EI_{\min}$ получаем

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot EI_{\min}}{\ell^2} \cdot n^2.$$

Иначе говоря, нагрузка, способная удержать слегка искривленный стержень в равновесии, теоретически может иметь целый ряд значений. Наименьшее значение осевой сжимающей силы, при которой становится возможным продольный изгиб, будет при $n = 1$. Тогда

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot EI_{\min}}{\ell^2}.$$

Эта формула впервые была получена академиком Петербургской Академии наук Л. Эйлером в 1744 году, поэтому первую критическую силу $F_{кр}$ называют также эйлеровой критической силой для сжатого стержня с шарнирно-опертыми концами.

Анализ формулы Эйлера

Значению этой критической силы соответствует изгиб стержня по синусоиде

$$w = C_1 \cdot \sin \pi \cdot z / \ell.$$

Здесь мы видим, что константа C_1 в выражении для упругой линии осталась неопределенной. Перемещения найдены, как говорят, с точностью до постоянного множителя. Физическое значение ее выяснится, если в уравнение синусоиды положить $z = \ell/2$, тогда $w = C_1$. Значит, C_1 – это прогиб стержня в сечении посередине его длины (рис. 11.1, б).

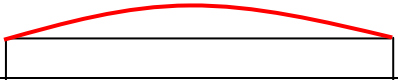
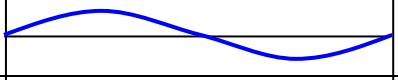

Так как при критическом значении силы F равновесие изогнутого стержня возможно при различных отклонениях его от прямолинейной формы, лишь

бы эти отклонения были малыми, то естественно что, прогиб $w = C_1$ остается неопределенным.

Значениям критической силы высших порядков $F_{кр} = \pi^2 n^2 \cdot EI_{\min} / \ell^2$ соответствуют искривления по синусоидам с двумя, тремя и т.д. полуволнами – $w = C_1 \cdot \sin \pi \cdot n \cdot z / \ell$ (табл. 11.1).

Таким образом, чем больше точек перегиба будет иметь синусоидально-искривленная ось стержня, тем больше должна быть критическая сила.

Табл. 11.1

n	$F_{кр}$	w	форма равновесия
1	$\pi^2 EI_{\min} / \ell^2$	$C_1 \cdot \sin \pi \cdot z / \ell$	
2	$4\pi^2 EI_{\min} / \ell^2$	$C_1 \cdot \sin 2\pi \cdot z / \ell$	
3	$9\pi^2 EI_{\min} / \ell^2$	$C_1 \cdot \sin 3\pi \cdot z / \ell$	

Считается, что формы равновесия при $n \geq 2$ неустойчивы и возможны лишь при наличии промежуточных опор в сечениях с нулевым прогибом.

Влияние способа закрепления концов стержня

Найденное значение критической силы справедливо лишь для стержня с шарнирно-опертыми концами и изменится при других условиях закрепления концов стержня.

Закрепление сжатого стержня с шарнирно-опертыми концами мы будем называть *основным* случаем закрепления. Другие виды закрепления будем приводить к основному случаю.

Если повторить весь ход вывода для стержня, имеющего другие условия закрепления концов стержня, то полученные другие значения критической силы можно объединить с формулой для критической силы основного случая и записать их в следующем виде:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot EI_{\min}}{(\mu \cdot \ell)^2}.$$

Здесь μ – так называемый коэффициент приведения длины, $(\mu \cdot \ell)$ – приведенная длина стержня. Можно сказать, что μ – число, показывающее, во сколько следует увеличить длину шарнирно-опертого стержня, чтобы критическая сила для него равнялась критической силе стержня длиной ℓ в рассматриваемых условиях закрепления.

Понятие о приведенной длине было впервые введено профессором Петербургского института инженеров путей сообщения Ф. Ясинским.

На рис 11.2 показаны четыре наиболее часто встречающиеся случая закрепления стержня и указаны соответствующие значения коэффициента приведения длины. В двух последних случаях значение μ легко определяется

путем простого сопоставления упругой линии изогнутого стержня с длиной полу-волны синусоиды при шарнирном закреплении.

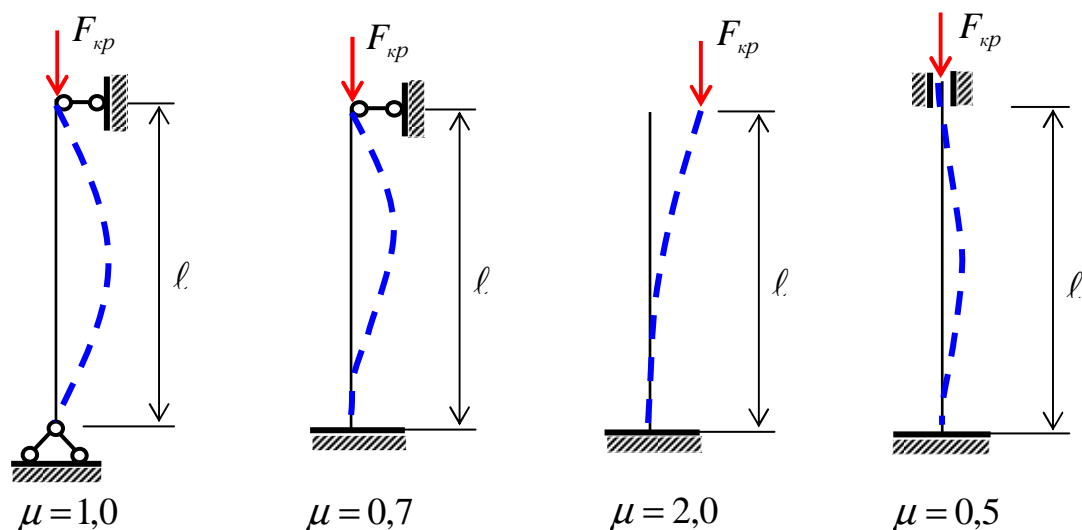


Рис. 11.2

На практике, однако, почти никогда не встречаются в чистом виде те закрепления концов стержня, которые мы имеем на наших расчетных схемах.

Так в конструкциях очень часто встречаются сжатые стержни, концы которых приклепаны или приварены к другим элементам. Такое закрепление, однако, трудно считать защемлением, так как части конструкции, к которым прикреплены эти стержни, не являются абсолютно жесткими. Достаточно возможности уже небольшого поворота опорного сечения в защемлении, чтобы оно оказалось в условиях, очень близких к шарнирному опиранию. Поэтому на практике недопустимо рассчитывать такие стержни, как стойки с абсолютно защемленными концами.

Коэффициент запаса устойчивости

Допускаемой нагрузкой называется нагрузка, определяемая по формуле

$$F_{доп} = [F] = \frac{F_{кр}}{n_y},$$

где n_y – коэффициент запаса устойчивости, который принимается таким, чтобы была обеспечена надежная работа стержня.

Условие устойчивости

Критическая сила $F_{кр}$ вызывает в сжатом стержне критические напряжения $\sigma_{кр}$, которые являются опасными для него. Поэтому, чтобы обеспечить устойчивость прямолинейной формы стержня, сжатого силой F , необходимо к условию прочности

$$\sigma \leq [\sigma] \text{ или } \frac{F}{A} \leq [\sigma]$$

добавить еще условие устойчивости:

$$\sigma \leq [\sigma_y] \text{ или } \frac{F}{A} \leq [\sigma_y], \text{ где } [\sigma_y] = \frac{\sigma_{кр}}{n_y}, \text{ где } \sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} \text{ (или } F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A \text{)}.$$

Для возможности осуществить проверку на устойчивость мы должны показать, как определять $\sigma_{кр}$ и как выбрать коэффициент запаса n_y .

Заметим, что при составлении условия устойчивости, вводится в расчет площадь брутто, т.е. без учета его ослаблений ($A = A_{бр}$).

Это объясняется тем, что ослабление сечения стержня заклепками или болтами в металлических конструкциях, врубками в деревянных происходит не по всей его длине, а лишь на отдельных небольших участках. Сопротивление же стержня выпучиванию зависит от жесткости стержня на всем его протяжении. Поэтому местные ослабления практически не влияют на величину критической силы.

Критические напряжения

Критические напряжения можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot EI_{\min}}{(\mu \cdot \ell)^2 \cdot A},$$

где с учетом $i_{\min}^2 = \frac{I_{\min}}{A}$ и $\lambda = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}}$ получаем

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}.$$

Здесь i_{\min} – наименьший радиус инерции сечения, λ – гибкость сжатого стержня.

Безразмерная величина λ играет весьма важную роль во всех проверках сжатых стержней на устойчивость. Она учитывает одновременно четыре характеристики сжатого стержня:

1) длину стержня; 2) величину площади сечения; 3) способ закрепления его концов, 4) форму сечения, зависящую от i_{\min} .

Вид графической зависимости $\sigma_{кр}$ от λ показан на рис. 11.3. Эта зависимость представляется гиперболической кривой, так называемой «гиперболой Эйлера».

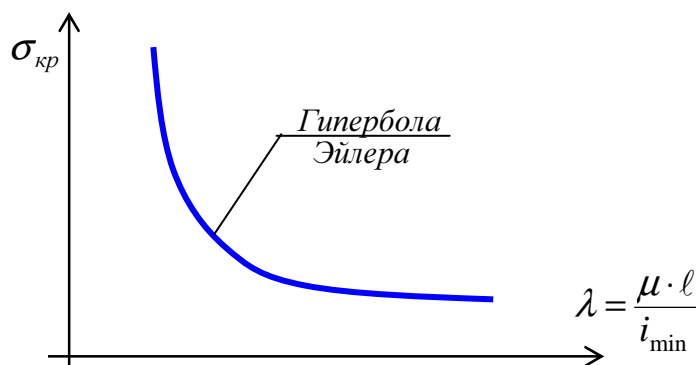


Рис. 11.3

Пределы применимости формулы Эйлера

Казалось бы, что полученные результаты решают задачу проверки сжатого стержня на устойчивость, остается выбрать лишь коэффициент запаса n_y . Однако это далеко не так. Ближайшее же изучение числовых величин, получаемых по формуле Эйлера, показывает, что она дает правильные результаты лишь в известных пределах.

Дело в том, что зависимость $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ была получена в предположении, что напряжения $\sigma_{кр}$, вызванные в стержне критической силой, не превосходят предела пропорциональности $\sigma_{пц}$. Это следует из того, что в основу вывода формул положено приближенное дифференциальное уравнение упругой линии, которым можно пользоваться лишь в пределах применимости закона Гука. Таким образом, имеем

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц} \text{ или } \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц}, \text{ отсюда } \lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{пц}}}.$$

Правая часть полученного выражения представляет собой то наименьшее значение гибкости, при котором формула Эйлера еще применима, – это так называемая *предельная гибкость* $\lambda_{пред}$:

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{пц}}}.$$

Предельная гибкость зависит только от физико-механических свойств материала стержня – его модуля упругости и предела пропорциональности.

Итак, *формула Эйлера для определения критической силы сжатого стержня применима при условии, что его гибкость больше предельной:*

$$\lambda \geq \lambda_{пред}.$$

$$\text{Для стали 3 имеем } \lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 200 \text{ (ГПа)}}{200 \text{ (МПа)}}} \approx 100, \text{ для сосны – } \lambda_{пред} \approx 110,$$

для чугуна – $\lambda_{пред} \approx 80$.

Формула Ясинского

Теоретическое решение, полученное Эйлером, оказалось применимым на практике лишь для очень ограниченной категории стержней, а именно, тонких и длинных, с большой гибкостью. Между тем, в конструкциях очень часто встречаются стержни с малой гибкостью.

Таким образом, надо найти способ вычисления критических напряжений и для тех случаев, когда они превышают предел пропорциональности материалов, например, для стержней из мягкой стали при гибкостях от 0 до 100.

Надо помнить, что в сопротивлении материалов важнейшим источником получения новых знаний являются результаты эксперимента. Опыты показывают, что прежде всего надо выделить стержни с малой гибкостью, от 0 примерно до 40. Для таких стержней трудно говорить о явлении потери устойчивости прямолинейной формы равновесия, скорее всего они будут выходить

из строя главным образом за счет того, что напряжения сжатия в них будут достигать предела текучести σ_m (при пластичном материале) или предела прочности σ_e (при хрупких материалах).

Таким образом, мы имеем два предельных случая работы сжатых стержней: короткие стержни, которые теряют грузоподъемность в основном за счет разрушения материала от сжатия, и длинные, для которых потеря грузоподъемности вызывается нарушением устойчивости прямолинейной формы стержня. Количественное изменение соотношения длины и поперечных размеров стержня меняет и весь характер явления разрушения. Общим остается лишь внезапность наступления критического состояния в смысле внезапного резкого возрастания деформаций.

Нам остается теперь рассмотреть поведение сжатых стержней при средних величинах гибкости, например для стальных стержней при гибкостях от 40 до 100. С подобными значениями гибкостей инженер чаще всего встречается на практике. Как показывают опыты, критические напряжения для них получаются выше предела пропорциональности и ниже предела текучести для пластичных и предела прочности для хрупких материалов.

На основании обширного опытного материала, собранного как у нас (проф. Ясинский), так и за границей, было установлено, что критические напряжения при таких гибкостях меняются по закону близкому к линейному:

$$\sigma_{кр} = a - b \cdot \lambda,$$

где a и b – коэффициенты, зависящие от материала, λ – гибкость стержня. Для стали 3 при гибкостях от 40 до 100 $a = 310 \text{ МПа}$, $b = 1.14 \text{ МПа}$. Для дерева (сосна): $a = 29.3 \text{ МПа}$, $b = 0.194 \text{ МПа}$.

Критическую силу можно получить умножая $\sigma_{кр}$ на площадь брутто ($A = A_{бр}$): $F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A$.

Полный график критических напряжений

Комбинируя формулу Эйлера с результатами экспериментов можно построить полный график критических напряжений (в зависимости от гибкости) для любого материала. На рис. 11.4 приведен такой график для стали 3.

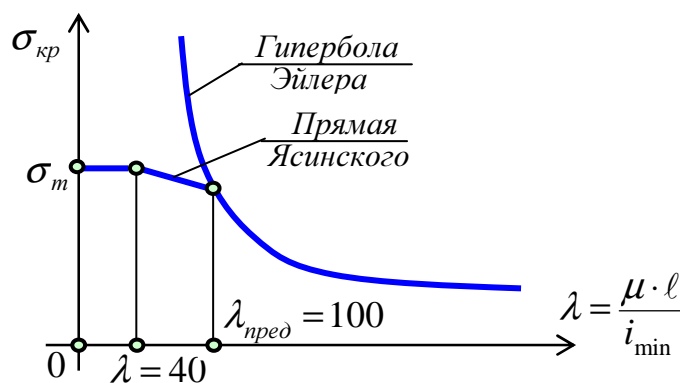


Рис.11.4

График состоит из трех частей: гиперболы Эйлера при $\lambda \geq 100$, наклонной прямой (прямая Ясинского) при $100 < \lambda < 40$ и горизонтальной прямой, соответствующей $\sigma_{кр} = \sigma_m$, при $\lambda \leq 40$.

Таким образом, можно считать, что задача определения критических напряжений для стержней любой гибкости решена с достаточной для практических целей точностью.

Коэффициент запаса на устойчивость

Ранее было отмечено, что $[\sigma_y] = \sigma_{кр} / n_y$. Таким образом, для установления допускаемого напряжения на устойчивость $[\sigma_y]$ нам остается теперь выбрать только коэффициент запаса n_y .

На практике n_y колеблется для стали в пределах от 1.8 до 3.0 и выбирается выше коэффициента запаса на прочность n , равного 1.5 – 1.6. Это объясняется наличием рядом обстоятельств, неизбежных на практике (начальная кривизна, эксцентриситет действия нагрузки, неоднородность материала и т. д.) и почти не отражающихся на работе конструкции при других видах деформации (растяжение, кручение, изгиб).

Для сжатых же стержней, ввиду возможности потери устойчивости, эти обстоятельства сильно снизить грузоподъемность стержня. Для чугуна n_y колеблется от 5.0 до 5.5, для дерева – от 2.8 до 3.2.

Чтобы установить связь между допускаемыми напряжениями на устойчивость $[\sigma_y]$ и допускаемыми напряжениями на прочность $[\sigma]$, возьмем их отношение:

$$\frac{[\sigma_y]}{[\sigma]} = \frac{\sigma_{кр}}{n_y \cdot \sigma_{пред}} \cdot \frac{n}{\sigma_{пред}}, \text{ или } [\sigma_y] = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{пред}} \cdot \frac{n}{n_y} \cdot [\sigma], \text{ обозначая } \varphi = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{пред}} \cdot \frac{n}{n_y}, \text{ получим}$$

$$[\sigma_y] = \varphi \cdot [\sigma].$$

Здесь, φ – коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения для сжатых стержней (коэффициент продольного изгиба).

Зависимость $\varphi = f(\lambda)$ для каждого материала своя и устанавливается опытным путем. Обычно они для различных материалов представляются в виде таблиц, которые можно найти в любом учебнике по сопротивлению материалов или строительным конструкциям. Значения коэффициента φ для стали 3 приведены в табл. 11.2:

Табл. 11.2

λ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
φ	1,00	0,99	0,96	0,94	0,92	0,89	0,86	0,81	0,75	0,69	0,60
λ	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	
φ	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19	

Практический расчет сжатых стержней

Наличие полной диаграммы критических напряжений и введение понятия коэффициента φ позволяет произвести подбор сечения сжатого стержня.

Вначале записываем условие устойчивости:

$$\sigma \leq [\sigma_y] \text{ или } \frac{F}{A} \leq [\sigma_y], \text{ где } [\sigma_y] = \varphi \cdot [\sigma], \text{ тогда } \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma].$$

Так как имеем одно уравнение, а неизвестных два – площадь поперечного сечения A и коэффициент φ , то одной из этих величин необходимо задаться, т.е. подбор приходится осуществлять путем последовательных приближений.

Поскольку $0 < \varphi < 1$, то удобно задаться $\varphi_1 = 0.5$ в первом приближении, тогда определяем $A_1 \geq \frac{F}{[\sigma] \cdot 0.5}$. Далее выбираем форму сечения, вычисляем его размеры, наименьший радиус инерции, гибкость.

Например, для прямоугольного сечения имеем $\alpha = b/h$, $A_1 = b \cdot h = \alpha \cdot h^2$,

$$I_{\min} = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{\alpha^3 \cdot h^4}{12} = \frac{\alpha \cdot A_1^2}{12}, \quad i_1^{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A_1}} = \sqrt{\frac{\alpha \cdot A_1}{12}}, \quad \lambda_1 = \frac{\mu \cdot \ell}{i_1^{\min}} = \frac{\mu \cdot \ell \cdot \sqrt{12/\alpha}}{\sqrt{A_1}};$$

для квадратного сечения имеем – $A_1 = a^2$, $I_{\min} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{a \cdot a^3}{12} = \frac{a^4}{12} = \frac{A_1^2}{12}$,

$$i_1^{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A_1}} = \sqrt{\frac{A_1}{12}}, \quad \lambda_1 = \frac{\mu \cdot \ell}{i_1^{\min}} = \frac{\mu \cdot \ell \cdot \sqrt{12}}{\sqrt{A_1}}; \text{ для круглого сечения – } A_1 = \frac{\pi \cdot d^2}{4},$$

$$I_{\min} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \cdot \frac{\pi}{\pi} = \frac{A_1^2}{4 \cdot \pi}, \quad i_1^{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A_1}} = \sqrt{\frac{A_1}{4 \cdot \pi}}, \quad \lambda_1 = \frac{\mu \cdot \ell}{i_1^{\min}} = \frac{\mu \cdot \ell \cdot \sqrt{4 \cdot \pi}}{\sqrt{A_1}}.$$

Заметим, что гибкость здесь удобно выразить через площадь. Аналогичные выражения можно получить и для других типов сечений. Далее, по вычисленному значению гибкости, в зависимости от заданного материала, по таблице коэффициентов φ , используя линейную аппроксимацию, находим φ_{11} . Обычно φ_{11} отличается от $\varphi_1 = 0.5$. Это означает, что искомая гибкость заключена в интервале от 0.5 и до φ_{11} . Поэтому второе приближение начинаем с $\varphi_2 = (0.5 + \varphi_{11})/2$, вычисляем площадь A_2 , гибкость λ_2 и соответствующую ей φ_{22} . Если φ_{22} близко к φ_2 (лучше, когда отличается на 0.05 – 0.01), то делается проверка условия устойчивости: $\frac{F}{A_2} \leq [\sigma] \cdot \varphi_2$. Относительная разница между левой и правой частями неравенства должна быть меньше одного процента. Если это так, то за расчетные принимаем A_2 , λ_2 , φ_2 . В противном случае делается третье приближение. Обычно хватает трех или четырех приближений.

Заметим, что окончательно выбранное сечение должно удовлетворять и условию прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A_{\text{нет}}}, \quad \sigma_{\max} \leq [\sigma] \text{ или } \frac{F}{A_{\text{нет}}} \leq [\sigma],$$

где $A_{\text{нет}}$ - площадь поперечного сечения в ослабленном месте стержня.

Тема 12 Динамические нагрузки

Общие понятия о динамических расчетах строительных конструкций

Некоторые нагрузки на строительные конструкции сравнительно быстро меняют свою величину или положение. Такие нагрузки называются *динамическими*.

П р и м е р ы. Действие поезда на мост, работа штампового прессы, работа машин и механизмов с маховиками, забивка свай копром и др.

Динамические нагрузки вызывают колебательные движения частей сооружений. Поэтому при расчете следует учитывать силы инерции. Отметим, что *признаком динамической задачи является необходимость учета сил инерции*. При решении динамических задач используются два метода – *дифференциальный* и *интегральный*.

Дифференциальный метод основан на составлении дифференциального уравнения динамического равновесия и получение уравнения движения частей сооружения. Анализ уравнения движения позволяет получить ускорения точек сооружения, а значит и сил инерции, которые учитываются в расчете. Этот метод связан с большими математическими проблемами – решением больших систем дифференциальных уравнений.

Так, например, достаточно простая задача динамического расчета однопролетной П-образной рамы при одномассовом сгущении ее элементов потребует решения системы двух дифференциальных уравнений. При этом, вычисляя деформации, следует ограничиться учетом только изгибом элементов рамы.

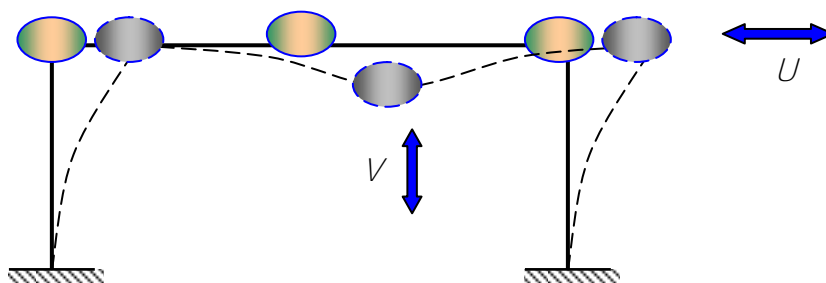


Рис. 12.1 Расчетная схема П-образной рамы для динамического расчета

Интегральный метод основан на использовании динамического коэффициента. Этот метод чаще всего используется при расчете строительных конструкций.

Динамический коэффициент равен отношению исследуемой величины при динамическом воздействии к значению этой же величины при статическом воздействии.

$$S_D = k_D \cdot S_{ст}, \quad (12.1)$$

где $S_{ст}$ – исследуемая величина при статическом приложении нагрузки (N , M , V , σ и др.)

k_D – динамический коэффициент, определяемый аналитически или экспериментально.

Динамический коэффициент зависит от:

- вида динамической нагрузки;
- размеров конструкции;
- массы конструкции;
- жесткости элементов конструкции

и др.

Учет сил инерции при расчете троса

Пусть тело весом G подымается на тросе с ускорением a рис. 12.2. Вес троса q . Если тело не опускается и не подымается, то сила N равна

$$N_{ст} = G + qz. \quad (12.2)$$

Если тело ускоренно подымается с ускорением a , то для определения натяжения троса необходимо составить уравнение движения тела, взять вторую производную и получить ускорение. Однако, этого можно не делать, если использовать принцип Даламбера.

Принцип Даламбера – движущуюся систему можно рассматривать как находящуюся в равновесии, если ко всем ее точкам присоединить дополнительно силы инерции.

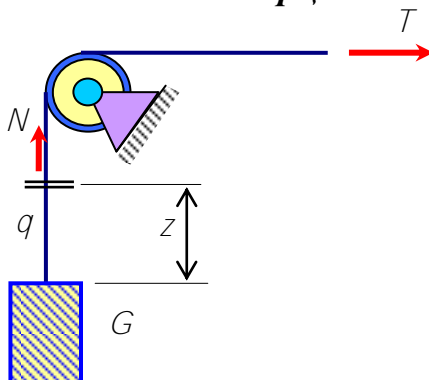


Рис.12.2 Схема поднятия груза на тросе

Силы инерции численно равны произведению массы на ускорение и направлены в сторону, противоположную ускорению

$$F_{ин} = \frac{G+qz}{g} \cdot a, \quad (12.3)$$

где g – ускорение свободного падения.

Суммарная сила равна

$$N_{Д} = N_{ст} + N_{ин} = (G+qz) + \frac{G+qz}{g} \cdot a = (G+qz) \left(1 + \frac{a}{g} \right). \quad (12.4)$$

Окончательно имеем

$$N_{Д} = k_{Д} \cdot N_{ст}. \quad (12.5)$$

В результате получаем формулу для динамического коэффициента

$$k_{Д} = 1 + a/g. \quad (12.6)$$

Используя динамический коэффициент и зная статическое напряжение, можно найти динамическое напряжение

$$\sigma_{Д} = \frac{N_{Д}}{A} = \frac{k_{Д} N_{ст}}{A} = k_{Д} \cdot \sigma_{ст}. \quad (12.7)$$

Окончательно имеем

$$\sigma_{Д} = k_{Д} \cdot \sigma_{ст} \quad (12.8)$$

Аналогично можно найти прогибы от динамической нагрузки

$$V_{Д} = k_{Д} \cdot V_{ст}. \quad (12.9)$$

Если тело ускоренно опускается, то следует принимать $a < 0$.

Расчет на удар

Дадим определение такому явлению как удар.

Удар – это взаимодействие движущихся тел в результате их соприкосновения, приводящее к изменению скоростей их точек.

Примеры. Действие кузнечного молота на заготовку, удар копра при забивке свай и др.

Процесс удара – это сложное механическое явление. Чтобы упростить расчет в сопротивлении материалов, приняты следующие допущения.

Допущения.

- 1) После удара двух тел оба тела движутся с одинаковой скоростью и в одном направлении.
- 2) Материал соударяющихся тел испытывает только упругие деформации.
- 3) Кинетическая энергия удара полностью переходит в потенциальную энергию упругих деформаций тел.

Рассмотрим задачу о продольном ударе по стержню (рис. 12.3).

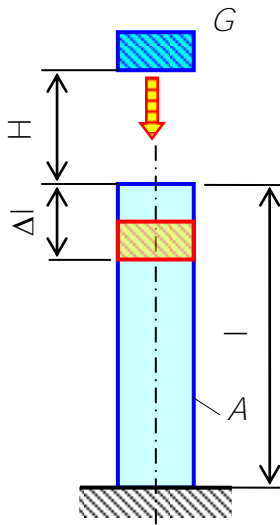


Рис. 12.3 Схема к расчету стержня на продольный удар

Потенциальная энергия деформации стержня равна при статическом приложении нагрузки – когда тело просто установить на торец стержня

$$U_{cm} = \frac{1}{2} G \cdot \Delta l_{cm} = \frac{1}{2} G \cdot \Delta l_{cm} \cdot \frac{\Delta l_{cm}}{\Delta l_{cm}} = \frac{1}{2} \frac{G \cdot (\Delta l_{cm})^2}{\Delta l_{cm}} = \frac{G \cdot \Delta l_{cm}^2}{2 \cdot \frac{G l}{EA}} = \frac{(\Delta l_{cm})^2 EA}{2l}. \quad (12.10)$$

Аналогично выражается потенциальная энергия при динамическом приложении нагрузки – ударе

$$U_{д} = \frac{(\Delta l_{д})^2 EA}{2l}. \quad (12.11)$$

Кинетическая энергия удара равна потенциальной энергии поднятого тела G

$$T = G(H + \Delta l_{д}). \quad (12.12)$$

По закону сохранения энергии имеем

$$T = U_{\text{д}}. \quad (12.13)$$

Отсюда получим уравнение

$$\frac{(\Delta_{\text{д}})^2 EA}{2l} = G(H + \Delta_{\text{д}}); \quad (12.14)$$

Раскроем скобки, разделим левую и правую части уравнения(12.14)на EA и умножим на $2l$

$$\Delta_{\text{д}}^2 = 2H \frac{Gl}{EA} + 2\Delta_{\text{д}} \frac{Gl}{EA} \quad (12.15)$$

Учтем, что $Gl/EA = \Delta_{\text{ст}}$ и получим квадратное уравнение относительно неизвестного $\Delta_{\text{д}}$

$$\Delta_{\text{д}}^2 - 2\Delta_{\text{ст}} H - 2\Delta_{\text{д}} \Delta_{\text{ст}} = 0. \quad (12.16)$$

Приведем уравнение(12.16)к привычному виду квадратного уравнения

$$\Delta_{\text{д}}^2 - 2\Delta_{\text{ст}} \cdot \Delta_{\text{д}} - 2H \cdot \Delta_{\text{ст}} = 0. \quad (12.17)$$

Из математики известно, что решение неполного квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0 \quad (12.18)$$

имеет вид

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \quad (12.19)$$

Воспользуемся решением квадратного уравнения и получим

$$\Delta_{\text{д}} = \Delta_{\text{ст}} + \sqrt{\Delta_{\text{ст}}^2 + 2H\Delta_{\text{ст}}}; \quad (12.20)$$

Приведем выражение(12.20)к виду

$$\Delta_{\text{д}} = \Delta_{\text{ст}} \left(1 + \sqrt{1 + 2H/\Delta_{\text{ст}}}\right). \quad (12.21)$$

Окончательно имеем

$$\Delta_{\text{д}} = k_{\text{д}} \Delta_{\text{ст}}, \quad (12.22)$$

где $\Delta_{\text{ст}}$ – деформация при статическом приложении нагрузки;

$\Delta_{\text{д}}$ – деформация при динамическом приложении нагрузке (ударе);

k_d – динамический коэффициент при ударе равен

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + 2H/\Delta l_{cm}}. \quad (12.23)$$

Используя динамический коэффициент (12.23) можно найти напряжения при ударе. Правда, для этого требуется знать статическое напряжение.

$$\sigma_d = k_d \sigma_{cm}. \quad (12.24)$$

Динамический расчет на мгновенно приложенную нагрузку

Примером мгновенно приложенной нагрузки является наезд колеса локомотива на рельс

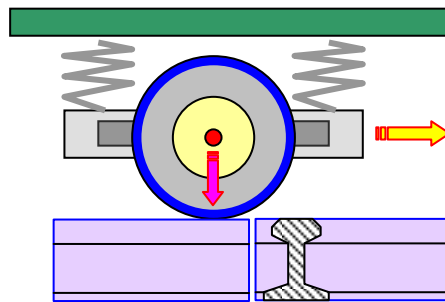


Рис.12.4 Мгновенное действие колеса локомотива на

Мгновенно приложенную нагрузку можно представить как удар при нулевой высоте падения тела $H = 0$. В этом случае динамический коэффициент равен

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + 2H/\Delta l_{cm}} = 1 + \sqrt{1 + 2 \cdot 0/\Delta l_{cm}} = 2. \quad (12.25)$$

Понятие о волновой теории удара

Рассмотренный ранее метод расчета при ударе основан на замене системы с бесконечно большим числом степеней свободы системой с одной степенью свободы, является приближенным.

Гораздо точнее описывает процесс удара волновая теория удара. Рассмотрим пример продольного удара. Пусть по концу стержня совершается удар абсолютно жестким телом (рис. 12.5).

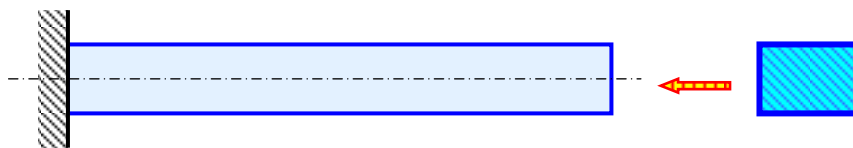


Рис. 12.5 Схема продольного удара по длинному стержню

Для оценки эффекта удара обычно используют значение относительной линейной деформации ε_z , вызванной этим ударом. Установлено, что деформация сжатия ε_z в момент удара зависит только от скорости тела, производящего удар, но не зависит от массы этого тела. От массы тела, совершающего удар, зависит объем части стержня, в котором появляется деформация сжатия ε_z .

После удара образуется волна деформации, которая распространяется по длине стержня от места удара к другому концу (рис. 12.6, а).

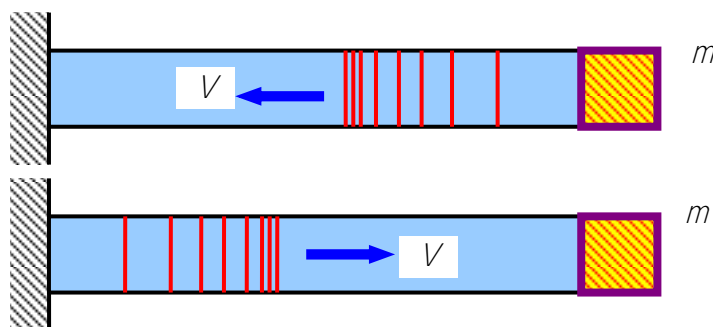


Рис. 12.6. Прямое и обратное движение упругой волны после удара

Скорость распространения этой волны равна скорости распространения звука в материале стержня:

- для стали – 5120 м/с;
- для воды – 1800 м/с;
- для воздуха – 320 м/с.

Достигнув противоположного конца стержня, волна отразится от него и будет возвращаться к концу, где произведен удар.

По волновой теории получается, что пока волна не пройдет по длине стержня до его конца и, отразившись, не вернется к концу, где произведен удар, “отскок” наблюдаться не будет.

Применение волновой теории для описания удара дает более точные результаты, однако требует использование аппарата теории упругости. Поэтому в курсе сопротивления материалов подробно не изучается.

Лекция 1

ВВЕДЕНИЕ В СТРОИТЕЛЬНУЮ МЕХАНИКУ

1. Предмет строительной механики

Единый объект, построенный (сооруженный) человеком, называется *сооружением*. Когда речь идет о внутреннем строении и расчете сооружения как системы элементов, его называют *системой*.

Сооружения необходимы для удовлетворения жизненных потребностей людей и улучшения качества их жизни. Они должны быть удобными, прочными, устойчивыми и безопасными.

Строительство сооружений – вид древнейшего занятия людей и древнее искусство. Результаты многих археологических раскопок, проведенных в различных частях мира, сохранившиеся до наших дней древние сооружения и здания являются доказательством этого. Их совершенство и красота говорят об искусстве и большом опыте древних зодчих и строителей.

Вопросами расчета сооружений занимается наука *строительная механика*, которую часто называют *механикой сооружений*. Считается, что строительная механика возникла сравнительно недавно, после выхода в свет в 1638 году сочинения великого итальянского ученого Галилео Галилея «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки ...».

В дальнейшем строительная механика развивалась как часть общей механики. В XIX веке, после бурного начала строительства железных дорог, мостов, больших кораблей, плотин, различных промышленных сооружений, она стала самостоятельной наукой. А в XX веке, в результате развития методов расчета и компьютерных технологий, строительная механика поднялась на современный высокий уровень.

Строительная механика – наука о принципах и методах расчета сооружений на прочность, жесткость и устойчивость.

Строительная механика является как теоретической, так и прикладной наукой. С одной стороны, она разрабатывает теоретические основы методов расчета, а с другой стороны – является инструментом расчета, так как решает важные практические задачи, связанные с прочностью, жесткостью и устойчивостью сооружений.

Воздействие нагрузок приводит как к деформированию отдельных элементов, так и самого сооружения в целом. Расчетом и теоретической оценкой результатов их воздействия занимается *механика деформируемого твердого тела*. Частью этой науки является *прикладная механика (сопротивление материалов)*, занимающаяся расчетом простейших сооружений или их отдельных элементов. А другая ее часть – *строительная механика* – позволяет рассчитывать разные и весьма сложные многоэлементные сооружения.

Для правильного расчета сооружений следует правильно применять общие законы механики, основные соотношения, учитывающие механические свойства материала, условия взаимодействия элементов, частей и основания сооружения. На этой базе формируются *расчетная схема сооружения* и ее *математическая модель*, как некоторая система уравнений.

Чем подробнее изучаются внутреннее строение сооружения, действующая на него нагрузка и особенности материала, тем сложнее становится его математическая модель. На следующей схеме (рис. 1.1) показаны основные факторы, влияющие на особенности расчета сооружения.

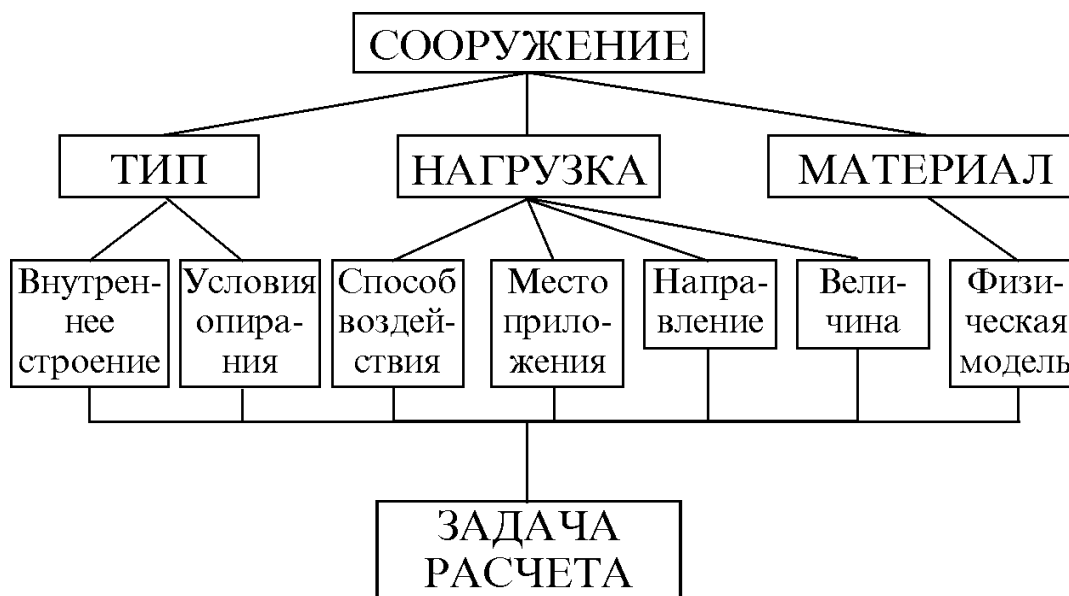


Рис. 1.1

Обычно задачи строительной механики решаются в линейной постановке. Но при больших деформациях или использовании неупругих материалов ставятся и решаются нелинейные задачи.

В строительной механике большое место занимают статические и динамические задачи. Если в статике сооружений внешняя нагрузка постоянна, а элементы и части системы находятся в равновесии, то в динамике сооружений рассматривается движение системы под воздействием переменных динамических нагрузок.

Строительная механика быстро развивается. Ещё недавно, в первой половине XX века, для расчета сооружений использовались только простейшие математические модели. Но в 60-70 годы, когда начали широко внедряться компьютеры, стали применяться более сложные модели. Поэтому стало возможным проектирование, расчет и строительство сложных современных сооружений из новейших материалов.

2. Сооружения и их элементы

Сооружения весьма разнообразны. Поэтому они и классифицируются по-разному. Например, только по назначению сооружения делятся на промышленные, общественные, жилищные, транспортные, гидротехнические, подземные, сельскохозяйственные, военные и др.

В сооружениях используются элементы разных типов:

1) **стержни** – прямые или криволинейные элементы, поперечные размеры a и b которых намного меньше длины l (рис. 1.2 а, б, в);

2) **плиты** – элементы, толщина которых t меньше остальных размеров a и b ; плиты могут быть прямыми (рис. 1.2 г) и кривыми в одном или двух направлениях (рис. 1.2 д, е);

3) **массивные тела** – элементы, все три размера которых одного порядка (рис. 1.2 ж).

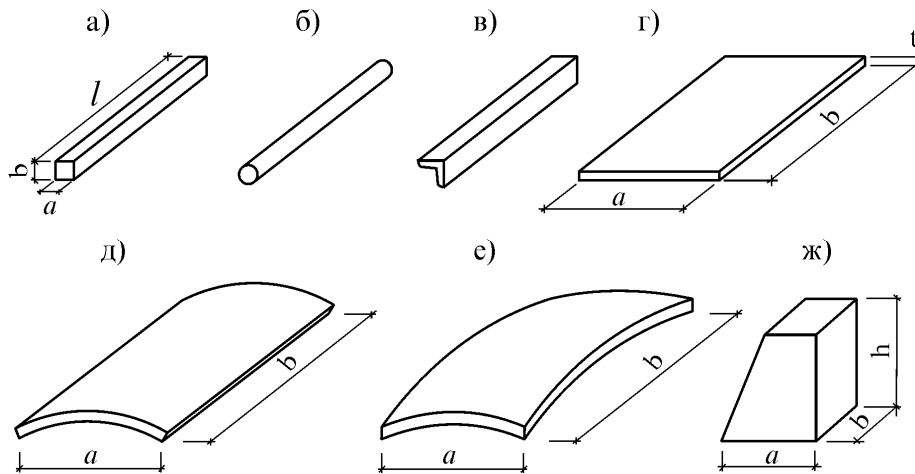


Рис. 1.2

Простейшие сооружения, состоящие из таких элементов, можно подразделять на следующие типы – **стержневые сооружения** (рис. 1.3 а, б), **складчатые сооружения** (рис. 1.3 в), **оболочки** (рис. 1.3 г) и **массивные сооружения** – подпорные стенки (рис. 1.3 д) и каменные своды (рис. 1.3 е):

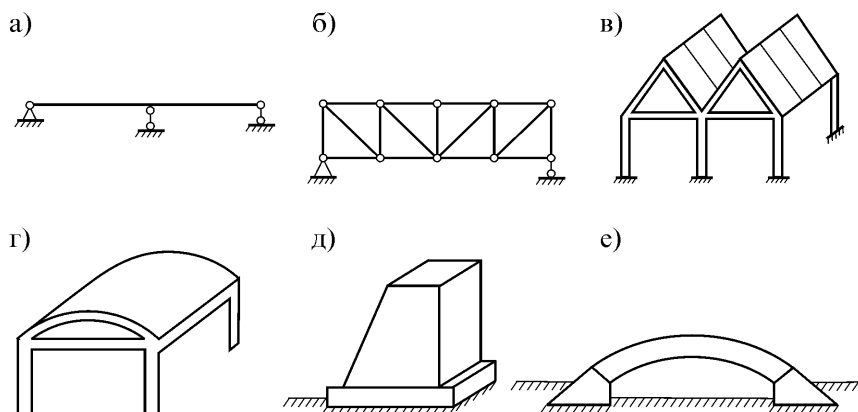


Рис. 1.3

Современные строители возводят очень сложные сооружения, состоящие из разнообразных элементов различной формы и типа. Например, достаточно распространенным является сооружение, у которого основание массивное, средняя часть может состоять из колонн стержневого типа и плит, а верхняя часть – из плит или оболочек.

3. Расчетные схемы сооружений и их классификация

Все особенности сооружений учесть невозможно. Поэтому приходится рассматривать их в упрощенном виде. Упрощенная модель сооружения называется *расчетной схемой*. Расчетная схема, состоящая из множества элементов, называется *системой*.

Любое сооружение представляет собой пространственный объект. Действующая на него внешняя нагрузка также является пространственной. Значит, и расчетную схему сооружения надо выбирать как пространственную. Однако такая схема приводит к сложной задаче составления и решения большого числа уравнений. Поэтому реальное сооружение (рис. 1.4 а) стараются привести к плоской системе (рис. 1.4 б).

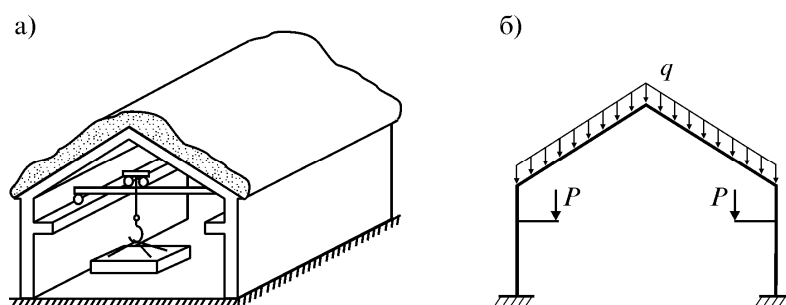


Рис. 1.4

Переход от сооружения к его расчетной схеме является сложной и ответственной задачей. Правильная расчетная схема должна отражать основные особенности сооружения. А неправильный выбор расчетной схемы может привести к неправильным результатам.

Следует отметить, что для одного и того же сооружения можно выбирать разные расчетные схемы. Выбор хорошей расчетной схемы приводит к экономии вычислений и точности результатов расчета.

Расчетные схемы сооружений можно классифицировать по-разному. Например, различают плоские и пространственные расчетные схемы, расчетные схемы по типу или способу соединения элементов, по направлению опорных реакций, по статическим и динамическим особенностям и т.д.

Сооружения опираются или закрепляются к основанию через какие-то опорные устройства. Взаимосвязь между сооружением и его основанием в расчетных схемах учитывается с помощью специальных знаков – *опор*. В пространственных и плоских расчетных схемах используется много типов опор. В плоских системах встречаются следующие типы опор (табл. 1.1):

Таблица 1
Основные типы опор плоских систем

Тип опоры	Условное обозначение	Реакции	Перемещения
Шарнирная опора			 Δ – перемещение; φ – угол поворота
Шарнирно-неподвижная опора			
Заделка			 Перемещений нет
Ползун			
Упругая опора (κ - жесткость)	а) б)	 	

Рассмотрим некоторые типы простых сооружений.

1. **Балка** – изгибаемый брус. Она бывает однопролетной или многопролетной. Типы однопролетных балок: **простая балка** (рис. 1.5 а), **консоль** (рис. 1.5 б) и консольная балка (рис. 1.5 в). Многопролетные балки бывают **разрезные** (рис. 1.5 г), **неразрезные** (рис. 1.5 д) и **составные** (рис. 1.5 е):

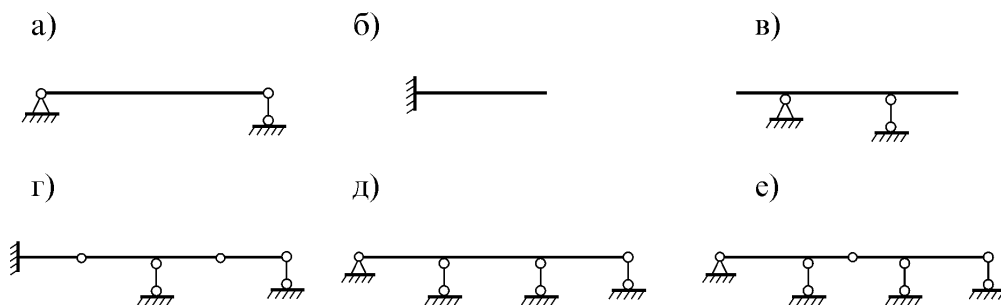


Рис. 1.5

2. **Рама** – система прямых (ломаных или кривых) стержней. Ее стержни могут соединяться жестко или через шарнир. Вот некоторые типы рам: **простая рама** (рис. 1.6 а), **составная рама** (рис. 1.6 б), **многоэтажная рама** (рис. 1.6 в).

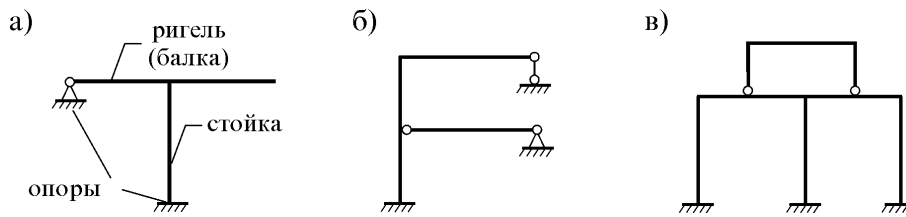


Рис. 1.6

3. **Ферма** – система стержней, соединенных шарнирами. Типов ферм много. Например, бывают **стропильная ферма** (рис. 1.7 а), **мостовая ферма** (рис. 1.7 б), **крановая ферма** (рис. 1.7 в), **башенная ферма** (рис. 1.7 г).

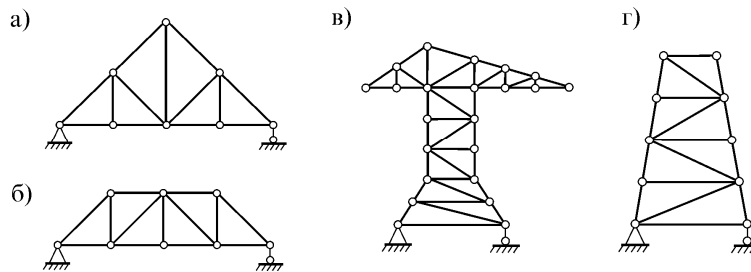


Рис. 1.7

4. **Арка** – система из кривых стержней. Некоторые типы арок: **трехшарнирная** (рис. 1.8 а), **одношарнирная** (рис. 1.8 б), **бесшарнирная** (рис. 1.8 в) арки.

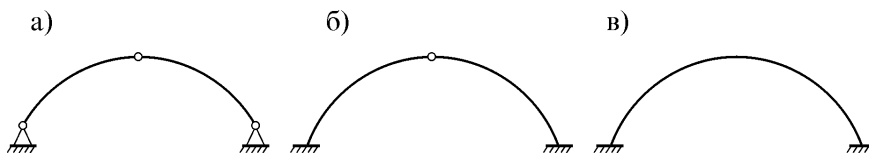


Рис. 1.8

Существуют более сложные системы как комбинации простых систем. Они называются **комбинированными системами**. Например: **арочная ферма** (рис. 1.9 а), **ферма с аркой** (рис. 1.9 б), **висячая система** (рис. 1.9 в):

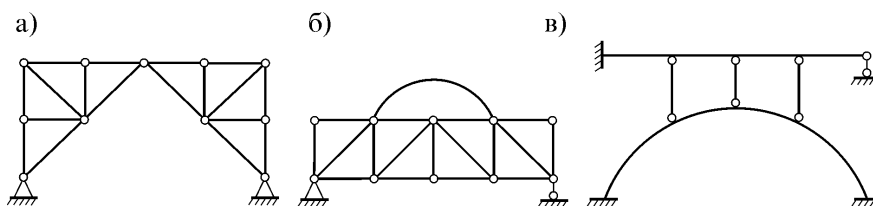


Рис. 1.9

По статическим особенностям различают **статически определимые** и **статически неопределимые** системы.

4. Механические свойства материалов. Основные гипотезы

Большинство материалов сооружений при действии малых нагрузок являются упругими и подчиняются закону Гука. При возрастании нагрузки этот закон перестает выполняться. В нашем курсе будем рассматривать только упругие материалы.

Примем некоторые *гипотезы*, которые позволяют выбирать более простые расчетные модели, упрощать и уменьшать объем вычислений:

1. Материал сооружения является упругим.
2. Перемещения точек сооружения намного меньше его размеров.
3. Перемещения пропорциональны величине нагрузки.
4. Выполняется принцип суперпозиции (независимости действия сил): результат действия нескольких сил равен сумме действий отдельных сил и не зависит от порядка приложения этих сил.

5. Внешние и внутренние силы. Деформации и перемещения

Внешние силы, действующие на сооружение, называются *нагрузкой*. Кроме того, за нагрузку могут приниматься различные сочетания внешних сил, изменение температуры, смещение опор и т.д. Нагрузки различают:

– по способу приложения. Например, *объемная нагрузка* действует во всех точках сооружения (собственный вес, инерционные силы и др.), *поверхностная нагрузка* распределена по поверхности (снег, ветер и др.).

– по времени действия. К примеру, *постоянная нагрузка* действует постоянно и зачастую сохраняется в течение всей жизни сооружения (собственный вес), *временная нагрузка* действует только в определенный период или момент (снег, ветер).

– по способу действия. Например, *статическая нагрузка* действует так, что сооружение сохраняет статическое равновесие. А *динамическая нагрузка* вызывает инерционные силы и нарушает это равновесие. Источниками динамической нагрузки являются различные машины и механизмы, ветер, землетрясения и др. *Подвижные нагрузки* меняют свое положение (поезд, автотранспорт, группа людей и т.д.).

Нагрузка, распределяясь между элементами сооружения, вызывает внутренние напряжения и деформации. В строительной механике определяются их обобщенные характеристики – внутренние усилия и перемещения. А сами напряжения и деформации определяются через внутренние усилия по известным формулам сопротивления материалов.

В о п р о с ы

1. Что изучает строительная механика?
2. Какие важные факторы определяют задачу расчета сооружения?
3. Что такое расчетная схема сооружения?
4. Как классифицируются расчетные схемы?
5. Перечислите основные типы стержневых систем.
6. Какие гипотезы принимаются для упрощения расчета сооружений?

Лекция 2

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ

Внешняя нагрузка может вызвать значительные перемещения элементов, в результате чего сооружение может перестать служить своему назначению. Поэтому ставится требование: перемещения сооружения должны быть малыми. Решением этой задачи на начальном этапе проектирования занимается специальный раздел строительной механики, называемый кинематическим анализом.

Кинематический анализ – это анализ геометрической структуры сооружения с целью исключения больших перемещений. При кинематическом анализе внешняя нагрузка обычно не рассматривается, а элементы системы считаются достаточно жесткими.

В кинематическом анализе различают три типа расчетных схем:

- 1) геометрически неизменяемые системы,
- 2) геометрически изменяемые системы,
- 3) мгновенно изменяемые системы.

Геометрически неизменяемая система (ГНС) – это система, перемещения которой возможны только при деформации ее элементов. Простейшей ГНС является шарнирный треугольник (рис. 2.1 а).

Геометрически изменяемая система (ГИС) – это система, элементы которой могут получать перемещения даже без их деформаций. Например, изменяемой является шарнирный четырехугольник (рис. 2.1 б).

Мгновенно изменяемая система (МИС) – система, способная получать лишь мгновенные перемещения (рис. 2.1 в).

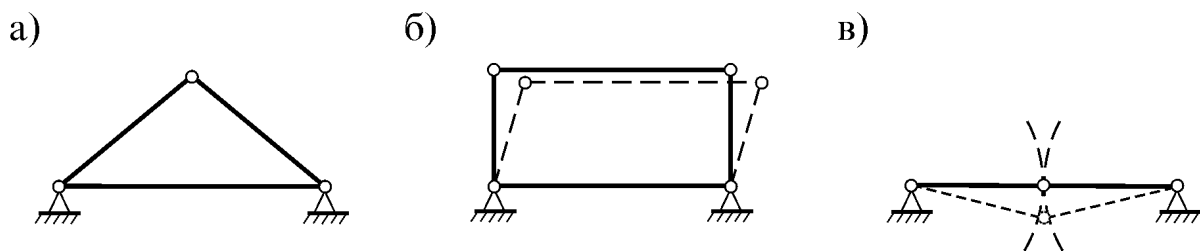


Рис. 2.1

1. Степень свободы. Кинематические связи

Количественная оценка кинематических свойств системы основана на определении ее степеней свободы как направлений возможных независимых перемещений. **Число степеней свободы (W)** – это минимальное число независимых параметров, необходимых для определения положения всех точек системы. Такими параметрами могут быть перемещения отдельных точек, углы поворота элементов и др.

Число степеней свободы простых систем можно определять путем задания ее элементам возможных перемещений (рис. 2.2 а, б, в).

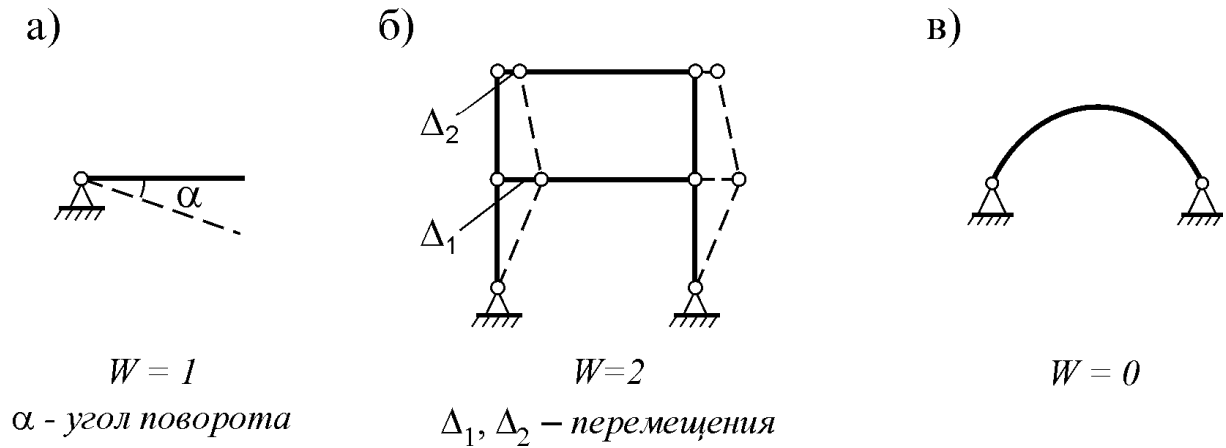


Рис. 2.2

Для изучения более сложных случаев введем следующие понятия:

диск (Д) – неизменяемая часть системы, состоящая из одного или нескольких жестко связанных элементов (рис. 2.3 а);

шарнир (Ш) – связь, дающая возможность взаимного поворота соседним дискам (рис. 2.3 б);

припайка (П) – связь, жестко закрепляющая соседние диски (рис. 2.3 в);

стержень (С) – связь, ограничивающая перемещение диска относительно другого в одном направлении (рис. 2.3 г);

опорная связь (С₀) – связь, ограничивающая перемещение диска в одном направлении по отношению к земле (рис. 2.3 д).

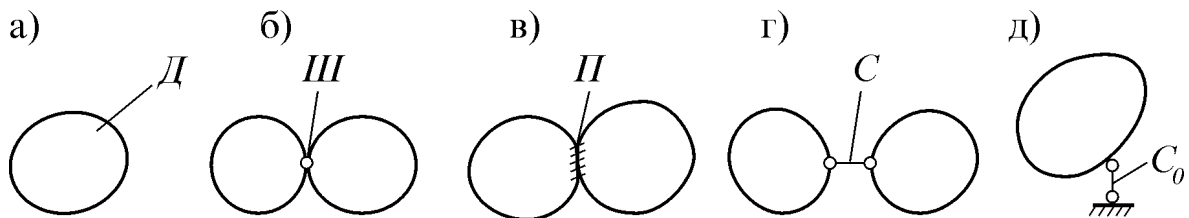


Рис. 2.3

Определим число степеней свободы точки (рис. 2.4 а) и диска с различными кинематическими связями (рис. 2.4 б-д):

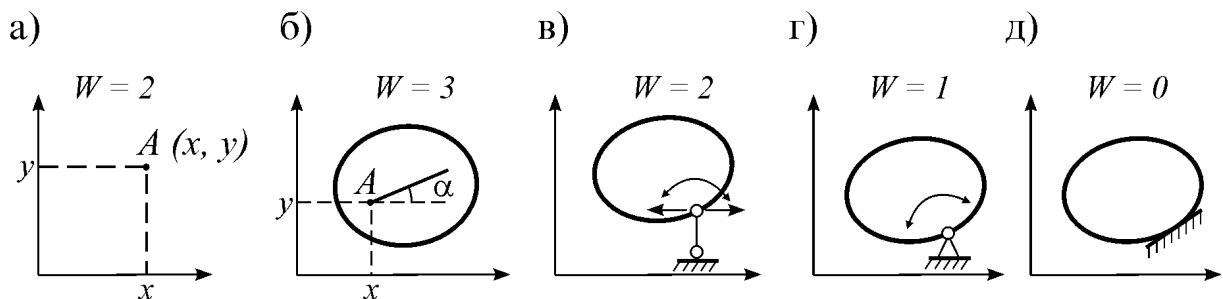


Рис. 2.4

Как видим, стержень или опорная связь уменьшают число степеней свободы на единицу, шарнир – на два, припайка – на три.

Кинематические связи должны обеспечивать неподвижность системы относительно земли (основания), а также неизменяемость ее внутренней структуры. Если при удалении одной связи из неизменяемой системы она становится изменяемой, то эта связь называется **необходимой**. Если после этого система остается неизменяемой, то связь называется **избыточной**. Связь, соединяющая систему с землей, называется **внешней**, а находящаяся внутри – **внутренней связью**.

Шарнир, объединяющий два диска, называется **простым шарниром** (рис. 2.5 а). Если шарнир объединяет несколько дисков, то он называется **кратным шарниром**. Кратный шарнир эквивалентен нескольким простым шарнирам (рис. 2.5 б, в). Кратность шарнира определяется по формуле $n_{III} = n_D - 1$, где n_D – число дисков, объединяемых шарниром.

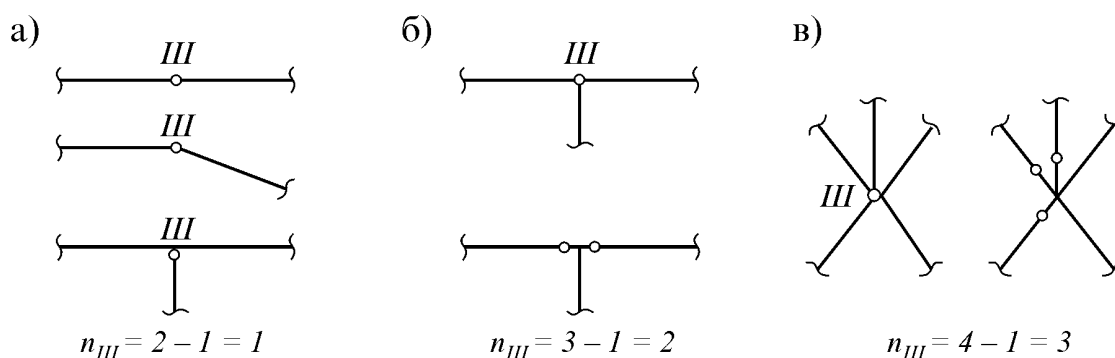


Рис. 2.5

2. Число степеней свободы стержневой системы

Рассматривая расчетную схему сооружения как систему дисков, объединенных связями, получаем ее **дисковый аналог**. Для одной и той же системы часто можно получить несколько дисковых аналогов.

Число степеней свободы плоской стержневой системы определяется по **основной формуле кинематического анализа**:

$$W = 3n_D - 2n_{III} - n_C - n_{C_0} - 3n_{II}$$

Здесь n_D – число дисков в дисковом аналоге; n_{III} – число простых шарниров; n_C – число стержней; n_{C_0} – число опорных связей; n_{II} – число припаяк.

При расчете фермы можно использовать формулу

$$W = 2n_U - n_C - n_{C_0},$$

где n_U – число узлов фермы (узлом считается любой шарнир, связывающий стержни фермы).

После расчета по этим формулам возможны три случая:

1) $W > 0$ – такая система геометрически изменяема и является механизмом;

2) $W = 0$ – в системе имеется достаточное число связей; если они введены правильно, то система неизменяема и статически определима;

3) $W < 0$ – в системе есть избыточные связи. Если эти связи введены правильно, то система неизменяема и статически неопределима.

Отсюда следует, что расчетная схема сооружения должна удовлетворять **необходимому условию геометрической неизменяемости**

$$W \leq 0.$$

В качестве примера рассмотрим три расчетные схемы (рис. 2.6 а, в, д) и их дисковые аналоги (рис. 2.6 б, г, е, ж).

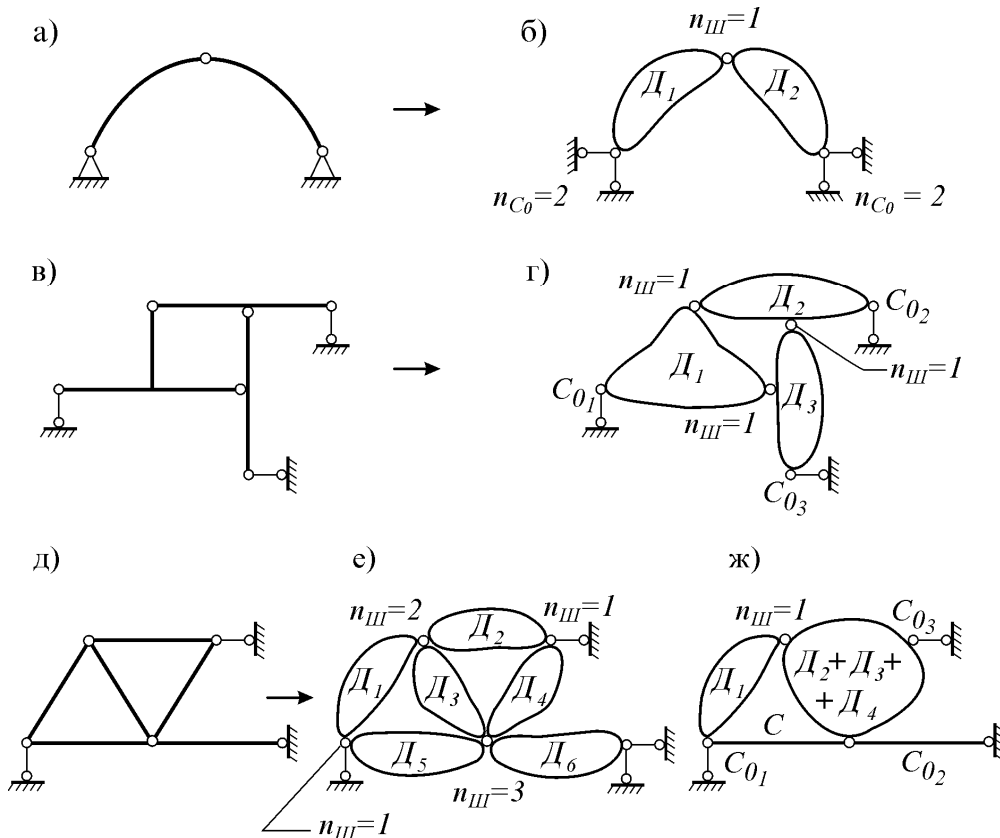


Рис. 2.6

Вычислим число степеней свободы этих систем:

1) арка (рис. 2.6 а), по рис. 2.6 б: $n_D=2, n_{Ш}=1, n_C=0, n_{C_0}=4, n_{П}=0$;

$$W=3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 0 - 4 - 3 \cdot 0 = 0;$$

2) рама (рис. 2.6 в), по рис. 2.6 г: $n_D=3, n_{Ш}=3, n_C=0, n_{C_0}=3, n_{П}=0$;

$$W=3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 0 - 3 - 3 \cdot 0 = 0.$$

3) ферма (рис. 2.6 д):

– по рис. 2.6 е: $n_D=6, n_{Ш}=7, n_C=0, n_{C_0}=4, n_{П}=0$;

$$W=3 \cdot 6 - 2 \cdot 7 - 0 - 4 - 3 \cdot 0 = 0;$$

– по рис. 2.6 ж: $n_D=2, n_{Ш}=1, n_C=1, n_{C_0}=3, n_{П}=0$;

$$W=3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 1 - 3 - 3 \cdot 0 = 0;$$

– по формуле для фермы (рис. 2.6 д): $n_Y=4, n_C=5, n_{C_0}=3$;

$$W=2 \cdot 4 - 5 - 3 = 0.$$

3. Способы образования неизменяемых систем

Выполнение условий, рассмотренных выше, необходимо, но не достаточно. Например, число степеней свободы систем на рис. 2.7 а, в одинаково: $W=0$, поэтому необходимое условие их геометрической неизменяемости выполняется. Но, тем не менее, обе системы геометрически изменяемы. Причиной их изменяемости является неправильная постановка связей. Для того чтобы эти системы стали геометрически неизменяемыми, одну связь в них нужно переставить в другое место (рис. 2.7 б, г).

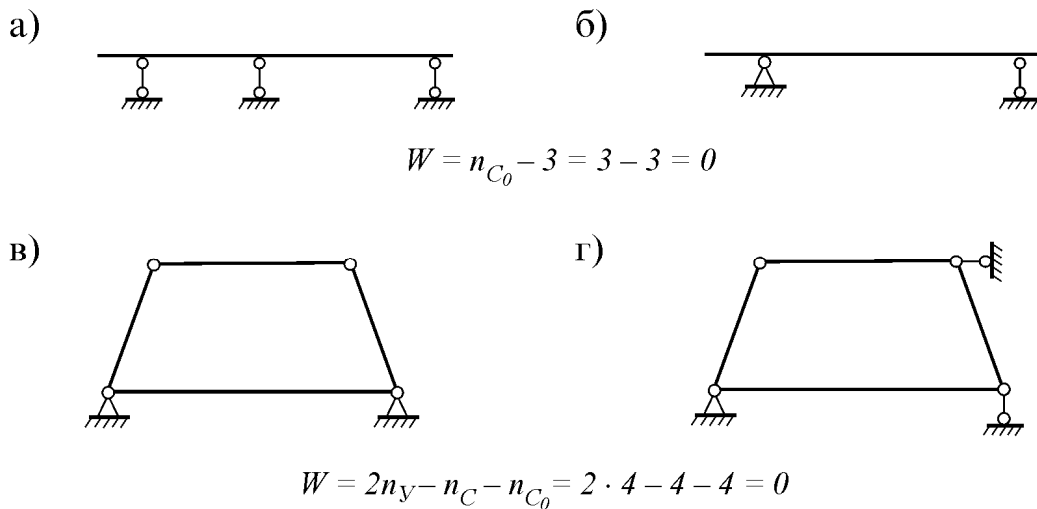


Рис. 2.7

Из этих примеров следует, что для полной уверенности в неизменяемости системы нужна дополнительная оценка системы – **проверка геометрической структуры**. Ее суть заключается в проверке способов объединения элементов между собой и с землей. Для такой проверки необходимо:

- выделить в системе неизменяемые фигуры – диски;
- последовательно объединять эти диски между собой, используя способы образования неизменяемых систем.

Рассмотрим **простейшие способы образования геометрически неизменяемых систем:**

1. Новый узел к диску должен добавляться способом диады – двумя непараллельными стержнями (рис. 2.8 а).

2. Два диска должны объединяться:

– способом триады – тремя непараллельными и непересекающимися в одной точке связями (рис. 2.8 в);

– одним шарниром и одной связью (рис. 2.8 б). Этот способ вытекает из способа триады;

3. Три диска должны объединяться тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой (рис. 2.8 г). Шарниры могут быть условными (рис. 2.8 д).

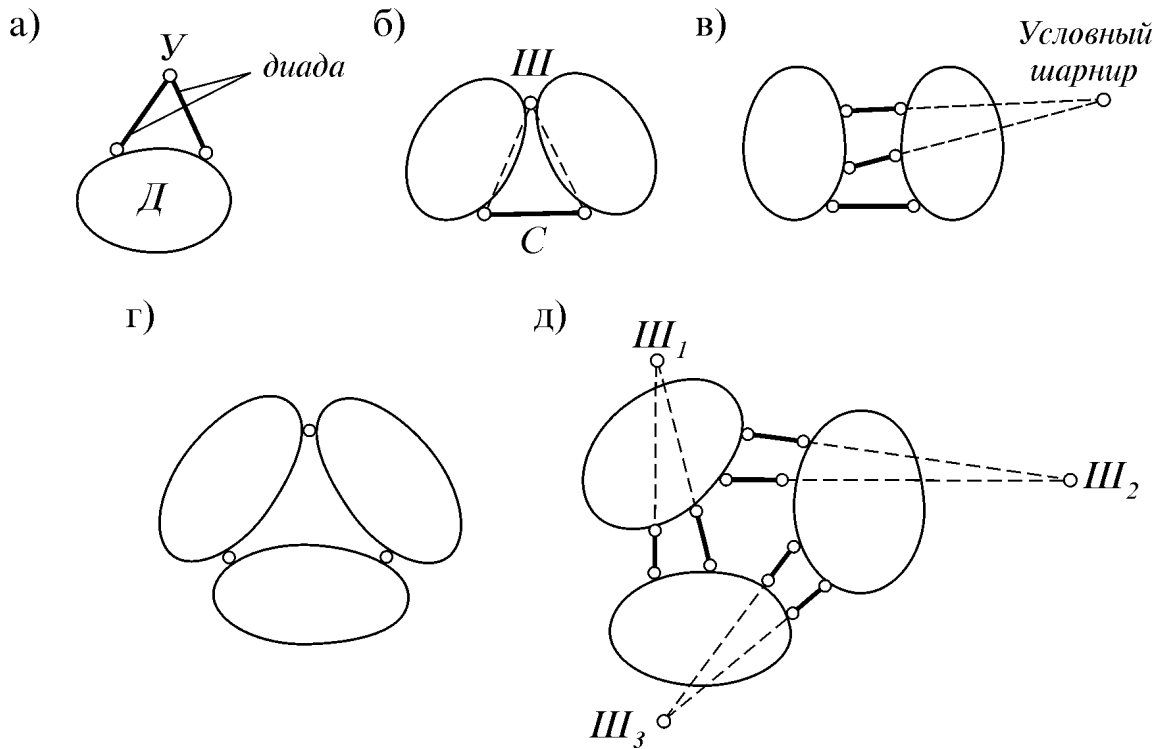


Рис. 2.8

4. Понятие о мгновенно изменяемых системах

Расчетная схема любого инженерного сооружения не должна быть изменяемой или мгновенно изменяемой. Если изменяемость системы обычно возникает из-за недостатка связей, то мгновенная изменяемость возникает при их неправильной установке (рис. 2.9 а, г, д, е).

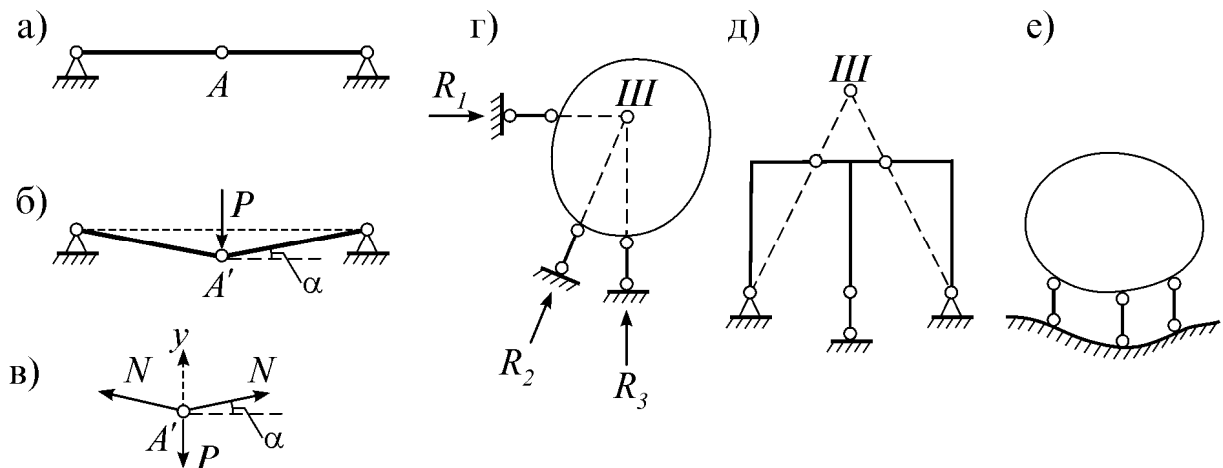


Рис. 2.9

Обнаружить мгновенную изменяемость очень важно уже на этапе кинематического анализа, так как это позволяет вносить коррективы в расчетную схему сооружения.

В качестве примера рассмотрим балку (рис. 2.9 а) и выясним, почему же она является мгновенно изменяемой.

1. При действии на эту балку сосредоточенной силы P ее положение изменяется (рис. 2.9 б). Запишем условие равновесия системы сил, сходящихся в точке A' (рис. 2.9 в):

$$\sum Y = N \sin \alpha \cdot 2 - P = 0.$$

Отсюда

$$N = \frac{P}{2 \sin \alpha}.$$

Если в этой формуле $\alpha=0$, т.е. когда стержни AB и BC лежат на одной прямой, то $N=\infty$. Таким образом, мгновенная изменяемость опасна тем, что усилия в элементах системы могут быть очень большими.

2. Если в последней формуле примем $P=0$, внутреннее усилие становится неопределенным: $N=0/0$.

Этот результат лежит в основе **метода нулевой нагрузки**. Суть метода заключается в следующем:

- удалить все силы, действующие на систему;
- вычислить внутренние усилия. Если они все (включая и опорные реакции) будут равны нулю, то система неизменяема. Если же хотя бы одно усилие будет неопределенным (типа $0/0$), то данная система является мгновенно изменяемой.

Общие выводы. Расчетная схема сооружения должна быть геометрически неизменяемой. С целью проверки геометрической неизменяемости системы проводится ее кинематический анализ, состоящий из двух этапов:

- 1) **количественный анализ** – проводится по основной формуле кинематического анализа; должно выполняться условие $W \leq 0$;
- 2) **качественный анализ** – проводится с использованием способов образования геометрически неизменяемых систем.

В о п р о с ы

1. Какие системы называются геометрически неизменяемыми, изменяемыми и мгновенно изменяемыми?
2. Что такое число степеней свободы?
3. Как записывается основная формула кинематического анализа?
4. Как классифицируются системы по числу их степеней свободы?
5. В чем заключается необходимое условие геометрической неизменяемости?
6. Как проверяется геометрическая неизменяемость системы?
7. Какие способы образования неизменяемых систем знаете?
8. Каков порядок кинематического анализа?
9. Что такое метод нулевой нагрузки?
10. В чем заключается количественный анализ геометрической неизменяемости?
11. Как проводится качественный анализ?

Лекция 3

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ НА ПОСТОЯННУЮ НАГРУЗКУ

Важной задачей расчета сооружений является определение их напряженно-деформированного состояния (НДС). Эта задача состоит из:

- определения опорных реакций и внутренних усилий;
- определения напряжений;
- определения перемещений и деформаций.

Перед расчетом должны быть установлены геометрические размеры и формы элементов сооружения, физические характеристики материала, внешняя нагрузка и особенности ее воздействия.

Наиболее простым является расчет статически определимых систем.

Статически определимой называется система, внутренние усилия которой можно определить только из уравнений статики (равновесия).

Статически определимые системы (СОС) имеют свои особенности:

- 1) их внутренние усилия не зависят от упругих характеристик материала, форм сечений и площадей элементов;
- 2) воздействие температуры, смещение опор, неточность изготовления элементов не вызывают внутренних усилий;
- 3) если нет внешних нагрузок, все внутренние усилия равны нулю.

1. Определение опорных реакций

Сооружение, воспринимая внешнюю нагрузку, через свои элементы передает ее опорам, вызывая в них опорные реакции.

При определении опорных реакций используется **принцип освобождения от связей**: всякое тело можно освободить от связей, заменив их воздействием реакциями. После этого из уравнений равновесия можно определить величины опорных реакций.

Уравнения равновесия плоской системы записываются в трех формах:

$$1) \Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma M_A = 0$$

(ΣX и ΣY – суммы проекций на взаимно-пересекающиеся оси x и y , ΣM_A – сумма моментов всех сил относительно любой точки A на плоскости);

$$2) \Sigma X = 0, \quad \Sigma M_A = 0, \quad \Sigma M_B = 0$$

(точки A и B не должны лежать на одном перпендикуляре к оси x);

$$3) \Sigma M_A = 0, \quad \Sigma M_B = 0, \quad \Sigma M_C = 0$$

(точки A , B , C не должны лежать на одной прямой).

2. Внутренние усилия стержневой системы

В элементах плоской стержневой системы возникают три усилия: продольная сила N , поперечная сила Q , изгибающий момент M . Для любого поперечного сечения стержня они определяются как на рис. 3.1.

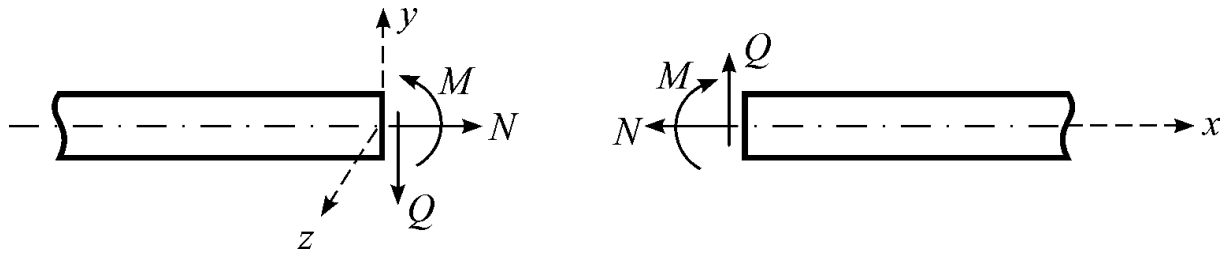


Рис. 3.1

Изгибающий момент – это сумма моментов всех сил, лежащих слева (или справа) от сечения относительно оси z :

$$M = \sum_{\text{лев}} M_{iz} = - \sum_{\text{пр}} M_{jz}.$$

В строительной механике знак изгибающего момента обычно не устанавливается, а эпюра M изображается на стороне растянутого волокна.

Поперечная сила – это сумма проекций всех сил, лежащих слева (или справа) от сечения на ось y :

$$Q = \sum_{\text{лев}} P_{iy} = - \sum_{\text{пр}} P_{jy}.$$

Поперечная сила положительна, если вращает элемент по часовой стрелке, и отрицательна, если вращает его против часовой стрелки.

Продольная сила – это сумма проекций всех сил, лежащих слева (или справа) от сечения, на ось x :

$$N = \sum_{\text{лев}} P_{ix} = - \sum_{\text{пр}} P_{jx}.$$

Продольная сила положительна, если растягивает элемент, и отрицательна, если сжимает его.

Между M и Q существует дифференциальная зависимость:

$$Q = \frac{dM}{dx}.$$

Исходя из геометрического смысла первой производной, величина Q равняется тангенсу угла между осью эпюры M и касательной к ней.

По эпюре M можно определить знак Q . Для этого ось эпюры M нужно повернуть до совпадения с касательной к ней. Если поворот будет по часовой стрелке, Q будет со знаком «+», а если против часовой стрелки, то со знаком «-».

Эпюры поперечных и продольных сил можно изображать на любой стороне от оси стержня, но эпюру изгибающего момента нужно обязательно изображать на стороне растянутого волокна.

3. Методы определения внутренних усилий

Внутренние усилия статически определимых систем определяются методами простых сечений, совместных сечений, вырезания узла, замены связей и др.

3.1. Метод простых сечений

Этот метод позволяет рассматривать внутреннее усилие как внешнюю силу и определять его из уравнений статики (равновесия).

Например, внутренние усилия балки (рис. 3.2 а) в сечении K определяются как на рис. 3.2 б).

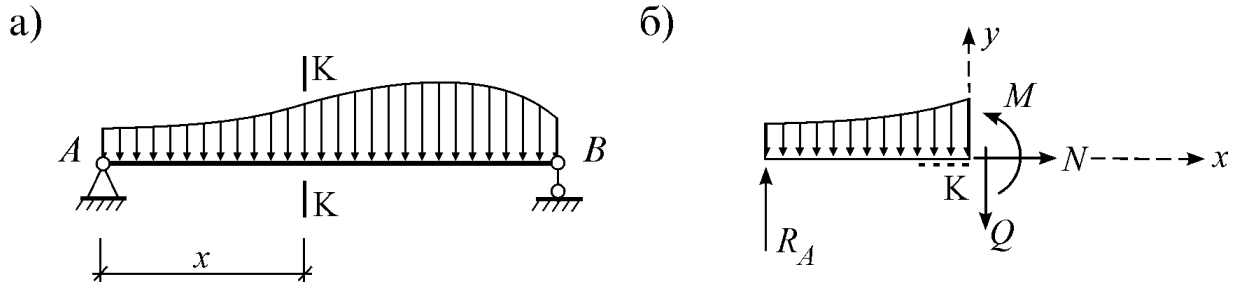


Рис. 3.2

Алгоритм метода простых сечений:

- 1) поделить систему на участки;
- 2) выбрать участок и провести поперечное сечение;
- 3) выбрать одну (наиболее простую) из отсеченных частей;
- 4) составить три уравнения равновесия;
- 5) из них определить внутренние усилия M , Q , N ;
- 6) для данного участка построить эпюры M , Q , N ;
- 7) повторить пункты 2-6 для остальных участков.

3.2. Метод совместных сечений

Этот метод используется при расчете многодисковых систем.

Например, для расчета трехдисковой рамы (рис. 3.3 а) проводятся три совместных сечения I , II , III . В результате появляются девять неизвестных реакций (рис. 3.3 б): опорные реакции R_1 , R_2 , H и междисковые реакции X_1 , X_2 , X_3 , Y_1 , Y_2 , Y_3 . Составив для каждого диска по три уравнения равновесия, т.е. $3 \times 3 = 9$ уравнений, из их решения определяются все 9 реакций.

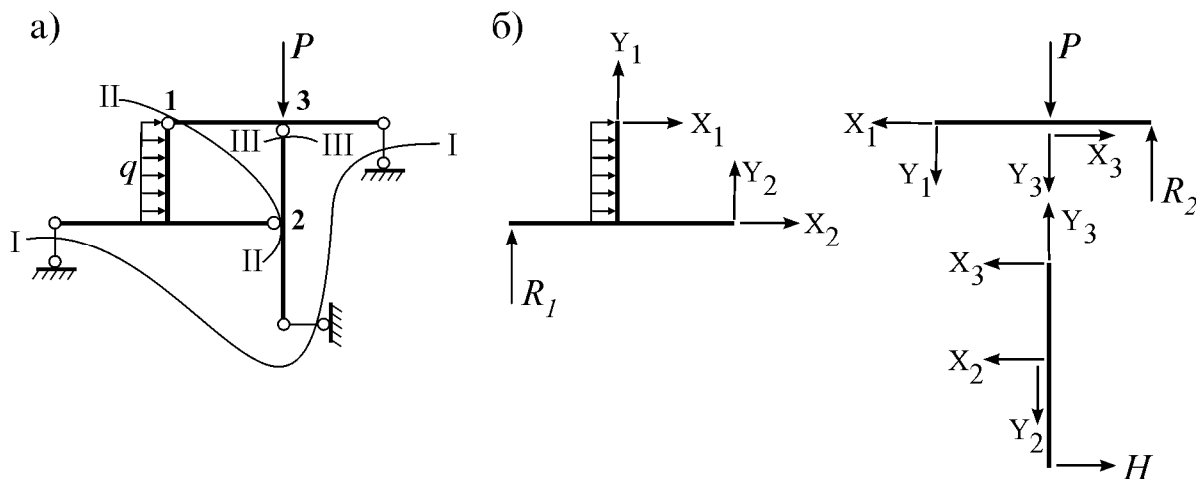


Рис. 3.3

Алгоритм метода совместных сечений:

- 1) совместными сечениями разделить систему на части (диски);
- 2) обозначить опорные и междисковые реакции;
- 3) для каждого диска записать уравнения равновесия;
- 4) решить систему полученных уравнений;
- 5) каждый диск рассчитать отдельно и построить эпюры;
- 6) объединить все эпюры в общие эпюры M , Q , N .

3.3. Метод вырезания узла

Используется для определения усилий простых систем.

Сущность метода: вырезается узел с не более чем двумя неизвестными усилиями; силы, действующие в узле, проецируются на две оси; из этих уравнений определяются искомые усилия.

Например, при расчете балочно-ферменной системы (рис. 3.4 а), после того как определены опорные реакции (рис. 3.4 б), вырезается узел A (рис. 3.4 в) и составляются уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\Sigma X &= N_2 \cos 45^\circ - N_1 \cos 45^\circ = 0, \\ \Sigma Y &= N_1 \sin 45^\circ + N_2 \sin 45^\circ + P/2 = 0.\end{aligned}$$

Из них определяются искомые продольные силы: $N_1 = N_2 = -\frac{P}{4 \sin 45^\circ}$.

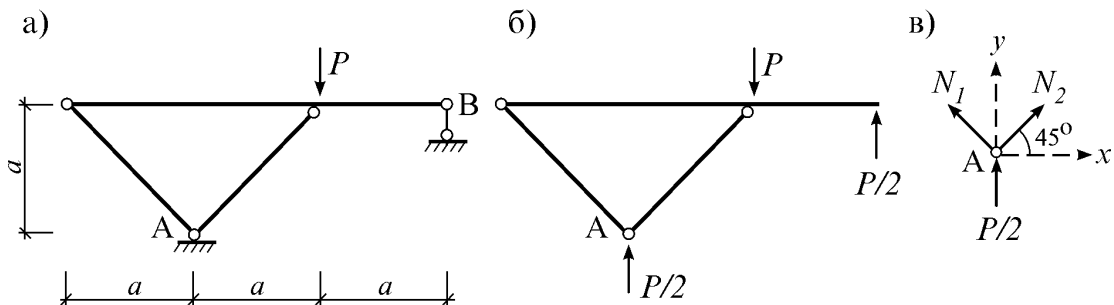


Рис. 3.4

3.4. Метод замены связей

Используется при расчете сложных статически определимых систем, которые трудно рассчитать другими способами.

Сущность метода: сложная система превращается в более простую путем перестановки связи (или нескольких связей) в другое место; из условия эквивалентности заданной и заменяющей систем определяется усилие в переставленной связи; затем система рассчитывается известными методами.

Например, для расчета рамы (рис. 3.5 а) удалим правый вертикальный стержень заданной системы (ЗС) и введем одну связь в левый шарнир. Тогда шарнир станет припайкой C , а примыкающие к нему стержни будут жестко связаны. Обозначив усилие в удаленной связи через X , получим так называемую **основную систему** (ОС) для расчета рамы (рис. 3.5 б).

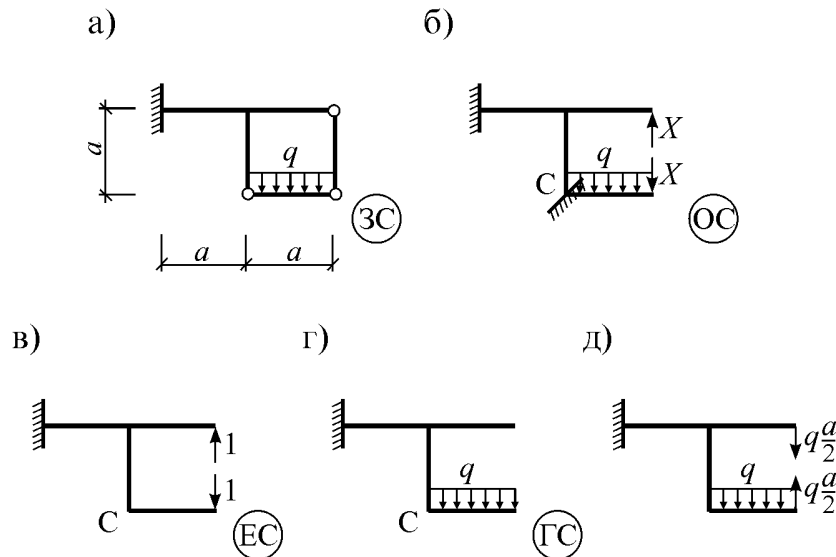


Рис. 3.5

Условием эквивалентности ОС по отношению к ЗС будет условие равенства нулю момента в точке C : $M_C=0$. По принципу суперпозиции, этот момент равняется сумме моментов от силы X и внешней нагрузки:

$$M_C = M_{C,X} + M_{C,P} = 0.$$

Далее рассмотрим два состояния ОС:

1) единичное состояние (ЕС), где прикладываются силы $X=1$ (рис. 3.5 в);

2) грузовое состояние (ГС), где прикладывается нагрузка (рис. 3.5 г).

Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$\overline{M}_C \cdot X + M_{C,P} = 0,$$

где $\overline{M}_C = 1 \cdot a = a$ – момент в точке C в единичном состоянии (рис. 3.5 в);

$M_{C,P} = qa^2 / 2$ – момент в точке C в грузовом состоянии (рис. 3.5 г).

Теперь неизвестное усилие легко вычисляется:

$$X = -\frac{M_{C,P}}{\overline{M}_C} = -\frac{qa}{2}.$$

После этого можно перейти к расчету более простой системы (рис. 3.5 д).

В более сложных случаях переставляются несколько связей и записываются соответствующие условия эквивалентности:

$$s_{11}X_1 + s_{12}X_2 + \dots + s_{1n}X_n + S_{1P} = 0,$$

$$s_{21}X_1 + s_{22}X_2 + \dots + s_{2n}X_n + S_{2P} = 0,$$

.....

$$s_{n1}X_1 + s_{n2}X_2 + \dots + s_{nn}X_n + S_{nP} = 0.$$

Здесь $1, 2, \dots, n$ – заменяемые связи; X_1, X_2, \dots, X_n – неизвестные внутренние усилия в этих связях; s_{ij} – усилие в i -ой связи в j -ом единичном состоянии; S_{iP} – усилие в i -ой связи в грузовом состоянии.

Из этой системы уравнений определяются неизвестные X_1, X_2, \dots, X_n .

Общий вывод. Расчет любой статически определимой системы приводит к решению системы n линейных уравнений с n неизвестными. Если определитель полученной системы уравнений отличен от нуля ($\det \neq 0$), внутренние усилия будут конечными величинами. Если же определитель равняется нулю ($\det = 0$), то внутренние усилия определить нельзя. В этом случае система является мгновенно изменяемой.

В о п р о с ы

1. Какая система называется статически определимой?
2. Какие особенности имеет статически определимая система?
3. Какие формы уравнений равновесия можно записать для плоской системы?
4. Что такое изгибающий момент, поперечная сила и продольная сила, как определяются их знаки?
5. Какие методы используются при расчете статически определимых систем?
6. В чем сущность метода замены связей?
7. Какой общий вывод можно сделать после анализа методов расчета статически определимых систем?

Л е к ц и я 4

РАСЧЕТ ФЕРМ НА ПОСТОЯННУЮ НАГРУЗКУ

Ферма – это геометрически неизменяемая система, состоящая из прямых стержней, соединенных в узлах жестко или шарнирно (рис. 4.1 а). Замена жестких узлов фермы шарнирами превращает ее в шарнирную ферму (рис. 4.1 б) и упрощает расчет.

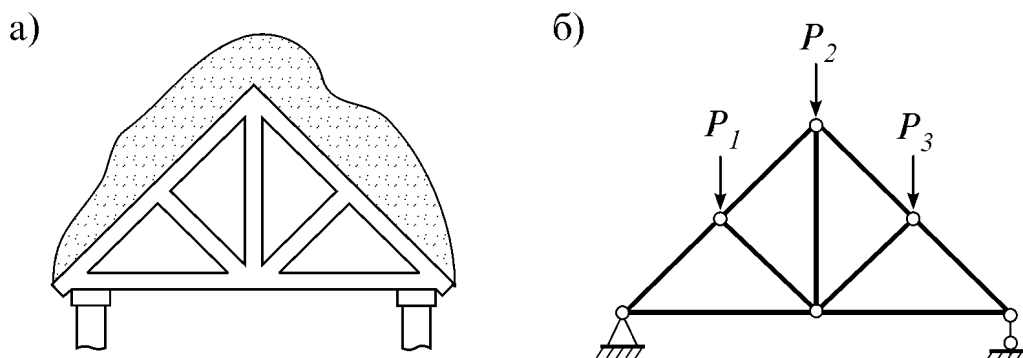


Рис. 4.1

Для статической определимости и геометрической неизменяемости шарнирных ферм должно выполняться условие

$$2n_y = n_c + n_{c_0}.$$

При действии узловой нагрузки стержни фермы работают в основном на растяжение или сжатие, а моменты и поперечные силы в них отсутствуют. Поэтому в стержнях шарнирной фермы определяются только продольные усилия.

Положительное усилие N_{ij} в стержне фермы между узлами i и j (рис. 4.2 а) следует направить в сторону от шарниров (рис. 4.2 б).

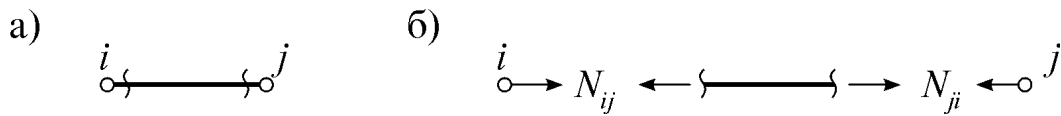


Рис. 4.2

При расчете ферм используются различные методы. Рассмотрим некоторые из них.

1. Метод вырезания узлов

Этот метод основан на последовательном вырезании и рассмотрении равновесия узлов фермы.

Сущность метода: вырезается узел, в котором не более двух неизвестных; составляются уравнения равновесия $\Sigma X=0$ и $\Sigma Y=0$; из них определяются неизвестные продольные усилия. После этого можно вырезать следующий узел и продолжить расчет.

В методе вырезания узлов необходимо установить порядок вырезания узлов. Например, для расчета фермы (рис. 4.3 а) сначала вырежем узел A (рис. 4.3 б) и запишем уравнения равновесия:

$$\Sigma X = N_{A-10} + N_{A-1} \cos \alpha = 0;$$

$$\Sigma Y = N_{A-1} \sin \alpha + 1,5P = 0.$$

Из них: $N_{A-1} = -1,5P / \sin \alpha$; $N_{A-10} = 1,5P / \operatorname{tg} \alpha$.

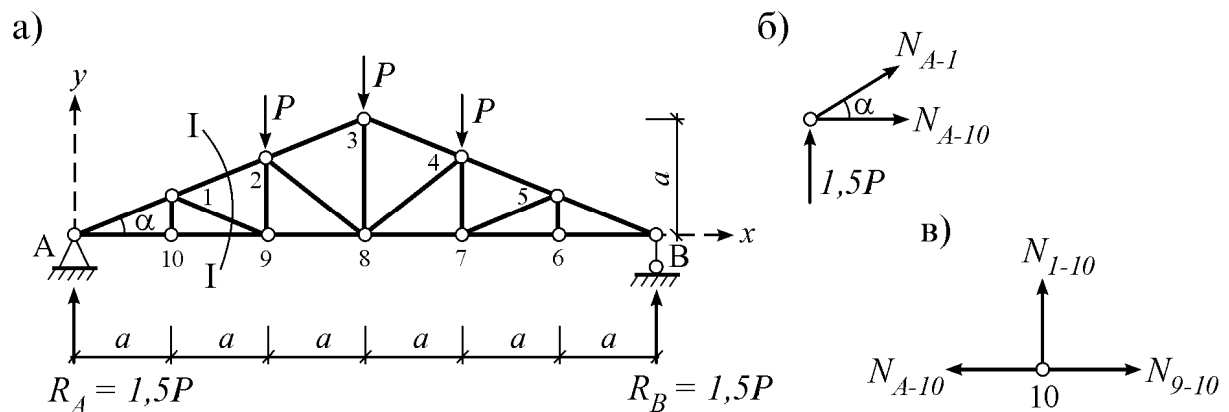


Рис. 4.3

Теперь вырежем узел 10 (рис. 4.3 в) и запишем условия равновесия:

$$\Sigma X = N_{9-10} - N_{A-10} = 0;$$

$$\Sigma Y = N_{1-10} = 0.$$

Из них получаем: $N_{9-10} = N_{A-10} = 1,5P / \operatorname{tg} \alpha$; $N_{1-10} = 0$.

После этого можно вырезать узлы 1, 9, 2, 3, 8, 4, 7, 6, 5.

У метода вырезания узлов есть недостаток: ошибка (неточность), допущенная при расчете одного узла, влияет на последующие вычисления. Поэтому результаты, полученные этим методом, надо контролировать.

Например, результаты расчета фермы могут быть проверены по формуле

$$\sum N_i l_i = \sum P_x \cdot x + \sum P_y \cdot y,$$

где $\boxed{\times}$ – усилия в стержнях, l_i – длины стержней, P_x и P_y – проекции нагрузок (включая и опорные реакции), x и y – координаты нагрузок.

Из метода вырезания узлов вытекают следующие **признаки, упрощающие расчет ферм**:

1) если в узле сходятся два стержня и внешняя нагрузка не приложена (рис. 4.4 а), то оба усилия равны нулю: $N_1 = N_2 = 0$;

2) если в узле сходятся два стержня, а внешняя нагрузка действует в направлении одного стержня (рис. 4.4 б), то $N_1 = P$, $N_2 = 0$;

3) если в трехстержневом узле два стержня лежат на одной прямой, а внешней нагрузки нет (рис. 4.4 в), то усилия в двух стержнях равны: $N_1 = N_2$, а усилие в боковом стержне равно нулю: $N_3 = 0$;

4) если в четырехстержневом узле стержни попарно лежат на одной прямой, а внешней нагрузки нет (рис. 4.4 г), то усилия попарно равны между собой: $N_1 = N_2$, $N_3 = N_4$.

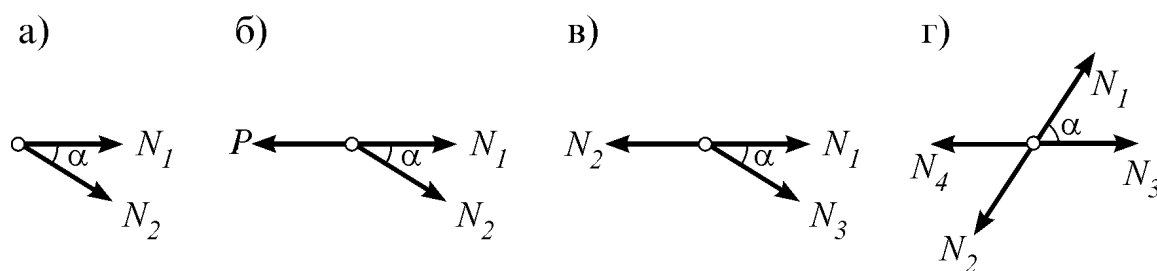


Рис. 4.4

Используя эти признаки, легко определяются некоторые усилия рассмотренной фермы (рис. 4.3 а):

– по 2-му признаку $N_{1-10} = N_{1-9} = N_{2-9} = 0$; $N_{5-6} = N_{5-7} = N_{4-7} = 0$;

– по 3-му признаку $N_{A-10} = N_{9-10} = N_{8-9}$; $N_{B-6} = N_{6-7} = N_{7-8}$; $N_{A-1} = N_{1-2}$; $N_{B-5} = N_{4-5}$.

2. Метод сквозных сечений

Этот метод позволяет определять усилие в стержне фермы, решая только одно уравнение.

Сущность метода: поперек фермы проводится такое сквозное сечение, чтобы появилось не более трех неизвестных усилий; в точке пересечения направлений двух из них составляется уравнение момента, из которого определяется третье усилие.

Точка, в которой составляется уравнение момента, называется **моментной точкой**.

В качестве примера рассмотрим ту же ферму, проведя поперек второй панели сквозное сечение I–I (рис. 4.3 а). Рассматривая равновесие левой части от сечения (рис. 4.5), составим уравнение момента в точке 1:

$$\Sigma M_I = N_{9-10} \cdot \frac{a}{3} - 1,5P \cdot a = 0.$$

Отсюда получаем: $N_{9-10} = 4,5P$.

Точка 9 является моментной точкой для N_{1-2} . Поэтому

$$\Sigma M_9 = -N_{1-2} b - 1,5P \cdot 2a = 0.$$

Так как $b = 2a \cdot \sin \alpha$, получаем $N_{1-2} = -1,5P / \sin \alpha$.

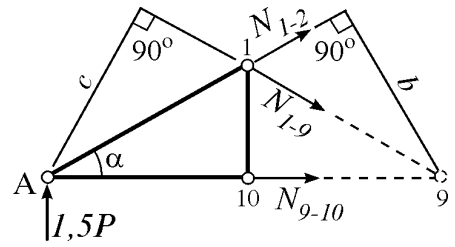


Рис. 4.5

Для N_{1-9} моментной является точка А: $\Sigma M_A = -N_{1-9} \cdot c = 0$. Отсюда $N_{1-9} = 0$.

Иногда (например, когда два стержня параллельны) моментной точки не существует. В этом случае вместо уравнения момента следует составлять уравнение проекции на ось, перпендикулярную этим параллельным стержням.

У метода сквозных сечений есть один недостаток: в сложных фермах не удастся провести такое сквозное сечение, чтобы появились только три неизвестных усилия. В этом случае часть неизвестных нужно определить заранее или использовать другие методы.

3. Метод совместных сечений

Этот метод используется для расчета ферм, которые невозможно рассчитать методами вырезания узлов и сквозных сечений.

Сущность метода: поперек фермы проводятся несколько совместных сечений; для полученных частей фермы составляются уравнения равновесия; эти уравнения решаются совместно; затем каждая часть фермы рассчитывается отдельно.

Например, опорные реакции фермы на рис. 4.6 а легко определить, но усилия в ее стержнях нельзя определить способами вырезания узлов и сквозных сечений. Поэтому проводим совместные сечения I-I и II-II и рассматриваем равновесие двух полученных частей (рис. 4,6 б, в).

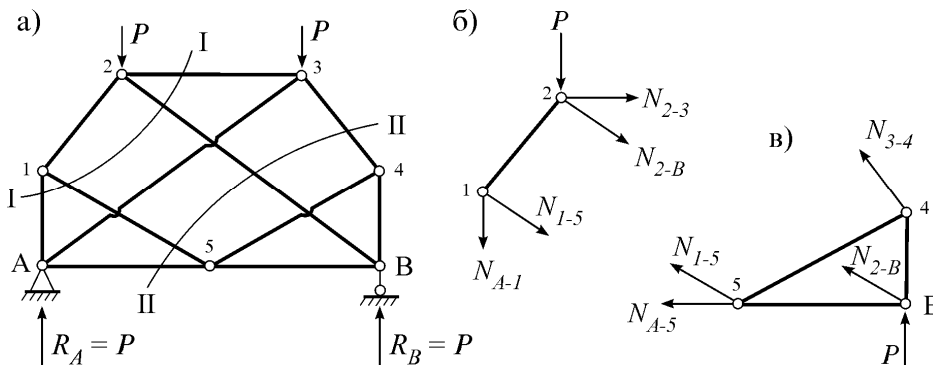


Рис. 4.6

В них имеются шесть неизвестных усилий N_{A-1} , N_{1-5} , N_{2-3} , N_{2-B} , N_{3-4} , N_{A-5} . Их можно найти составив по три уравнения равновесия для обеих частей. Затем, используя способ вырезания узлов, определяются и остальные усилия в стержнях фермы N_{1-2} , N_{5-B} , N_{4-B} , N_{A-3} , N_{4-5} .

4. Расчет шпренгельных ферм

С целью экономии материала в фермах стремятся использовать стержни малого поперечного сечения. Однако это может привести к значительному изгибу и потере устойчивости некоторых стержней. Для исключения таких явлений в панели такой фермы (рис. 4.7 а) вводят дополнительные стержни – шпренгельные элементы и получают **шпренгельную ферму** (рис. 4.7 б). В дальнейшем первоначальную ферму (ферму без шпренгелей) для простоты будем называть **главной фермой**.

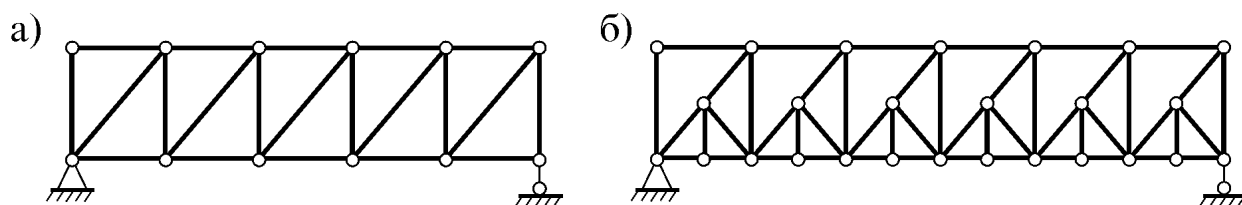


Рис. 4.7

Шпренгели фермы могут быть одноэтажными и двухэтажными. Одноэтажный шпренгель воспринимает внешнюю нагрузку в пределах одной панели и передает ее в узлы только одного пояса, а двухэтажный – передает внешнюю нагрузку и в узлы другого пояса (из нижнего пояса в верхний, и наоборот).

Рассмотренные выше методы можно использовать и для расчета шпренгельных ферм. Однако их расчет упрощается, если разложить ферму на главную ферму и закрепленные в узлах шпренгели. На рис. 4.8 показан пример такого разложения для одной панели одноэтажной (рис. 4.8 а, б, в) и двухэтажной (рис. 4.8 г, д, е) шпренгельных ферм.

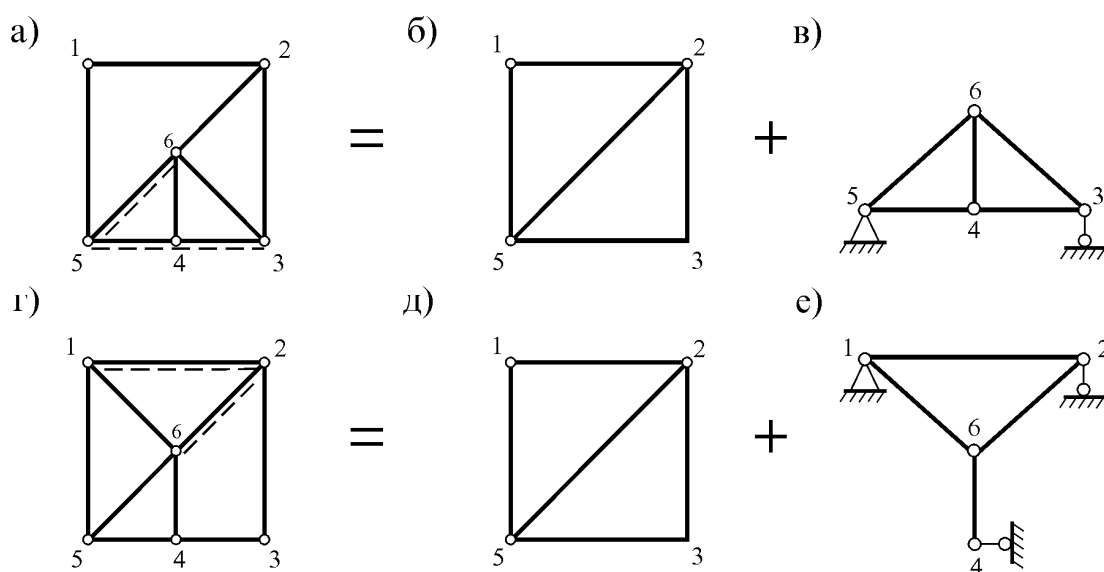


Рис. 4.8

При расчете многих шпренгельных ферм можно выделить три разных типа стержней:

- стержни 1 типа – входят только в главную ферму;
- стержни 2 типа – входят только в шпренгели;
- стержни 3 типа – входят в состав и главной фермы, и в состав шпренгелей.

Например, на рис. 4.8 а стержни фермы 1-2, 2-3, 1-5 и 2-6 (как часть элемента 2-5) будут относиться к первому; стержни 3-6 и 4-6 – ко второму; стержни 5-6, 4-5 и 3-4 – к третьему типу. А стержни 1-5, 2-3, 3-4, 5-4 и 5-6 фермы на рис. 4.8 г будут первого, стержни 1-6 и 4-6 – второго, стержни 1-2 и 2-6 – третьего типа. Кроме того, стержни третьего типа на рис. 4.8 а, г дополнительно отмечены пунктирной линией.

Расчет шпренгельной фермы начинается с расчета тех шпренгелей, к которым приложена узловая нагрузка (например, в узле 4). После этого определяются опорные реакции шпренгеля и методом вырезания узлов – продольные усилия во всех стержнях шпренгелей N_i'' .

Затем проводится расчет главной фермы (фермы без шпренгелей), на которую прикладываются все ее узловые силы, а также дополнительные силы со стороны шпренгелей, равные опорным реакциям шпренгелей и приложенных в обратном направлении. Далее любым из рассмотренных выше методов вычисляются продольные усилия во всех стержнях главной фермы N_i' .

После этого определяются окончательные величины усилий в стержнях шпренгельной фермы, которые вычисляются по следующим формулам:

- для стержней 1 типа: $N_i = N_i'$;
- для стержней 2 типа: $N_i = N_i''$;
- для стержней 3 типа: $N_i = N_i' + N_i''$.

В о п р о с ы

1. Какие упрощения принимаются при расчете ферм?
2. Как записывается условие статической определимости и геометрической неизменяемости шарнирной фермы?
3. Какие методы используются при расчете ферм?
4. В чем сущность метода вырезания узлов?
5. В чем недостаток метода вырезания узлов?
6. Какие признаки (частные случаи) упрощают расчет ферм?
7. В чем сущность метода сквозных сечений?
8. В чем недостаток метода сквозных сечений и как его избежать?
9. Что такое моментная точка и как ее определить?
10. В чем сущность метода совместных сечений?
11. Что такое шпренгельная ферма?
12. На какие типы делятся стержни шпренгельной фермы?
13. Каков порядок расчета шпренгельных ферм?

Лекция 5

РАСЧЕТ МНОГОДИСКОВЫХ СИСТЕМ

1. Расчет разрезных балок

В зависимости от расположения опор и шарниров, расчетные схемы разрезных балок могут быть разными (рис. 5.1).

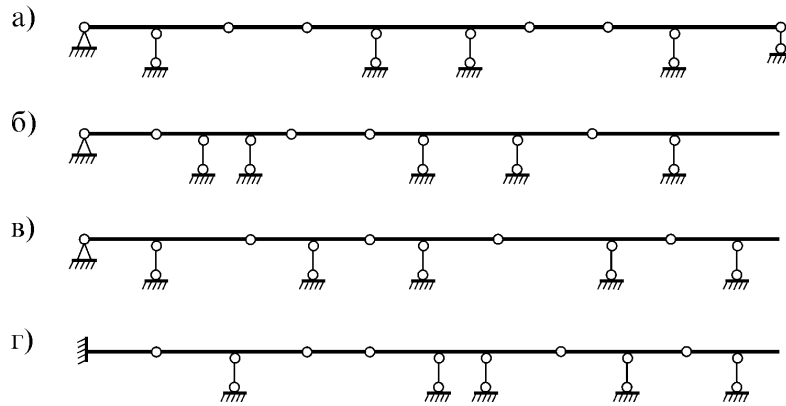


Рис. 5.1

Для геометрической неизменяемости и статической определимости разрезных балок должно выполняться условие

$$n_{ш} = n_{C_0} - 3.$$

Взаимодействие частей разрезной балки легче изучать путем составления их этажных схем. Для этого выявляются те части балки, которые могут самостоятельно нести внешнюю нагрузку (назовем их *главными балками*). Все главные балки изображаются на нижнем этаже. Те части балки, которые примыкают к главным балкам и могут нести нагрузку только при опирании на главные балки (*подвесные балки*), изображаются выше и т.д. В результате получается этажная схема балки.

Например, рассмотренные на рис. 5.1 разрезные балки можно представить в виде следующих этажных схем (рис. 5.2).

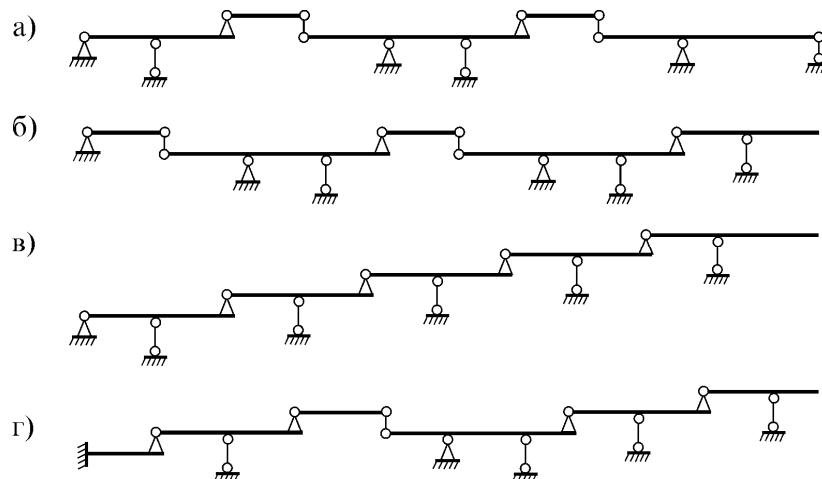


Рис. 5.2

Расчет разрезных балок начинается с самого верхнего этажа: определяются опорные реакции и внутренние усилия этой части балки от ее нагрузки. После этого переходим к нижележащему этажу. Однако, кроме своей нагрузки, к нему следует приложить и давление от вышележащего этажа (которое равно реакции вышележащего этажа, но направлено в противоположную сторону). Затем определяются его реакции и внутренние усилия. Расчет продолжается до самого нижнего этажа.

Рассмотрим пример (рис. 5.3 а). Вначале строим этажную схему (рис. 5.3 б), проводим расчет подвесной балки (рис. 5.3 в), а затем главной балки (рис. 5.3 г). Полученные эпюры для отдельных частей балки объединяем в общие эпюры M и Q (рис. 5.3 д, е).

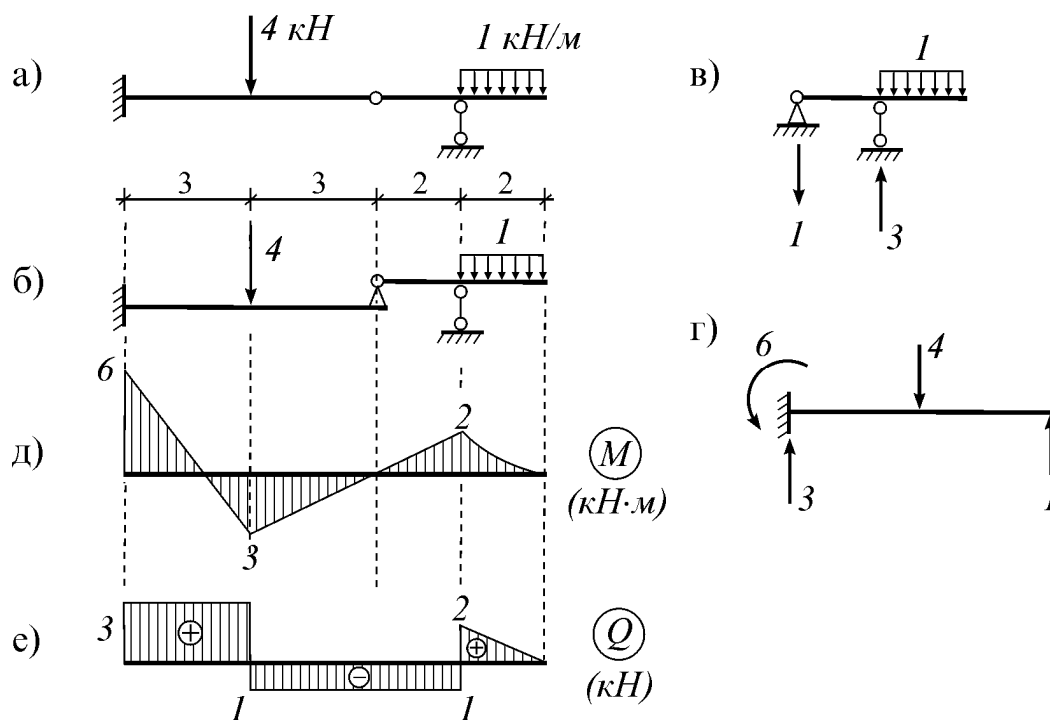


Рис. 5.3

2. Расчет трехшарнирных систем

Трехшарнирная система – это система из двух дисков, связанных между собой и основанием тремя шарнирами. Есть трехшарнирные системы двух видов: арочные (рис. 5.4 а) и подвесные системы (рис. 5.4 б).

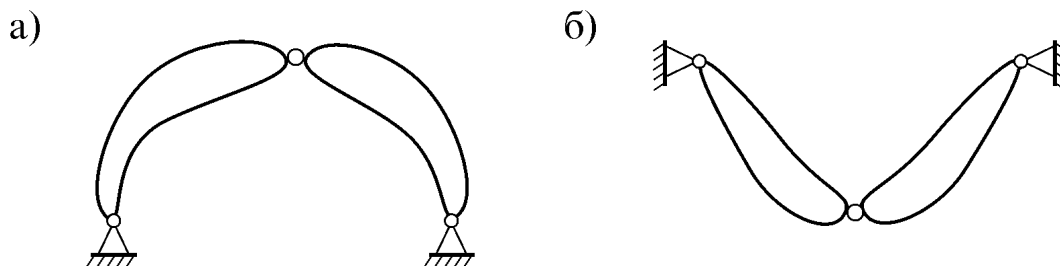


Рис. 5.4

Их расчет мало отличается друг от друга. Поэтому остановимся на арочных системах, которые бывают трех типов: трехшарнирные рамы (рис. 5.5 а), трехшарнирные арочные фермы (рис. 5.5 б) и трехшарнирные арки (рис. 5.5 в):

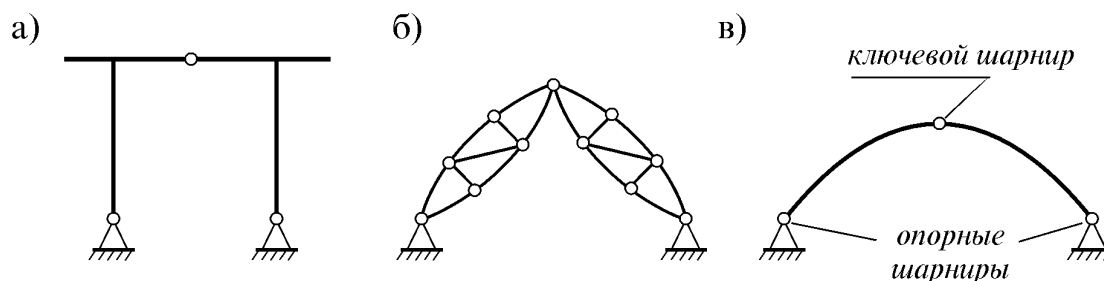


Рис. 5.5

Особенность трехшарнирных систем состоит в том, что в них возникает распор (боковое давление) даже от вертикальной нагрузки. Опорные реакции таких систем можно определять методом совместных сечений (рис. 5.6 а). В результате проведения двух сечений *I-I* и *II-II* появляются две независимые части с шестью неизвестными (четыре опорные реакции R_A , R_B , H_A , H_B и две междисковые реакции X_C , Y_C (рис. 5.6 б).

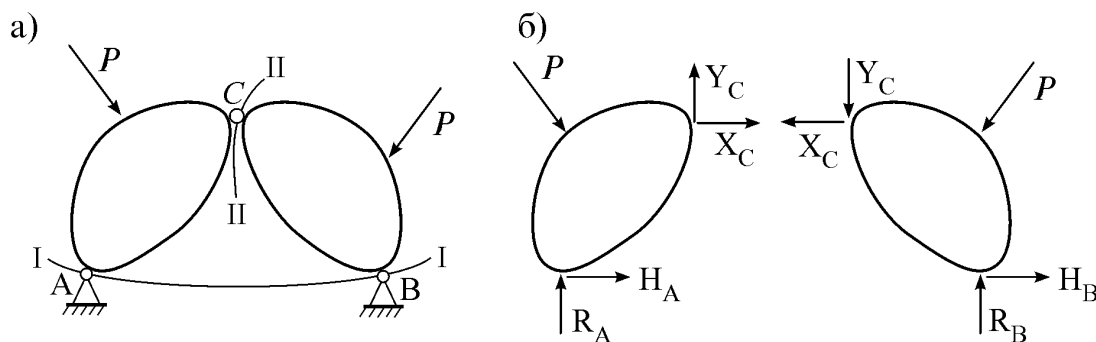


Рис. 5.6

Составив для каждого диска по три уравнения равновесия (всего шесть уравнений), можно определить все эти реакции. Далее каждый диск рассчитывается самостоятельно.

3. Расчет трехшарнирной арки

Рассмотрим расчет трехшарнирной арки произвольного очертания.

При расчете арок назначаются несколько характерных сечений, определяемых делением пролета арки на несколько частей. К ним добавляются точки приложения нагрузок и расположения шарниров. Если известны длина пролета l и стрела подъема f параболической арки или радиус кривизны R круговой арки, необходимые для дальнейшего расчета геометрические параметры арки определяются путем вычислений. Если ось арки определяется другой кривой, то ее геометрические параметры

(координаты сечений x_i и y_i , углы наклона касательной к оси арки в этих точках φ_i , а также значения $\sin\varphi_i$ и $\cos\varphi_i$ должны быть известными).

При действии на арку только вертикальных сил, ее можно рассчитать и без расчленения на отдельные диски. Для этого следует сравнить арку (рис. 5.7 а) с вспомогательной балкой такого же пролета (рис. 5.7 б).

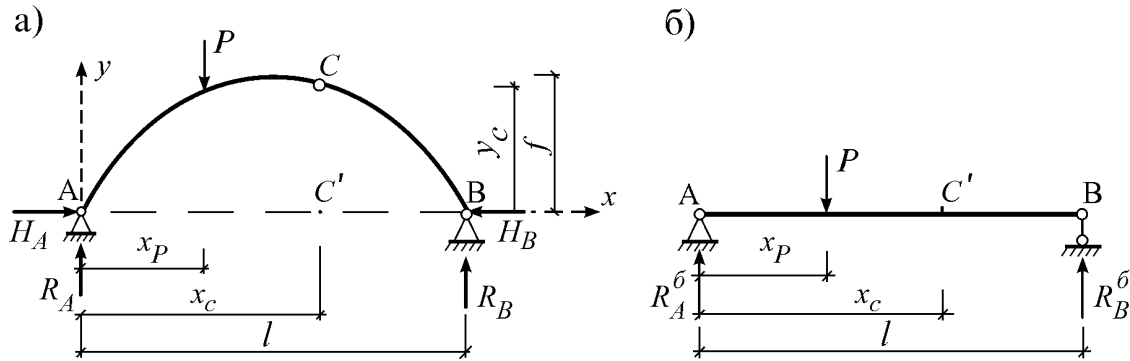


Рис. 5.7

Вначале составим уравнения моментов для обеих систем:

$$\text{для арки: } \Sigma M_A = R_B l - P x_p = 0; \quad \Sigma M_B = -R_A l - P(l - x_p) = 0.$$

$$\text{для балки: } \Sigma M_A = R_B^0 l - P x_p = 0; \quad \Sigma M_B = -R_A^0 l - P(l - x_p) = 0.$$

Сравнивая их между собой замечаем, что $R_B = R_B^0$, $R_A = R_A^0$.

Так как $\Sigma X = H_A - H_B = 0$, то $H_A = H_B = H$, где H – величина распора арки. Для ее определения вычислим момент сил слева от ключевого шарнира C

$$\Sigma M_C^{\text{лев}} = -R_A x_C + P(x_C - x_p) + H y_C = 0$$

и момент от левых сил балки в точке C'

$$M_{C'}^0 = R_A x_C - P(x_C - x_p).$$

С учетом последнего выражения, уравнение для арки примет вид

$$M_{C'}^0 + H y_C = 0.$$

Отсюда получается формула для распора:

$$H = M_{C'}^0 / y_C.$$

Теперь определим внутренние усилия. Для этого применим метод сечений и для арки, и для балки, рассмотрев их левые части (рис. 5.8 а, б).

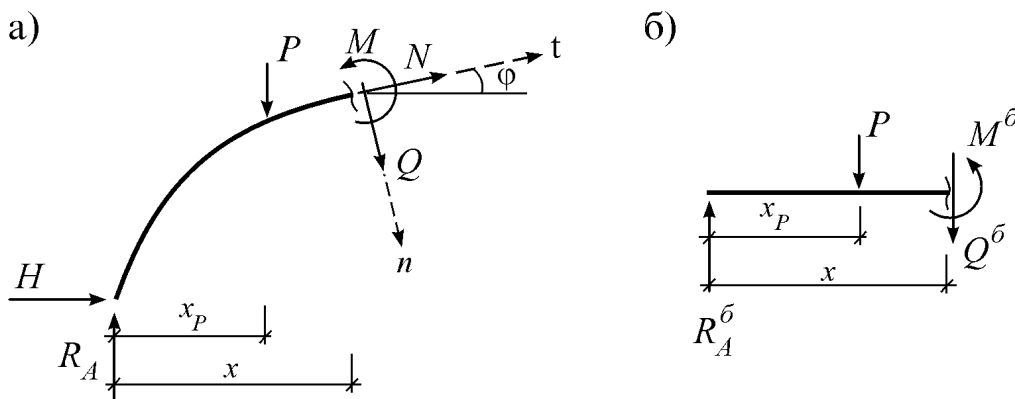


Рис. 5.8

Для арки:

$$M(x) = R_A x - P(x - x_P) - Hy(x).$$

Для балки:

$$M^0(x) = R_A x - P(x - x_P).$$

Заметим, что начальная часть формулы для арки совпадает с формулой для балки. Поэтому можно записать:

$$M(x) = M^0(x) - Hy(x).$$

Как видим, момент в арке меньше момента в балке.

Здесь следует отметить, что момент, растягивающий нижнее волокно арки, считается положительным.

Определим поперечные и продольные силы. Для этого спроецируем силы, указанные на рис. 5.8 а, на направления касательной t и нормали n в сечении:

$$\Sigma n = Q(x) + H \sin \varphi + (P - R_A) \cos \varphi = 0;$$

$$\Sigma t = N(x) + H \cos \varphi + (R_A - P) \sin \varphi = 0.$$

Так как в левой части балки (рис. 5.8 б) $Q^0(x) = R_A - P$, то из этих уравнений вытекают формулы:

$$Q(x) = Q^0(x) \cos \varphi - H \sin \varphi;$$

$$N(x) = -[Q^0(x) \sin \varphi + H \cos \varphi].$$

Если на арку кроме вертикальных сил действуют и горизонтальные силы, то в формулах для внутренних усилий вместо H следует учитывать сумму всех горизонтальных сил, лежащих слева от сечения.

Эпюры внутренних усилий M , Q , N арки строят в двух видах: или на оси арки, или на оси балки.

В о п р о с ы

1. Как строится этажная схема разрезной балки?
2. Чем отличаются арочная и подвесная системы?
3. В чем главная особенность трехшарнирных систем?
4. Как определяются распор и внутренние усилия в сечениях арки?
5. Как строятся эпюры внутренних усилий арки?

Л е к ц и я 6

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ

Подвижной нагрузкой называется нагрузка, движущаяся по сооружению с некоторой скоростью. К примеру, таковой является транспорт, движущийся по мосту (рис. 6.1 а). Его можно рассматривать как систему взаимосвязанных параллельных сил, движущихся по сооружению (рис. 6.1 б).

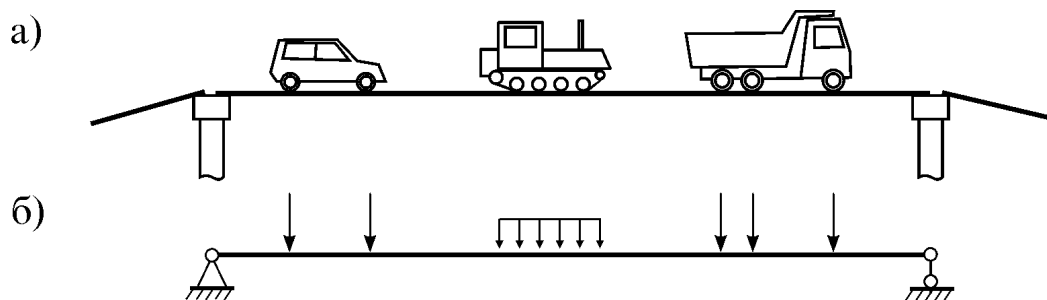


Рис. 6.1

1. Методы расчета сооружений на подвижную нагрузку

Подвижная нагрузка вызывает в элементах сооружения переменные внутренние усилия. Расчет сооружения на подвижную нагрузку, даже без учета динамических эффектов (например, ускорений и инерционных сил), сложнее расчета на постоянную нагрузку. Потому что приходится решать несколько задач:

- определять наиболее опасное (расчетное) положение нагрузки;
- определять наибольшее (расчетное) значение этой нагрузки;
- рассчитывать сооружение на расчетную нагрузку.

Расчет на подвижную нагрузку можно вести двумя методами.

Общий метод. *Сущность метода:*

- подвижная нагрузка рассматривается целиком и обозначается одной координатой;
 - искомое внутреннее усилие выражается как функция координаты нагрузки; эта функция исследуется на экстремум и определяется расчетное положение нагрузки;
 - затем вычисляется расчетное значение внутреннего усилия.
- Этот метод универсален, но сложен для реализации.

Метод линий влияния. *Сущность метода:*

- искомая величина (внутреннее усилие, реакция и др.) определяется как функция от подвижной единичной силы;
- строится график этой функции;
- находятся расчетное положение и расчетное значение этой величины.

Метод линий влияния более прост для реализации, позволяет достаточно просто определять расчетное положение нагрузки и ее величину. Поэтому остановимся на нем.

Линия влияния (ЛВ) – это график зависимости искомой величины от подвижной единичной силы $P=1$.

Понятия линии влияния и эпюры нельзя путать, потому что эпюра показывает значение внутреннего усилия для всех точек (сечений) от постоянной нагрузки, а линия влияния показывает значение внутреннего усилия от подвижной единичной силы $P=1$ только для одного сечения.

2. Построение линий влияния усилий простой балки

Рассмотрим консольную балку, на которую действует подвижная нагрузка $P=l$ (рис. 6.2 а).

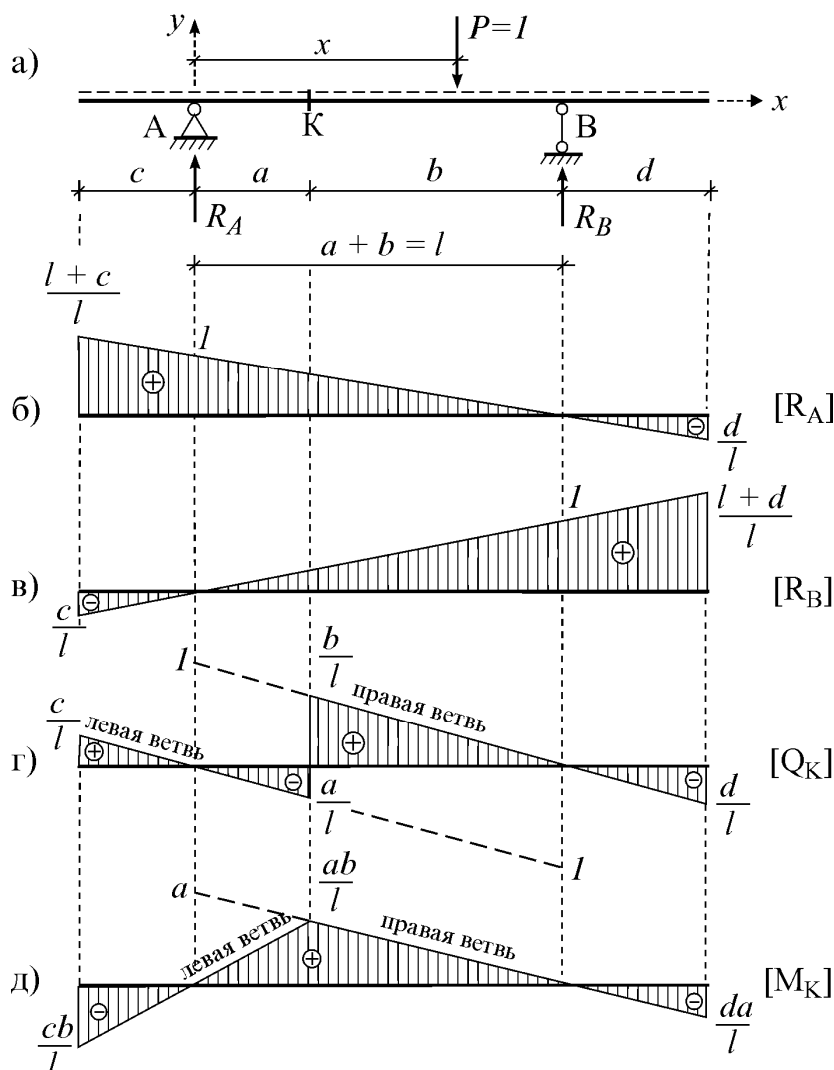


Рис. 6.2

1) Линии влияния опорных реакций

Сумма моментов в правой опоре:

$$\sum M_B = -R_A \cdot l + l \cdot (l - x) = 0.$$

Откуда $R_A = \frac{l-x}{l}$.

Для построения графика этой функции найдем положение двух точек:

если $x=0$, то $R_A=l$; если $x=l$, то $R_A=0$.

Через эти точки проводим прямую и строим ЛВ реакции R_A (рис. 6.2 б).

Для определения правой опорной реакции составим уравнение

$$\sum M_A = R_B \cdot l - l \cdot x = 0.$$

Отсюда $R_B = \frac{x}{l}$.

Если $x=0$, то $R_B=0$; если $x=l$, то $R_B=l$. Через эти точки проводим прямую и строим ЛВ реакции R_B (рис. 6.2 в).

2) Линии влияния поперечной силы и момента

Они зависят от положения сечения, в котором определяются.

а) Единичная сила правее сечения K

В этом случае $Q_K = R_A$, $M_K = R_A \cdot a$.

Эти функции определяют **правые ветви ЛВ** поперечной силы и момента в сечении K (рис. 6.2 г, д).

б) Единичная сила левее сечения K

В этом случае внутренние усилия легко выражаются через правую опорную реакцию: $Q_K = -R_B$, $M_K = R_B \cdot b$. Эти функции определяют **левые ветви ЛВ** поперечной силы и момента в сечении K (рис. 6.2 г, д).

Если сечение располагается на консольных (левой или правой) частях балки (рис. 6.3 а), ЛВ поперечной силы и момента будут совсем другими. Результаты их построения для двух сечений K_1 и K_2 даны на рис. 6.3 б-д.

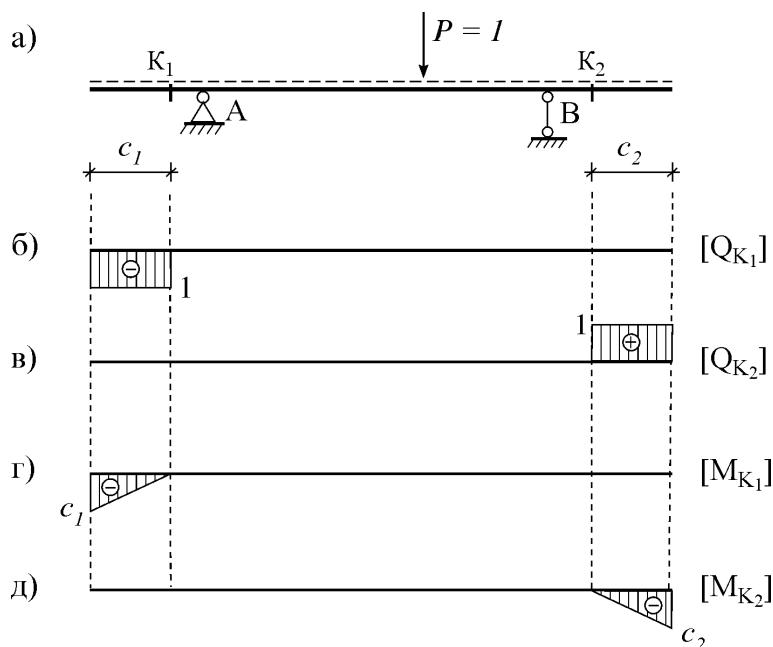


Рис. 6.3

В некоторых расчетных схемах (например, в этажных схемах разрезной балки) встречаются консоли с заделками справа или слева. ЛВ их усилий можно получить без расчетов, используя левые и правые части линий влияния на рис. 6.3 б-д, считая, что в точках A и B имеются заделки.

Полученные здесь ЛВ опорных реакций и внутренних усилий используются как известные решения при расчете аналогичных балок и как промежуточные решения при расчете многопролетных балок.

3. Построение линий влияния кинематическим методом

В основе кинематического метода лежит известный в теоретической механике **принцип возможных перемещений**: для того чтобы механическая система находилась в равновесии, необходимо чтобы сумма работ всех сил на их возможных перемещениях равнялась нулю.

Рассмотрим применение этого метода на примере построения ЛВ опорной реакции R_B консольной балки (рис. 6.4 а). Для этого опоре B балки с единичной силой $P=1$ дадим малое перемещение δ_B в направлении реакции R_B (рис. 6.4 б). По принципу возможных перемещений, сумма работ всех сил балки на возможных перемещениях (рис. 6.4 б) равна нулю:

$$-1 \cdot \delta_P + \delta_B \cdot R_B = 0.$$

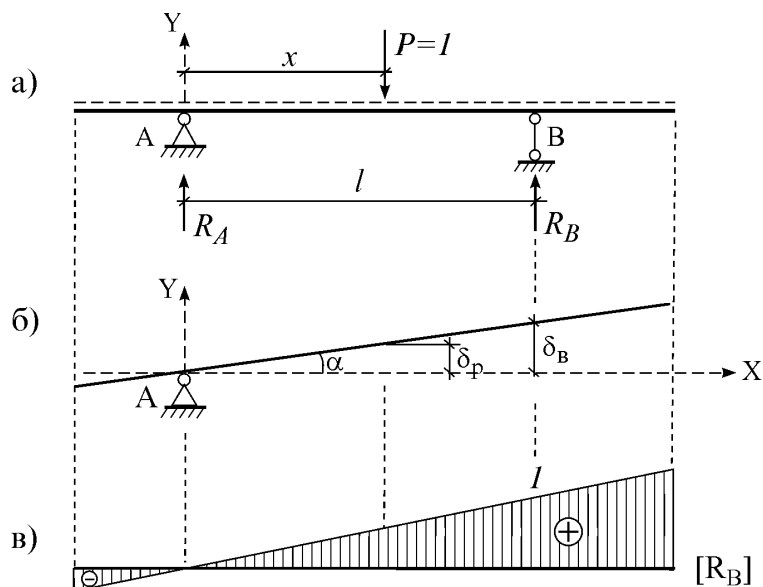


Рис. 6.4

По рис. 6.4 б имеем: $\delta_P = x \cdot \operatorname{tg} \alpha = x \cdot \frac{\delta_B}{l}$. С учетом этого предыдущая формула принимает вид $R_B = \frac{x}{l}$, которая определяет искомую ЛВ R_B (рис. 6.4 в). Она совпадает с полученной ранее (рис. 6.2 в).

Кинематический метод, как более сложный статического метода (в нем надо вычислять перемещения), обычно используется лишь для проверки общего вида ЛВ, полученного статическим методом.

Например, для получения общего вида линии влияния Q_K консольной балки на рис. 6.2 а удаляем связь в точке K и образуем механизм (рис. 6.5 а) с одной степенью свободы. Задавая малые перемещения в направлении Q_K слева и справа от сечения, строим новое положение балки, которое и покажет общий вид ЛВ Q_K (рис. 6.5 б). Аналогично поступаем и при получении общего вида ЛВ M_K (рис. 6.5 в, г).

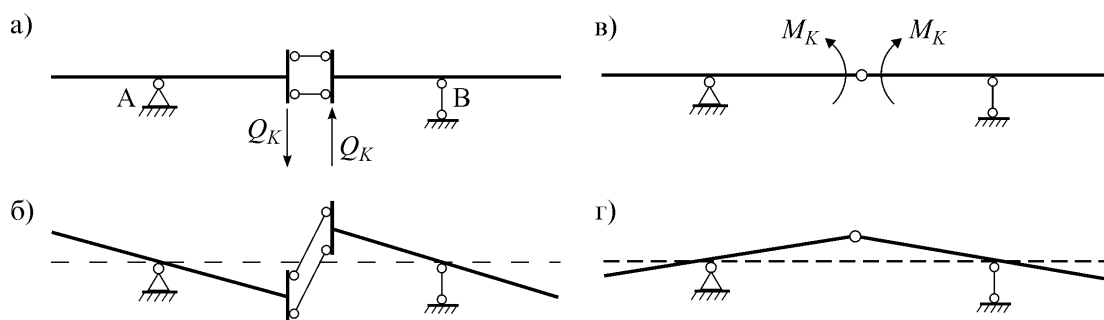


Рис. 6.5

4. Построение ЛВ при узловой передаче нагрузки

В некоторых сооружениях нагрузка на их несущую часть может передаваться через вспомогательные балки. Например, такая конструктивная схема часто используется в мостах: там на главную балку накладываются поперечные балки, а на них – настил (рис. 6.6 а). В таких сооружениях нагрузка на главные балки передается через узлы пересечения главной балки с поперечными балками.

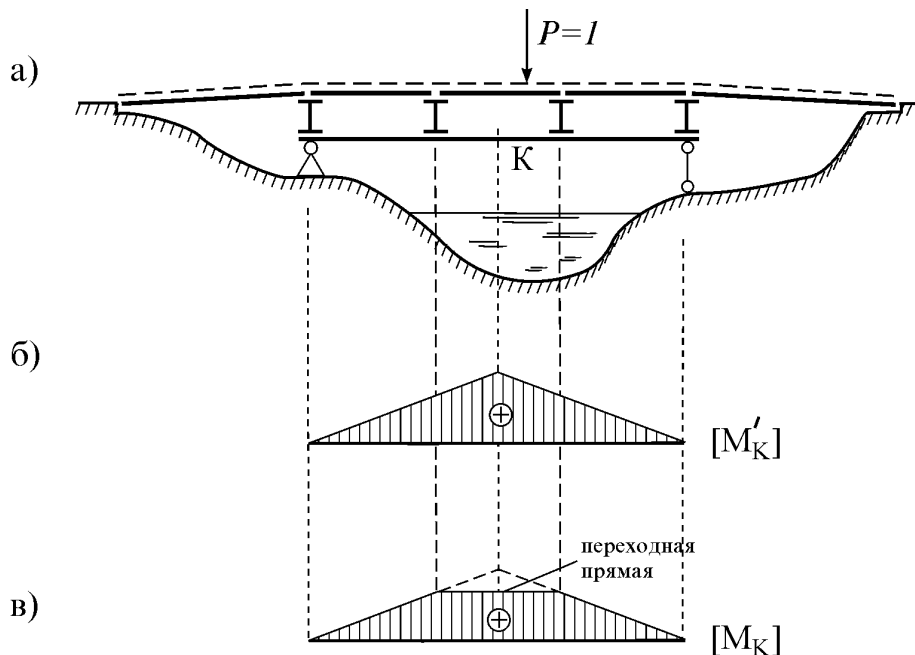


Рис. 6.6

Если бы нагрузка действовала только на главную балку, ЛВ M_K была бы как на рис. 6.6 б. Поэтому, когда единичная сила находится над поперечными балками, ординаты ЛВ будут такими же. Если же единичная сила будет между поперечными балками, ЛВ сглаживается (рис. 6.6 в).

5. Определение усилий по ЛВ

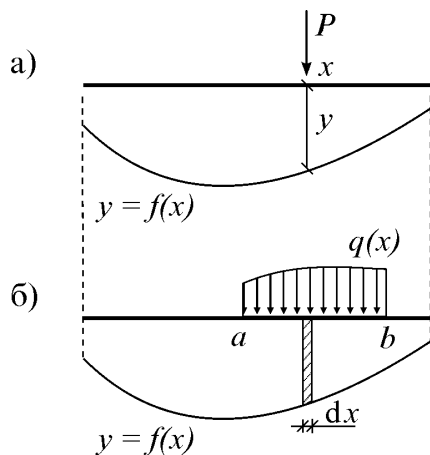


Рис. 6.7

Пусть ЛВ какого-то усилия S определяется уравнением $y=f(x)$. По ее графику можно определять усилие S от произвольной нагрузки.

а) Действие сосредоточенной силы (рис. 6.7 а). Если система упругая, то внутреннее усилие прямо пропорционально нагрузке. Поэтому $S=Py$. Когда же действуют несколько сил P_i , то внутреннее усилие определится по принципу суперпозиции:

$$S = \sum P_i y_i.$$

б) Действие распределенной нагрузки (рис. 6.7 б). Если рассматривать элементарную силу $q(x)dx$ как сосредоточенную силу, то

$$S = \int_a^b q(x) y dx.$$

Когда же распределенная нагрузка постоянна, т.е. $q(x) = q = const$, то

$$S = q \int_a^b y dx = q \omega.$$

Здесь ω – площадь ЛВ в области действия распределенной нагрузки.

Если на сооружение действует несколько сил и распределенных нагрузок, по принципу суперпозиции получаем

$$S = \sum P_i y_i + \sum q_j \omega_j.$$

В о п р о с ы

1. Что такое линия влияния и чем она отличается от эпюры?
2. Как выглядят линии влияния опорных реакций консольной балки?
3. Как получить общий вид линии влияния кинематическим методом?
4. Чем отличается ЛВ при узловой передаче нагрузки?
5. Как по линии влияния определяется усилие от постоянной нагрузки?

Л е к ц и я 7

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ (продолжение)

6. Определение невыгоднейшего положения нагрузки

При расчете сооружений на подвижную нагрузку часто требуется определять наибольшее значение внутреннего усилия, которое достигается в некотором положении этой нагрузки, называемом **невыгоднейшим (критическим)** положением. Однако решение такой задачи связано с поиском экстремума функции от многих параметров. Поэтому рассмотрим лишь достаточно простой случай движения связанных сосредоточенных грузов (рис. 7.1 а), когда ЛВ усилия имеет вид треугольника (рис. 7.1 б).

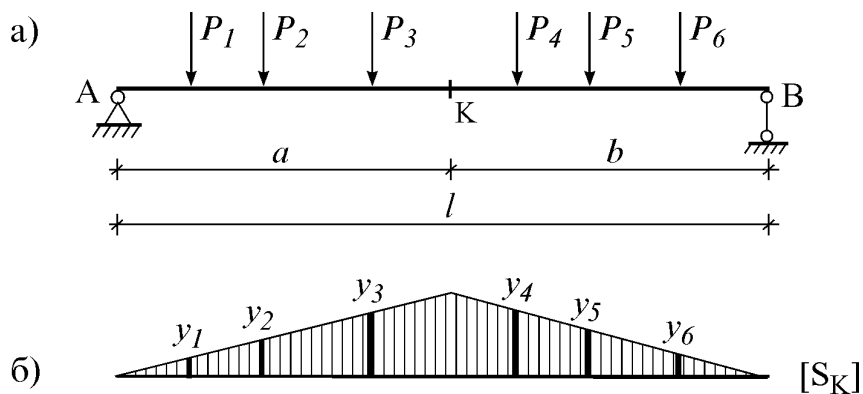


Рис. 7.1

Невыгоднейшее положение такой нагрузки определяется поочередной подстановкой сил в сечение K и проверкой выполнения двух неравенств

$$\boxed{\times} \quad ; \quad R_{лев} / a \leq (P_{кр} + R_{пр}) / b.$$

Здесь $R_{лев}$ и $R_{пр}$ – равнодействующие сил, расположенных левее и правее от сечения K , $P_{кр}$ – критическая сила, установленная в сечении K (в вершину ЛВ).

7. Понятие о матрице влияния

Матричная форма представления данных является эффективной на разных этапах расчета сооружений. Так, при расчете на многовариантное воздействие нагрузки, полезно вводить матрицу влияния, элементами которой являются ординаты линий влияния. Матрица влияния позволяет определять внутренние силы сразу в нескольких сечениях.

Например, для построения матрицы влияния изгибающих моментов балки, имеющей n сечений (рис. 7.2 а), необходимо иметь n линий влияния моментов $[M_1]$, $[M_2]$, ..., $[M_n]$ с известными ординатами y_{ij} (рис. 7.2 б, в, г). Здесь i – номер ЛВ, j – номер сечения.

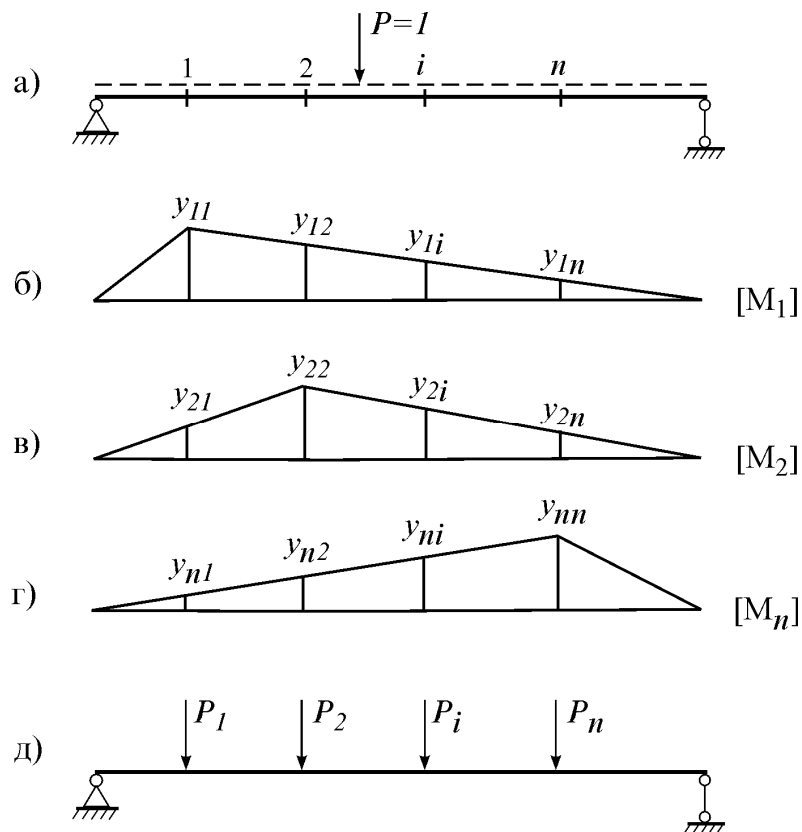


Рис. 7.2

Объединяя ординаты в единую матрицу, получаем матрицу влияния

$$\mathbf{L}_M = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix}.$$

Она позволяет определять моменты во всех сечениях балки по формуле

$$\{M_1 \ M_2 \ \dots \ M_n\} = L_M \mathbf{P},$$

где $\mathbf{P} = \{P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n\}$ – вектор действующих на балку n сил P_1, P_2, \dots, P_n (рис. 7.2 д).

8. Построение ЛВ усилий фермы

Рассмотрим ферму (рис. 7.3 а). При воздействии только вертикальной нагрузки, ее опорные реакции будут такими же как у вспомогательной балки (рис. 7.3 б). Поэтому ЛВ опорных реакций фермы будут аналогичны ЛВ балки (рис. 7.3 в, г).

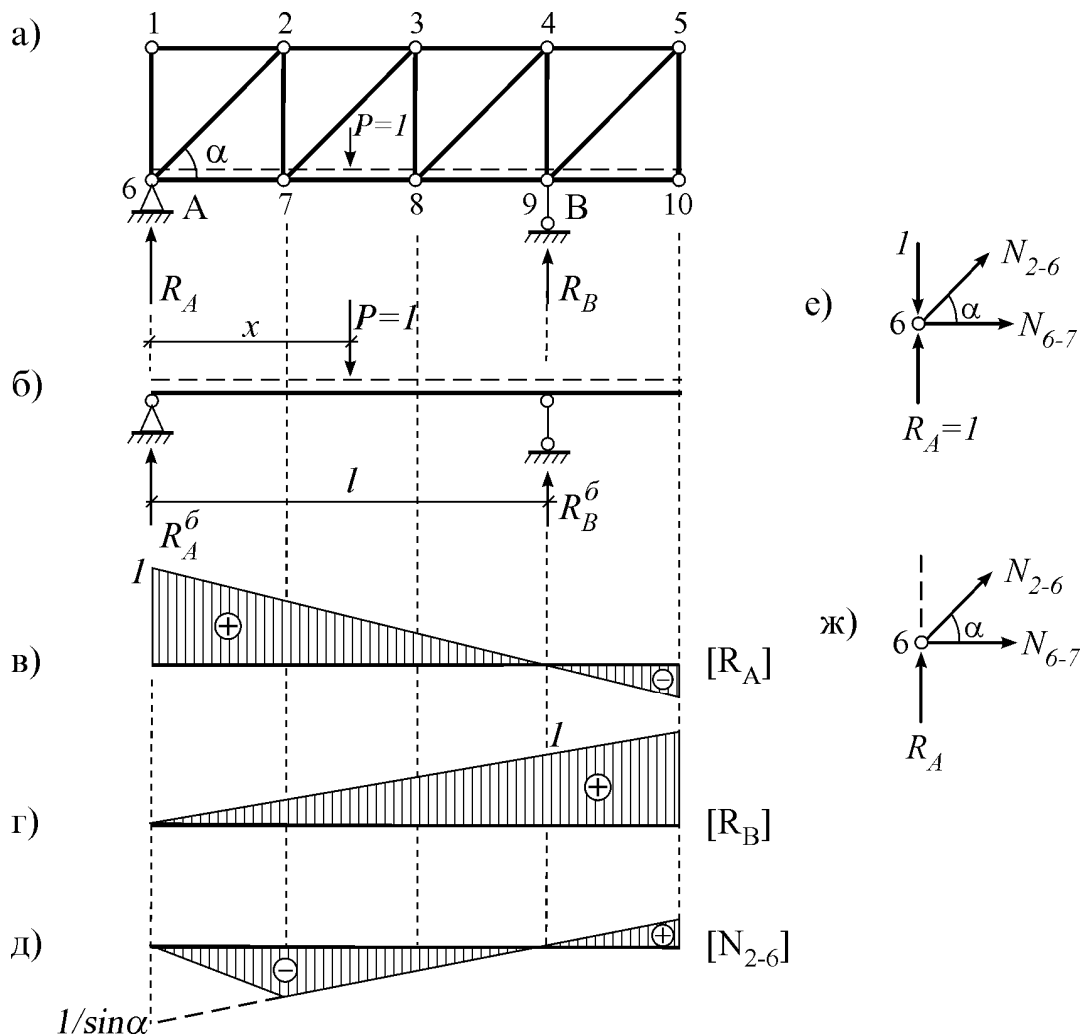


Рис. 7.3

При построении ЛВ продольных усилий фермы воспользуемся методами вырезания узлов и сквозных сечений.

а) Использование метода вырезания узлов

Для построения ЛВ N_{2-6} вначале рассмотрим узел 1. Так как к нему силы не приложены, то по признаку 1 (стр. 25) $N_{1-6}=0$.

После этого вырежем узел 6 фермы. Здесь могут быть два случая:

1) когда единичная сила $P=1$ находится в этом узле (рис. 7.3 е), то

$$\Sigma Y = N_{2-6} \sin \alpha + 1 - 1 = 0. \text{ Отсюда } N_{2-6} = 0.$$

2) когда единичная сила $P=1$ находится вне этого узла (рис. 7.3 ж), то

$$\Sigma Y = N_{2-6} \sin \alpha + R_A = 0. \text{ Отсюда } N_{2-6} = -\frac{1}{\sin \alpha} \cdot R_A.$$

Тогда, используя ЛВ опорной реакции R_A , можно построить ЛВ усилия N_{2-6} (рис. 7.3 д).

б) Использование метода сквозных сечений

Поперек фермы проведем сквозное сечение I-I (рис. 7.4 а) и получим независимые левые и правые части. Единичная сила $P=1$ может находиться в обеих частях фермы.

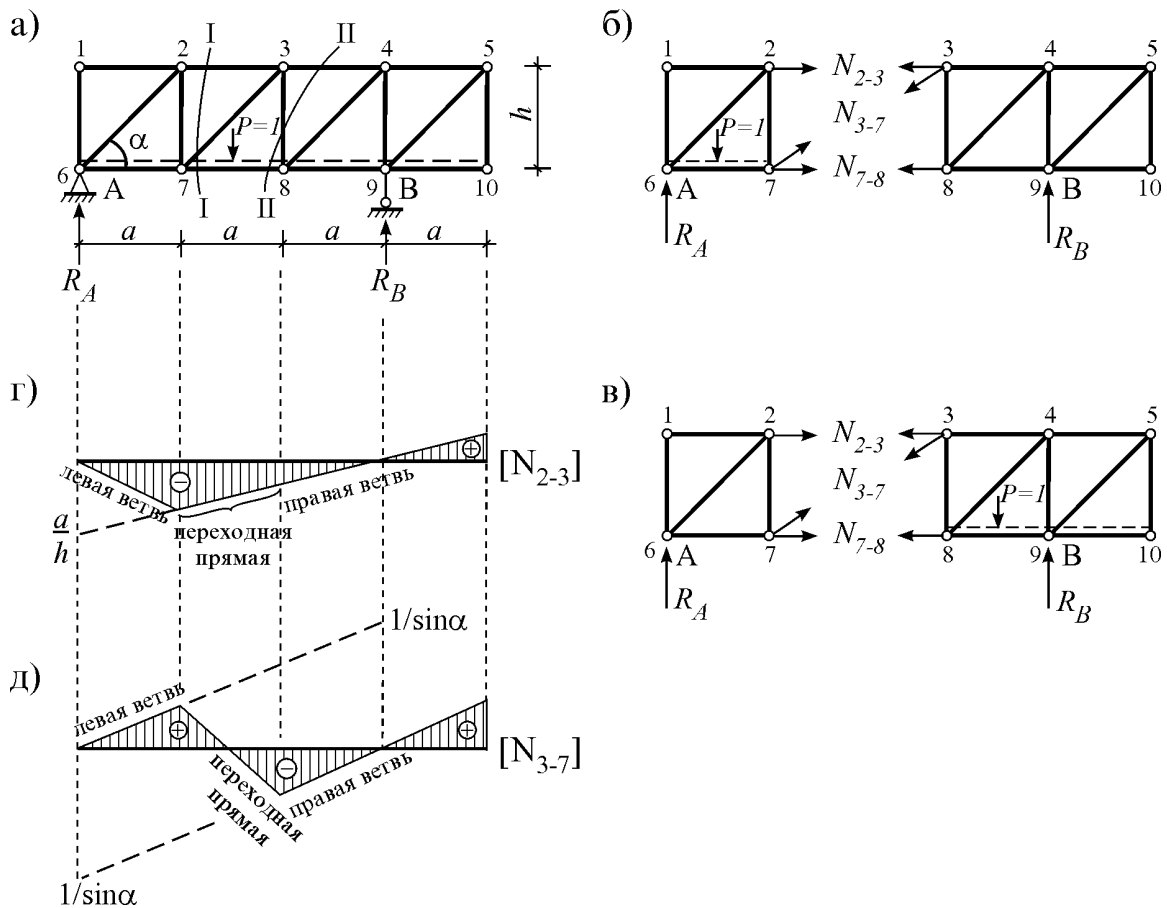


Рис. 7.4

1) Единичная сила левее сечения (рис. 7.4 б):

$$\Sigma M_7^{np} = N_{2-3} h + R_B 2a = 0. \quad \text{Отсюда } N_{2-3} = -2 \frac{a}{h} R_B;$$

$$\Sigma Y^{np} = -N_{3-7} \sin \alpha + R_B = 0. \quad \text{Отсюда } N_{3-7} = \frac{1}{\sin \alpha} R_B.$$

2) Единичная сила правее сечения (рис. 7.4 в):

$$\Sigma M_7^{лев} = -N_{2-3} h - R_A a = 0. \quad \text{Отсюда } N_{2-3} = -\frac{a}{h} R_A;$$

$$\Sigma Y^{лев} = N_{3-7} \sin \alpha + R_A = 0. \quad \text{Отсюда } N_{3-7} = -\frac{1}{\sin \alpha} R_A.$$

В первом случае определяются ординаты ЛВ этих усилий между узлами 6-7, т.е. определяются их левые ветви, а во втором случае определяются ординаты обоих ЛВ между узлами 8-10, т.е. правые ветви ЛВ. Соединив точки между узлами 7-8, получаем переходную прямую и окончательный вид ЛВ (рис. 7.4 г, д).

Как видно из этих примеров, у ЛВ продольных усилий фермы есть следующие свойства: *ветви ЛВ пересекаются под моментной точкой; если же моментной точки нет, ветви ЛВ параллельны.*

В о п р о с ы

1. Что такое невыгоднейшее положение нагрузки?
2. Что такое матрица влияния и для чего она применяется?
3. Какие способы используются при построении ЛВ усилий фермы?

Л е к ц и я 8

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

1. Понятие о перемещениях

При воздействии нагрузки, температуры и других факторов сооружение меняет свою форму, а его точки получают перемещения.

Перемещение – векторная величина. Перемещение любой точки на плоскости можно задать через его модуль и направление. Например, вектор перемещения $\overline{AA'} = \vec{\Delta}_A$ точки A рамы в точку A' (рис. 8.1 а) определяется через его модуль Δ_A и угол (направление) φ_A (рис. 8.1 б). А эти величины можно определять через горизонтальную и вертикальную составляющие Δx_A и Δy_A вектора перемещения $\vec{\Delta}_A$:

$$\Delta_A = \sqrt{(\Delta x_A)^2 + (\Delta y_A)^2}, \quad \varphi_A = \arctg \frac{\Delta y_A}{\Delta x_A}.$$

Поступательные перемещения Δ_A , Δx_A , Δy_A будем называть **линейными перемещениями**, а φ_A – **угловым перемещением**.

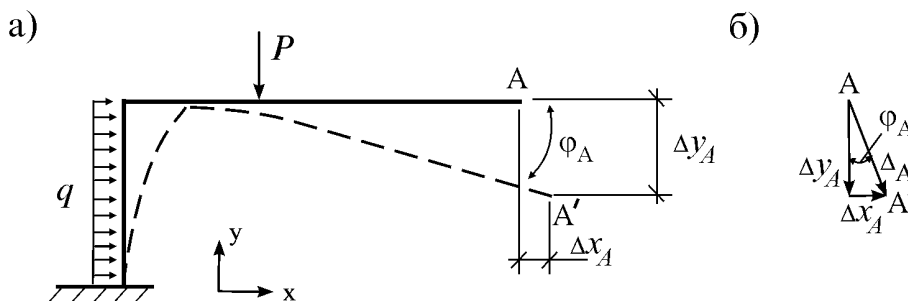


Рис. 8.1

Методы определения перемещений основаны на определении работ внешних и внутренних сил. В механике рассматриваются два вида таких работ – действительные и возможные работы.

2. Действительные работы внешних и внутренних сил. Потенциальная энергия

Действительным перемещением называется перемещение, вызванное силой по направлению ее действия (рис. 8.2 а). В упругих системах перемещение Δ прямо пропорционально действующей силе и выполняется закон Гука

$$\Delta = \delta P,$$

где коэффициент δ называется **податливостью**.

Эта зависимость представляется в виде диаграммы $\Delta - P$ (рис. 8.2 б).

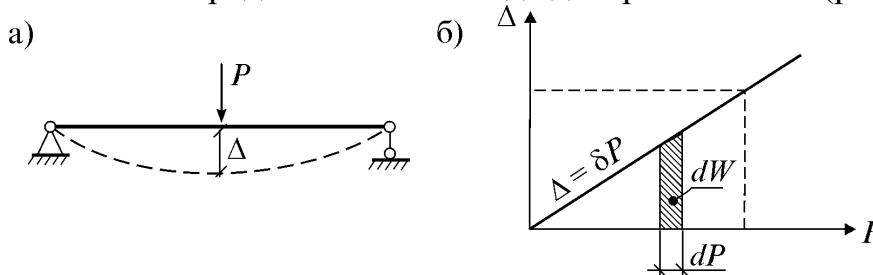


Рис. 8.2

Действительной работой называется работа силы на ее действительном перемещении.

Действительную работу силы P можно найти по рис. 8.2 б:

$$W = \int_0^P dW = \frac{1}{2} P \Delta.$$

Эта формула определяет **теорему Клапейрона**: сила, действующая на упругую систему, совершает работу, равную половине произведения силы на ее перемещение.

Используя закон Гука, получаем

$$W = \frac{1}{2} \delta P^2 \geq 0.$$

Из формулы следует, что **внешняя сила совершает положительную работу**.

Если на систему действуют несколько сил, по принципу суперпозиции

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_{Pk}.$$

В идеально-упругой системе предполагается, что работа внешних сил W полностью переходит в потенциальную энергию деформации U :

$$W = U.$$

Если убрать внешние силы, упругая система возвратится в исходное положение. Эту работу совершают внутренние силы. Так как работа внешних сил W всегда положительна, то работа внутренних сил V будет отрицательной:

$$W = -V.$$

Теперь вычислим работу внутренних сил стержневой системы.

а) Работа продольной силы N

Пара продольных сил N , действующих на элемент dx , приводит к его чистому растяжению (рис. 8.3 а).

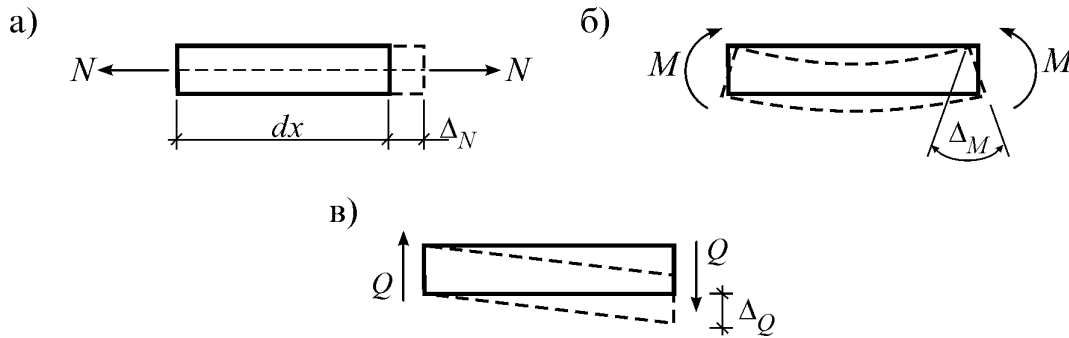


Рис. 8.3

По теореме Клапейрона эти силы на общей деформации элемента (действительном перемещении) Δ_N совершают действительную работу

$$-dV_N = \frac{1}{2} N \cdot \Delta_N.$$

С учетом закона Гука при растяжении $\Delta_N = \frac{Ndx}{EF}$, получим

$$-dV_N = \frac{N^2}{2EF} dx,$$

где E – модуль Юнга, F – площадь сечения, EF – жесткость на растяжение.

б) Работа изгибающего момента M

Пара изгибающих моментов M , действующих на элемент dx , приводит к его чистому изгибу (рис. 8.3 б). На общей деформации Δ_M эти моменты совершают работу

$$-dV_M = \frac{1}{2} M \cdot \Delta_M.$$

По закону Гука при изгибе $\Delta_M = \frac{Mdx}{EI}$. Поэтому

$$-dV_M = \frac{M^2}{2EI} dx,$$

где I – момент инерции сечения, EI – жесткость на изгиб.

в) Работа поперечной силы Q

Действие пары поперечных сил Q приводит к чистому сдвигу элемента dx (рис. 8.3 в). На общей деформации Δ_Q они совершают работу:

$$-dV_Q = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta_Q.$$

По закону Гука $\Delta_Q = \mu \frac{Qdx}{GF}$. Поэтому

$$-dV_Q = \mu \frac{Q^2}{2GF} dx,$$

где μ – коэффициент формы сечения, GF – жесткость на сдвиг.

Теперь воспользуемся принципом суперпозиции:

$$-dV = -(dV_M + dV_Q + dV_N) = \frac{1}{2} \left(\frac{M^2}{EI} + \mu \frac{Q^2}{GF} + \frac{N^2}{EF} \right) dx.$$

Если проинтегрировать это выражение по всей длине элемента l и учесть наличие в системе n стержней, получим выражение потенциальной энергии всей стержневой системы:

$$U = -V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left(\frac{M^2}{EI} + \mu \frac{Q^2}{GF} + \frac{N^2}{EF} \right) dx.$$

3. Возможные перемещения.

Возможные работы внешних и внутренних сил

Малое перемещение, допускаемое связями системы, называется **возможным перемещением**. Причиной возможного перемещения могут быть другие силы, изменение температуры, осадки опор и др.

Работа силы на ее возможном перемещении называется **возможной работой**. Возможное перемещение обозначим Δ_{ij} , а возможную работу W_{ij} (здесь i означает направление, а j – причину).

Например, если в некоторой точке балки действует сила P_i , а затем в другой точке начнет действовать другая сила P_j , то балка в точке действия силы P_i получит возможное перемещение Δ_{ij} (рис. 8.4 а). Так как в это время сила P_i остается постоянной, совершаемая ею возможная работа определяется площадью прямоугольника (рис. 8.4 б):

$$W_{ij} = P_i \Delta_{ij}.$$

Таким образом, *возможная работа равна произведению силы на возможное перемещение*.

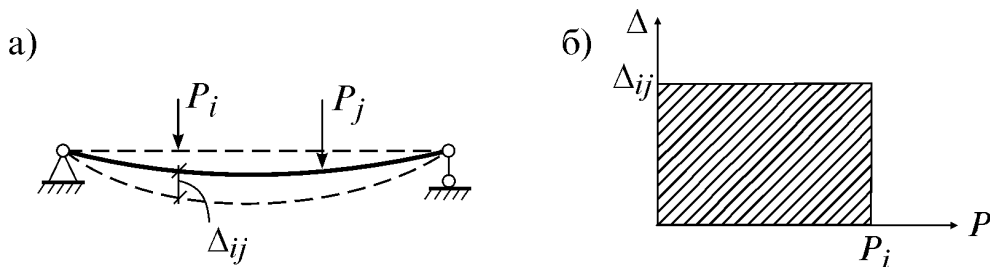


Рис. 8.4

При определении возможной работы следует рассматривать два состояния системы: в одном из них действуют заданные, а во втором – возможные силы.

Теорема Бетти. *Возможная работа сил i -го состояния на перемещениях j -го состояния равна возможной работе сил j -го состояния на перемещениях i -го состояния.*

Доказательство. Пусть на систему воздействуют силы P_i и P_j . Приложим их в разной последовательности и рассмотрим два состояния:

1) прикладывается сила P_i , затем сила P_j (рис. 8.5 а);

2) прикладывается сила P_j , затем сила P_i (рис. 8.5 б).

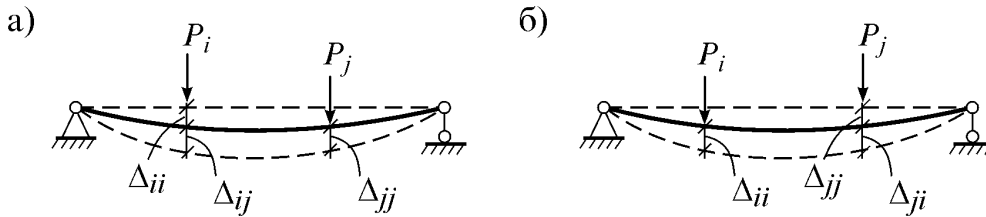


Рис. 8.5

В этих состояниях силы на действительных перемещениях совершают действительные, а на возможных перемещениях – возможные работы. Выражения работ в обоих состояниях будут:

$$W_{ij} = \frac{1}{2} P_i \Delta_{ii} + \frac{1}{2} P_j \Delta_{jj} + P_i \Delta_{ij}; \quad W_{ji} = \frac{1}{2} P_j \Delta_{jj} + \frac{1}{2} P_i \Delta_{ii} + P_j \Delta_{ji}.$$

На основании принципа суперпозиции, результат воздействия этих сил не зависит от порядка их приложения. Следовательно, обе работы равны: $W_{ij} = W_{ji}$. Отсюда получаем

$$P_i \Delta_{ij} = P_j \Delta_{ji}.$$

Теорема доказана. Ее часто называют **теоремой о взаимности работ**.

Теперь определим возможную работу внутренних сил. Для этого рассмотрим два состояния системы:

- 1) действует сила P_i и вызывает внутренние усилия M_i , Q_i , N_i ;
- 2) действует сила P_j , которая в пределах малого элемента dx вызывает возможные деформации

$$\Delta_{M_j} = \frac{M_j}{EI} dx, \quad \Delta_{Q_j} = \mu \frac{Q_j}{GF} dx, \quad \Delta_{N_j} = \frac{N_j}{EF} dx.$$

Внутренние усилия первого состояния на деформациях (возможных перемещениях) второго состояния совершают возможную работу

$$-dV_{ij} = M_i \Delta_{M_j} + Q_i \Delta_{Q_j} + N_i \Delta_{N_j} = \frac{M_i M_j}{EI} dx + \mu \frac{Q_i Q_j}{GF} dx + \frac{N_i N_j}{EF} dx.$$

Если проинтегрировать это выражение по длине элемента l и учесть наличие в системе n стержней, получим формулу возможной работы внутренних сил:

$$-V_{ij} = \sum_{\kappa=1}^n \int_0^l \left(\frac{M_i M_j}{EI} + \mu \frac{Q_i Q_j}{GF} + \frac{N_i N_j}{EF} \right) dx.$$

В о п р о с ы

1. Чему равняется действительная работа плоской стержневой системы?
2. В чем состоит теорема Клапейрона?
3. Как определяется потенциальная энергия стержневой системы?
4. Что такое возможное перемещение?
5. Как формулируется теорема Бетти?
6. Какие состояния рассматриваются при определении перемещений?
7. Как определяются перемещения в рамах и фермах?

Лекция 9

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ (продолжение)

4. Интеграл Мора

Рассмотрим два состояния стержневой системы:

1) *грузовое состояние* (рис. 9.1 а), в котором действующая нагрузка вызывает внутренние усилия M_P, Q_P, N_P ;

2) *единичное состояние* (рис. 9.1 б), в котором действующая единичная сила $P=1$ вызывает внутренние усилия $\bar{M}, \bar{Q}, \bar{N}$.

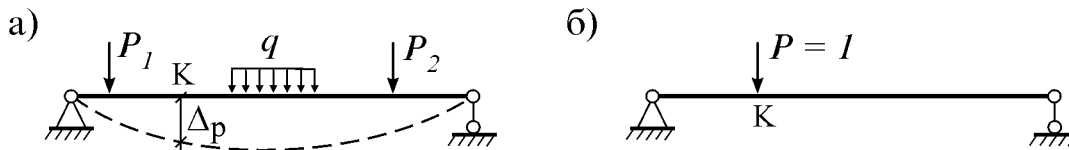


Рис. 9.1

Внутренние силы грузового состояния на деформациях единичного состояния $\frac{\bar{M}}{EI} dx, \frac{\bar{Q}}{EI} dx, \frac{\bar{N}}{EI} dx$ совершают возможную работу

$$-V_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left(\frac{M_P \bar{M}}{EI} + \mu \frac{Q_P \bar{Q}}{GF} + \frac{N_P \bar{N}}{EF} \right) dx.$$

А единичная сила $P=1$ единичного состояния на перемещении грузового состояния Δ_P совершает возможную работу

$$W_{ij} = 1 \cdot \Delta_P = \Delta_P.$$

По известному из теоретической механики принципу возможных перемещений, в упругих системах эти работы должны быть равными, т.е. $W_{ij} = -V_{ij}$. Значит, должны быть равны и правые части этих выражений:

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left(\frac{M_P \bar{M}}{EI} + \mu \frac{Q_P \bar{Q}}{GF} + \frac{N_P \bar{N}}{EF} \right) dx.$$

Эта формула называется **формулой Мора** и используется для определения перемещений стержневой системы от силовой нагрузки.

5. Частные случаи применения формулы Мора

Во многих случаях вместо полной формулы Мора можно использовать ее сокращенные варианты. Это позволяет, без допущения больших погрешностей, существенно сократить объем вычислений.

1. **В балках** (рис. 9.2 а) возможны три случая:

– если $\frac{l}{h} > 8$, в формуле оставляется только слагаемое с моментами:

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{M_P \bar{M}}{EI} dx;$$

– если $5 \leq \frac{l}{h} \leq 8$, учитываются и поперечные силы:

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left(\frac{M_P \bar{M}}{EI} + \mu \frac{Q_P \bar{Q}}{GF} \right) dx;$$

– если $\frac{l}{h} < 5$, формула Мора дает большие погрешности. В этом случае перемещения следует определять методами теории упругости.

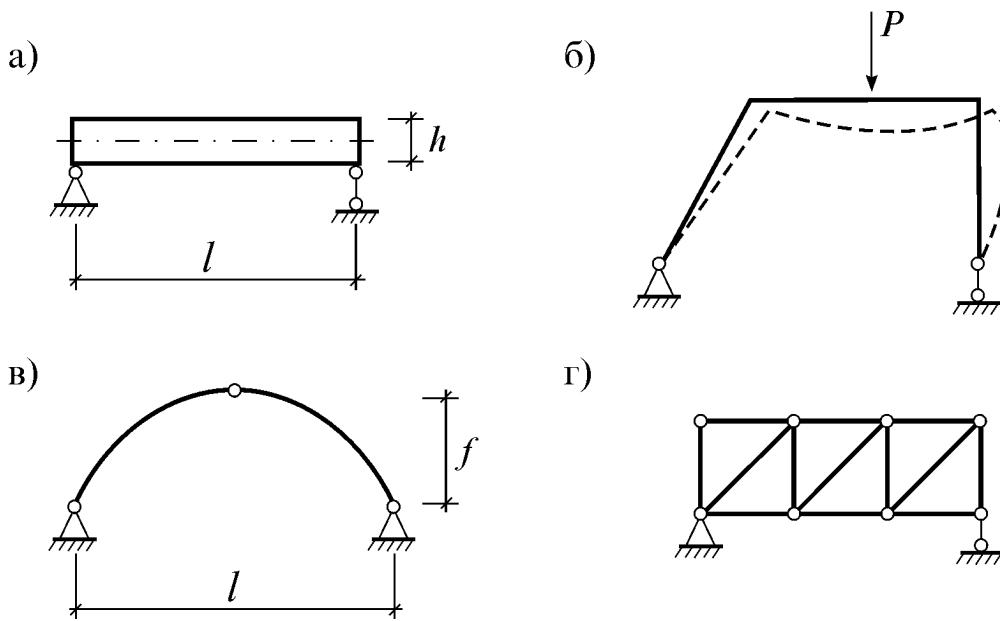


Рис. 9.2

2. **В рамах** (рис. 9.2 б) элементы в основном работают только на изгиб. Поэтому в формуле Мора учитываются только моменты.

В высоких рамах учитывается и продольная сила:

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left(\frac{M_P \bar{M}}{EI} + \frac{N_P \bar{N}}{EF} \right) dx .$$

3. **В арках** (рис. 9.2 в) необходимо учитывать соотношение между основными размерами арки – длиной пролета l и стрелой подъема f :

- 1) если $\frac{l}{f} \leq 5$ (крутая арка), учитываются только моменты;
- 2) если $\frac{l}{f} > 5$ (пологая арка), учитываются моменты и продольные силы.

4. **В фермах** (рис. 9.2 г) возникают только продольные силы. Поэтому

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{N_P \bar{N}}{EF} dx = \sum_{k=1}^n \frac{N_P \bar{N}}{EF} \int_0^{l_k} dx = \sum_{k=1}^n \frac{N_{Pk} \bar{N}_k}{EF_k} l_k .$$

6. Определение перемещений от температуры

Изменение температуры по сравнению с некоторой начальной приводит к тому, что элементы сооружения деформируются и ее точки получают перемещения. Для определения этих перемещений будем пользоваться принципом возможных перемещений.

Рассмотрим простейший элемент – шарнирную балку, температуры верхней и нижней волокон которой изменяются на t_1 и t_2 (рис. 9.3 а). Возникающее при этом температурное перемещение Δ_t по направлению единичной силы $P=1$ совершает возможную работу

$$W_{ij} = I \cdot \Delta_t = \Delta_t.$$

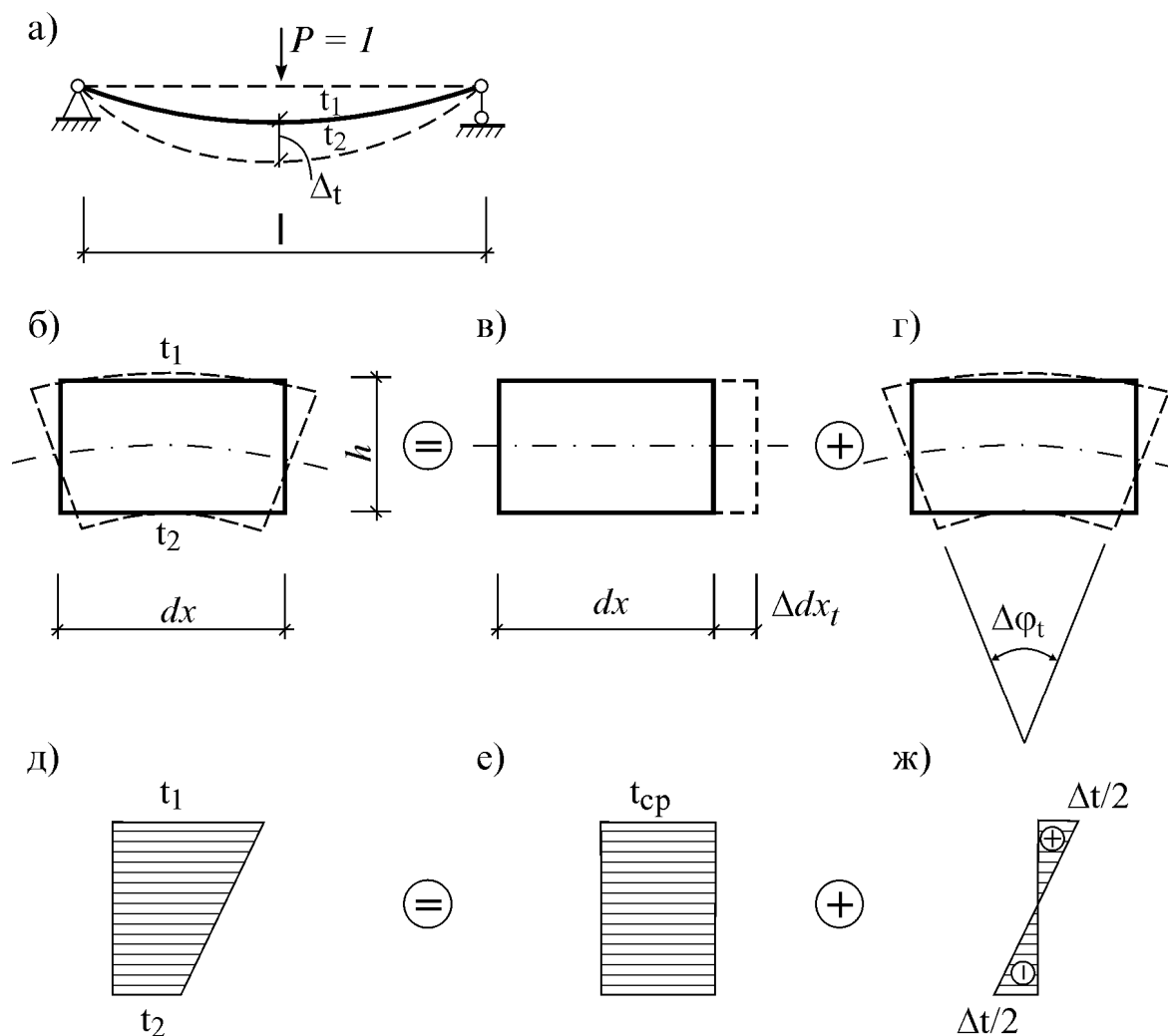


Рис. 9.3

Для определения возможной работы внутренних сил рассмотрим малый элемент длиной dx (рис. 9.3 б), предполагая, что температура внутри него изменяется по линейному закону (рис. 9.3 д).

Представим это температурное состояние как сумму двух состояний:

1) равномерный нагрев (рис. 9.3 в), когда оба волокна нагреваются на среднюю температуру $t_{cp} = (t_1 + t_2) / 2$ (рис. 9.3 е);

2) неравномерный нагрев (рис. 9.3 г), когда одно (верхнее) волокно нагревается на температуру $\Delta t/2$, а второе (нижнее) охлаждается на эту же температуру (рис. 9.3 ж), где $\Delta t = t_1 - t_2$ – разность температур, а $t_1 > t_2$.

В результате этого деформация элемента dx может быть представлена как сумма двух деформаций:

- 1) чистого растяжения от нагрева на t_{cp} ;
- 2) чистого изгиба от одновременного нагрева и охлаждения верхнего и нижнего волокон на температуру $\Delta t/2$.

Первая деформация приводит к растяжению элемента dx на величину $\Delta dx_t = \alpha t_{cp} dx$, а вторая – повороту концевых сечений элемента на общий угол $\Delta \varphi_t = \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} dx = \alpha \frac{\Delta t}{h} dx$. Здесь α – коэффициент линейного расширения материала, h – высота сечения (рис. 9.3 б).

Усилия, возникающие в единичном состоянии $\bar{M}, \bar{Q}, \bar{N}$, на этих деформациях Δdx_t и $\Delta \varphi_t$ совершат возможную работу:

$$-V_{ij} = \int_0^l (\bar{N} \cdot \Delta dx_t + \bar{M} \cdot \Delta \varphi_t) = \int_0^l (\bar{N} \alpha t_{cp} dx + \bar{M} \alpha \frac{\Delta t}{h} dx) = \alpha \left(t_{cp} \int_0^l \bar{N} dx + \frac{\Delta t}{h} \int_0^l \bar{M} dx \right).$$

Величины интегралов в этом выражении равняются площадям эпюр \bar{N} и \bar{M} в пределах данного элемента $\Omega_{\bar{N}}$ и $\Omega_{\bar{M}}$. Поэтому

$$-V_{ij} = \alpha \left(t_{cp} \Omega_{\bar{N}} + \frac{\Delta t}{h} \Omega_{\bar{M}} \right).$$

На основании принципа возможных перемещений, возможные работы внешних и внутренних сил равны. Отсюда получаем

$$\Delta_t = \alpha \left(t_{cp} \Omega_{\bar{N}} + \frac{\Delta t}{h} \Omega_{\bar{M}} \right).$$

Если в сооружении имеется n стержней (или участков), полное перемещение от воздействия температуры на всю систему будет равно сумме перемещений от вклада каждого стержня:

$$\Delta_t = \alpha \sum_{k=1}^n \left(t_{cp,k} \Omega_{\bar{N}_k} + \frac{\Delta t_k}{h_k} \Omega_{\bar{M}_k} \right).$$

Каждое слагаемое в этой формуле берется со знаком «+» или «-» в зависимости от совпадения деформаций единичного и температурного состояний. Например, если и в единичном, и в температурном состояниях стержень растягивается, первое слагаемое берется со знаком «+». Если в одном состоянии стержень растягивается, а в другом сжимается, оно берется со знаком «-». Знак второго слагаемого определяется аналогично. Только в этом случае учитывается совпадение или несовпадение растянутых волокон двух состояний.

7. Определение перемещений от смещения опор

При смещении опор статически определимой системы внутренние силы и деформации в ее элементах не возникают, однако точки системы получают некоторые перемещения.

Порядок вычисления таких перемещений изучим на примере рамы, опора которой смещается на величину c (рис. 9.4 а). При этом точка A принимает новое положение A' . Определим вертикальное перемещение этой точки, обозначенное как Δ_c .

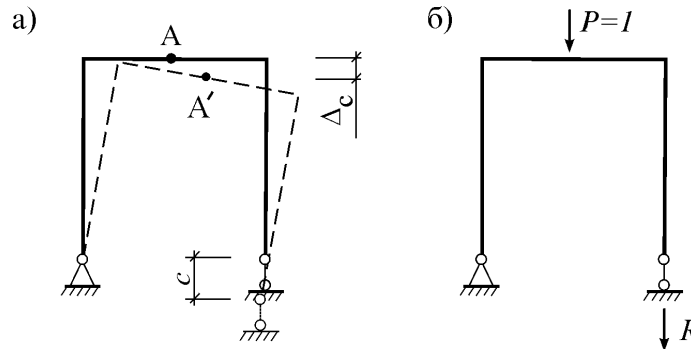


Рис. 9.4

Для этого рассмотрим единичное состояние рамы, приложив в точке A единичную силу (рис. 9.4 б), и вычислим две возможные работы:

1) работа сил первого состояния на перемещениях второго $W_{12}=0$ (т.к. в первом состоянии внутренние силы не возникают);

2) работа сил второго состояния на перемещениях первого состояния равна $W_{21}=I \cdot \boxed{x} + R \cdot c$.

По теореме Бетти должно быть $W_{12} = W_{21}$. Отсюда получаем формулу

$$\boxed{x} = -R \cdot c.$$

Если смещение будет по нескольким направлениям, то по принципу суперпозиции имеем

$$\Delta_c = -\sum_{k=1}^n R_k c_k.$$

Каждое произведение $R_k c_k$ в этой формуле берется со знаком «+» или «-» в зависимости от совпадения направлений реакции и смещения опоры.

В о п р о с ы

1. Из каких слагаемых состоит интеграл Мора?
2. Какие слагаемые формулы Мора учитываются при расчете рам?
3. Чем заменяется интеграл Мора при расчете ферм?
4. На какие два состояния разбивается температурное состояние при определении температурных перемещений?
5. Как записывается формула вычисления перемещения от смещения опор?
6. Как учитываются знаки слагаемых в формуле определения перемещения от осадки опор?

Лекция 10

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

1. Понятие о статически неопределимых системах

Статически неопределимой называется система, внутренние усилия которой нельзя определить только из уравнений статики (равновесия). Статически неопределимые системы (СНС) отличаются от статически определимых рядом свойств:

1. Они надежнее, разрушение некоторых элементов не всегда приводит к разрушению всей системы.
2. Они выдерживают большую нагрузку.
3. У них деформации меньше.
4. Изменение температуры, смещение опор, неточность изготовления элементов вызывают дополнительные усилия.
5. Внутренние усилия зависят от физических и геометрических характеристик элементов.

У статически неопределимых систем есть так называемые «лишние» связи, число которых называется **степенью статической неопределимости**. Степень статической неопределимости простой системы определяется из дискового аналога по следующей формуле:

$$n = -W = 2n_{ш} + n_c + n_{c_0} - 3n_D.$$

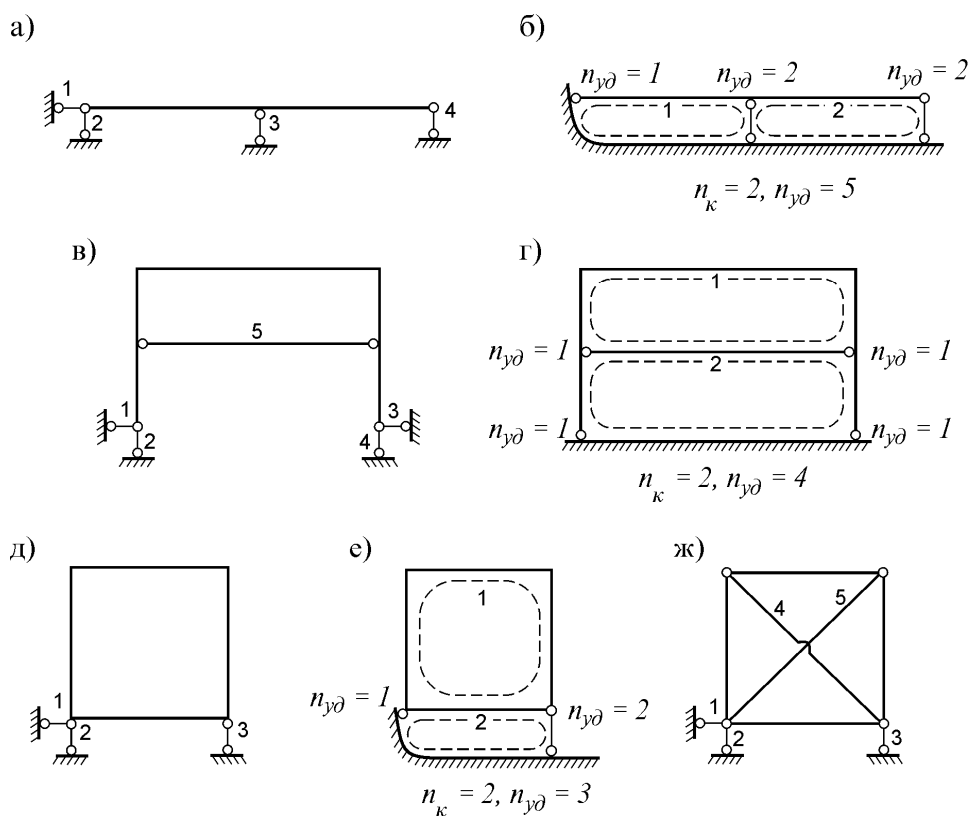


Рис. 10.1

Например, степени статической неопределимости балки (рис. 10.1 а) и рамы (рис. 10.1 в) будут:

$$n=2 \cdot 0 + 0 + 4 - 3 \cdot 1 = 1 \quad \text{и} \quad n=2 \cdot 0 + 1 + 4 - 3 \cdot 1 = 2.$$

Использование этой формулы при расчете сложных рам затруднительно. Поэтому можно применить другой подход, вводя два понятия: 1) **замкнутый контур** – замкнутая цепь из элементов и связей системы; 2) **удалённая связь** – связь замкнутого контура, исключенная из жесткого соединения элементов (рис. 10.1 б, г, е).

Степень статической неопределимости сплошного замкнутого контура равняется трем. Поэтому степень статической неопределимости системы из n_k замкнутых контуров, из которых удалены $n_{уд}$ связей, будет

$$n = 3n_k - n_{уд}.$$

При использовании этой формулы для балки (рис. 10.1 а) и рам (рис. 10.1 в, д) необходимо определить общее число замкнутых контуров n_k и удаленных связей $n_{уд}$ (рис. 10.1 б, г, е). Тогда

– для балки: $n = 3 \cdot 2 - 5 = 1$;

– для обеих рам: $n = 3 \cdot 2 - 4 = 2, \quad n = 3 \cdot 2 - 4 = 2.$

Степень статической неопределимости фермы определяется по формуле

$$n = n_c + n_{c_0} - 2n_y.$$

Например, для фермы (рис. 10.1 ж): $n = 6 + 3 - 2 \cdot 4 = 1.$

2. Выбор основной системы

Расчет статически неопределимой системы начинается с превращения ее в статически определимую. Для этого необходимо исключить лишние связи и заменить их реакции неизвестными силами. Полученная система называется **основной системой** (ОС).

Например, у балки (рис. 10.2 а), которую далее будем называть заданной системой (ЗС), степень статической неопределимости $n=1$. Если исключить лишнюю связь (правую опору) и обозначить неизвестную реакцию через X , получим ее ОС (рис. 10.2 б).

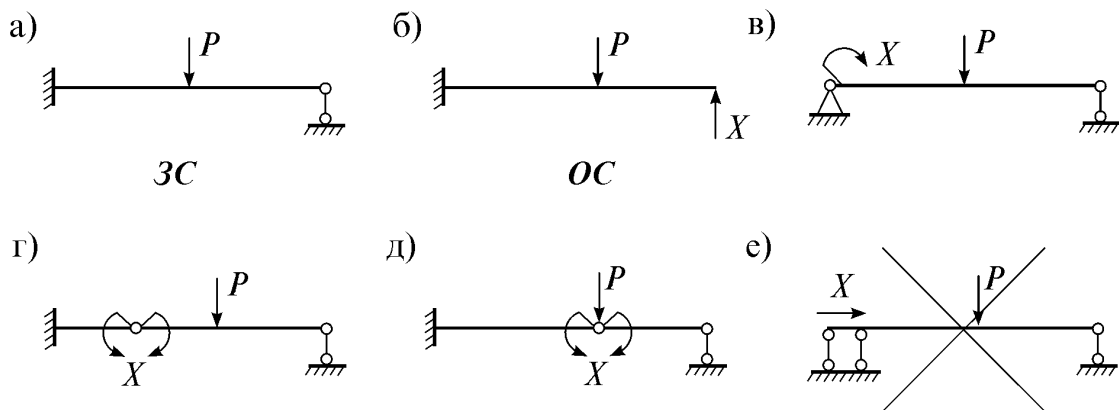


Рис. 10.2

Способов исключения лишних связей очень много (теоретически – бесконечное число). Например, лишнюю связь можно исключать как на рис. 10.2 в-е. Однако одна из этих схем (рис. 10.2 е) геометрически изменяема и для дальнейшего расчета непригодна. Все остальные схемы могут быть приняты за основную систему.

Если воспользоваться известным теоретическим положением о том, что в линейно-упругих системах внешняя нагрузка распределяется единственным образом, то результаты расчетов по различным ОС должны быть одинаковыми. Однако объем вычислений в разных ОС может быть разным. Поэтому из многих вариантов ОС нужно выбирать наиболее рациональную. Например, в нашем примере первый вариант ОС (рис. 10.2 б) предпочтительнее остальных, т.к. в ней эпюры строятся легче.

Поэтому основная система должна быть:

- 1) обязательно геометрически неизменяемой;
- 2) простой для расчета;
- 3) учитывать особенности сооружения и действующей нагрузки.

3. Сущность метода сил

В рассматриваемом методе расчета статически неопределимых систем за основные неизвестные принимаются силы (внутренние усилия). Поэтому он и называется *методом сил*.

Изучим метод сил на примере предыдущей балки.

Потребуем, чтобы ее ЗС (рис. 10.2 а) и ОС (рис. 10.2 б) были эквивалентными. Для этого перемещение в направлении исключенной связи должно равняться нулю:

$$\Delta = 0.$$

По принципу суперпозиции, это перемещение равно сумме перемещения Δ_X (рис. 10.3 а) от неизвестной реакции X и перемещения Δ_P (рис. 10.3 б) от заданной силы P . Поэтому

$$\Delta = \Delta_X + \Delta_P = 0.$$

Это уравнение, учитывающее геометрические особенности системы, называется *уравнением совместности деформаций*.

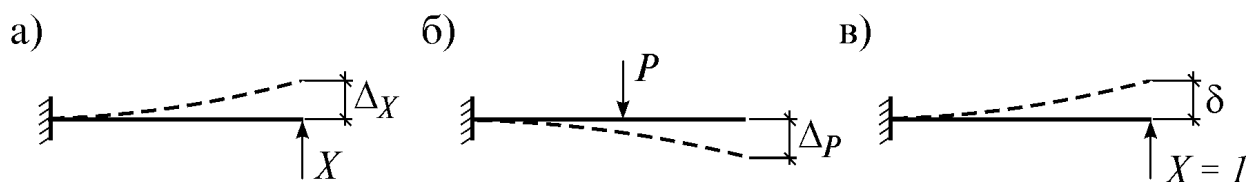


Рис. 10.3

Так как сила X неизвестна, перемещение Δ_X непосредственно определить нельзя. Поэтому рассмотрим единичное состояние (ЕС) основной системы, где действует только единичная сила $P=1$ (рис. 10.3 в). Перемещение δ , возникающее в нем в направлении единичной силы, называется податливостью, и его уже можно определить.

4. Определение коэффициентов канонических уравнений

Коэффициенты при неизвестных δ_{ij} и грузовые коэффициенты Δ_{iP} канонических уравнений – возможные перемещения от единичных сил и нагрузки. У них есть два индекса. Первый индекс i указывает на направление, а второй индекс j (или P) – на причину перемещения.

Методику вычисления этих коэффициентов изучим на примере некоторой условной системы (рис. 10.4 а) и ее основной системы (рис. 10.4 б).

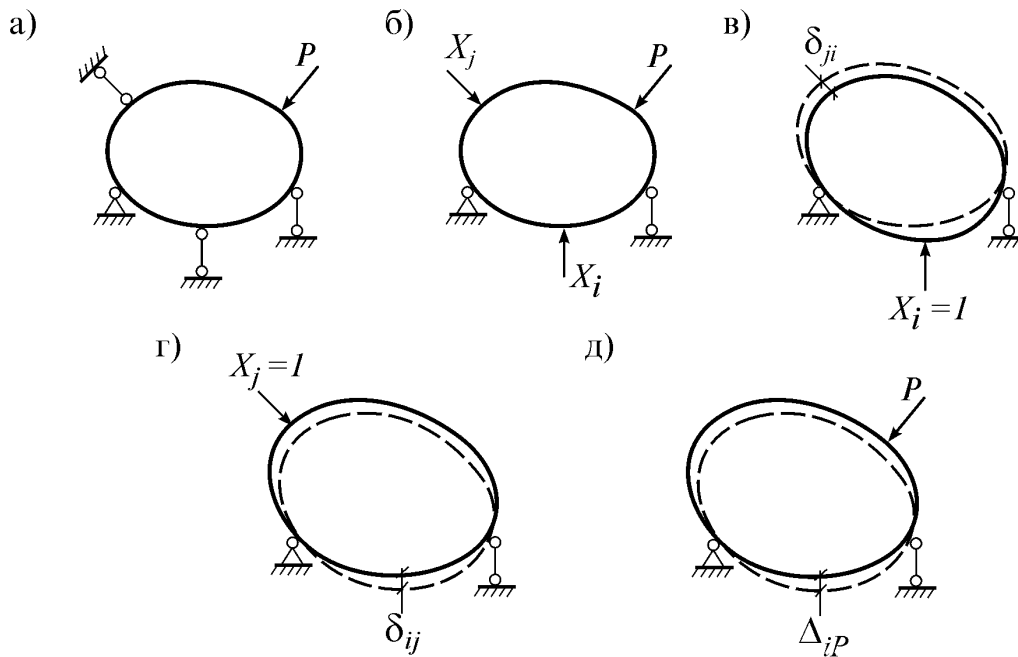


Рис. 10.4

Для определения коэффициентов δ_{ij} рассмотрим два состояния ОС:

- 1) i -ое единичное состояние – воздействие силы $X_i=1$ (рис. 10.4 в);
- 2) j -ое единичное состояние – воздействие силы $X_j=1$ (рис. 10.4 г).

Если в этих состояниях возникают внутренние усилия $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ и $\bar{M}_j, \bar{Q}_j, \bar{N}_j$, то возможная работа внутренних сил i -го состояния на деформациях j -го состояния будет:

$$-V_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left(\frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} + \mu \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_j}{GF} + \frac{\bar{N}_i \bar{N}_j}{EF} \right) dx.$$

С другой стороны, возможная работа внешних сил i -го состояния на перемещениях j -го состояния равна

$$W_{ij} = 1 \cdot \delta_{ij} = \delta_{ij}.$$

По принципу возможных перемещений $W_{ij} = -V_{ij}$. Приравнявая их, получаем формулу для вычисления коэффициентов при неизвестных:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left(\frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} + \mu \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_j}{GF} + \frac{\bar{N}_i \bar{N}_j}{EF} \right) dx.$$

Теорема Максвелла. Перемещение в i -ом направлении от единичной силы в j -ом направлении равно перемещению в j -ом направлении от единичной силы в i -ом направлении, т.е. $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Доказательство. Возможную работу сил i -го состояния (рис. 10.4 в) на перемещениях j -го (рис. 10.4 г) мы уже определили: $W_{ij} = \delta_{ij}$. А возможная работа сил j -го состояния на перемещениях i -го равна $W_{ji} = 1 \cdot \delta_{ji} = \delta_{ji}$. По теореме Бетти $W_{ij} = W_{ji}$. Следовательно, $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Эта теорема позволяет уменьшать объем вычислений при нахождении боковых коэффициентов системы канонических уравнений.

Теперь выведем формулу вычисления грузовых коэффициентов.

Вначале определим возможную работу сил i -го единичного состояния (рис. 10.4 в) на перемещениях грузового состояния (рис. 10.4 д):

$$W_{iP} = 1 \cdot \Delta_{iP} = \Delta_{iP}.$$

С другой стороны, возможная работа внутренних сил $\overline{M}_i, \overline{Q}_i, \overline{N}_i$ i -го единичного состояния на деформациях грузового состояния равна

$$-V_{iP} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left(\frac{\overline{M}_i M_P}{EI} + \mu \frac{\overline{Q}_i Q_P}{GF} + \frac{\overline{N}_i N_P}{EF} \right) dx.$$

По принципу возможных перемещений $W_{iP} = -V_{iP}$. Приравнявая их, получим формулу вычисления грузовых коэффициентов:

$$\Delta_{iP} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left(\frac{\overline{M}_i M_P}{EI} + \mu \frac{\overline{Q}_i Q_P}{GF} + \frac{\overline{N}_i N_P}{EF} \right) dx.$$

Так как в рамах и балках перемещения определяются в основном изгибными деформациями, то коэффициенты канонических уравнений можно вычислять по сокращенным формулам:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EI} dx = \boxed{\otimes} \overline{M}_j, \quad \Delta_{iP} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\overline{M}_i M_P}{EI} dx = \overline{M}_i \otimes M_P,$$

где условный знак \otimes использован для сокращения записи формулы вычисления интеграла Мора и означает условное «произведение» двух эпюр.

В о п р о с ы

1. Какие отличия имеют статически неопределимые системы от статически определимых систем?
2. Как определяется число лишних связей статически неопределимой системы?
3. Каким требованиям должна удовлетворять основная система?
4. В чем заключается физический смысл канонических уравнений метода сил?
5. Чем отличается вычисление коэффициентов при неизвестных от вычисления грузовых коэффициентов?
6. Какое преимущество дает использование теоремы Максвелла?

Лекция 11

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ (продолжение)

5. Проверка правильности коэффициентов

При вычислении коэффициентов системы канонических уравнений возможны ошибки. Поэтому их надо проверять.

Существует три способа проверки коэффициентов.

1. Построчная проверка проводится для проверки всех коэффициентов одного уравнения.

Если сложить все коэффициенты при неизвестных i -го уравнения, то

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \delta_{ij} &= \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in} = \overline{M}_i \otimes \overline{M}_1 + \overline{M}_i \otimes \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_i \otimes \overline{M}_n = \\ &= \overline{M}_i \otimes (\overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n) = \overline{M}_i \otimes \overline{M}_\Sigma = \delta_{i\Sigma}.\end{aligned}$$

Здесь: $\overline{M}_\Sigma = \sum_{i=1}^n \overline{M}_i = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n$ – суммарная единичная эпюра, $\delta_{i\Sigma}$

– результат «произведения» i -ой единичной эпюры на эту эпюру.

Отсюда следует, что *если сумма всех коэффициентов i -ой строки системы канонических уравнений равна произведению i -ой единичной эпюры на суммарную единичную эпюру, т.е.*

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} = \overline{M}_i \otimes \overline{M}_\Sigma,$$

то коэффициенты этой строки вычислены верно.

2. Универсальная проверка используется для одновременной проверки всех коэффициентов системы канонических уравнений. Приведем (без доказательства) только общее правило этой проверки: *если сумма всех коэффициентов системы канонических уравнений равна произведению суммарной единичной эпюры на себя, т.е.*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} = \overline{M}_\Sigma \otimes \overline{M}_\Sigma = \overline{M}_\Sigma^2,$$

то все коэффициенты системы канонических уравнений вычислены верно.

3. Постолбцовая проверка используется для проверки коэффициентов одного столбца системы канонических уравнений. Приведем правило проверки столбца из грузовых коэффициентов: *если сумма всех грузовых коэффициентов равна произведению суммарной единичной эпюры на грузовую эпюру, т.е.*

$$\sum_{i=1}^n \Delta_{iP} = \overline{M}_\Sigma \otimes M_P,$$

то грузовые коэффициенты вычислены верно.

6. Определение внутренних усилий

После подсчета и проверки коэффициентов системы канонических уравнений, все они подставляются в уравнения, а потом система уравнений решается относительно неизвестных X_1, X_2, \dots, X_n . Затем определяются внутренние усилия заданной статически неопределимой системы. Эту задачу можно решать двумя способами:

1) подстановкой найденных величин X_1, X_2, \dots, X_n в основную систему и определением ее усилий M, Q, N ;

2) используя эпюры внутренних усилий в единичных состояниях $\overline{M}_i, \overline{Q}_i, \overline{N}_i$ и в грузовом состоянии M_P, Q_P, N_P :

$$M = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + \dots + \overline{M}_n X_n + M_P;$$

$$Q = \overline{Q}_1 X_1 + \overline{Q}_2 X_2 + \dots + \overline{Q}_n X_n + Q_P;$$

$$N = \overline{N}_1 X_1 + \overline{N}_2 X_2 + \dots + \overline{N}_n X_n + N_P.$$

При расчете рам и балок обычно используется только первая из этих формул, и по ней строится эпюра изгибающих моментов M . Эпюра Q строится по эпюре M с учетом дифференциальной зависимости, а эпюра N строится по эпюре Q способом вырезания узлов.

7. Алгоритм метода сил

Порядок расчета рамы методом сил состоит из следующих этапов:

1. Определение степени статической неопределимости.
2. Выбор основной системы.
3. Запись канонических уравнений.
4. Рассмотрение единичных и грузового состояний.
5. Построение единичных и грузовой эпюр.
6. Определение коэффициентов канонических уравнений.
7. Решение системы канонических уравнений.
8. Построение эпюр M, Q, N .
9. Проверка правильности расчета. Она состоит из двух частей:
 - 1) **статическая проверка** – проверка условий равновесия;
 - 2) **кинематическая проверка** – проверка всех условий $\overline{M}_i \otimes M = 0$ ($i = \overline{1, n}$) или общего условия = 0.

Действительно,

$$\begin{aligned} \overline{M}_i \otimes M &= \overline{M}_i \otimes (\overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + \dots + \overline{M}_n X_n + M_P) = \\ &= \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{in} X_n + \Delta_{iP}. \end{aligned}$$

А это выражение равно нулю, так как является i -ой строкой системы канонических уравнений. Отсюда следует, что и $\overline{M}_\Sigma \otimes M = (\overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n) \otimes M = 0$, поскольку каждый из его сомножителей равняется нулю.

8. Определение перемещений

Перемещения статически неопределимых систем можно вычислять по известной формуле Мора. В системах с преобладанием изгибных деформаций (например, в рамах и балках) она имеет вид:

$$\Delta = \sum_{\kappa=1}^n \int \frac{\overline{M} M}{EI} dx = \overline{M} \otimes M.$$

Здесь \overline{M} и M – эпюры моментов от единичной силы и нагрузки в заданной статически неопределимой системе. Однако, построение этих эпюр связано с решением трудоемких задач раскрытия статической неопределимости.

Задача упрощается, если одну из этих эпюр строить в основной системе и использовать формулы $\Delta = M_0 \otimes M$ или $\Delta = \overline{M} \otimes M_P$, где M_0 и M_P – единичная и грузовая эпюры в любой основной системе метода сил.

9. Расчет симметричных рам

Симметричными называются системы, расчетные схемы которых симметричны относительно некоторой оси.

Расчет любой симметричной рамы (рис. 11.1 а) можно упростить, если воспользоваться ее симметрией и разложить внешнюю нагрузку на симметричную (рис. 11.1 б) и кососимметричную (рис. 11.1 в) нагрузки.

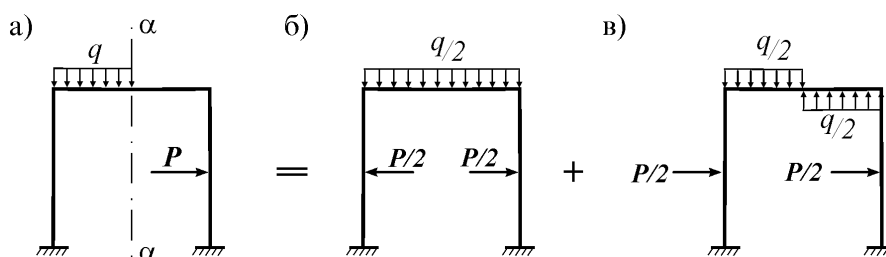


Рис. 11.1

Тогда, хотя раму приходится рассчитывать дважды, выбор основной системы по рис. 11.2 а дает значительный выигрыш в вычислениях.

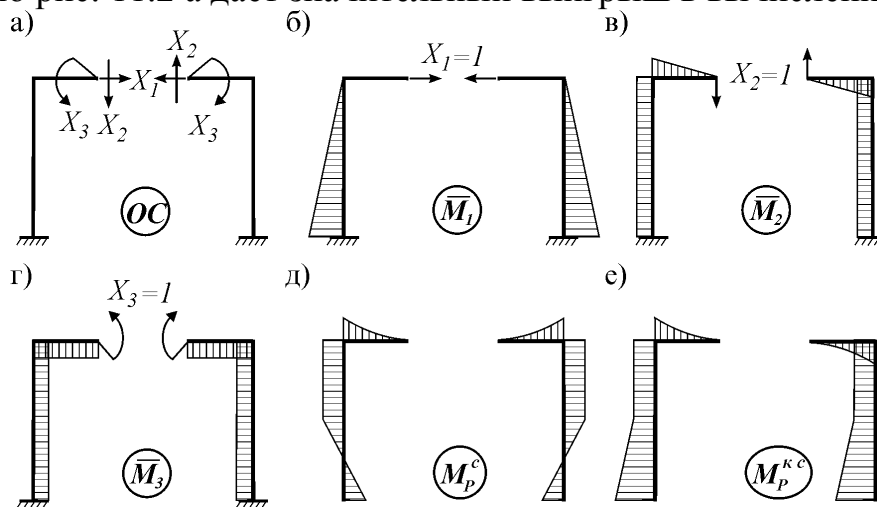


Рис. 11.2

Канонические уравнения метода сил при расчете этой рамы будут:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0,$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0,$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0.$$

Во всех трех единичных состояниях построим эпюры моментов (рис. 11.2 б, в, г). Из них две эпюры (рис. 11.2 б, г) – симметричные, а одна (рис. 11.2 в) – кососимметричная.

Симметричная (*c*) и кососимметричная (*kc*) эпюры взаимно-ортогональны, т.к. их “произведение” равно нулю:

$$\overline{M}_i^c \otimes \overline{M}_j^{kc} = 0.$$

Поэтому следующие коэффициенты системы канонических уравнений обращаются в нуль: $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$ и $\delta_{32} = \delta_{23} = 0$, и система канонических уравнений распадается на две независимые системы:

$$(1) \begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0, \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0; \end{cases} \quad (2) \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0,$$

Значит, некоторые коэффициенты можно не вычислять, а решение большой системы канонических уравнений заменить решением двух систем уравнений значительно меньших размеров.

а) Расчет на симметричную нагрузку

Так как эпюра изгибающих моментов при действии симметричной нагрузки также является симметричной (рис. 11.2 д), то она ортогональна кососимметричной эпюре \overline{M}_2 . Следовательно, $\Delta_{2P} = 0$. Поэтому, как следует из уравнения (2), $X_2 = 0$. Таким образом, при симметричной нагрузке кососимметричная неизвестная равна нулю. В этом случае эпюра изгибающих моментов будет строиться по формуле

$$M^c = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_3 X_3 + M_P^c.$$

Она, как сумма симметричных эпюр, также будет симметричной. В этом случае эпюра Q будет кососимметричной, а эпюра N будет симметричной.

б) Расчет на кососимметричную нагрузку

В этом случае эпюра изгибающих моментов кососимметрична (рис. 11.2 е) и ортогональна симметричным эпюрам \overline{M}_1 и \overline{M}_3 . Поэтому $\Delta_{1P} = \Delta_{3P} = 0$, и, как следует из системы уравнений (1), $X_1 = X_3 = 0$. Итак, при кососимметричной нагрузке все симметричные неизвестные равны нулю. Тогда эпюра изгибающих моментов строится по формуле

$$M^{kc} = \overline{M}_2 X_2 + M_P^{kc},$$

она и эпюра N будут кососимметричными, а эпюра Q – симметричной.

Окончательная эпюра определяется как сумма двух решений:

$$M = M^c + M^{kc}.$$

9. Группировка неизвестных

Если при расчете симметричной рамы (рис. 11.3 а) выбрана обычная основная система (рис. 11.3 б), все коэффициенты канонических уравнений

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0,$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0$$

будут отличаться от нуля.

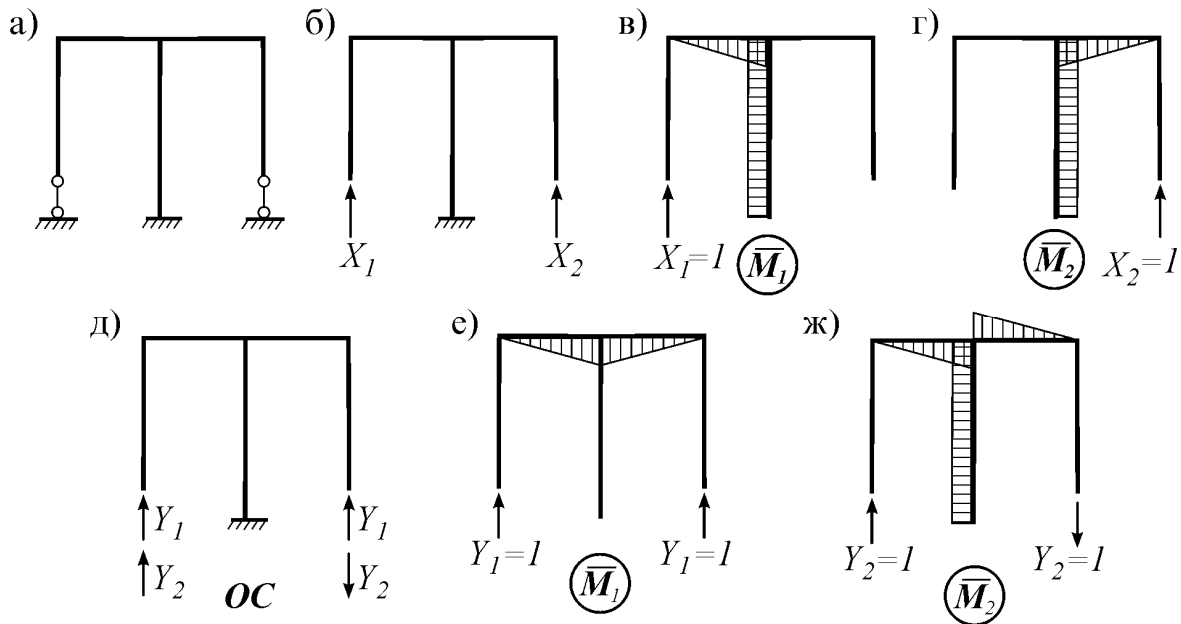


Рис. 11.3

Если же неизвестные группировать по формулам

$$X_1 = Y_1 + Y_2, \quad X_2 = Y_1 - Y_2,$$

что соответствует выбору основной системы на рис. 11.3 д, то единичные эпюры (рис. 11.3 е, ж) будут ортогональными ($\overline{M}_1 \otimes \overline{M}_2 = 0$), а канонические уравнения распадутся на два независимых уравнения:

$$\delta_{11}Y_1 + \Delta_{1P} = 0,$$

$$\delta_{22}Y_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

Итак, при группировке неизвестных некоторые коэффициенты обращаются в нуль, и их вычислять не требуется. В то же время система канонических уравнений распадается на две, что упрощает их решение. Как видим, группировка неизвестных уменьшает объем вычислений.

В о п р о с ы

1. Какие имеются способы проверки коэффициентов канонических уравнений?
2. Из каких этапов состоит алгоритм метода сил?
3. Какие способы проверки правильности расчета существуют?
4. Как определяются перемещения статически неопределимых систем?
5. Какая система называется симметричной?
6. Какое преимущество дает использование симметрии рамы?
7. В чем состоит группировка неизвестных?

Лекция 12

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Как уже знаем, при расчете статически неопределимых систем методом сил исключаются лишние связи, а за неизвестные принимаются силы (усилия) в этих связях. После их вычисления из канонических уравнений можно определять все остальные усилия, а также перемещения, напряжения и деформации системы.

Напряженно-деформированное состояние (НДС) статически неопределимых систем можно устанавливать и по-другому. В этом случае связи не исключаются, а делается наоборот – в систему вводятся дополнительные связи. За неизвестные принимаются перемещения во введенных связях, которые определяются из канонических уравнений. Поэтому этот метод называется *методом перемещений*.

1. Неизвестные метода перемещений

Установим минимальное число узловых перемещений, необходимых для определения напряженно-деформированного состояния статически неопределимой стержневой системы.

С этой целью определим простейшие деформации некоторого стержня AB стержневой системы, которые он получает при переходе в новое положение $A'B'$ под воздействием внешней нагрузки (рис. (12.1 а). Данная задача упрощается, если стержень закрепить по обоим концам и, задавая его концам некоторые независимые перемещения, привести стержень к окончательному деформированному состоянию $A'B'$.

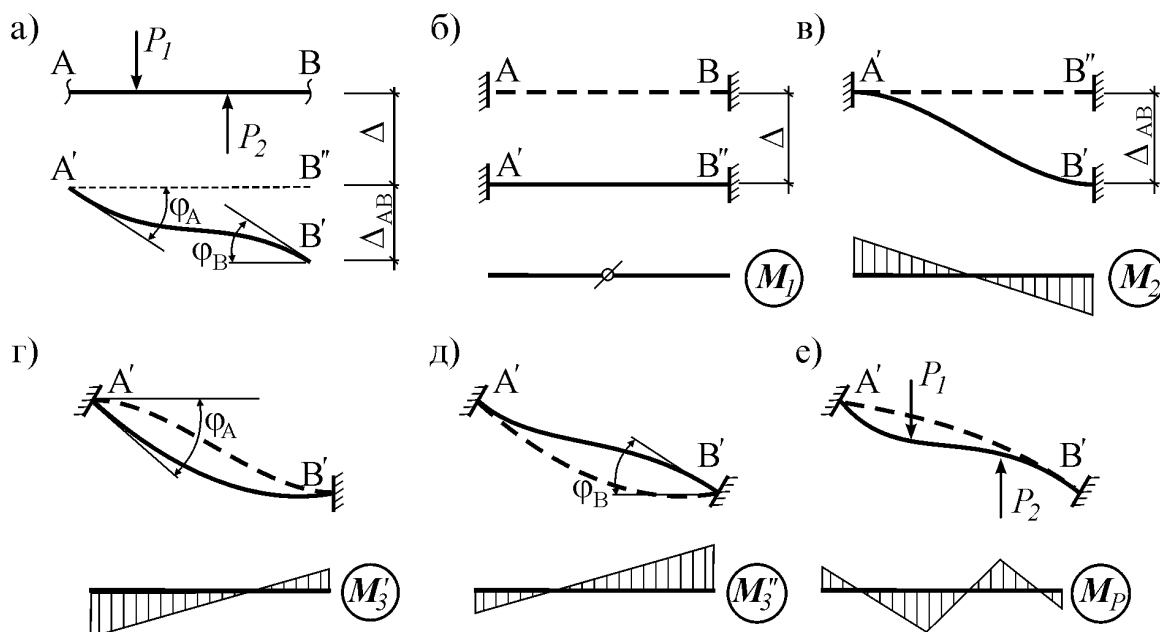


Рис. 12.1

Как следует из рис. 12.1, для этого концам закрепленного стержня AB необходимо последовательно задавать поступательные (линейные) перемещения Δ и Δ_{AB} (рис. 12.1 б, в), угловые перемещения φ_A и φ_B (рис. 12.1 г, д), а внутри стержня приложить внешнюю нагрузку (рис. 12.1 е).

От перемещения Δ всего стержня внутренние усилия и деформации не возникают (на рис. 12.1 б $M_I = 0$). Внутренние усилия и деформации от местной нагрузки, действующей в пределах закрепленного стержня AB , можно найти отдельно. Значит, для определения НДС всего стержня достаточно знать три неизвестных перемещения – два угловых перемещения его концов φ_A , φ_B и одно поступательное перемещение – взаимное смещение концов стержня Δ_{AB} . Поэтому степень кинематической неопределенности отдельного стержня равняется трем.

2. Выбор основной системы

Основная система метода перемещений должна быть кинематически определимой. Для ее получения в заданную систему следует ввести столько дополнительных связей, чтобы концы всех стержней были закреплены, т. е. исключены их перемещения. Поэтому общее число вводимых связей будет равно числу неизвестных метода перемещений.

Однако число вводимых связей может быть весьма большим. Например, рама на рис. 12.2 а состоит из пяти стержней. По результатам проведенного выше анализа, степень ее кинематической неопределенности (или число неизвестных метода перемещений) будет $5 \cdot 3 = 15$.

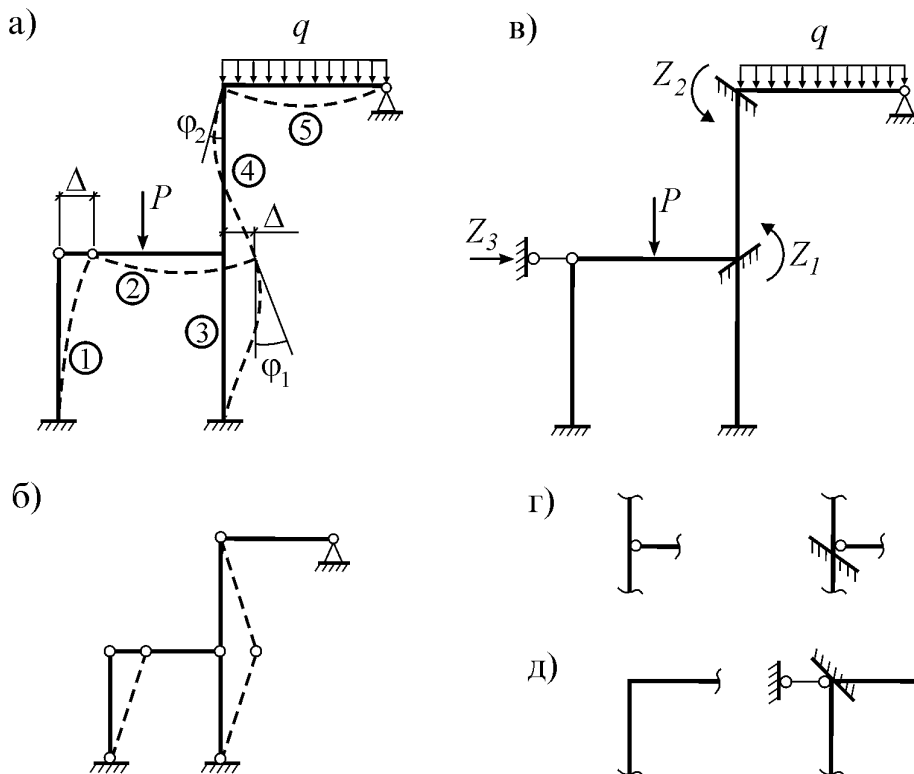


Рис. 12.2

Это число можно уменьшить, если принять следующие **гипотезы**:

- 1) поперечные и продольные деформации стержней малы;
- 2) длина хорды, соединяющей концы изогнутого стержня, равна первоначальной длине стержня;
- 3) в упругом рамном узле углы между стержнями сохраняются.

Действительно, в этом случае в данной раме достаточно будет знать только три перемещения – поступательное перемещение Δ и два угловых перемещения φ_1 и φ_2 (рис. 12.2 а). Таким образом, число неизвестных уменьшилось немало – с пятнадцати до трех.

Из третьей гипотезы следует, что число неизвестных угловых перемещений будет определяться по формуле

$$n_{\text{угл}} = \text{числу упругих рамных узлов.}$$

Для определения числа неизвестных поступательных перемещений (в дальнейшем их будем называть линейными перемещениями) во все узлы рамы, включая и опоры, нужно ввести шарниры (рис. 12.2 б). Тогда число линейных перемещений легко определяется по известной формуле кинематического анализа для фермы

$$n_{\text{лин}} = W = 2n_{\text{У}} - n_{\text{С}} - n_{\text{С}_0}.$$

В рассматриваемой раме имеем $n_{\text{лин}} = 2 \cdot 6 - 5 - 6 = 1$.

Общее число всех неизвестных перемещений определяется по формуле

$$n = n_{\text{угл}} + n_{\text{лин}}$$

и называется **степенью кинематической неопределимости**. Сами неизвестные перемещения обозначаются однотипно: $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$.

После определения числа неизвестных в заданной системе (ЗС) следует вводить столько же связей для исключения перемещений концов ее стержней. Например, в рассмотренную раму введем две заделки и одну опорную связь. Полученная схема (рис. 12.2 в) будет **основной системой (ОС) метода перемещений**.

Таким образом, для получения ОС метода перемещений необходимо:

- в упругие рамные узлы заданной системы ввести $n_{\text{угл}}$ заделок;
- в направлении поступательных перемещений узлов заданной системы ввести $n_{\text{лин}}$ опорных связей (они вводятся так, чтобы система с введенными шарнирами стала геометрически неизменяемой).

Введенные связи, хотя внешне и похожи на обычные опорные связи, от них принципиально отличаются, потому что: 1) введенная заделка исключает лишь угловое перемещение узла, оставляя возможность линейного смещения; 2) введенная опорная связь исключает только линейное перемещение узла, оставляя возможность поворота (рис. 12.2 г, д).

При соблюдении этих требований ОС метода перемещений, по-сути, является единственной.

Пусть необходимо выбрать ОС метода перемещений для рамы (рис. 12.3 а). Она имеет четыре жестких узла. Значит, число угловых неизвестных $n_{угл} = 4$. Для определения числа линейных неизвестных во все узлы и опоры рамы введем шарниры (рис. 12.3 б). Тогда имеем: $n_{лин} = 2n_y - n_C - n_{C_0} = 2 \cdot 8 - 8 - 6 = 2$. Поэтому общее число неизвестных будет $n = n_{угл} + n_{лин} = 4 + 2 = 6$. Вводя в жесткие узлы ЗС четыре заделки и две опоры, исключая линейные перемещения узлов рамы (последние вводятся так, чтобы механизм на рис. 12.3 б стал геометрически неизменяемым), получаем требуемую ОС (рис. 12.3 в).

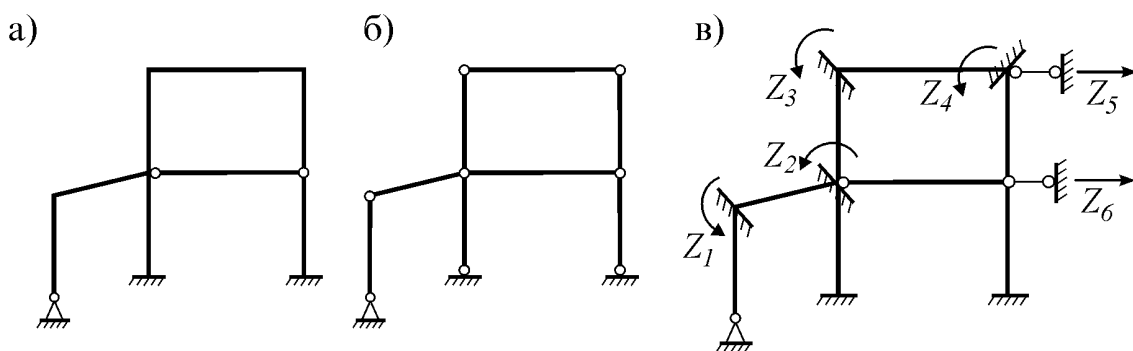


Рис. 12.3

3. Сущность метода перемещений

Данный вопрос изучим на следующем примере (рис. 12.4 а). Эта рама четырежды статически неопределима. При ее расчете методом сил нужно исключить четыре лишние связи и выбрать основную систему, например, такую как на рис. 12.4 б.

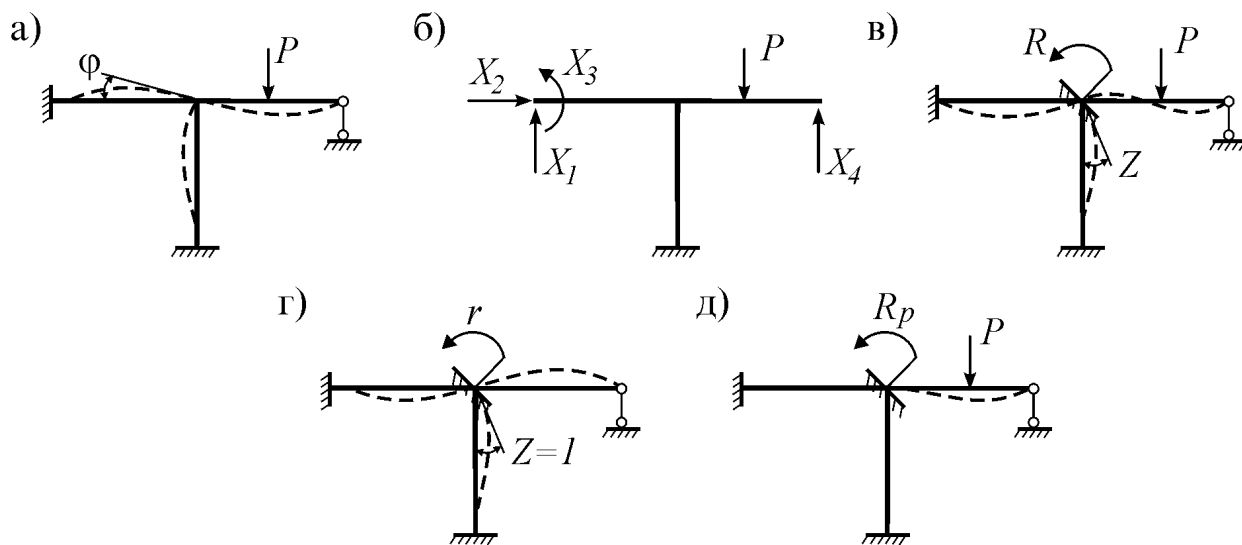


Рис. 12.4

При использовании же метода перемещений раму следует превратить в кинематически определимую. Для этого в заданную систему (ЗС) достаточно ввести $n = n_{\text{угл}} + n_{\text{лин}} = 1 + 0 = 1$ кинематическую связь. Если неизвестное угловое перемещение узла обозначить через Z , получим основную систему (ОС), показанную на рис. 12.4 в.

Потребуем, чтобы усилия и деформации ОС были такими же, как у ЗС. Для этого перемещение Z должно быть равно углу поворота узла рамы φ (рис. 12.4 а), а реактивный момент во введенной заделке основной системы (рис. 12.4 в) должен равняться нулю:

$$R = 0.$$

Эту реакцию определим, рассматривая единичное и грузовое состояния основной системы.

В единичном состоянии введенной связи зададим единичное перемещение $Z=1$ и определим возникающую в ней реакцию r (рис. 12.4 г). Такая реакция от единичного перемещения называется **жесткостью**.

В грузовом состоянии приложим только внешнюю нагрузку и во введенной связи основной системы определим реакцию R_P (рис. 12.4 д).

С учетом упругости системы и принципа суперпозиции, наше уравнение приводится к виду

$$r \cdot Z + R_P = 0.$$

Оно называется **каноническим уравнением метода перемещений**. Если известны реакции r и R_P , то из него можно найти величину узлового перемещения:

$$Z = -R_P/r.$$

Если степень кинематической неопределимости стержневой системы равна n , ее ОС получается введением n дополнительных связей с неизвестными Z_1, Z_2, \dots, Z_n . Чтобы ОС была эквивалентна ЗС, реакции во введенных связях должны равняться нулю. С учетом этого можно записать n уравнений. После рассмотрения n единичных состояний, одного грузового состояния и дальнейшего определения реакций (реактивных усилий) во всех состояниях, эти уравнения приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1P} &= 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2P} &= 0, \\ \dots & \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nP} &= 0. \end{aligned}$$

Все вместе они называются **системой канонических уравнений метода перемещений**. Здесь r_{ii} – главные коэффициенты, r_{ij} – боковые коэффициенты. Свободные члены R_{iP} являются грузовыми коэффициентами.

После введения матриц и векторов

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_P = \begin{bmatrix} R_{1P} \\ R_{2P} \\ \vdots \\ R_{nP} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

система канонических уравнений записывается в матричной форме:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{R}_P = \mathbf{0},$$

где \mathbf{r} – матрица жесткости, \mathbf{Z} – вектор неизвестных, \mathbf{R}_P – вектор нагрузки, $\mathbf{0}$ – нуль-вектор. Отсюда определяется вектор неизвестных:

$$\mathbf{Z} = -\mathbf{r}^{-1} \mathbf{R}_P,$$

где \mathbf{r}^{-1} – обратная матрица жесткости.

В о п р о с ы

1. Какие величины являются неизвестными метода перемещений?
2. Что такое степень кинематической неопределимости?
3. Какие гипотезы принимаются при расчете рам методом перемещений?
4. Как определяется основная система метода перемещений?
5. Что называется жесткостью?
6. В чем заключается сущность метода перемещений?
7. Как записывается система канонических уравнений метода перемещений?

Л е к ц и я 13

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ (продолжение)

4. Элементарные состояния основной системы

Как было установлено в предыдущей лекции, коэффициенты системы канонических уравнений метода перемещений – реакции, определяемые в единичных и грузовом состояниях. Например, r_{ij} – реакция, возникающая в i -ой связи в j -ом единичном состоянии, R_{iP} – реакция, возникающая в i -ой связи в грузовом состоянии.

Все эти реакции равны сумме реакций отдельных стержней, объединенных в узлах основной системы. Для их определения необходимо рассчитывать статически неопределимые стержни различной длины и жесткости с различными закреплениями по концам, получающие разные перемещения или нагруженные различными силами. С целью упрощения таких расчетов все типовые задачи, встречающиеся при расчете различных основных систем, решаются для общего случая. Их называют элементарными состояниями основной системы, а результаты их расчетов сводятся в таблицу. Эти задачи в большинстве случаев бывают статически неопределимыми и поэтому решаются методом сил.

Рассмотрим решение двух типовых задач.

1) Стержень с равномерно распределенной нагрузкой q

Степень статической неопределимости этой системы (рис. 13.1 а) $n=1$. Каноническое уравнение имеет вид $\delta X + \Delta_P = 0$. Выбирая основную систему (рис. 13.1 б), в единичном (рис. 13.1 в) и грузовом (рис. 13.1 д) состояниях строим единичную (рис. 13.1 г) и грузовую эпюры (рис. 13.1 е).

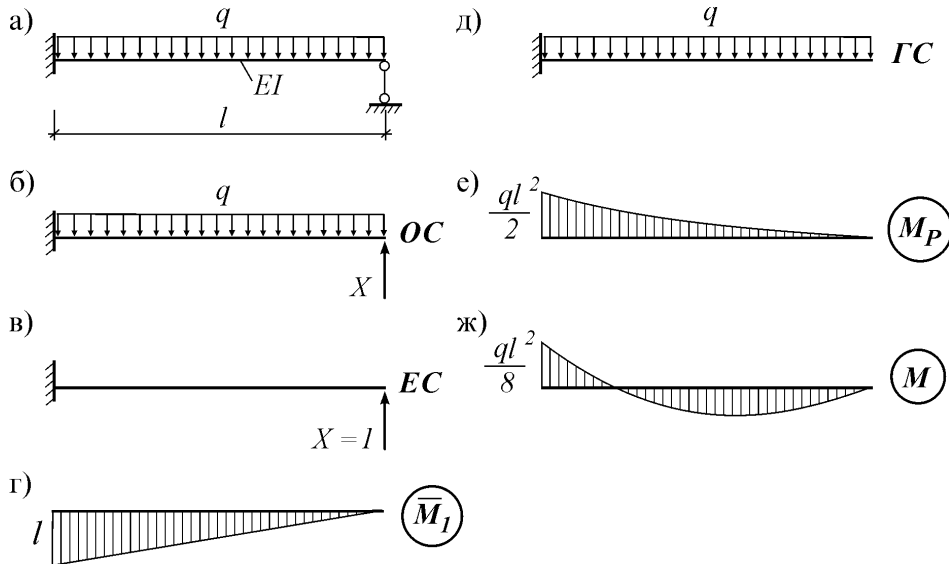


Рис. 13.1

Определим коэффициенты канонического уравнения:

$$\delta = \overline{M}^2 = \frac{l^3}{3EI}, \quad \Delta_P = \overline{M} \otimes M_P = -\frac{ql^4}{8EI},$$

а затем неизвестную реакцию: $R_B = X = -\frac{\Delta_P}{\delta} = \frac{3}{8}ql$. После этого из уравнений статики определяем остальные реакции, а по формуле $M = \overline{M}X + M_P$ строим эпюру изгибающих моментов (рис. 13.1 ж).

2) Поворот одного конца стержня с заделанными концами

Пусть один конец стержня с заделанными концами поворачивается на единичный угол (рис. 13.2 а). У этой системы степень статической неопределимости $n=3$. Однако, если не учитывать продольную деформацию, вместо заданной системы можно рассматривать стержень с правой опорой в виде ползуна (рис. 13.2 б) и принять $n=2$.

Система канонических уравнений будет:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned}$$

Если основную систему выбрать симметричной (рис. 13.2 в), в обоих единичных состояниях (рис. 13.2 г, е) единичные эпюры \overline{M}_1 , \overline{M}_2 легко строятся (рис. 13.2 д, ж). В грузовом состоянии (рис. 13.2 з) момент не возникает, поэтому $M_P = 0$.

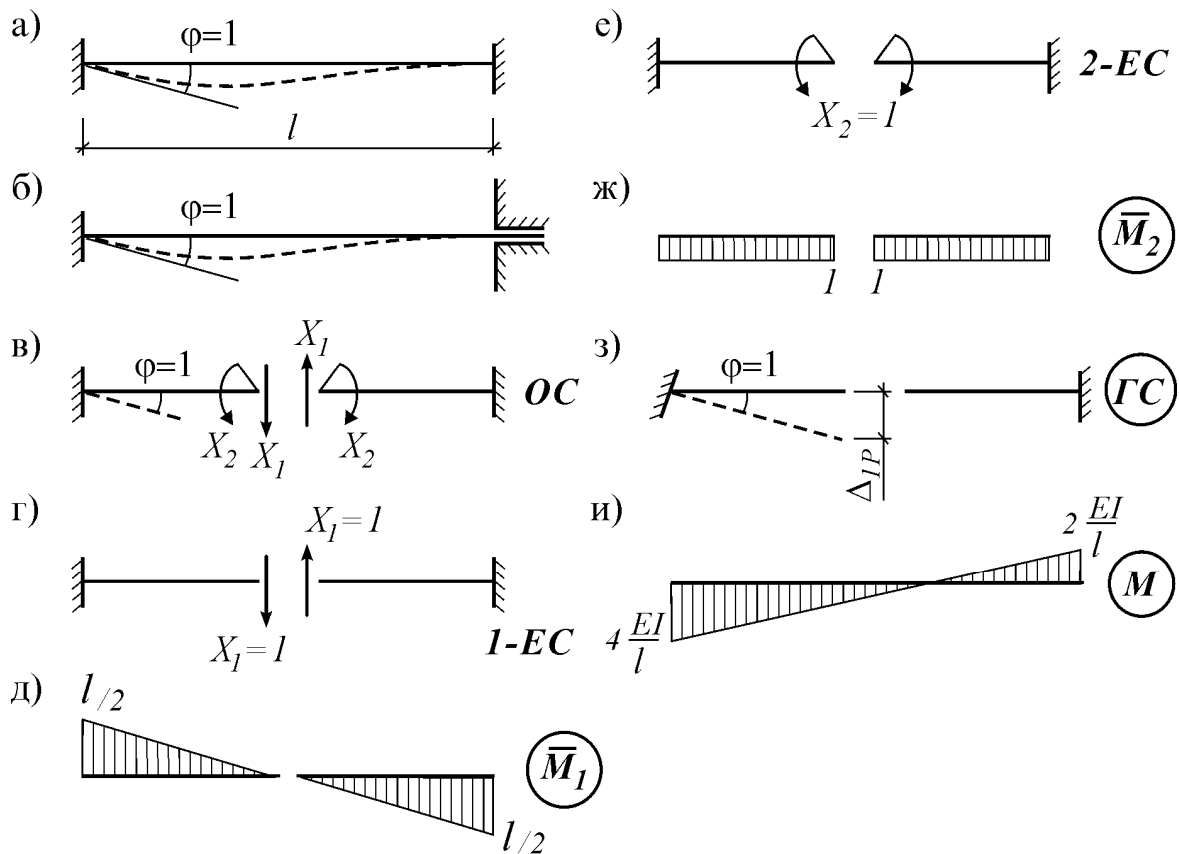


Рис. 13.2

Определим коэффициенты канонических уравнений:

$$\delta_{11} = \overline{M}_1^2 = \frac{l^3}{12EI}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \overline{M}_1 \otimes \overline{M}_2 = 0, \quad \delta_{22} = \overline{M}_2^2 = \frac{l}{EI}.$$

Из рис. 13.2 з следует, что $\Delta_{1P} = \frac{l}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{l}{2} \cdot 1 = \frac{l}{2}$ и $\Delta_{2P} = -\varphi = -1$, а из канонических уравнений получаем $X_1 = -6 \frac{EI}{l^2}$, $X_2 = \frac{EI}{l}$.

Так как $M_P = 0$, имеем $M = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2$ (рис. 13.2 и).

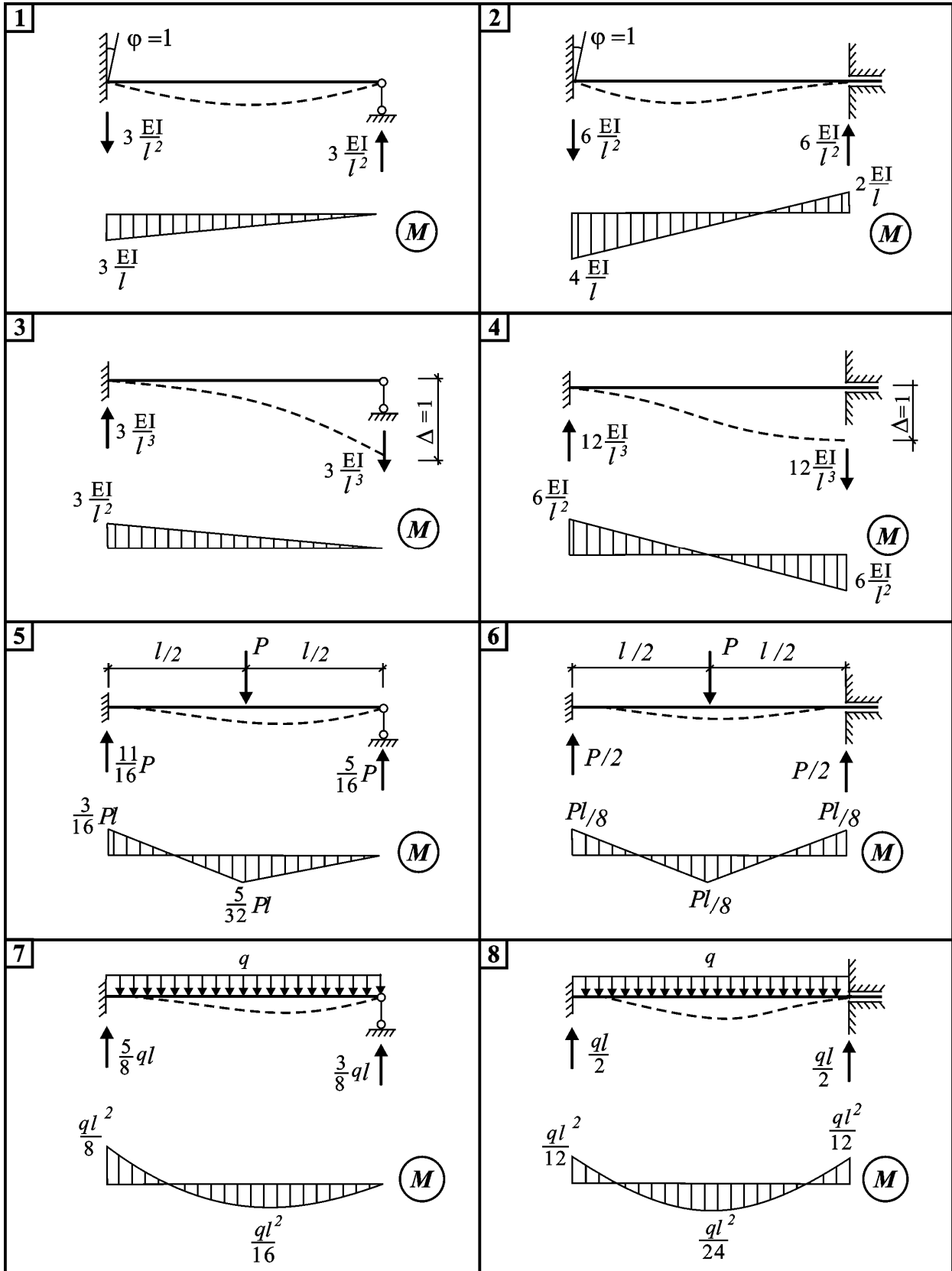
Аналогичные расчеты проводятся для всех типовых случаев, встречающихся в различных основных системах. Результаты их расчетов сводятся в единую таблицу (табл. 2).

5. Определение коэффициентов канонических уравнений

Коэффициенты канонических уравнений метода перемещений можно определять статическим или кинематическим способами.

Статический способ основан на определении реакций во введенных связях основной системы из уравнений статики. Для этого необходимо вырезать отдельные узлы или части основной системы и составлять уравнения равновесия (статики). Если искомая реакция является реактивным моментом, то она определяется из условия равенства нулю

Таблица 2
Таблица метода перемещений



момента в узле $\Sigma M=0$; если же она является реактивной силой, то определяется из уравнения проекции на ось (например, на ось x) в направлении этой реакции $\Sigma X=0$. Статический способ достаточно прост для использования, поэтому является основным способом определения коэффициентов системы канонических уравнений.

Докажем одну полезную теорему.

Первая теорема Релея. Реакция, возникающая в j -ой связи от перемещения i -ой связи на единицу, равна реакции i -ой связи от перемещения j -ой связи на единицу, т.е. $r_{ji} = r_{ij}$.

Доказательство. Рассмотрим i -ое и j -ое единичные состояния основной системы некоторой рамы (рис. 13.3 а, б) и соответствующие эпюры моментов в этих состояниях (рис. 13.3 г, д).

Возможная работа сил j -ого единичного состояния (рис. 13.3 б) на перемещениях i -го состояния (рис. 13.3 а) равна

$$W_{ji} = r_{ij} \cdot 1 = r_{ij}.$$

Работа сил i -го состояния на перемещениях j -го состояния будет

$$W_{ij} = r_{ji} \cdot 1 = r_{ji}.$$

По теореме Бетти $W_{ji} = W_{ij}$. Значит, равны и правые части, т.е. $r_{ij} = r_{ji}$.

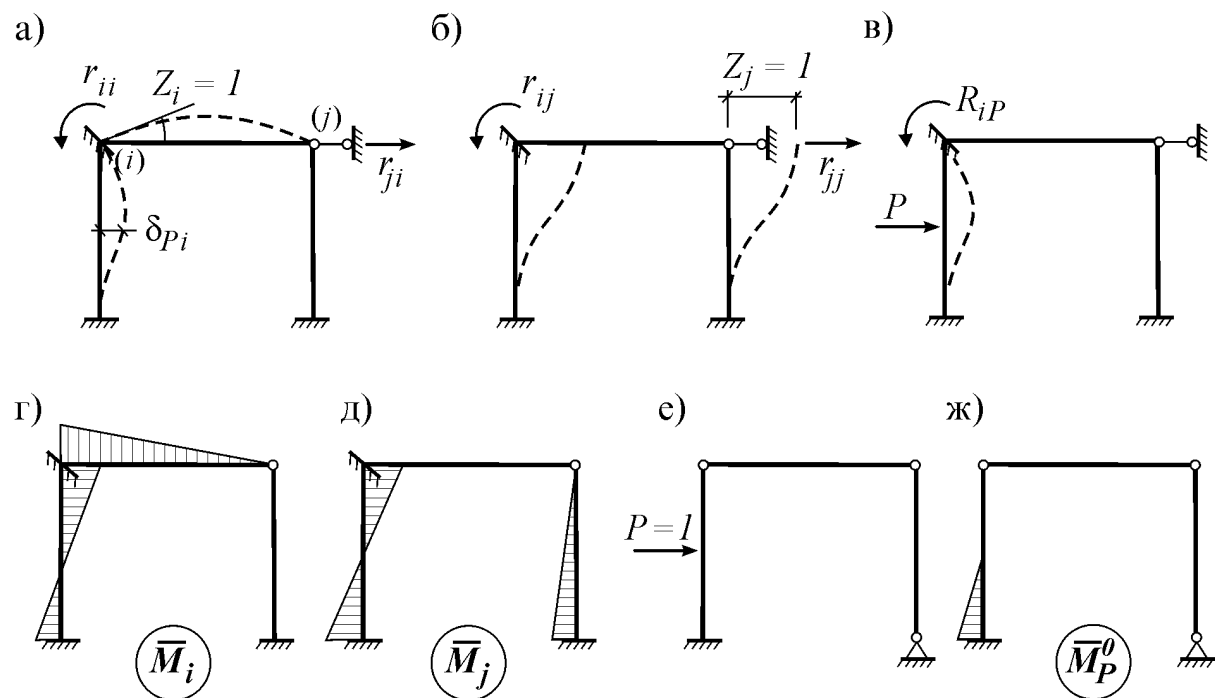


Рис. 13.3

Эту теорему иногда называют **теоремой о взаимности реакций**. Она позволяет сократить объем вычислений побочных коэффициентов канонических уравнений.

Кинематический способ основан на определении коэффициентов канонических уравнений перемножением эпюр. Этот способ применяется при сложности определения коэффициентов статическим способом или для проверки результатов статического способа.

Для вывода формулы кинематического способа определим две возможные работы. Работа внешних сил j -го единичного состояния на перемещениях i -го состояния нам известна: $W_{ji} = r_{ij}$. А возможная работа внутренних сил j -го единичного состояния на деформации i -го состояния \overline{M}_i / EI равна:

$$-V_{ji} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EI} dx.$$

По принципу возможных перемещений $W_{ji} + V_{ji} = 0$ или $W_{ji} = -V_{ji}$. Отсюда получаем искомую формулу:

$$r_{ij} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EI} dx \quad \text{или} \quad r_{ij} = \overline{M}_i \otimes \overline{M}_j.$$

Формула вычисления грузовых коэффициентов отличается от аналогичной формулы метода сил (дается без вывода):

$$R_{iP} = - \sum \int \frac{\overline{M}_i M_P^0}{EI} dx \quad \text{или} \quad R_{iP} = -\overline{M}_i \otimes M_P^0,$$

где \overline{M}_P^0 – грузовая эпюра изгибающих моментов в любой статически определимой системе, полученной из заданной системы удалением лишних связей.

6. Определение усилий

После определения всех коэффициентов, они подставляются в систему канонических уравнений. Затем она решается и определяются неизвестные Z_1, Z_2, \dots, Z_n . После этого определяются внутренние усилия заданной статически неопределимой системы. Этот расчет выполняется аналогично методу сил. Вначале по формуле

$$M = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + \dots + \overline{M}_n Z_n + M_P$$

определяются моменты. Затем по эпюре M определяются поперечные силы Q , а по ним – продольные силы N .

7. Алгоритм метода перемещений

Метод перемещений реализуется в следующей последовательности:

1. Определение степени кинематической неопределимости.
2. Выбор основной системы.
3. Запись канонических уравнений.
4. Рассмотрение единичных и грузового состояний.

5. Построение эпюр моментов во всех состояниях.
 6. Определение коэффициентов канонических уравнений (при необходимости – их проверка).
 7. Решение канонических уравнений.
 8. Построение эпюр M , Q , N .
 9. Проверка правильности расчета. Она проводится аналогично методу сил – статическим и кинематическим способами.
- Как видим, алгоритмы метода перемещений и метода сил совпадают.

8. Сравнение методов сил и перемещений

При более подробном рассмотрении можно выявить не только сходные, но и принципиально отличающиеся стороны методов сил и перемещений. Рассмотрим некоторые из них:

- оба метода используются для расчета статически неопределимых систем; при принятии одинаковых допущений оба приводят к единому результату, а при использовании в разных областях дополняют друг-друга;
- в методе сил неизвестными являются силы, а в методе перемещений неизвестными являются перемещения; при расчете одной и той же системы число их неизвестных часто бывает разным, поэтому одни системы выгоднее рассчитывать методом сил, другие – методом перемещений;
- в методе сил основная система получается удалением связей, а в методе перемещений – введением связей;
- в методе сил вариантов основной системы много, а в методе перемещений она единственна;
- единичные состояния в методе сил определяются воздействием единичных сил, в методе перемещений – единичных перемещений;
- в методе сил необходимые эпюры в основной системе строятся обычным способом, а в методе перемещений – по готовой таблице;
- коэффициенты канонических уравнений в методе перемещений определяются проще (из уравнений статики);
- многие из боковых коэффициентов системы канонических уравнений метода перемещений равняются нулю, что упрощает ее решение и т.д.

В о п р о с ы

1. Как рассчитываются элементарные состояния основной системы метода перемещений?
2. Какие способы используются при определении коэффициентов канонических уравнений метода перемещений?
3. Как формулируется теорема Релея?
4. Как определяются окончательные усилия в методе перемещений?
5. Из каких этапов состоит алгоритм метода перемещений?
6. Какие сходства и различия имеют метод сил и метод перемещений?

Как обычно, в этих уравнениях выполняются равенства $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, $r_{ij} = r_{ji}$. Однако в уравнения I-го типа, кроме коэффициентов $\delta_{11}, \dots, \delta_{kk}$, определяемых в основной системе как перемещения от единичных сил $X_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, k$), входят коэффициенты δ'_{ij} , определяемые как перемещения от единичных перемещений $Z_j = 1$ ($j = k+1, \dots, n$). А в уравнения II-го типа, кроме обычных коэффициентов $r_{k+1, k+1}, \dots, r_{nn}$, входят коэффициенты r'_{ji} , определяемые как реакции от единичных сил $X_i = 1$.

Упростить их определение позволяет следующая теорема.

Вторая теорема Релея. Величина перемещения системы в i -ом направлении от единичного перемещения j -ой связи равна реакции в j -ой связи от действия единичной силы в i -ом направлении, взятой с обратным знаком, т.е. $\delta_{ij} = -r_{ji}$.

Доказательство. Для этого рассмотрим некоторую систему и два ее возможных состояния. В одном из них прикладывается единичная сила $X_i = 1$ (рис. 14.1 а), а во втором – единичное перемещение (рис. 14.1 б).

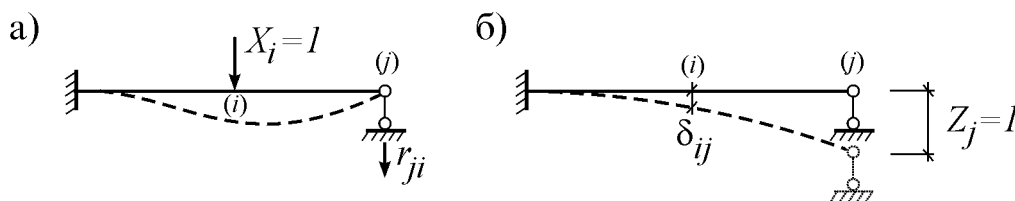


Рис. 14.1

Возможная работа сил первого состояния на перемещениях второго равна

$$W_{12} = 1 \cdot \delta_{ij} + r_{ji} \cdot 1,$$

а возможная работа сил второго состояния на перемещениях первого равна

$$W_{21} = 0.$$

По теореме Бетти $W_{12} = W_{21}$. Приравнявая два выражения работы, получим требуемое соотношение $\delta_{ij} = -r_{ji}$.

Доказанная теорема позволяет определять некоторые коэффициенты канонических уравнений без вычислений. Например, если вначале были вычислены δ'_{ij} , то $r'_{ji} = -\delta'_{ij}$, если же были вычислены r'_{ji} , то $\delta'_{ji} = -r'_{ij}$.

Грузовые коэффициенты канонических уравнений смешанного метода Δ_{iP} ($i = 1, 2, \dots, k$) и R_{jP} ($j = k+1, \dots, n$) определяются также как в методах сил и перемещений.

Окончательная эпюра изгибающих моментов в смешанном методе строится по формуле

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \dots + \bar{M}_k X_k + \bar{M}_{k+1} Z_{k+1} + \dots + \bar{M}_n Z_n + M_P.$$

Правильность этой эпюры проверяется также как в методах сил и перемещений: перемещения в удаленных связях и реакции во введенных связях должны равняться нулю.

Когда число неизвестных смешанного метода велико, канонические уравнения удобно записать в матричной форме

$$\mathbf{D}\mathbf{Y} + \Delta_{\mathbf{P}} = \mathbf{0},$$

где матрица коэффициентов канонических уравнений \mathbf{D} , вектор неизвестных \mathbf{Y} и вектор грузовых коэффициентов $\Delta_{\mathbf{P}}$ имеют вид

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1k} & \delta'_{1,k+1} & \dots & \delta'_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k1} & \dots & \delta_{kk} & \delta'_{k,k+1} & \dots & \delta'_{kn} \\ r'_{k+1,1} & \dots & r'_{k+1,k} & r_{k+1,k+1} & \dots & r_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r'_{n1} & \dots & r'_{nk} & r_{n,k+1} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}; \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_k \\ Z_{k+1} \\ \dots \\ Z_n \end{bmatrix}; \Delta_{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \Delta_{1P} \\ \dots \\ \Delta_{kP} \\ R_{k+1,P} \\ \dots \\ R_{nP} \end{bmatrix}.$$

Тогда неизвестные метода определяются по формуле

$$\mathbf{Y} = -\mathbf{D}^{-1} \Delta_{\mathbf{P}}.$$

Алгоритм смешанного метода состоит из следующих этапов:

1. Определение числа неизвестных.
2. Выбор основной системы.
3. Запись канонических уравнений.
4. Рассмотрение единичных и грузового состояний.
5. Построение эпюр в этих состояниях.
6. Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений.
7. Решение канонических уравнений.
8. Построение эпюр M , Q , N .
9. Проверка правильности расчета.

Как видим, этот алгоритм совпадает с алгоритмами метода сил и перемещений. Однако, по сути, каждый этап расчета отличается от них.

В качестве примера рассмотрим некоторые этапы расчета рамы, представленной на рис. 14.2 а. Число неизвестных, если ее рассчитывать методами сил и перемещений, будут

$$n_{mc} = 3n_k - n_{y\partial} = 3 \cdot 2 - 2 = 4,$$

$$n_{mn} = n_{y\partial} + n_{лин} = 2 + 1 = 3.$$

Когда выбирается основная система по смешанному методу как на рис. 14.2 б, число неизвестных будет

$$n_{cm} = 1 + 1 = 2.$$

Тогда канонические уравнения запишутся так:

$$\delta_{11} X_1 + \delta'_{12} Z_2 + \Delta_{1P} = 0,$$

$$r'_{21} X_1 + r_{22} Z_2 + R_{2P} = 0.$$

Коэффициенты канонических уравнений δ_{11} и Δ_{1P} определяются как в методе сил – перемножением единичной и грузовой эпюр моментов по

рис. 14.2 в, д, а коэффициенты r_{22} и R_{2P} определяются как в методе перемещений – вырезанием узлов единичного и грузового состояний по рис. 14.2 г, д. Коэффициент r'_{21} проще всего определяется как в методе перемещений – по рис. 14.2. Тогда, по второй теореме Релея, имеем $\delta'_{12} = -r'_{21}$.

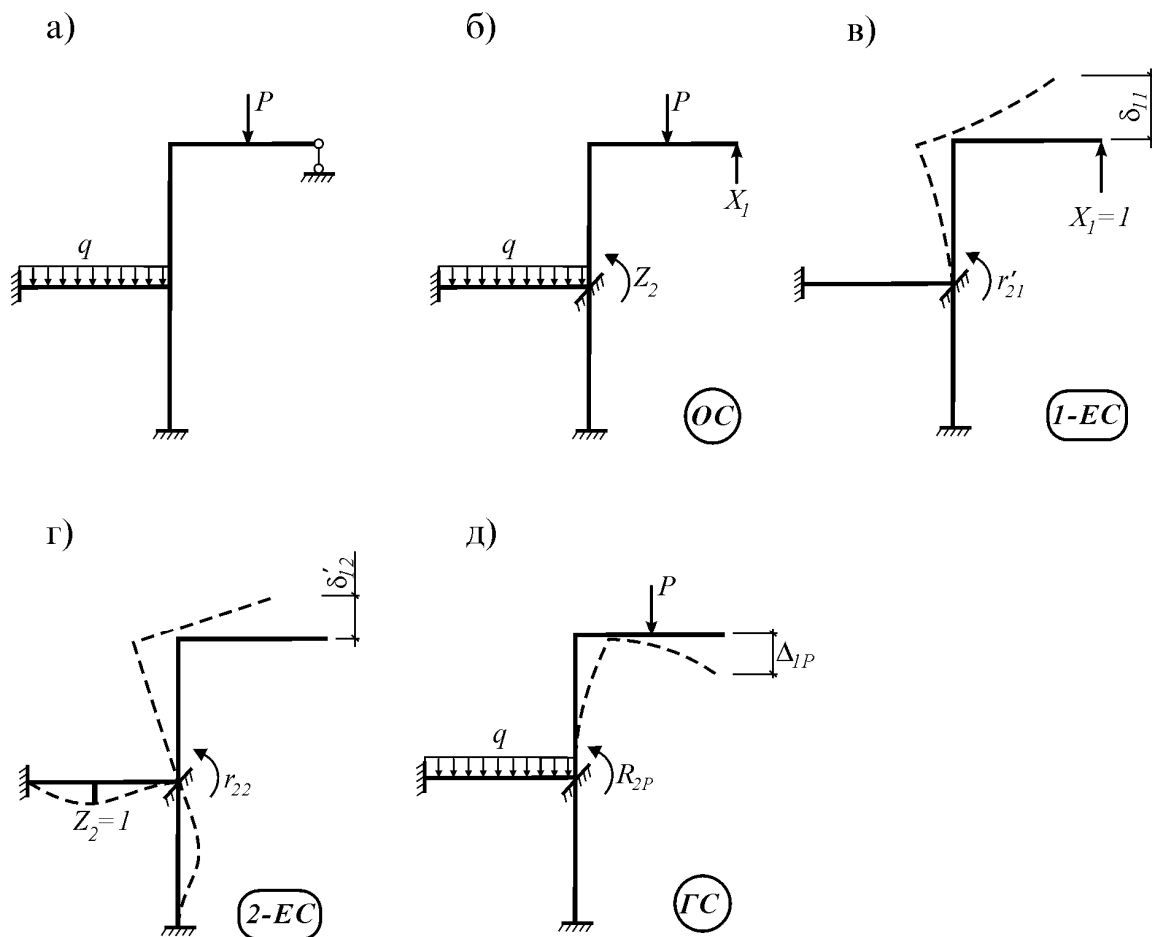


Рис. 14.2

Дальнейший расчет ведется, как обычно, по указанному выше алгоритму.

8.3. Комбинированный метод расчета

В этом методе основная система выбирается частично по методу сил (не удаляя все лишние связи) или частично по методу перемещений (не вводя дополнительные связи во все необходимые места). Поэтому, если основная система выбирается по методу сил, то она будет статически неопределимой. Если же она выбирается по методу перемещений, то будет кинематически неопределимой. В связи с этим, эпюры в единичных и грузовых состояниях основной системы смешанного метода нужно строить для нестандартных элементов. Поэтому, кроме основных неизвестных, в этом методе выбираются и вспомогательные неизвестные. Их общее число будет равно числу неизвестных смешанного метода.

Использование комбинированного метода обычно проще чем использование смешанного метода, т.к. основные неизвестные в нем рассматриваются отдельно от вспомогательных. Поэтому соответствующие два типа канонических уравнений рассматриваются раздельно. А в смешанном методе, как мы видели, оба типа канонических уравнений приходится рассматривать совместно.

При расчете симметричных рам комбинированный метод дает преимущества, если разложить нагрузку на симметричную и кососимметричную составляющие. Рассмотрим этот случай на примере рамы (рис. 14.3 а), число неизвестных которой по методам сил и перемещений будут

$$n_{mc} = 3n_k - n_{y\partial} = 3 \cdot 1 - 0 = 3,$$

$$n_{mn} = n_{y\partial} + n_{лин} = 2 + 1 = 3.$$

Внешнюю нагрузку представим как сумму симметричной (рис. 14.3 б) и кососимметричной (рис. 14.3 в) нагрузок.

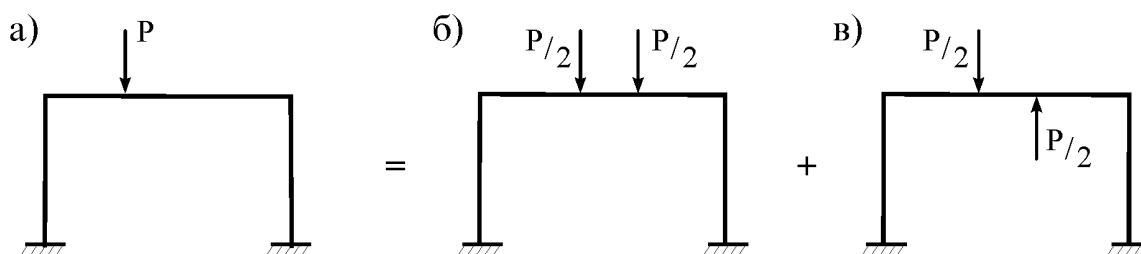


Рис. 14.3

Как было установлено при расчете симметричной рамы методом сил, метод сил выгоден при расчете на кососимметричную нагрузку. Действительно, при выборе основной системы как на рис. 14.3 б, симметричные неизвестные X_1 и X_3 будут обращаться в нуль, и поэтому из трех уравнений останется только одно каноническое уравнение

$$\boxed{\times}$$

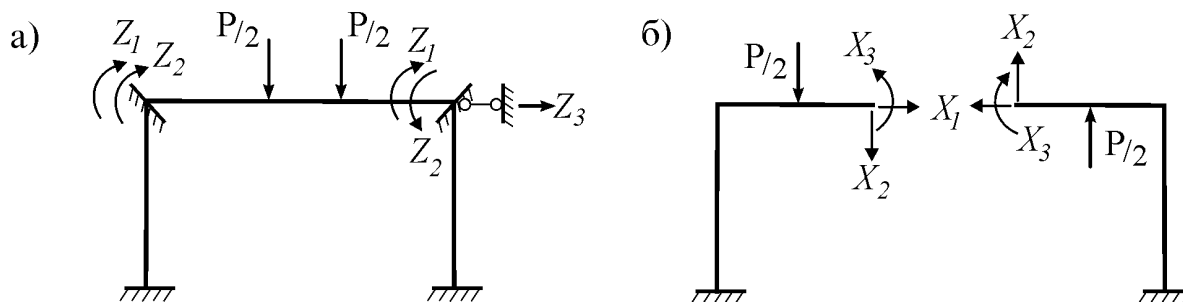


Рис. 14.4

Аналогично, при расчете на симметричную нагрузку, кососимметричные неизвестные Z_1 и Z_3 метода перемещений (рис. 14.4 а) также обратятся в нуль, и из трех уравнений остается только одно каноническое уравнение

$$r_{22}Z_2 + R_{2P}^c = 0.$$

Таким образом, расчет заданной системы с тремя неизвестными сводится к простым расчетам двух систем, имеющих по одной неизвестной. Окончательная эпюра изгибающих моментов определяется суммой двух решений:

$$M = M^c + M^{kc}.$$

В о п р о с ы

1. В чем сущность смешанного метода?
2. Как формулируется вторая теорема Релея?
3. С какой целью применяется эта теорема?
4. Какое преимущество имеет комбинированный метод расчета?

Л е к ц и я 15

РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ ДИСКРЕТНЫМ МЕТОДОМ

1. Континуальный и дискретный подходы в механике

В механике существуют два разных взгляда на объект исследования: континуальный и дискретный подходы.

Континуальный подход (по-латыни *continuum* – непрерывный, сплошной) основан на рассмотрении сооружения как непрерывной системы, состоящей из бесконечного числа элементов. Такой подход позволяет определять напряженно-деформированное состояние (НДС) системы во всех ее точках. Однако для этого необходимо составлять и решать системы дифференциальных уравнений в частных производных. Например, в теории упругости составляется система дифференциальных уравнений, состоящая из уравнений равновесия, совместности деформаций и физических уравнений.

Дискретный подход (по-латыни *discretus* – прерывистый, состоящий из отдельных частей) основан на изучении НДС сооружения только в отдельных точках. Количество и место этих точек устанавливается расчетчиком.

При дискретном подходе рассматриваются элементы расчетной схемы конечного размера (например, отдельные стержни) и изучаются условия равновесия, внутренние усилия, деформации и перемещения лишь отдельных точек системы. Такой подход приводит к системе алгебраических уравнений – аналогу дифференциальных уравнений континуального подхода.

В последние годы дискретные методы расчета сооружений начали широко использоваться. Их преимущество состоит в матричном представлении статических, геометрических и физических свойств сооружения, проведении расчета различных по форме и сложности сооружений по единым методикам и алгоритмам на компьютере. Общая схема расчета сооружений дискретным методом выглядит так:

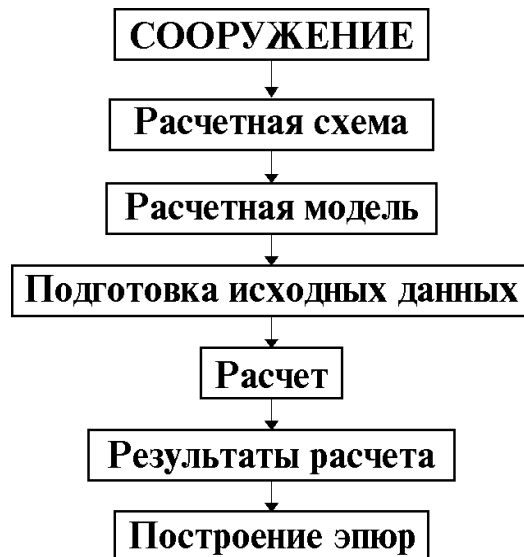


Рис. 15.1

2. Дискретная модель стержневой системы

Выбор дискретной расчетной модели стержневой системы начинается с разбиения расчетной схемы на элементы – на стержни постоянного сечения. В плоской стержневой системе эти элементы могут соединяться в шарнирном или жестком узлах (рис. 15.2):



Рис. 15.2

Здесь u_1 , u_2 , u_3 – независимые перемещения узла (u_1 , u_2 – линейные перемещения, u_3 – угловое перемещение). У шарнирного узла число независимых перемещений равно двум, а у жесткого – трем. Они называются **степенями свободы узла**.

Общее число степеней свободы дискретной модели определяется суммой чисел степеней свободы отдельных узлов. Если обозначить его через n , а все перемещения узлов пронумеровать рядом натуральных чисел от 1 до n и объединить в единый вектор, получим

$$\mathbf{u} = \{u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n\}.$$

Он называется **вектором перемещений дискретной модели**.

Если в расчетной схеме имеются стержни переменного сечения, их следует представить в виде нескольких стержней постоянного сечения, а в места скачков сечений необходимо вводить узлы. В системах с криволинейными стержнями (в арках, кольцах и др.) криволинейные элементы следует заменять ломаной фигурой – многоугольником.

В дискретном методе нагрузка может быть приложена только в узлах.

Однако в расчетной схеме нагрузка может быть и распределенной, и приложенной в виде сосредоточенных сил в точках, не совпадающих с узлами. Такие нагрузки следует переносить в соседние узлы как узловые силы, действующие в направлении степеней свободы дискретной модели. В результате этого формируется **вектор внешней нагрузки**

$$\mathbf{P} = \{P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_n\}.$$

Внутренние усилия и деформации, которые требуется определить, также собираются в отдельные вектора

$$\mathbf{S} = \{S_1 \quad S_2 \quad \dots \quad S_m\},$$

$$\mathbf{\Delta} = \{\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \dots \quad \Delta_m\},$$

где \mathbf{S} – вектор усилий, $\mathbf{\Delta}$ – вектор деформаций, m – число усилий.

Внешнюю нагрузку в узлы можно переносить по-разному.

В качестве примера рассмотрим три варианта переноса распределенной нагрузки q , действующей на балку (рис. 15.3 а), в узел расчетной модели, введенной в середине этой балки (рис. 15.3 б).

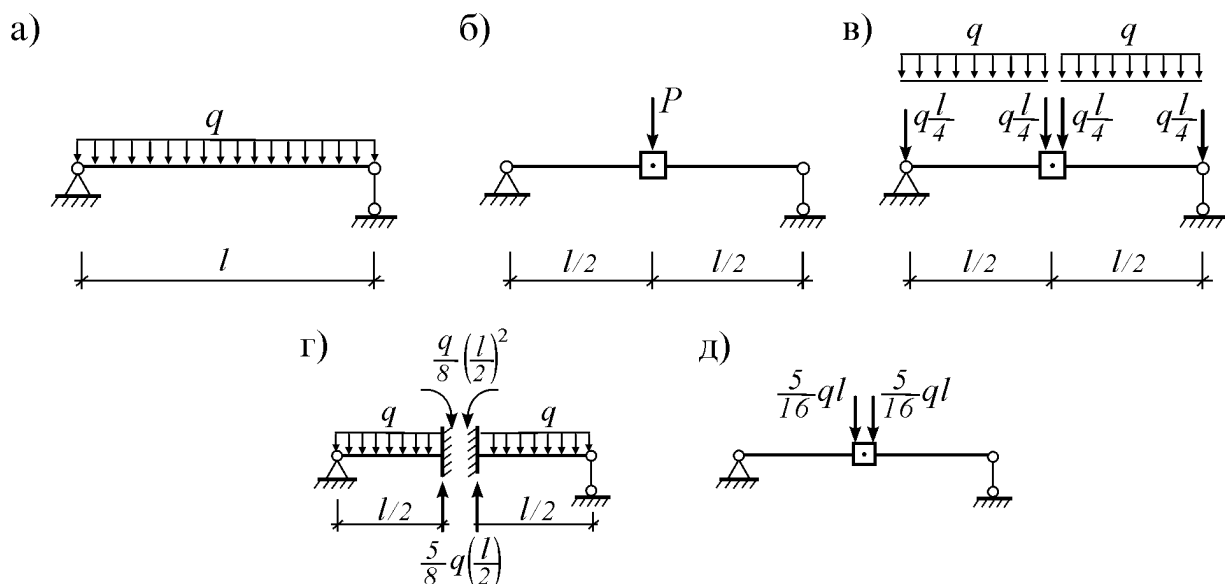


Рис. 15.3

а) Статически эквивалентный перенос

Поделим балку на два участка, а распределенную в них нагрузку учтем как давления $ql/4$ на концы участков балки (рис. 15.3 в). Давления на концы балки воспринимаются ее опорами, поэтому их можно не учитывать. Объединив оставшиеся две силы в середине балки, получим статически эквивалентную нагрузку, приложенную в середине балки:

$$P = q \frac{l}{4} + q \frac{l}{4} = q \frac{l}{2} = 0,5ql.$$

б) Перенос с сохранением энергии

Решение этой задачи подробно рассматривать не будем. Отметим только, что для этого необходимо приравнять энергии рассматриваемой

балки (рис. 15.3 а) и балки с сосредоточенной силой (рис. 15.3 б). В результате получается «точный» результат:

$$P = \frac{2ql}{\pi} \cong 0,637 ql .$$

в) Перенос по таблице метода перемещений

Для этого следует исключить перемещения узла введением дополнительных связей и по таблице метода перемещений определить возникающие реакции во введенных связях (рис. 15.3 г). Если эти реакции сложить и приложить в обратном направлении (рис. 15.3 д), получим величину эквивалентной нагрузки:

$$P = \frac{5}{16} ql + \frac{5}{16} ql = \frac{5}{8} ql = 0,625 ql .$$

Теперь сравним три варианта расчета. Конечно, вариант б) дает точный результат. Однако он сложен для реализации. Вариант а) наиболее прост, но дает неточный результат. Поэтому в дальнейшем будем пользоваться вариантом в), вполне простым для использования и дающим вполне точный результат.

В качестве примера рассмотрим следующую раму (рис. 15.4 а) и выберем ее расчетную модель (рис. 15.4 б). Для переноса нагрузок P и q в двух элементах рамы в узлы расчетной модели воспользуемся таблицей метода перемещений. Соответствующие схемы показаны на рис. 15.4 в, г. Полученные реакции в обратном направлении прикладываем к узлам выбранной расчетной модели (рис. 15.4 б).

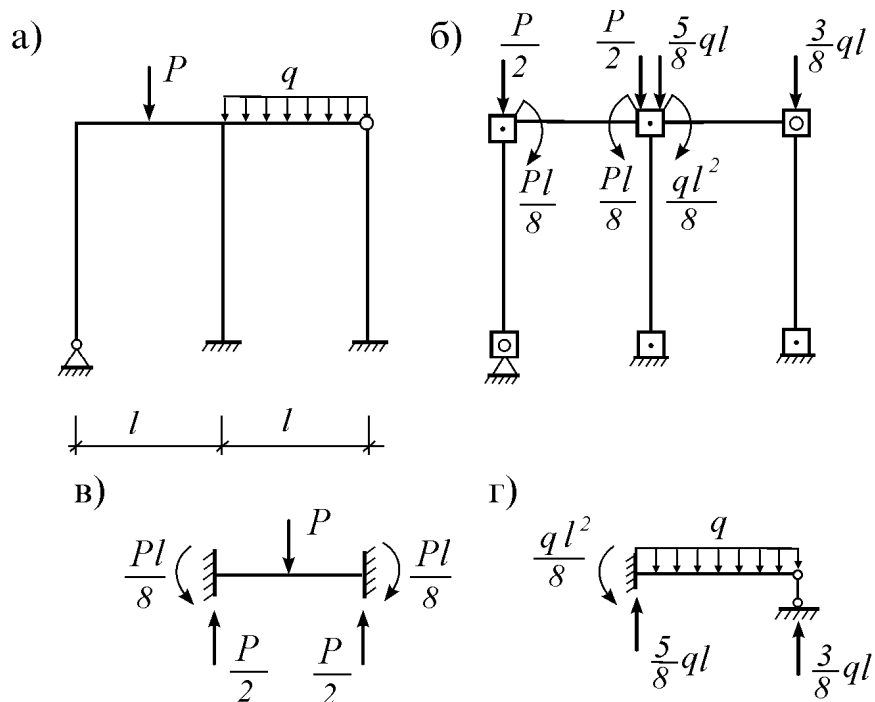


Рис. 15.4

3. Уравнения дискретного метода. Уравнение равновесия

Система уравнений, составляемая в дискретном методе, называется *полной системой уравнений строительной механики*. В нее входят три уравнения – уравнение равновесия (статики), геометрическое уравнение и физическое уравнение.

Составление уравнения равновесия основано на следующем рассуждении: если сооружение находится в равновесии, то его дискретная модель также находится в равновесии; следовательно, и отдельные элементы и узлы дискретной модели тоже находятся в равновесии.

В качестве примера рассмотрим ферму (рис. 15.5 а).

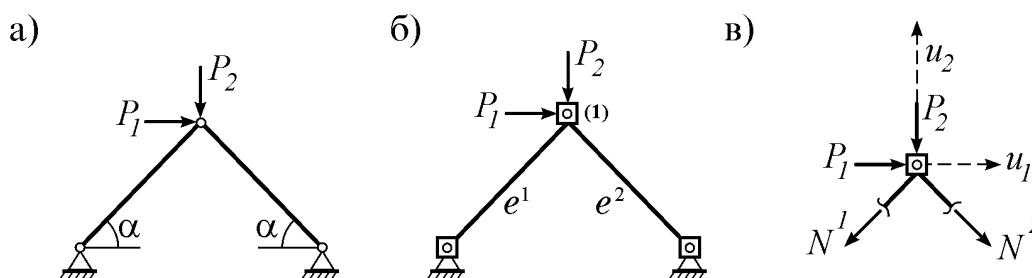


Рис. 15.5

Выберем дискретную модель фермы (рис. 15.5 б) и будем считать, что в ее элементах e^1 и e^2 возникают только продольные усилия. Поэтому, вырезав узел 1 (рис. 15.5 в), можно составить два уравнения равновесия узла как суммы проекций сил на направления перемещений узла u_1 и u_2 :

$$\sum u_1 = -N^1 \cos \alpha + N^2 \cos \alpha + P_1 = 0,$$

$$\sum u_2 = -N^1 \sin \alpha - N^2 \sin \alpha - P_2 = 0.$$

Представим эти уравнения в матричной форме

$$\begin{bmatrix} -\cos \alpha & \cos \alpha \\ -\sin \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^1 \\ N^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 \\ -P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и обозначим входящие сюда матрицы и вектора:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & \cos \alpha \\ -\sin \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} N^1 \\ N^2 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ -P_2 \end{bmatrix}, \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В результате получим матричное уравнение

$$\mathbf{AS} + \mathbf{P} = \mathbf{0},$$

которое называется *уравнением равновесия*, где \mathbf{A} – матрица равновесия, \mathbf{S} – вектор усилий, \mathbf{P} – вектор нагрузки, $\mathbf{0}$ – нуль-вектор.

По матрице \mathbf{A} можно установить некоторые особенности расчетной модели. Возможны три случая.

1. $n = m$ (\mathbf{A} – квадратная матрица размерности $n \times n$). Если определитель матрицы \mathbf{A} не равняется нулю ($\det \mathbf{A} \neq 0$), расчетная модель сооружения статически определима и геометрически неизменяема. В этом случае усилия определяются непосредственно из уравнения равновесия:

$$\mathbf{S} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}.$$

Рассмотренная нами ферма является именно такой ($n=m=2$).

2. $n < m$. В этом случае система статически неопределима, а число $m-n$ определяет степень ее статической неопределимости. Если ранг матрицы \mathbf{A} равняется n , то такая система геометрически неизменяема.

3. $n > m$. Такая система геометрически изменяема.

В о п р о с ы

1. Какова сущность континуального подхода?
2. Что такое дискретный подход в механике?
3. Какова общая схема реализации расчета при дискретном подходе?
4. Как определяется дискретная модель стержневой системы?
5. Какой способ переноса нагрузки предпочтительнее и чем это обосновано?
6. Что такое уравнение равновесия и как оно получается?
7. Какие особенности расчетной модели можно установить по полученной матрице равновесия?

Лекция 16

РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ ДИСКРЕТНЫМ МЕТОДОМ (продолжение)

4. Геометрическое уравнение

Внешняя нагрузка приводит к деформации элементов сооружения, но при этом они не должны отрываться друг от друга. Это требование можно записать в виде уравнений совместности деформаций, отражающих геометрическую сторону задачи. Систему таких уравнений будем называть *геометрическим уравнением*.

Порядок составления геометрического уравнения изучим на примере рассмотренной в предыдущей лекции фермы (рис. 16.1 а).

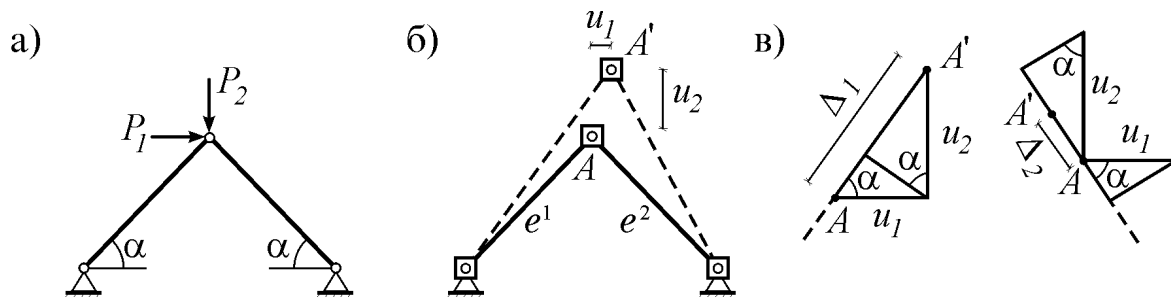


Рис. 16.1

Пусть под действием нагрузки элементы фермы получают только продольные деформации (рис. 16.1 б). Деформацию (удлинение) первого элемента e^1 можно определить по левой схеме на рис. 16.1 в:

$$\Delta l_1 = u_1 \cos \alpha + u_2 \sin \alpha.$$

Деформация второго элемента e^2 определяется по правой схеме рис. 16.1 в:

$$\Delta_2 = -u_1 \cos\alpha + u_2 \sin\alpha$$

(из-за сжатия e^2 от перемещения u_1 первое слагаемое взято со знаком «-»).

Перепишем эти уравнения в виде

$$-\cos\alpha \cdot u_1 - \sin\alpha \cdot u_2 + \Delta_1 = 0,$$

$$\cos\alpha \cdot u_1 - \sin\alpha \cdot u_2 + \Delta_2 = 0$$

и представим в матричной форме

$$\begin{bmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Это матричное уравнение можно записать в виде

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{u} + \mathbf{\Delta} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{u} = \{u_1 \ u_2\}$ и $\mathbf{\Delta} = \{\Delta_1 \ \Delta_2\}$ – вектора перемещений и деформаций,

$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{bmatrix}$ – связующая матрица. Кроме того, из предыдущей

лекции нам известна матрица равновесия $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\cos\alpha & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & -\sin\alpha \end{bmatrix}$. Сравнив их

между собой видим, $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}^t$ (символ t означает операцию транспонирования). Это свойство позволяет переписать полученное матричное уравнение в виде

$$\mathbf{A}^t \mathbf{u} + \mathbf{\Delta} = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Оно называется *геометрическим уравнением*.

Использование одной и той же матрицы \mathbf{A} в двух уравнениях – в уравнении статики и в геометрическом уравнении – соответствует известному в механике *принципу двойственности*.

5. Физическое уравнение

Изучим связь между деформациями и внутренними усилиями элементов расчетной модели стержневой системы.

Выбранная нами расчетная модель сооружения такова, что механические и геометрические характеристики ее отдельных элементов постоянны, а внешняя нагрузка действует только в узлах. В этом случае по нескольким конечным значениям усилий в элементах расчетной модели можно определять усилия во всех точках стержней.

В расчетных моделях плоской стержневой системы обычно встречаются три типовых элемента: 1) элемент с двумя жесткими узлами, 2) элемент с шарнирным и жестким узлами, 3) элемент с двумя шарнирными узлами. Рассмотрим их по отдельности, вводя следующие обозначения: e^r – некоторый элемент, r – номер этого элемента.

1) Элемент с двумя жесткими узлами (рис. 16.2 а). В нем продольная и поперечная силы постоянны, а Q можно выразить через конечный и начальный моменты элемента: $Q = \frac{M_k - M_n}{l}$.

2) Элемент с шарнирным и жестким узлами (рис. 16.2 б). В нем поперечную силу можно выразить через конечный момент: $Q = \frac{M_k}{l}$.

3) Элемент с двумя шарнирными узлами (рис. 16.2 в). В нем имеется лишь постоянная продольная сила N .

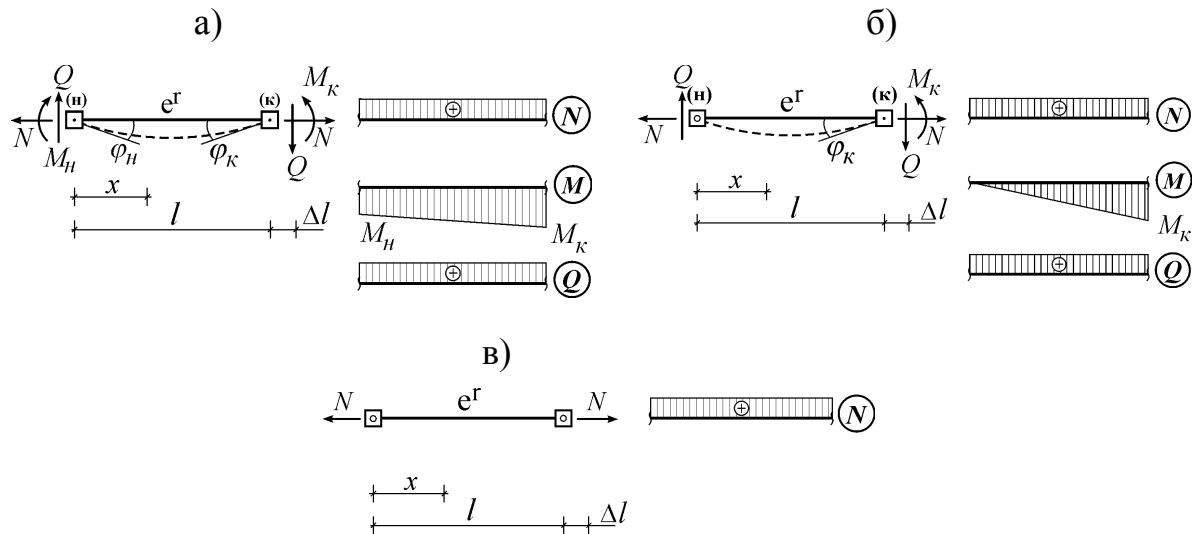


Рис. 16.2

Зависимость между внутренними усилиями и деформациями этих элементов может быть установлена через обобщенный закон Гука и записана в матричной форме

$$\Delta^r = B^r S^r, \quad (2)$$

где B^r – матрица податливости элемента, связывающая вектор перемещений элемента Δ^r с вектором усилий S^r .

Например, в элементе 1-го типа связь между компонентами векторов перемещений $\Delta^r = \{\Delta_l \varphi_n \varphi_k\}$ и внутренних усилий $S^r = \{N M_n M_k\}$ выражается формулами (даются без вывода)

$$\Delta_l = \frac{l}{EF} N,$$

$$\varphi_n = \frac{l}{3EI} M_n + \frac{l}{6EI} M_k,$$

$$\varphi_k = \frac{l}{6EI} M_n + \frac{l}{3EI} M_k.$$

Если эти уравнения записать в матричной форме (2), то матрица податливости элемента будет

$$\mathbf{B}^r = \begin{bmatrix} \frac{l}{EF} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{3EI} & \frac{l}{6EI} \\ 0 & \frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix}.$$

Для элемента второго типа имеем

$$\mathbf{S}^r = \{N \ M_k\}, \quad \Delta^r = \{\Delta_l \ \varphi_k\}, \quad \mathbf{B}^r = \begin{bmatrix} \frac{l}{EF} & 0 \\ 0 & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix}.$$

Для элемента третьего типа

$$\mathbf{S}^r = \{N\}, \quad \Delta^r = \{\Delta_l\}, \quad \mathbf{B}^r = \left[\frac{l}{EF} \right].$$

Теперь рассмотрим полную дискретную модель сооружения как системы, состоящей из m элементов e^1, e^2, \dots, e^m . Для всех этих элементов можно записать уравнения (2), связывающие вектора деформаций элементов $\Delta^1, \Delta^2, \dots, \Delta^m$ с векторами усилий $\mathbf{S}^1, \mathbf{S}^2, \dots, \mathbf{S}^m$. Если объединить все эти уравнения в общую систему, а вектора деформаций и усилий отдельных элементов объединить в вектора $\mathbf{S} = \{ \mathbf{S}^1 \ \mathbf{S}^2 \ \dots \ \mathbf{S}^r \ \dots \ \mathbf{S}^m \}$ и $\Delta = \{ \Delta^1 \ \Delta^2 \ \dots \ \Delta^r \ \dots \ \Delta^m \}$, то полученную систему уравнений можно записать в виде одного матричного уравнения

$$\Delta = \mathbf{B}\mathbf{S}.$$

Оно устанавливает связь между деформациями и усилиями расчетной модели и называется *физическим уравнением*, а матрица

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^1 & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{B}^2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{B}^m \end{bmatrix} = \left[\mathbf{B}^1 \ \mathbf{B}^2 \ \dots \ \mathbf{B}^m \right]$$

называется *матрицей податливости* системы. Здесь знак $\left[\ \right]$ означает диагональность матрицы.

6. Решение полной системы уравнений

Итак, при расчете НДС плоской стержневой системы дискретным методом участвуют четыре вектора:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \{P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n\} && \text{– вектор нагрузки;} \\ \mathbf{u} &= \{u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n\} && \text{– вектор перемещений;} \\ \mathbf{S} &= \{S^1 \ S^2 \ \dots \ S^m\} && \text{– вектор усилий;} \\ \mathbf{\Delta} &= \{\Delta^1 \ \Delta^2 \ \dots \ \Delta^m\} && \text{– вектор деформаций.} \end{aligned}$$

Между этими векторами имеется три зависимости:

$$\mathbf{AS} + \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad \text{– уравнение равновесия;} \quad (3)$$

$$\mathbf{A}^t \mathbf{u} + \mathbf{\Delta} = \mathbf{0} \quad \text{– геометрическое уравнение;} \quad (4)$$

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{BS} \quad \text{– физическое уравнение.} \quad (5)$$

Уравнения (3)-(5) объединяются в общую систему уравнений и называются *полной системой уравнений строительной механики*. Ее решение дает полную картину НДС всего сооружения.

Систему уравнений (3)-(5) с тремя неизвестными \mathbf{S} , \mathbf{u} , $\mathbf{\Delta}$ можно решать тремя способами.

а) Решение в смешанной форме

Для этого правую часть уравнения (5) нужно подставить вместо $\mathbf{\Delta}$ в уравнение (4). Тогда останутся два уравнения:

$$\mathbf{AS} = -\mathbf{P}, \quad (6)$$

$$\mathbf{A}^t \mathbf{u} + \mathbf{BS} = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Объединим их в одно матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A}^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Из его решения определяются искомые внутренние усилия и деформации сооружения:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A}^t \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Однако, из-за большой размерности обрабатываемой матрицы и ее несимметричности, расчет этим способом сложен для реализации.

б) Решение в перемещениях

Для этого из (7) найдем усилия:

$$\mathbf{S} = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{u} = -\mathbf{KA}^t \mathbf{u}, \quad (8)$$

где обратная к \mathbf{B} матрица $\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1}$ называется *матрицей жесткости*.

Теперь подставим (8) в (6) и получим

$$\mathbf{AKA}^t \mathbf{u} = \mathbf{P}.$$

Из него определяется вектор перемещений

$$\mathbf{u} = (\mathbf{AKA}^t)^{-1} \mathbf{P}.$$

Если этот результат подставить в (8), то определяются и усилия.

в) Решение в усилиях

Из-за сложности решения рассматривать его не будем.

Алгоритм дискретного метода

Порядок расчета по способу б) определяется так:

1. Ввести в расчетную схему узлы и выбрать расчетную модель.
 2. Составить вектор узловых перемещений \mathbf{u} и вектор нагрузки \mathbf{P} .
 3. Составить вектора неизвестных усилий \mathbf{S} и деформаций Δ .
 4. Перенести внешнюю нагрузку в узлы.
 5. Вырезая узлы, записать уравнения равновесия.
 6. Собрать матрицу равновесия \mathbf{A} и вектор нагрузки \mathbf{P} .
 7. Составить матрицы податливости отдельных элементов \mathbf{B}^T и собрать из них матрицу податливости необъединенных элементов \mathbf{B} .
 8. Решить полную систему уравнений строительной механики.
- Решение в перемещениях ведется в следующей последовательности:

- а) $\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1}$;
- б) $\mathbf{C} = \mathbf{K}\mathbf{A}^t$;
- в) $\mathbf{K}_0 = \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{A}^t = \mathbf{A}\mathbf{C}$;
- г) $\mathbf{B}_0 = \mathbf{K}_0^{-1}$;
- д) $\mathbf{u} = \mathbf{B}_0\mathbf{P}$;
- е) $\mathbf{S} = -\mathbf{C}\mathbf{u}$;
- ж) $\Delta = \mathbf{B}\mathbf{S}$.

9. По вектору усилий \mathbf{S} построить эпюры M , Q , N .

При необходимости по векторам \mathbf{u} и Δ можно получить общую картину деформации сооружения.

В о п р о с ы

1. Какой физический смысл имеет геометрическое уравнение?
2. В чем заключается принцип двойственности?
3. Какие типовые элементы рассматриваются в плоской стержневой системе?
4. Как составляются физические уравнения?
5. Что такое матрица податливости элемента?
6. Какими способами решается полная система уравнений?
7. Из каких этапов состоит алгоритм дискретного метода?

Л е к ц и я 17

РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИСТЕМ

1. Внутренние усилия пространственных систем

Все сооружения являются пространственными, и на них действуют нагрузки, лежащие в разных плоскостях. Поэтому и расчетные схемы сооружений должны быть пространственными.

Как известно, в плоских стержневых системах есть три внутренних усилия M , Q , N (рис. 17.1 а). В пространственных стержневых системах

таких усилий шесть: изгибающие моменты M_y и M_z , крутящий момент $M_x = H$, поперечные силы Q_y и Q_z , продольная сила N (рис. 17.1 б).

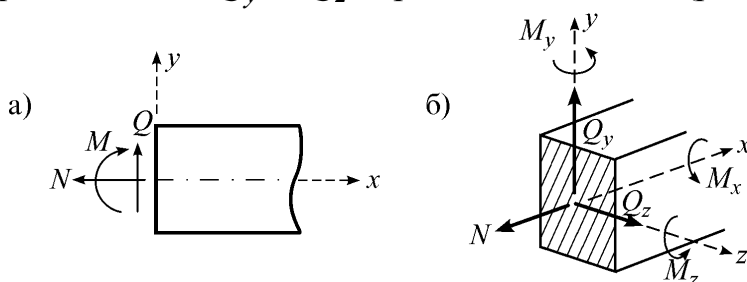


Рис. 17.1

2. Опоры пространственных систем и их реакции

Пространственные системы опираются на пространственные опоры со своими кинематическими и статическими свойствами. Обычно связи опор считаются жесткими, с нулевыми перемещениями по их направлениям. При определении опорных реакций используются уравнения равновесия.

В отличие от плоских систем, опоры пространственных систем могут быть 15 типов. Из них рассмотрим четыре типа опор.

1. **Шаровая подвижная опора** (рис. 17.2 а). На рисунке изображается как шарик, свободно качающийся между опорной плоскостью и элементом конструкции, а в расчетной схеме – как одна вертикальная связь. У этой опоры имеется пять степеней свободы – она дает возможность поступательных перемещений в двух и поворотов в трех направлениях. В ней возникает только одна опорная реакция R_y .

2. **Шаровая опора на цилиндрических катках** (рис. 17.2 б). На рисунке изображается как шарик между двумя балансирами, один из которых жестко связан с элементом конструкции, а другой находится на цилиндрических катках. В расчетной схеме изображается двумя связями. У этой опоры имеется четыре степени свободы – одно поступательное перемещение и три поворота. В ней возникают две реакции R_y и R_z .

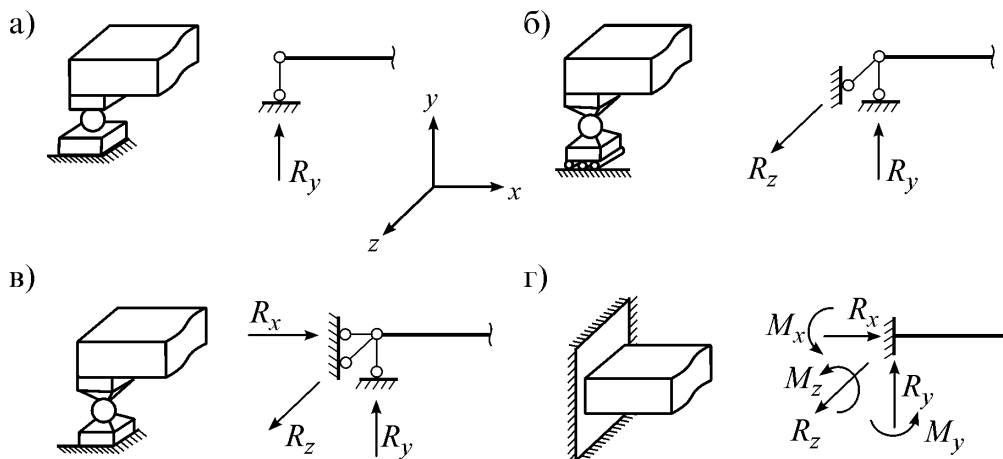


Рис. 17.2

3. **Шаровая неподвижная опора** (рис. 17.2 в). На рисунке изображается как шарик между двумя балансирами, жестко связанными с элементом конструкции и основанием, а в расчетной схеме - в виде трех связей. У этой опоры есть три степени свободы – возможность поворота в трех направлениях. В ней возникают три реакции R_x, R_y, R_z .

4. **Заделка** (рис. 17.2 г). На рисунке она изображается как заделанный брус (или стержень), а в расчетной схеме как обычная заделка. У заделки степеней свободы нет. В ней возникают три реакции R_x, R_y, R_z и три реактивных момента M_x, M_y, M_z .

Кроме рассмотренных здесь, еще имеется 11 различных опор.

Реакции статически определимых пространственных систем определяются из шести уравнений равновесия. Имеется четыре варианта записи этих уравнений, из которых рассмотрим только два:

$$1. \Sigma X=0; \Sigma Y=0; \Sigma Z=0; \Sigma M_x=0; \Sigma M_y=0; \Sigma M_z=0.$$

Здесь $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$ – суммы проекций на три оси x, y, z , которые не должны лежать в одной плоскости и быть параллельными; суммы моментов не обязательно составлять относительно тех же осей.

$$2. \Sigma M_1=0; \Sigma M_2=0; \Sigma M_3=0; \Sigma M_4=0; \Sigma M_5=0; \Sigma M_6=0.$$

Здесь $1, 2, \dots, 6$ – шесть любых осей в пространстве. Но:

- эти оси не должны пересекать одну прямую;
- число параллельных осей не должно быть больше трех;
- если три оси пересекаются в одной точке, остальные три не должны быть параллельными.

3. Кинематический анализ пространственных систем

Как известно, расчетная схема сооружения должна быть геометрически неизменяемой. Многие условия и выводы, полученные при кинематическом анализе плоских систем, применимы и при анализе пространственных систем. Однако их недостаточно. Потому при анализе пространственных систем вводятся новые понятия и рассматриваются новые способы анализа их геометрической неизменяемости.

Любую геометрически неизменяемую часть пространственной системы будем называть **телом**. Тело без связей имеет шесть степеней свободы – три независимых поступательных перемещения и три поворота. Следовательно, для исключения этих степеней свободы тело нужно закреплять как минимум шестью связями.

Простейший способ закрепления тела к земле показан на рис. 17.3 а, где имеется три типа опор – шаровая подвижная опора A , шаровая опора на цилиндрических катках B и шаровая неподвижная опора C . Из них опора C исключает три поступательных перемещения тела, опора B – два поворота и опора A – один поворот.

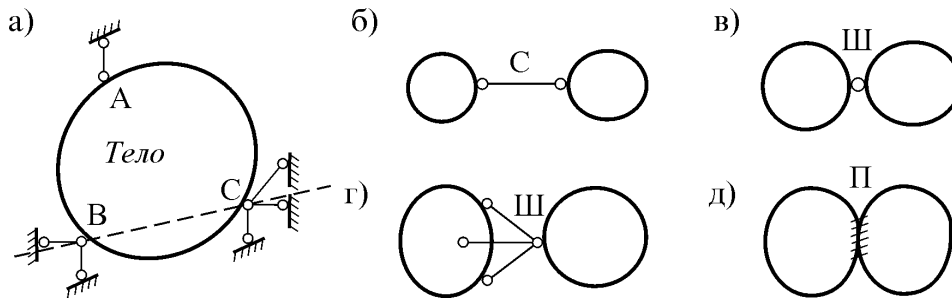


Рис. 17.3

Связи, соединяющие два тела, могут быть разными. Простейшая связь в виде стержня (С) показана на рис. 17.3 б. Если же два тела соединяются шаровым шарниром (рис. 17.3 в), то это соединение эквивалентно трем связям (рис. 17.3 г). Припайка, жестко связывающая два тела (рис. 17.3 д), эквивалентна шести связям.

Если в пространственной системе имеется n_T тел, $n_{Ш}$ шаровых шарниров, n_C стержней, n_{C_0} опорных связей и $n_{П}$ припаяек, то число степеней свободы такой системы определяется по формуле

$$W = 6n_T - 3n_{Ш} - n_C - n_{C_0} - 6n_{П}.$$

Как и для плоской системы, для геометрической неизменяемости пространственной системы необходимо выполнение условия $W \leq 0$.

4. Расчет пространственных ферм

Расчет пространственных систем намного сложнее расчета плоских систем. Поэтому изучим только основы расчета ферм.

Кинематический анализ такой фермы проводится по формуле

$$W = 3n_U - n_C - n_{C_0},$$

где n_U – число узлов фермы.

Требование $W \leq 0$ является необходимым условием геометрической неизменяемости фермы. Для статической определимости необходимо выполнение условия $W = 0$. Но, как известно, количественного анализа недостаточно, следует проводить и качественный анализ. Для этого можно использовать принципы образования геометрически неизменяемых пространственных систем. Например, простейшим принципом является присоединение к телу триады (шарового шарнира с тремя связями). При его использовании вначале в ферме выделяют простейшее геометрически неизменяемое тело – треугольную пирамиду. Затем к нему последовательно присоединяют отдельные триады.

Геометрическую неизменяемость пространственной системы можно проверять и методом нулевой нагрузки: *если при расчете системы без нагрузки усилия во всех стержнях и опорные реакции окажутся равными нулю, то система неизменяема; если же возникает неопределенность типа 0/0, система мгновенно изменяема.*

Изучим два метода расчета пространственных ферм.

Метод сечений применяется при расчете ферм с простейшим образованием. Имеется два его варианта.

а) Метод вырезания узлов. Основан на последовательном вырезании узлов фермы, в которых число неизвестных усилий не более трех. Составляются три уравнения проекций на три оси:

$$\Sigma X=0, \Sigma Y=0, \Sigma Z=0.$$

Эти оси не должны быть параллельными одной плоскости.

На этом методе основан признак определения нулевых стержней (стержней, усилия в которых равны нулю): *если узел с тремя пересекающимися стержнями не нагружен, то усилия во всех трех стержнях равны нулю.*

б) Метод моментной оси. Сущность метода: через ферму проводится сквозное сечение, затем составляется и решается уравнение момента относительно некоторой оси.

Ось, для которой составляется уравнение момента, называется **моментной осью**. Эта ось выбирается так, чтобы в уравнение вошла только одна неизвестная.

Метод разложения на плоские фермы. Когда стержни фермы располагаются группами на нескольких плоскостях, этот метод дает большой выигрыш в расчетах. Метод основан на следующей теореме: *если силы, действующие на пространственную ферму, лежат в одной плоскости, то усилия во всех стержнях фермы, лежащих вне этой плоскости, равны нулю.*

Порядок расчета фермы по этому методу состоит в следующем: внешняя нагрузка разлагается на несколько плоскостей; части фермы, лежащие в разных плоскостях, рассчитываются только на нагрузку в своей плоскости; затем применяется принцип суперпозиции.

Например, на следующую ферму (рис. 17.4 а) нагрузка действует только в двух плоскостях. Следовательно, ее расчет можно свести к расчету только двух плоских ферм (рис. 17.4 б, в). В стержнях фермы, лежащих на третьей боковой плоскости (рис. 17.4 г), все усилия равны нулю.

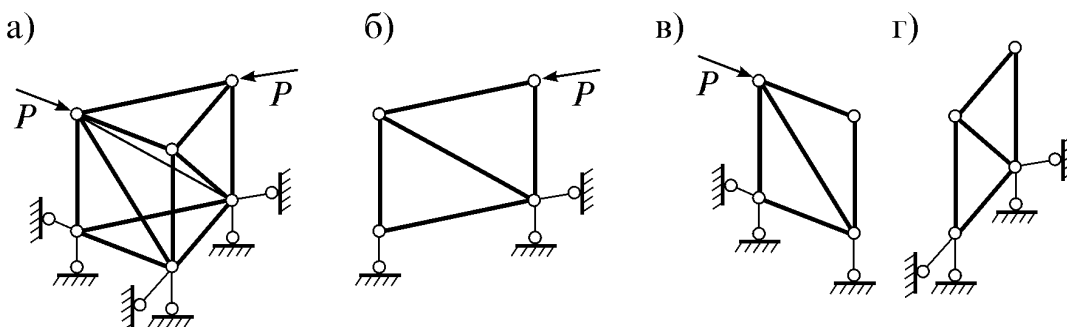


Рис. 17.4

5. Определение перемещений пространственных систем

В пространственных стержневых системах в общем случае могут возникать шесть внутренних усилий. Поэтому формула вычисления перемещений содержит шесть компонент:

$$\Delta_P = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \left(\frac{M_{Py} \bar{M}_y}{EI_y} + \frac{M_{Pz} \bar{M}_z}{EI_z} + \frac{H_P \bar{H}}{EI_k} + \mu_y \frac{Q_{Py} \bar{Q}_y}{GF} + \mu_z \frac{Q_{Pz} \bar{Q}_z}{GF} + \frac{N_P \bar{N}}{EF} \right) dx,$$

где индексом P обозначены усилия грузового состояния: M_{Py}, M_{Pz}, H_P – два изгибающих и крутящий моменты, Q_{Py}, Q_{Pz}, N_P – две поперечные и продольная силы; надчеркиванием обозначены соответствующие усилия единичного состояния; I_y, I_z, I_k – моменты инерции относительно осей y, z и полярный момент инерции; μ_y, μ_z – коэффициенты формы сечения.

Определение перемещений по этой формуле проводится, как и при определении перемещений плоских стержневых систем. В пространственных рамах влиянием продольных и поперечных сил обычно пренебрегают и учитывают только первые три члена этой формулы, а в фермах учитывается только последний член.

6. Расчет пространственных рам методом сил

Степень статической неопределимости пространственной рамы определяется по формуле

$$n = 6n_k - n_{y\partial},$$

где n_k – число замкнутых контуров, $n_{y\partial}$ – число удаленных связей.

Для ферм используется другая формула:

$$n = n_C + n_{C_0} - 3n_y,$$

где n_C – число стержней, n_{C_0} – число опорных связей, n_y – число узлов.

Основная система и канонические уравнения метода сил имеют тот же смысл и вид, как и для плоских рам. Но входящие в них коэффициенты определяются с учетом изгибающих моментов в двух плоскостях и крутящего момента в каждом элементе рамы.

Построение промежуточных и окончательных эпюр внутренних усилий и их проверка такие же, как и при расчете плоских рам.

В о п р о с ы

1. Какие усилия возникают в пространственных стержневых системах?
2. Чем отличается кинематический анализ пространственных систем от кинематического анализа плоских систем?
3. Какие методы используются при расчете пространственных ферм?
4. Какие особенности имеют определение перемещений и расчет методом сил пространственных систем по сравнению с плоскими?