



Белорусская государственная
орденов Октябрьской Революции
и Трудового Красного Знамени
сельскохозяйственная академия



ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

1-74 80 05 Техническое обеспечение производства
сельскохозяйственной продукции



ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальные исследования являются высшей формой эмпирических методов познания окружающей действительности. Процесс познания многоэтапный и включает различные формы: наблюдение, сравнение, контроль и измерение.

На начальной стадии эксперимента, наблюдая за поведением объекта или протеканием явления, исследователь делает предположения о наличии некоторых взаимосвязей и закономерностей. В заключительной стадии формируется цель исследования, определяются величины – факторы, влияющие на свойства объекта и вид их взаимосвязи, выдвигается гипотеза о модели исследуемого объекта. В соответствии с видом математической модели строится план эксперимента. От правильного выбора плана проведения целенаправленного эксперимента зависит успех дальнейших исследований – правильно выбранный план позволяет не только уменьшить объем исследований, но и минимизировать влияние на результат исследования неучтенных, неконтролируемых факторов.

Принятие проектных решений в машиностроении и оценка их качества в основном осуществляются на основании данных эксперимента, а усложнение объектов испытания вызывает резкое повышение стоимости их исследования. Поэтому задача извлечения наибольшего объема информации об изучаемых процессах или устройствах при ограничениях по затратах является достаточно актуальной. Решению указанной проблемы способствует широкое использование в прикладных исследованиях статистических методов планирования экспериментов, которые не только дают способ обработки экспериментальных данных, но и позволяют оптимально организовать эксперимент.

Планирование эксперимента и математическая обработка его результатов все больше входят в круг вопросов, необходимых студентам старших курсов, аспирантам и инженерам. Усвоение и использование методов планирования эксперимента позволяют повысить эффективность принимаемых решений.

Целью учебного пособия является изложение математических методов и моделей, применяемых при практическом использовании теории планирования эксперимента.

Учебное пособие состоит из десяти глав и приложения. В первой главе вводятся основные понятия и определения, используемые при планировании эксперимента.

Вторая глава содержит сведения из математической статистики, необходимые для получения точечных и интервальных оценок.

Третья, четвертая и пятая главы посвящены дисперсионному, корреляционному и регрессионному анализам, необходимым для понимания вопросов планирования экспериментов.

В шестой главе изложены методы построения планов полного факторного эксперимента, их дробных реплик, а также проведение эксперимента и обработка его результатов.

Основные процедуры предпланирования эксперимента, целью которых является снижение его трудоемкости путем уменьшения размерности факторного пространства, излагаются в седьмой главе.

Восьмая глава посвящена планированию экспериментов при отыскании экстремальных областей. Рассмотрены такие методы, как метод крутого восхождения, метод случайного поиска, использование симплекс-планирования.

В девятой главе рассмотрены математические модели, описываемые при помощи планов второго порядка.

В десятой главе описаны возможности использования пакета STATISTICA при обработке данных.

Приложение содержит справочные таблицы, которые будут полезны при решении задач. С целью облегчения восприятия идей и методов теории планирования эксперимента в каждой главе приведены примеры, которые не только позволяют разъяснить теоретические положения, но и наглядно иллюстрируют возможности методов статистической обработки и планирования экспериментов.

1. ЭКСПЕРИМЕНТ И ЕГО ПЛАНИРОВАНИЕ

1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Планирование эксперимента, как и всякий раздел науки, имеет свою терминологию. Рассмотрим наиболее общие термины.

Эксперимент – опыт, воспроизведение объекта познания, проверка гипотез и т. д. **Эксперимент** – целенаправленное воздействие на объект исследования с целью получения достоверной информации об объекте.

Всякий эксперимент предполагает наличие объекта исследования и цели. Объектом может быть изделие, процесс, препарат, физическое явление и т. д. Целью – исследование характеристик изделия, свойств препарата, оптимальных условий протекания процесса, изучение механизма явления и т. д.

При современном уровне развития науки и техники многие исследования в физике, биологии, химии, металлургии и так далее требуют постановки сложных и дорогостоящих экспериментов. Результаты эксперимента, практические выводы и решения непосредственно отражаются на работе производственных, энергетических объектов, сельскохозяйственных предприятий и др. Велика не только стоимость эксперимента как такового, но и цена последствий принятых решений.

Кроме того, все чаще оказываются недоступными непосредственному измерению характеристики объектов испытаний, подлежащих определению в результате эксперимента. Вследствие этого совокупность показателей, по которым проводится оценка испытуемого объекта или принимаются важные организационные, технико-экономические, инженерные и другие решения, не совпадает, как правило, с совокупностью параметров объекта, определяемых по результатам

натурального эксперимента. Следовательно, важной задачей является организация испытаний объектов, процессы функционирования которых носят сложный динамический характер и подвержены существенным влияниям изменяющихся условий внешней среды. В ходе испытаний собирается большое количество экспериментальных данных, требующих обработки и анализа.

Исходя из вышесказанного, необходимость планирования эксперимента представляется очевидной. При этом обычно преследуется одна из двух целей:

- 1) получение максимального количества информации при заданных ограничениях на затраты (включая затраты времени);
- 2) минимизация затрат при получении необходимого количества информации.

Планирование эксперимента – это средство построения математических моделей различных процессов, способ сокращения времени и средств, повышения производительности труда исследователя.

Чаще всего эксперименты ведутся в таких областях, где теоретически нельзя сделать предвидение. Планирование эксперимента опирается на математическую статистику – дисциплину, изучающую проблемы эффективной обработки экспериментальных результатов.

Широкое применение экспериментальных методов, математической статистики привело к созданию теории эксперимента. Эта теория призвана дать ответы на следующие вопросы:

- 1) как нужно организовать эксперимент, чтобы наилучшим образом решить поставленную задачу (в смысле затрат времени и средств или точности результатов);
- 2) как следует обрабатывать результаты эксперимента, чтобы получить максимальное количество информации об исследуемом объекте (явлении);
- 3) какие обоснования, выводы можно сделать об исследуемом объекте по результатам эксперимента.

1.2. КЛАССИФИКАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

По структуре эксперименты делятся:

- 1) на натуральные – средства экспериментального исследования взаимодействуют непосредственно с объектом исследования;
- 2) модельные – экспериментируют не с самим объектом, а с его заменителем – моделью;
- 3) модельно-кибернетические (машинные) – являются разновидностью модельного эксперимента, при котором соответствующие характеристики изучаемого объекта вычисляются с помощью алгоритма на ЭВМ.

По стадии научных исследований эксперименты делятся:

- 1) на лабораторные – эксперименты по изучению общих закономерностей различных явлений и процессов, по проверке научных гипотез и теорий;
- 2) стендовые – проводятся при необходимости изучить вполне конкретный процесс, протекающий в исследуемом объекте, определением физических, химических и других свойств. По результатам стендовых испытаний судят о различных недоработках при расчетах конструкции;
- 3) промышленные – проводятся при создании нового изделия или процесса по данным лабораторных или стендовых испытаний, при оптимизации действующего процесса, при проведении контрольно-выборочных испытаний качества выпускаемой продукции.

С точки зрения организации экспериментов можно выделить:

- 1) обычные эксперименты (рутинные) – проводятся в лабораторных условиях по несложным методикам с использованием простого экспериментального оборудования;

2) специальные эксперименты (технические) – эксперименты, связанные с созданием и исследованием различных приборов;

3) уникальные эксперименты – проводятся на сложном оборудовании (ядерный реактор). Они отличаются большим объектом экспериментальных данных, высокой скоростью протекания исследований, широким диапазоном измерения характеристик. Область применения: космос, новые технологии;

4) смешанные эксперименты – содержат совокупность разнотипных экспериментов, объединенных единой программой исследований.

Постановка задачи конкретного экспериментального исследования определяется уровнем сложности исследуемого объекта, степенью его изученности и требуемой степенью детализации его описания.

По принципу постановки задач по нахождению модели объекта исследования эксперименты могут быть:

1) учитывающие наличие неоднородностей различного вида (состав материала, различия во времени, в установлении);

2) рассчитанные на выявления механизма явлений (исследования хорошо организованных объектов и достаточно высокий уровень исходной информации);

3) учитывающие локальную область пространства его параметров, соответствующую экстремуму некоторого критерия оптимальности при наличии временного изменения параметров;

4) учитывающие локальную область пространства его параметров, соответствующую экстремуму некоторого критерия оптимальности при отсутствии временного изменения параметров;

5) учитывающие степень влияния входных переменных на выходные переменные;

6) позволяющие преобразовать набор переменных объекта исследования;

7) рассчитанные на прогнозирование его поведения.

По способу проведения:

1) пассивный эксперимент – основан на регистрации входных и выходных параметров, характеризующих объект исследования без вмешательства в эксперимент, в процессе его проведения, с применением математико-статистических методов только после окончания эксперимента для обработки экспериментальных данных;

2) неуправляемый активный эксперимент – существует возможность активного воздействия на исследуемый объект. При использовании методов активного эксперимента математическое описание строится в виде совокупности статистических и динамических выходных характеристик объекта, которые регистрируются при подаче на его входы специальных возмущающих воздействий;

3) активный эксперимент с программным управлением – проводится по заранее составленному плану. В соответствии с этим планом экспериментатор воздействует на входные параметры исследуемого объекта, а выходные параметры, отражая реакцию исследуемого объекта на управляющее воздействие, позволяют выяснить природу происходящих процессов в объекте исследования;

4) активный эксперимент с обратной связью – в этом случае, интерпретируя результаты на каждом шаге эксперимента, можно выбрать оптимальную стратегию управления экспериментом. Такие эксперименты можно проводить автоматически (без участия экспериментатора);

5) активно-пассивный эксперимент – характеризуется тем, что при его проведении одна часть данных просто регистрируется, а другая, кроме того, обрабатывается в процессе эксперимента и участвует в выработке управляющих воздействий. В таком эксперименте одна часть информации, получаемой от объекта, соответствует характеристикам, изменяющимся в соответствии с приложенными управляющими воздействиями, а другая отражает характеристики, не подверженные управляющим воздействиям.

Эксперименты могут проводиться непосредственно на объекте исследования или на его модели. Модель обычно отличается от объекта масштабом, а иногда – природой. Главное требование к модели – достаточно точное описание объекта.

1.3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБЪЕКТА

В эксперименте всегда выделяются некоторые величины, влияние которых на объект подлежит изучению. В теории эксперимента они называются факторами. Для эффективного анализа явлений (объекта, систем) необходимо выявить взаимосвязь факторов, определяющих ход процесса, и представить их в количественной форме – в виде математической модели. Такая модель является математическим отображением наиболее существенных сторон процесса. Она представляет собой совокупность соотношений (формул, уравнений...), определяющих характеристики состояния объекта в зависимости от условий. Модель позволяет получить информацию о процессах, протекающих в объектах, рассчитать характеристики объекта.

В зависимости от источника информации, используемого при построении математической модели, различают:

- 1) **физические** (называют иногда аналитическими или теоретическими) модели;
- 2) **статистические** (эмпирические) модели.

Аналитические – представляют в виде сложных систем уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных или дифференциально-интегральных), позволяющих очень точно описать процессы, протекающие в объекте, и допускающих экстраполяцию в точки факторного пространства, в которых невозможно непосредственное наблюдение этих процессов.

Статистические – получают в результате статистической обработки экспериментальной информации, собранной на исследуемом объекте. Эти модели имеют относительно простую структуру и часто представляются в виде полиномов. Область их применения ограничивается ближайшей окрестностью рабочих точек, в которых проводятся эксперименты. Во многих случаях построение таких моделей можно выполнить при сравнительно небольших затратах времени и средств.

Принято также различать **стационарные** и **динамические модели**.

Первые из них описывают неизменяющиеся во времени соотношения об объекте исследования, вторые – переходные процессы, т. е. нестационарные состояния. И те, и другие модели могут относиться либо к статистическому, либо к физическому типу.

Реальные процессы, если их рассматривать во всех деталях, весьма сложны, а сопровождающие их явления чрезвычайно разнообразны. Часто, приступая к решению сложных задач, исследователь имеет очень мало сведений о механизме процесса. Поэтому при построении математической модели процесса или объекта целесообразно пользоваться схематическим (упрощенным) представлением исследуемого объекта в виде некоторого «черного ящика».

Под «черным ящиком» понимают изображение процессов, на вход которого поступают воздействующие факторы, а на выходе получают значения параметров, характеризующие состояние объекта изучения (рис. 1.1).

На такой объект исследования воздействуют группы факторов, которые и определяют его состояние.

1. Группа $X=(x_1, x_2, \dots, x_i)$ – управляемые факторы. В процессе эксперимента их можно целенаправленно изменять (питающее напряжение, технологические режимы).

2. Группа $U=(u_1, u_2, \dots, u_m)$ – контролируемые факторы, которые в отличие от факторов первой группы не допускают целенаправленного изменения в ходе исследования. Информация о значениях параметров получается в результате лабораторных анализов, измерений (окружающая среда, температура, освещение).

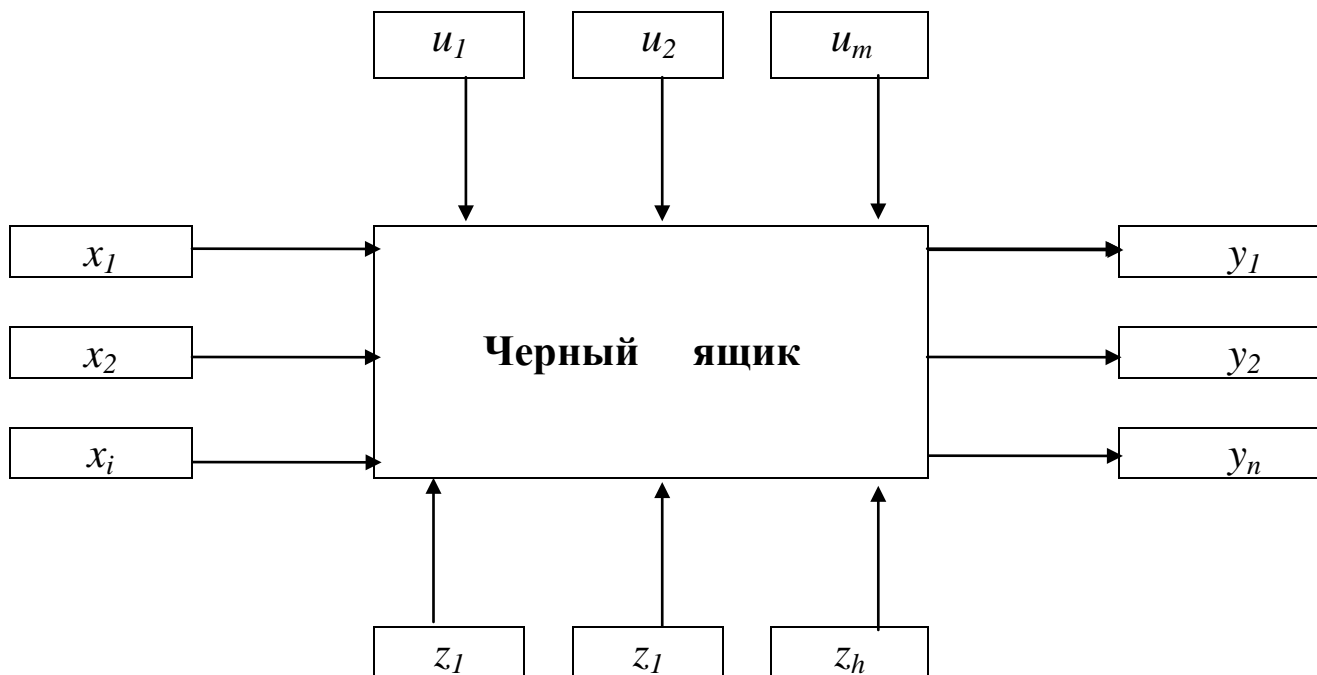


Рис. 1.1. Схематическое представление объекта исследования

3. Группа $Z=(z_1, z_2, \dots, z_h)$ – неконтролируемые и неуправляемые факторы. Они характеризуют действие на объект некоторого возмущения, в некоторых случаях неизвестного исследователю. Воздействие неконтролируемых факторов медленно изменяется во времени случайным образом.

4. Группа $Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ – выходные параметры процесса, часто их называют функциями отклика, цели или параметрами оптимизации. К их числу относятся величины, характеризующие эффективность процесса, технико-экономические параметры, технологические свойства, а также характеристики готовых продуктов.

Математическая модель объекта – связь входных и выходных параметров – функция отклика ($f(x_i; u_m; z_h)$).

$$Y = f(x_i; u_m; z_h), \quad (1.1)$$

где x_i – совокупность значений входных контролируемых и управляемых параметров; u_m – совокупность значений контролируемых,

но неуправляемых параметров; z_h – совокупность неконтролируемых и неуправляемых параметров.

Однако практически при построении модели такие соотношения получить невозможно. Приходится вводить ограничения, например считать, что каждый из параметров может изменяться в определенных пределах:

$$\begin{aligned} x_{iH} \leq x_i \leq x_{iB}, & \quad i = 1; k \\ u_{mH} \leq u_m \leq u_{mB}, & \quad m = 1; j \\ z_{hH} \leq z_h \leq z_{hB}, & \quad h = 1; g, \end{aligned} \quad (1.2)$$

обусловленных нижней ($x_{iH}; u_{mH}; z_{hH}$) и верхней ($x_{iB}; u_{mB}; z_{hB}$) границами. Выход хотя бы одного параметра за эти пределы приводит к нарушению нормальной работы устройства (или нормального протекания процесса). Задача каждого исследователя заключается в том, чтобы при фиксированных параметрах $z_h = const$ и $u_m = const$ выбрать такие значения $x_i = var$ ($i = 1, k$) (такую рабочую точку в области работоспособности), при которых выходной (или оптимизируемый) параметр объекта y достигает оптимальной величины. Другими словами, необходимо оптимизировать функцию $y = f(x_i = var; u_m = const; z_h = const)$ при $x_{iH} \leq x_i \leq x_{iB}$ ($i = 1, k$).

Статистической математической моделью объекта (рис. 1.1), так как в дальнейшем будет идти речь в основном о статистических моделях, служит функция отклика, связывающая параметр оптимизации y , характеризующий результаты эксперимента, с переменными параметрами, которыми варьируют при проведении опытов:

$$y = f(x_1; x_2; \dots; x_i), \quad i = 1; k. \quad (1.3)$$

Независимые переменные x_i принято называть факторами, независимыми переменными, которые можно изменять при постановке экспериментов.

Наиболее часто при неполном знании механизма явлений функцию отклика представляют в виде полинома

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i \neq j}^k \beta_{ij} x_i x_j + \dots, \quad (1.4)$$

где β_0 ; β_i ; β_{ii} ; β_{ij} – коэффициенты, характеризующие свободные члены уравнения.

Пользуясь данными эксперимента, исследователь находит лишь оценки коэффициентов уравнения регрессии b_0 ; b_i ; b_{ii} ; b_{ij} . После чего уравнение имеет вид

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + \sum_{i \neq j}^k b_{ij} x_i x_j + \dots, \quad (1.5)$$

где \hat{y} – оценка входного параметра оптимизации.

Такая математическая модель является наиболее простой и удобной для исследования.

1.4. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Хотя цели эксперимента и объекты исследования на разных этапах различны, тем не менее всегда можно выделить некоторые общие задачи. Можно выделить некоторые стандартные этапы решения задачи построения математических моделей объектов:

- 1) постановка задачи;
- 2) сбор априорной информации об исследуемом объекте;
- 3) выбор способа решения задачи;

- 4) проверка выбранного способа решения задачи;
- 5) реализация данного способа решения задачи;
- 6) анализ и интерпретация результатов и их представление.

На первом этапе определяют цели, выясняют исходную ситуацию, оценивают допустимые затраты времени и средств, устанавливают тип задачи: выявление структуры и параметров; определение условий управления объектом или нахождение оптимальных условий работы объекта.

На втором этапе, пользуясь литературой, опросом экспертов, техническими требованиями на объект и экспериментальными данными подобных объектов, собирают и оценивают всю информацию, касающуюся решения таких же или сходных задач.

На третьем этапе устанавливают тип модели – статистический или физический – и выделяют возможные влияющие переменные (факторы) и выходные переменные (отклики, целевые величины). Формируют статистические задачи, строят установку, необходимую для проведения экспериментов, и разрабатывают методику анализа их результатов. Составляют и отлаживают алгоритмы и программы, требуемые для обработки экспериментальных данных.

На четвертом этапе для своевременного выявления возможных ошибок в постановке задачи, выбранной модели, экспериментальной установке, методике анализа, а также с целью экономии времени и средств проводят предварительные эксперименты. С их помощью не только проверяют экспериментальную установку и методику, но и производят предварительную оценку качества модели.

Реализация выбранного способа решения задачи осуществляется на **пятом этапе** – этот этап является наиболее важным. Именно на этом этапе уточняют тип экспериментальной установки и определяют значения целевых функций и факторов, объемы выборок и планы

экспериментов, кратности повторения опытов и т. д. Завершается этап проведением экспериментов.

Анализ и интерпретация результатов производятся на заключительном **шестом этапе** экспериментального исследования. Анализ осуществляется средствами математической статистики. Он дает оценки интересующих экспериментатора величин и определяет степень достоверности этих оценок. Интерпретация имеет своей целью выражение результатов анализа в терминах и понятиях той области науки или техники, в интересах которой был проведен эксперимент. Без интерпретации полученные результаты могут быть не поняты, а значит, и не использованы в полной мере.

Представление результатов является последней заботой экспериментатора. Оптимальный способ представления зависит от многих причин (объема информации, квалификации лиц, ее использующих, времени, за которое информация должна и/или может быть использована, и т. д.). Несмотря на очевидную важность этого вопроса, ему часто уделяется недостаточно внимания.

В ходе экспериментальных исследований экспериментатору необходимо решить следующие творческие задачи: выбор числа и условий проведения опытов, построение алгоритмов оптимального управления экспериментов, выбор исходных данных (варьируемых факторов и параметров оптимизации), изучение поведения отдельных элементов системы и взаимодействие между ними, определение влияния различных факторов и реакции на изменения экспериментальных условий, определение совокупности регистрируемых величин, уточнение требований к точности измерения параметров и др. Главный признак, по которому судят **об окончании исследования**, – это значение параметра оптимизации. Если экспериментальная проверка показала, что результат воспроизводится с требуемой точностью, то задачу можно считать решенной.

1.5. ТИПИЧНЫЕ ЗАДАЧИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Несмотря на очевидное многообразие задач, с которыми приходится сталкиваться экспериментатору, большинство из них можно отнести к нескольким типичным:

- оценка определенных характеристик (параметров) изучаемого объекта, проявляющих себя статистически, а также проверка некоторых гипотез, касающихся упомянутых характеристик; эта задача имеет непосредственное отношение к измерительным процессам;

- выявление воздействия, влияния на выходную величину (отклик) тех или иных входных величин (факторов); результатом этого эксперимента должно быть одно из утверждений «да» или «нет», например, влияет ли добавка некоторого компонента на прочность бетона, влияет ли прием определенного лекарства на время выздоровления больных и т. п.; соответствующая экспериментальная процедура называется дисперсионным анализом;

- установление функции отклика, т. е. статистически достоверной зависимости, связывающей отклик с факторами; другими словами, построение математической модели изучаемого объекта; это задача регрессионного анализа;

- определение степени взаимной статистической связи двух величин, например энерговооруженности и производительности труда, затрат на техническую информацию и количество изобретений и т. п.; определение степени подобной связи является предметом корреляционного анализа;

- нахождение оптимальных условий протекания процесса, т. е. определение значений факторов, при которых отклик является максимальным (или минимальным), например определение температуры, давления, времени протекания реакции, при которых концентрация

кислоты на выходе химического реактора является максимальной; эта задача решается в ходе выполнения экстремального эксперимента.

Известен также ряд других типичных задач, но они встречаются реже, и мы их не будем касаться.

1.6. ПАРАМЕТРЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Выбор параметров оптимизации (критериев оптимизации) является одним из главных этапов работы на стадии предварительного изучения объекта исследования, т. к. правильная постановка задачи зависит от правильности выбора параметра оптимизации, являющегося функцией цели.

Под **параметром оптимизации** понимают характеристику цели, заданную количественно. Параметр оптимизации является реакцией (откликом) на воздействие факторов, которые определяют поведение выбранной системы.

Реальные объекты или процессы, как правило, очень сложны. Они часто требуют одновременного учета нескольких, иногда очень многих, параметров. Каждый объект может характеризоваться всей совокупностью параметров, или любым подмножеством этой совокупности, или одним-единственным параметром оптимизации. В последнем случае прочие характеристики процесса уже не выступают в качестве параметра оптимизации, а служат ограничениями. Другой путь – построение обобщенного параметра оптимизации как некоторой функции от множества исходных.

1.6.1. Требования к параметрам оптимизации

Параметр оптимизации – это признак, по которому оптимизируется процесс. Он должен быть количественным, задаваться числом. Множество значений, которые может принимать параметр оптимизации,

ции, называется областью его определения. Области определения могут быть непрерывными и дискретными, ограниченными и неограниченными. Например, число бракованных изделий, число зерен на шлифе сплава – вот примеры параметров с дискретной областью определения, ограниченной снизу.

Количественная оценка параметра оптимизации на практике не всегда возможна. В таких случаях пользуются приемом, называемым ранжированием. При этом параметрам оптимизации присваиваются оценки – ранги по заранее выбранной шкале: двухбалльной, пятибалльной и т. д. Ранговый параметр имеет дискретную ограниченную область определения. В простейшем случае область содержит два значения (да, нет; хорошо, плохо). Это может соответствовать, например, годной продукции и браку.

Параметр оптимизации необходимо выбирать с учетом комплекса требований.

1. Параметр оптимизации должен быть **количественным**, т. е. иметь числовую оценку.

2. Параметр оптимизации должен обладать **однозначностью** в статистическом смысле. Заданному набору значений факторов должно соответствовать одно значение параметра оптимизации, при этом обратное неверно: одному и тому же значению параметра могут соответствовать разные наборы значений факторов.

3. Он должен быть **универсальным** и всесторонне отражать характеристики объекта, процесса, явления. Универсальными обычно являются экономические и технико-экономические параметры (себестоимость, надежность и др.).

4. Параметр оптимизации должен быть **эффективным** как с точки зрения достижения цели, так и в статистическом смысле.

Если, например, за параметр оптимизации принять себестоимость восстановления детали, то он не будет характеризовать надежность ее работы в узле трения. Поэтому в качестве параметра оптими-

зации целесообразно выбирать себестоимость при допустимой износостойкости или износостойкость при допустимой себестоимости. Эффективность в этом смысле определяет корректность постановки задачи. Говоря о статистической эффективности, следует учитывать дисперсии или ошибки измерений. Эффективным параметром оптимизации является тот, который имеет наименьшие ошибки измерений. Например, твердость материала – менее эффективный параметр оптимизации при оценке абразивной стойкости материала, чем интенсивность изнашивания, если принимать его в качестве оценки износостойкости.

5. Параметр оптимизации должен быть простым, с ясным физическим смыслом.

Требование физического смысла связано с последующей интерпретацией результатов эксперимента. Например, при исследовании процессов трения предпочтительнее в качестве параметра оптимизации принять безразмерный коэффициент трения, чем силу трения. Это требование не только полнее и точнее определяет цель исследования, но и облегчает интерпретацию полученных результатов экспериментального исследования.

Задачи с одним выходным параметром имеют очевидные преимущества. Но на практике чаще всего приходится учитывать несколько выходных параметров. Иногда их число довольно велико. Так, например, при производстве резиновых и пластмассовых изделий приходится учитывать физико-механические, технологические, экономические, художественно-эстетические и другие параметры. Математические модели можно построить для каждого из параметров, но одновременно оптимизировать несколько функций невозможно.

Обычно оптимизируется одна функция, наиболее важная с точки зрения исследования, при ограничениях, налагаемых другими функ-

циями. Поэтому из многих выходных параметров выбирается один в качестве параметра оптимизации, а остальные служат ограничениями. Всегда полезно исследовать возможность уменьшения числа выходных параметров. Для этого можно воспользоваться корреляционным анализом.

Кроме того, если имеются трудности в выборе параметра оптимизации, то принимаются различные меры: математические преобразования, переход от нескольких параметров оптимизации к обобщенному.

1.6.2. Обобщенный параметр оптимизации

Путь к единому параметру оптимизации часто лежит через обобщение. При обобщении множества откликов сталкиваются с рядом трудностей.

Каждый отклик имеет свой физический смысл и свою размерность. Чтобы объединить различные отклики, прежде всего придется вводить для каждого из них некоторую безразмерную шкалу. Шкала должна быть однотипной для всех объединяемых откликов, это делает их сравнимыми. Выбор шкалы – не простая задача, зависящая от априорной информации об откликах, а также от той точности, с которой определяется обобщенный признак.

После построения для каждого отклика безразмерной шкалы возникает следующая трудность: выбор правила комбинирования исходных частных откликов в обобщенный показатель. Единого правила не существует. Здесь можно идти различными путями, и выбор пути неформализован. Рассмотрим несколько способов построения обобщенного показателя.

Простейшие способы построения обобщенного отклика

Пусть исследуемый объект характеризуют n частных откликов $y_u (u = 1, 2, \dots, n)$ и каждый из этих откликов измеряется в N опытах. Тогда y_{ui} – это значение u -го отклика в i -м опыте ($i = 1, 2, \dots, N$). Каждый из откликов y_u имеет свой физический смысл и, чаще всего, разную размерность. Введем простейшее преобразование: набор данных для каждого y_u поставим в соответствие с самым простым стандартным аналогом – шкалой, на которой имеются только два значения: 0 – брак, неудовлетворительное качество, 1 – годный продукт, удовлетворительное качество. Стандартизовав таким образом шкалу частных откликов, приступаем ко второму этапу – их обобщению.

В ситуации, когда каждый преобразованный частный отклик принимает только два значения: 0 и 1, желательно, чтобы и обобщенный отклик принимал одно из этих двух возможных значений, причем так, чтобы значение 1 имело место, если все частные отклики в этом опыте приняли значение 1. А если хотя бы один из откликов обратился в 0, то и обобщенный отклик будет нулем.

При таких рассуждениях для построения обобщенного отклика удобно воспользоваться формулой

$$Y_i = \sqrt[n]{\prod_{u=1}^n y_{ui}} \quad , \quad (1.6)$$

где Y_i – обобщенный отклик в i -м опыте; $\prod_{u=1}^n$ – произведение частных откликов $y_{1i} \cdot y_{2i} \cdot \dots \cdot y_{ni}$.

Рассмотрим другой способ получения обобщенного отклика, который может применяться в тех случаях, когда для каждого из частных откликов известен «идеал», к которому нужно стремиться. Существует много способов введения метрики, задающей «близость к идеа-

лу». Здесь понятие «ввести метрику», значит, указать правило определения расстояния между любыми парами объектов из интересующего нас множества.

Дополним предыдущее обозначение еще одним: y_{uo} – наилучшее («идеальное») значение u -го отклика. Тогда $y_{ui} - y_{uo}$ можно рассматривать как некоторую меру близости к идеалу. Однако использовать разность при построении обобщенного отклика невозможно по двум причинам: она имеет размерность соответствующего отклика, а у каждого из откликов может быть своя размерность, что препятствует их объединению; отрицательный или положительный знак разности также создает неудобство. Чтобы перейти к безразмерным значениям, достаточно разность поделить на желаемое значение:

$$(y_{ui} - y_{uo}) / y_{uo} . \quad (1.7)$$

Если в некотором опыте все частные отклики совпадут с идеалом, то Y станет равным нулю. Это и есть то значение, к которому нужно стремиться. Чем ближе к нулю, тем лучше. Здесь необходимо условиться о том, что считать нижней границей, если верхняя равна нулю.

Среди недостатков такой оценки выделяется нивелировка частных откликов. Все они входят в обобщенный отклик на равных правах. На практике же различные показатели бывают далеко не равноправны. Устранить этот недостаток можно введением некоторого веса a_u :

$$Y_i = \sum_{u=1}^N a_u \left(\frac{y_{ui} - y_{uo}}{y_{uo}} \right)^2 , \quad (1.8)$$

причем $\sum_{u=1}^N a_u = 1$ и $a_u > 0$.

Чтобы проранжировать отклики по степени важности и найти соответствующие веса, можно воспользоваться экспертными оценками.

Мы рассмотрели простейшие способы построения обобщенного показателя. Для перехода к более сложным способам нужно научиться фиксировать более тонкие различия на шкале преобразования откликов. Здесь в основном приходится опираться на опыт экспериментатора. Но чтобы этот опыт разумно употребить в рамках формальных процедур, его тоже нужно формализовать. Наиболее естественный путь такой формализации – введение системы предпочтений экспериментатора на множестве значений каждого частного отклика, получение стандартной шкалы и затем обобщение результатов.

Пользуясь системой предпочтений, можно получить более содержательную шкалу вместо шкалы классификации с двумя классами. Пример построения такой шкалы рассмотрен ниже.

Шкала желательности

Одним из наиболее удобных способов построения обобщенного отклика является обобщенная функция желательности Харрингтона. В основе построения этой обобщенной функции лежит идея преобразования натуральных значений частных откликов в безразмерную шкалу желательности или предпочтительности. Шкала желательности относится к психофизическим шкалам. Ее назначение – установление соответствия между физическими и психологическими параметрами. Здесь под физическими параметрами понимаются всевозможные отклики, характеризующие функционирование исследуемого объекта. Среди них могут быть эстетические и даже статистические параметры, а под психологическими параметрами понимаются чисто субъективные оценки экспериментатора желательности того или иного значения отклика.

Чтобы получить шкалу желательности, удобно пользоваться готовыми таблицами соответствия между отношениями предпочтения в эмпирической и числовой системах (табл. 1.1).

Стандартные отметки на шкале желательности

Желательность	Отметки на шкале желательности
Очень хорошо	1,00–0,80
Хорошо	0,80–0,63
Удовлетворительно	0,63–0,37
Плохо	0,37–0,20
Очень плохо	0,20–0,00

В табл. 1.1 представлены числа, соответствующие некоторым точкам кривой (рис. 1.2), которая задается уравнением $d = e^{-e^{-y}}$ или $d = \exp[-\exp(-y)]$, где \exp – принятое обозначение экспоненты.

На оси ординат нанесены значения желательности, изменяющиеся от 0 до 1. По оси абсцисс указаны значения отклика, записанные в условном масштабе. За начало отсчета 0 по этой оси выбрано значение, соответствующее желательности 0,37. Выбор именно этой точки связан с тем, что она является точкой перегиба кривой, что создает определенные удобства при вычислениях.

Кривую желательности обычно используют как номограмму.

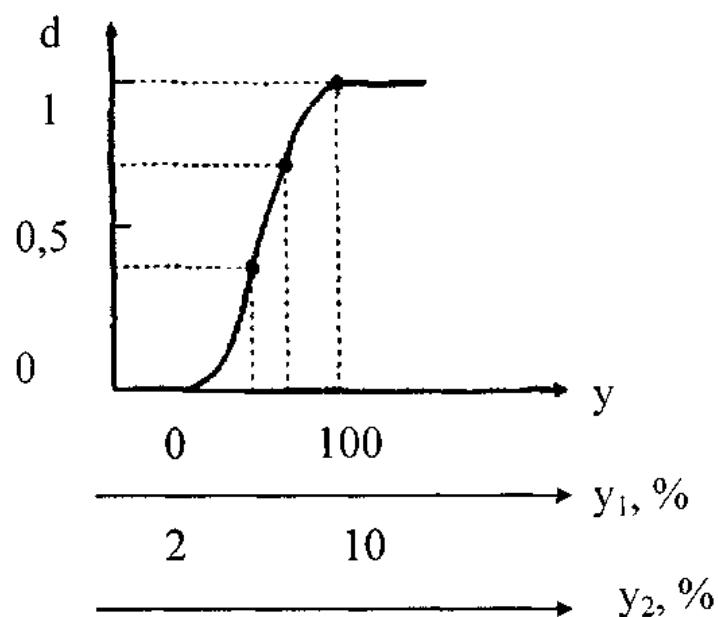


Рис. 1.2. Функция желательности

Пример. Пусть среди откликов будет выход реакции y_1 , естественные границы которого заключены между 0 и 100 %. Предположим, что 100 % соответствует на шкале желательности единице, а 0 % – нулю, тогда на оси абсцисс получаем две точки: 0 и 100 (рис. 1.2). Выбор других точек зависит от ряда обстоятельств, таких как сложившаяся в начальный момент ситуация, требования к результату, возможности экспериментатора.

В данном случае область хороших результатов (0,80–0,63 по шкале желательности) заключена в границы 50–55 %. 50 % дает нижнюю границу.

Пример. Другая картина получается, когда речь идет о синтезе нового вещества, которое до сих пор не удавалось получать в количествах, достаточных для идентификации.

При выходе менее 2 % нет способа идентифицировать продукт. Любой выход выше 10 % превосходит (рис. 1.2). Здесь выход продукции обозначен через y_2 .

В наших примерах рассмотрены одинаковые отклики – выхода реакции с границами измерения от 0 до 100 %. Однако это не всегда бывает так. Стоит включить такие отклики, как качество материала, и границы станут неопределенными. В этих случаях устанавливаются границы допустимых значений для частных откликов, причем ограничения могут быть односторонними в виде $y_u \geq y_{min}$ и двусторонними в виде $y_{min} \leq y_u \leq y_{max}$. Здесь надо иметь в виду то, что y_{min} соответствует отметке на шкале желательности $d_u = 0,37$, а значение y_{max} устанавливается на основании опыта и ситуации исследователя.

Обобщенная функция желательности

После выбора шкалы желательности и преобразования частных откликов в частные функции желательности приступают к построе-

нию обобщенной функции желательности, которую представляют формулой

$$D = \sqrt[n]{\prod_{u=1}^n d_u}, \quad (1.9)$$

где D – обобщенная желательность; d_u – частные желательности.

Способ задания обобщенной функции желательности таков, что если хотя бы одна желательность $d_u = 0$, то обобщенная функция будет равна нулю. С другой стороны, $D = 1$ только тогда, когда $d_u = 1$. Обобщенная функция весьма чувствительна к малым значениям частных желательностей.

Пример. При установлении пригодности материала с данным набором свойств для использования его в заданных условиях, если хотя бы один частный отклик не удовлетворяет требованиям, то материал считается непригодным. Например, если при определенных температурах материал становится хрупким и разрушается, то как бы ни были хороши другие свойства, этот материал не может быть применен по назначению.

Способ задания базовых отметок шкалы желательности, представленный в табл. 1.1, один и тот же как для частных, так и для обобщенных желательностей.

Обобщенная функция желательности является некоторым абстрактным построением, но она обладает такими важными свойствами, как адекватность, статистическая чувствительность, эффективность, причем эти свойства не ниже, чем таковые для любого технологического показателя, им соответствующего.

Обобщенная функция желательности является количественным, однозначным, единым и универсальным показателем качества исследуемого объекта и обладает такими свойствами, как адекватность, эффективность, статистическая чувствительность, поэтому может использоваться в качестве критерия оптимизации.

1.7. ФАКТОРЫ

После выбора объекта исследования и параметра оптимизации нужно рассмотреть все факторы, которые могут влиять на процесс. Если какой-либо существенный фактор окажется неучтенным и принимал произвольные значения, не контролируемые экспериментатором, то это значительно увеличит ошибку опыта. При поддержании этого фактора на определенном уровне может быть получено ложное представление об оптимуме, т. к. нет гарантии, что полученный уровень является оптимальным.

С другой стороны, большое число факторов увеличивает число опытов и размерность факторного пространства. Таким образом, выбор факторов является весьма существенным, т. к. от этого зависит успех оптимизации.

1.7.1. Характеристика факторов

Под фактором понимают величину, воздействующую на исследуемый процесс и принимающую в некоторый момент определенное значение. Фактор считается заданным, если вместе с его названием указывается область его определения. Под областью определения понимается совокупность всех значений, которые может принимать данный фактор. Область определения может быть непрерывной и дискретной. При планировании эксперимента значения факторов принимаются дискретными, что связано с уровнями факторов. В практических задачах области определения факторов имеют ограничения, которые носят либо принципиальный, либо технический характер.

Факторы принято обозначать x_1, x_2, x_3, x_4 и т. д. Нижний индекс указывает порядковый номер фактора.

Факторы разделяются на качественные и количественные.

Качественные факторы рекомендуется учитывать на первой стадии эксперимента (марка материала, тип оборудования и т. д.).

К **количественным** относятся те факторы, которые можно измерять, взвешивать и т. д.

Пример. Исследование процесса вулканизации каучука.

В эксперимент включены факторы:

x_1 – температура вулканизации, $^{\circ}\text{C}$;

x_2 – время вулканизации, мм;

x_3 – количество инициатора, вес. ч;

x_4 – количество вулканизирующего агента, вес. ч;

x_5 – количество окислителя, вес. ч;

x_6 – тип окислителя (окись цинка или окись магния);

x_7 – тип кислотного остатка (метакрилат);

x_8 – тип катиона соли (Na, Mg).

В рассмотренном примере $x_1 \dots x_5$ – количественные факторы, а $x_6 \dots x_8$ – качественные факторы.

1.7.2. Требования к факторам

При выборе факторов необходимо учитывать следующие требования.

1. Управляемость.

Под управляемостью понимается возможность придавать фактору любой уровень в области его определения и строго поддерживать (фиксировать) постоянным в течение всего опыта. Планировать эксперимент можно в том случае, если уровни факторов подчиняются воле экспериментатора (активный эксперимент).

2. Однозначность.

Фактор не должен быть функцией других факторов. В противном случае факторы очень трудно, а иногда, и невозможно поддерживать на установленных уровнях, что нарушает условия проведения эксперимента. Но в планировании могут участвовать и сложные факторы, состоящие из нескольких простых факторов. Необходимость введения сложных факторов возникает при необходимости представления динамических особенностей объекта в статистической форме.

Пример. Найти оптимальный режим подъема температуры в реакторе. Известно линейное возрастание температуры. В качестве фактора используем tg для наклона (*grad*). Начальная температура не зафиксирована. Ее вводят в качестве еще одного фактора.

При планировании эксперимента обычно одновременно изменяются несколько факторов. Поэтому существуют требования, предъявляемые к совокупности факторов.

1. Совместность.

Это означает, что каждый фактор может быть установлен (зафиксирован) на любом уровне вне зависимости от значений уровней других факторов. Если условие совместности факторов не соблюдается, то нельзя реализовать эксперимент. Несоблюдение требования совместности факторов может даже привести к выходу из строя установки или испытываемой машины.

2. Независимость.

Независимость факторов друг от друга – это отсутствие корреляции между факторами (т. е. связь между факторами не должна быть линейной). Если линейная связь между факторами существует, то исследованию приходится упрощать ранее поставленную задачу: учитывать меньшее число варьируемых факторов и т. д.

3. Точность.

Степень точности определяется диапазоном изменения факторов. Если факторы измеряются с большой ошибкой или особенность

объекта исследования такова, что значения факторов трудно поддерживать на заданном уровне, то экспериментатору следует обратиться к другим методам исследования объекта.

Точность фиксации уровней факторов должна быть значительно выше, чем точность измерения параметров оптимизации.

1.7.3. Выбор уровней варьирования факторов, интервалов варьирования факторов

Фактор считается заданным, если указаны его название и область определения. При выборе области определения необходимо учитывать следующие ограничения.

1. Принципиальные ограничения для значений факторов, которые не могут быть нарушены ни при каких обстоятельствах (например, минимальное температурное значение – абсолютный ноль).

2. Ограничения, связанные с технико-экономическими соображениями (например, стоимость сырья).

3. Ограничения, которые определяются конкретными условиями проведения процесса (например, возможности аппаратуры).

Процедура выбора области эксперимента включает два этапа:

- 1) выбор основного (нулевого) уровня;
- 2) выбор интервала варьирования.

Выбранные для эксперимента количественные или качественные состояния фактора носят название **уровней фактора**.

Выбор нулевой (основной) точки (уровня) эквивалентен определению такого состояния объекта исследований, которое принимается за исходное при поиске оптимума. Оптимизация связана с улучшением состояния объекта по сравнению с состоянием в нулевой точке. Поэтому желательно, чтобы данная точка была в области оптимума или как можно ближе к ней, тогда ускоряется поиск оптимальных решений.

Если проведению эксперимента предшествовали другие исследования по рассматриваемому вопросу, то за нулевую принимается такая точка, которой соответствует наилучшее значение параметра оптимизации, установленного в результате формализации априорной информации. В этом случае нулевыми уровнями факторов являются те значения последних, сочетания которых соответствуют координатам нулевой точки.

Часто при постановке задачи область определения факторов бывает заданной, являясь локализованной областью факторного пространства. Тогда центр этой области принимается за нулевую точку.

Предположим, в некоторой задаче фактор (температура) мог изменяться от 140 до 180 °С. Естественно, за нулевой уровень было принято среднее значение фактора, соответствующее 160 °С.

После установления нулевой точки выбирают интервалы варьирования факторов.

Интервалом варьирования факторов называется некоторое число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний, а вычитание – нижний уровни факторов. Другими словами, интервал варьирования – это расстояние на координатной оси между основным (нулевым) и верхним уровнями; между основным и нижним уровнями.

Нижний уровень – это значение фактора, откладываемое в отрицательном направлении оси координат. **Верхний уровень** – это значение фактора, откладываемое в положительном направлении оси координат. Верхний уровень принято обозначать (+), нижний уровень – (-).

На выбор интервала варьирования накладываются ограничения:

- 1) снизу – он не может быть меньше ошибки фиксирования уровня фактора;
- 2) сверху – верхний или нижний уровень не должен выходить за область определения.

Кроме того, чрезмерное увеличение величины интервалов варьирования нежелательно, т. к. это может привести к снижению эффективности поиска оптимума. А очень малый интервал варьирования уменьшает область эксперимента, что замедляет поиск оптимума.

При выборе интервала варьирования целесообразно учитывать, если это возможно, число уровней варьирования факторов в области эксперимента. От числа уровней зависят объем эксперимента и эффективность оптимизации.

В общем виде зависимость числа опытов от числа уровней факторов может иметь вид

$$N = p^k, \quad (1.10)$$

где N – число опытов; p – число уровней факторов; k – число факторов.

Минимальное число уровней, обычно применяемое на первой стадии работы, равно 2. Это верхний и нижний уровни. Варьирование факторов на двух уровнях используется в отсеивающих экспериментах, на стадии движения в область оптимума и при описании объекта исследования линейными моделями. Но такое число уровней недостаточно для построения моделей второго порядка (ведь фактор принимает только два значения, а через две точки можно провести множество линий различной кривизны).

С увеличением числа уровней повышается чувствительность эксперимента, но одновременно возрастает число опытов. При построении моделей второго порядка необходимы 3, 4 или 5 уровней, причем здесь наличие нечетных уровней указывает на проведение опытов в нулевых (основных) уровнях.

В каждом отдельном случае число уровней выбирают с учетом условий задачи и предполагаемых методов планирования эксперимента.

Здесь необходимо учитывать наличие качественных и дискретных факторов. В экспериментах, связанных с построением линейных моделей, наличие этих факторов, как правило, не вызывает дополни-

тельных трудностей. При планировании второго порядка качественные факторы не применимы, т. к. они не имеют ясного физического смысла для нулевого уровня. Для дискретных факторов часто применяют преобразование измерительных шкал, чтобы обеспечить фиксацию значений факторов на всех уровнях.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию области определения факторов, поверхности отклика. Для наглядности будем рассматривать случай (рис. 1.3) с двумя факторами (двумерное пространство). (Многомерное пространство – много факторов, геометрическая наглядность теряется.)

В декартовой системе координат в некотором масштабе значения (уровни) одного фактора откладываются по одной оси, а по другой оси (рис. 1.3) – второго. Тогда каждому состоянию «черного ящика» будет соответствовать точка на плоскости.

Для каждого фактора существует область определения, т. е. минимальное и максимальное значения (изменяется дискретно или непрерывно).

Если факторы совместны, то границы образуют на плоскости некоторый прямоугольник.

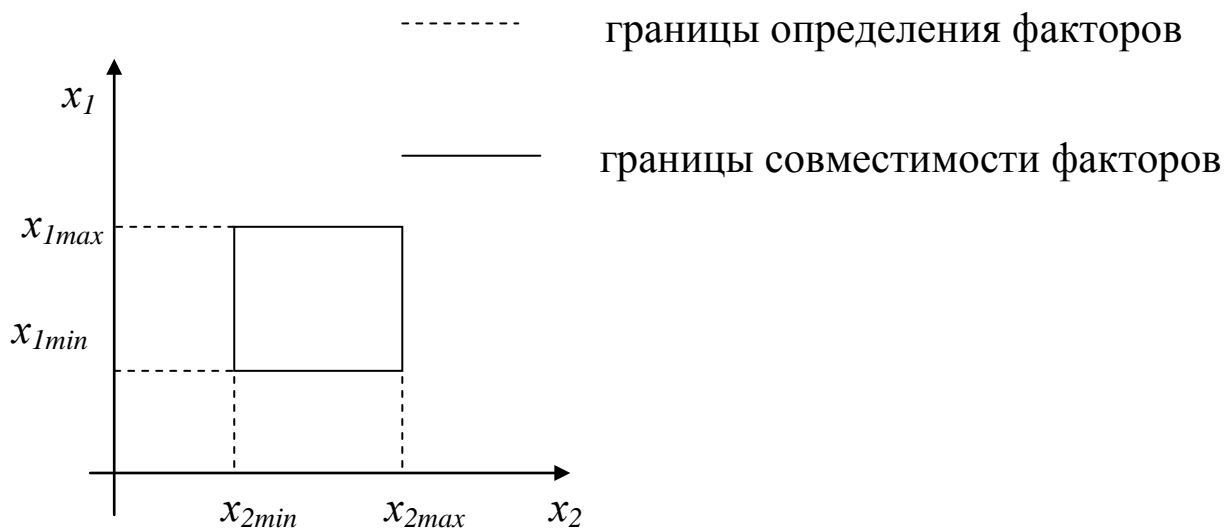


Рис. 1.3. Область определения факторов

Чтобы указать значение параметра оптимизации, требуется еще одна ось координат.

Пространство, в котором строится поверхность отклика (рис. 1.4), называется **факторным пространством**. Оно задается координатными осями, по которым откладывается значение факторов и параметров оптимизации.

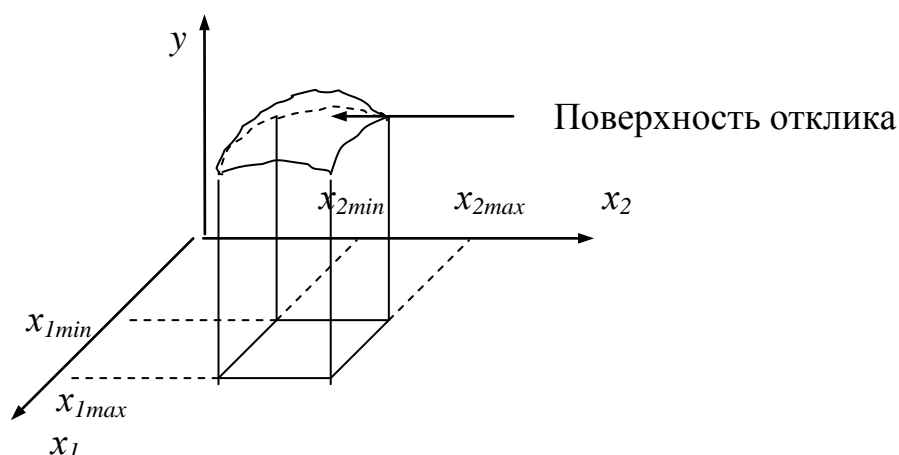


Рис. 1.4. Поверхность отклика

1.7.4. Кодирование факторов

Кодирование – это перевод натуральных значений уровней факторов в кодовые безразмерные величины с целью построения стандартной матрицы эксперимента.

Для факторов с непрерывной областью определения кодирование осуществляют по формуле

$$X_i = \frac{x_i - x_{i0}}{\Delta x_i}, \quad (1.11)$$

где X_i – кодовое значение i -го фактора; x_i – натуральное текущее значение i -го фактора; x_{i0} – начальный (нулевой) уровень фактора; Δx_i – интервал варьирования i -го фактора.

$$\Delta x_i = \frac{x_{i \max} - x_{i \min}}{2} . \quad (1.12)$$

После кодирования уровни факторов принимают значения: -1 , $+1$. $+1$ – верхний уровень; -1 – нижний уровень, 0 – нулевой уровень. В качестве нулевого уровня принимают центр интервала, в котором предполагается вести эксперимент.

На рис. 1.5 представлены факторное пространство и уровни факторов до кодирования, а на рис. 1.6 – уровни факторов после кодирования.

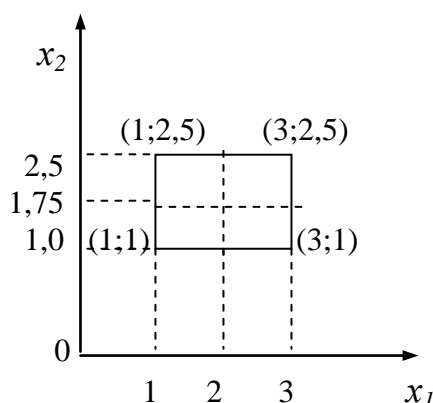


Рис. 1.5. Уровни факторов до кодирования

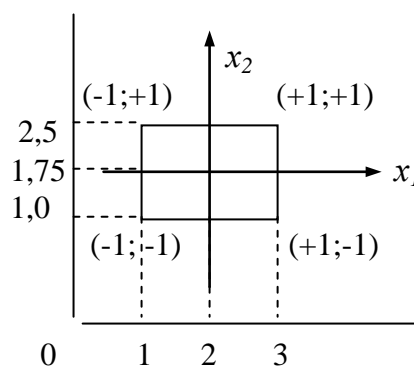


Рис. 1.6. Уровни факторов после кодирования

Пример. Пусть в эксперименте рассматривается процесс обработки изделий. В процессе задействованы три фактора: температура (T), давление (p), время обработки (τ). Температура может принимать значения от 140 до 170 °С. Давление может принимать значения от $2,5$ до $7,5$ кг/см². Оптимальное время обработки составляет от 10 до 30 мин. Требуется перевести натуральные значения в кодовые. Введем обозначения: температура – первый фактор (x_1); давление – второй фактор (x_2); время – третий фактор (x_3).

Тогда в натуральных значениях

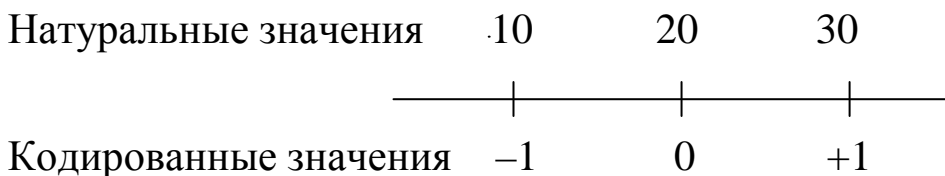
$$\begin{array}{lll}
 x_{1max} = 170 \text{ }^\circ\text{C}, & x_{1min} = 140 \text{ }^\circ\text{C}, & \Delta x_1 = (179 - 140)/2 = 15, \\
 x_{2max} = 7,5 \text{ кг/см}^2, & x_{2min} = 2,5 \text{ кг/см}^2, & \Delta x_2 = (7,5 - 2,5)/2 = 2,5, \\
 x_{3max} = 30 \text{ мин}, & x_{3min} = 10 \text{ мин}, & \Delta x_3 = (30 - 10)/2 = 10.
 \end{array}$$

Для кодированных значений

$$\begin{array}{lll}
 x_{1верх} = +1, & x_{1нижн} = -1, & \Delta x_1 = 1, \\
 x_{2верх} = +1, & x_{2нижн} = -1, & \Delta x_2 = 1, \\
 x_{3верх} = +1, & x_{3нижн} = -1, & \Delta x_3 = 1.
 \end{array}$$

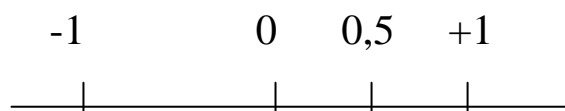
Уровни факторов	x_1	x_2	x_3	T	p	τ
Интервал варьирования	1	1	1	15	2,5	10
Верхний уровень	+1	+1	+1	170	7,5	30
Нижний уровень	-1	-1	-1	140	2,5	10
Основной уровень	0	0	0	155	5	20

Графическая интерпретация будет иметь следующий вид.



Пусть в натуральных значениях $\tau_i = 25$ мин. Найти кодированное значение. Вычисления осуществляют по формуле (1.11)

$$x_i = (25 - 20)/10 = 0,5$$



Приведенный пример позволяет понять, как можно перевести любые натуральные значения факторов к кодированным значениям.

2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

2.1. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ГЕНЕРАЛЬНАЯ СОВОКУПНОСТЬ

2.1.1. Случайные величины и их числовые характеристики

Планирование эксперимента и обработка экспериментальных результатов опираются на методы, разработанные теорией вероятностей и математической статистикой. Поэтому уместно напомнить основные понятия этих дисциплин.

Основным объектом теории вероятностей является **случайная величина** – величина, которая в результате экспериментов принимает различные, заранее не известные значения. Случайные величины могут быть дискретными и непрерывными.

Дискретными называют такие случайные величины, которые принимают отдельные, большей частью целочисленные значения. Дискретные случайные величины задаются набором отдельных значений. Например, число деталей, обработанных на станке, есть дискретная случайная величина.

Непрерывной случайной величиной называется такая, которая может принимать любые численные значения из непрерывного ряда возможных значений. Например, действительные размеры деталей, обработанных на станке, являются непрерывными случайными величинами, так как они могут принимать любые численные значения в определенных границах. Непрерывные случайные величины задаются в виде функции.

Дискретная случайная величина X может принимать значения x_1, x_2, \dots, x_i . Отношение числа опытов m , при проведении которых случайная величина X приняла значения x_i , к общему числу опытов n назы-

вается частотой повторения события. Частота m / n является случайной величиной и меняется в зависимости от числа проведенных опытов. При большом числе опытов она имеет тенденцию стабилизироваться около некоторого значения P_i , называемого вероятностью события. Сумма вероятностей всех возможных значений дискретной случайной величины равна единице, так как вероятность того, что случайная величина в результате опыта примет одно из своих значений, есть достоверное событие.

Вероятность события $X < x_i$ является функцией от $P(X < x_i) = F(x)$ и называется **функцией распределения случайной величины**. Функция распределения – самая уникальная характеристика любой случайной величины (как дискретной, так и непрерывной) – полностью характеризует ее с вероятностной точки зрения. Функция распределения дискретной случайной величины – всегда разрывная ступенчатая, скачки в ней происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятностям этих значений. Сумма всех скачков равна 1: $\sum_i P_i = 1$.

Непрерывную случайную величину X , кроме функции распределения $F(x)$, характеризуют еще и производной от функции распределения – **плотностью распределения** случайной величины X . Для непрерывной и дифференцируемой функции $F(x)$ плотность распределения $f(x) = F'(x)$.

Задание $f(x)$ тоже полностью определяет случайную величину. Связь между функцией распределения $F(x)$ и плотностью распределения определяется выражением

$$F(x) = P(-\infty \leq X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (2.1)$$

Отсюда выводится одно из важных свойств плотности распределения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1, \quad (2.2)$$

так как попадание случайной величины в интервал $-\infty < x < +\infty$ есть достоверное событие.

Для количественной оценки случайных величин пользуются числовыми характеристиками. К числовым характеристикам, определяющим положение центра группировки, относятся среднее арифметическое, медиана и мода; к характеристикам, определяющим меру рассеяния, – математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение.

Среднее арифметическое (\bar{X}) есть частное от деления суммы значений случайных величин на число наблюдений:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \quad (2.3)$$

где X_i – значения случайных величин, n – число наблюдений случайных величин.

Медианой (M_e) непрерывной случайной величины называется такое ее значение, которое делит весь ряд значений пополам.

Модой (M_o) называется такое значение случайной величины, которое наблюдается наиболее часто.

Математическим ожиданием случайной величины X называется число $M[X]$, которое вычисляется по формулам

$$M[X] = \sum_i x_i p_i \quad (\text{дискретная величина}), \quad (2.4)$$

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \quad (\text{непрерывная величина}), \quad (2.5)$$

где $f(x)$ – плотность распределения X .

Дисперсией случайной величины X называется число $D[X]$, которое определяется формулой

$$D[X] = M[X - M(X)]^2. \quad (2.6)$$

Из формулы (2.4) следует:

$$D[X] = \sum_i (x_i - M[X])^2 p_i \quad (\text{дискретная величина}), \quad (2.7)$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 \quad (\text{непрерывная величина}). \quad (2.8)$$

Дисперсия характеризует разброс значений X относительно ее математического ожидания.

Среднее квадратичное отклонение (σ) случайной величины X определяют по формуле

$$\sigma = \sqrt{D[X]}, \quad (2.9)$$

$$\sigma^2[X] = D[X].$$

2.1.2. Генеральная совокупность

На практике исследователь располагает ограниченным числом значений случайной величины. **Генеральная совокупность** – это полный набор всех возможных значений, которые может принимать

случайная величина в ходе эксперимента. Генеральная совокупность может быть конечной и реально существующей или бесконечной, гипотетической.

Генеральная совокупность обладает некоторыми неслучайными свойствами, которые надо выявить в результате эксперимента. Исчерпывающей характеристикой случайной величины X , а следовательно, и генеральной совокупности является ее функция распределения $F(x)$, равная вероятности того, что в результате эксперимента эта случайная величина примет значение меньшее, чем x . Таким образом, $F(x) = P(X < x)$. Если функция распределения имеет производную, то функция $f(x) = F'(x)$ называется плотностью распределения.

Как функция распределения $F(x)$, так и плотность распределения $f(x)$ характеризуют всю генеральную совокупность и являются детерминированными, неслучайными функциями, имеющими вполне конкретный аналитический (или графический) вид.

2.1.3. Важнейшие функции распределения

В теории вероятностей и математической статистике важную роль играют следующие функции распределения.

1. Нормальный закон распределения случайной величины.

Случайная величина X распределена по нормальному закону (или закону Гаусса), если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-(x - \mu)^2 / (2\sigma^2)\right], \quad (2.10)$$

где $\mu = MX$, $\sigma = \sqrt{DX}$.

Удобно ввести случайную величину z :

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma},$$

подстановка которой в предыдущую формулу позволяет представить ее в виде

$$f(z) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-z^2/2). \quad (2.11)$$

Кривая нормального распределения (график функции $f(z)$) представлена на рис. 2.1.

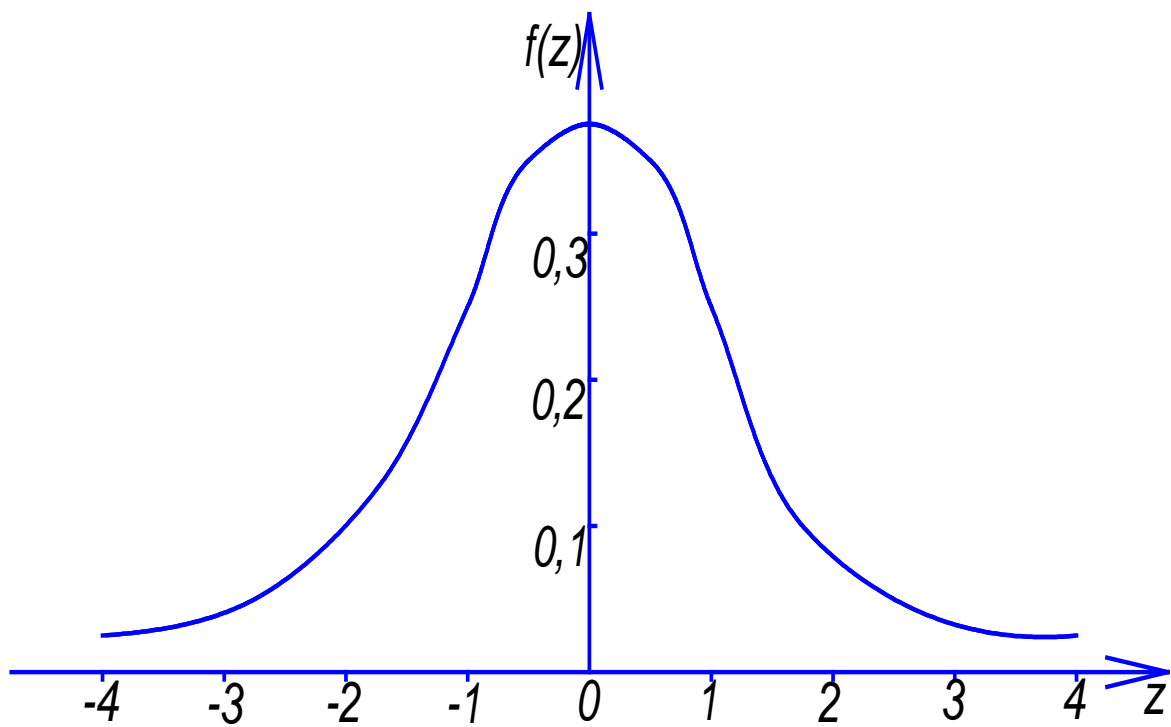


Рис. 2.1. Кривая нормального распределения (график функции $f(z)$)

Произведенное преобразование сохраняет закон распределения, но приводит его к частному виду, соответствующему случаю $\mu = 0$ и $\sigma = 1$.

Говорят, что плотность нормального распределения $f(z)$ является нормированной (площадь под кривой $f(z)$ равна единице), центрированной (максимум находится при $z = 0$), стандартизированной ($\sigma = 1$).

2. Функция распределения Пирсона (χ^2 -распределение).

Рассмотрим n независимых случайных величин u_1, \dots, u_n , каждая из которых распределена нормально с параметрами $(0,1)$. Сумма квадратов этих случайных величин называется χ_f^2 -суммой:

$$\chi_f^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2 \quad (0 \leq \chi^2 < \infty), \quad (2.12)$$

а $f = n$ называется числом степеней свободы χ^2 . Функция χ^2 обладает распределением, которое в силу нормированности u_i зависит только от f . Плотность χ^2 -распределения, характеризующая вероятность обнаружения значений в интервале $[\chi^2, \chi^2 + d\chi^2]$, имеет вид (Пирсон)

$$\rho(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{f}{2}} \Gamma(\frac{f}{2})} (\chi^2)^{\frac{f}{2}-1} \exp(-\frac{\chi^2}{2}), \quad (2.13)$$

где Γ – гамма-функция.

Кривые плотности χ^2 -распределения для различных f указаны на рис. 2.2. Согласно (2.13) $\bar{\chi}^2 = f$; $D(\chi^2) = 2f$. При $f > 1$ распределение переходит в нормальное. Очевидно, величина $\frac{\chi^2}{f} \xrightarrow{f \rightarrow \infty} 1$, так как ее дисперсия стремится к нулю.

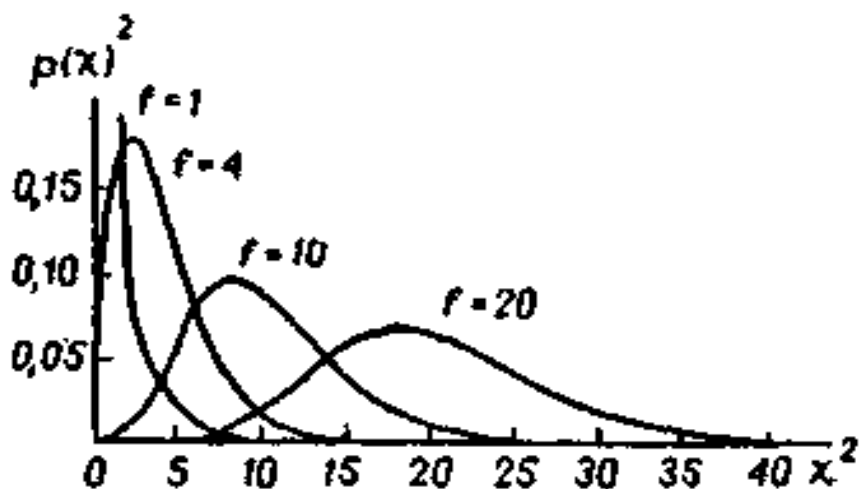


Рис. 2.2. χ^2 -распределения для различных f

Справедлива теорема сложения, согласно которой сумма k стохастически независимых $\chi_{f_i}^2$ величин имеет χ^2 -распределение с числом степеней свободы, равным сумме чисел степеней свободы каждой из величин:

$$\sum_{i=1}^k \chi_{f_i}^2 = \chi_f^2 \quad \text{при} \quad f = \sum_{i=1}^k f_i. \quad (2.14)$$

Существует также обратная теорема – теорема разложения χ -распределения на суммы квадратов величин, линейно связанных со случайными переменными u_i , которая формулируется следующим образом.

Пусть имеются суммы квадратов: $Q = \sum_{j=1}^{\lambda} l_j^2$, где λ случайных величин l_j являются линейными функциями стохастически независимых переменных u_i , распределенных нормально с параметрами (0,1) каждая. Если имеются m линейных соотношений (связей) между u_i , то числом степеней свободы Q -суммы является число $f = \lambda - m$.

Тогда, если в результате линейных преобразований сумма квадратов n случайных величин u_1, \dots, u_n разбита на k сумм квадратов Q_1, \dots, Q_k с f_1, \dots, f_k степенями свободы, т. е.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2 = Q_1 + \dots + Q_k, \quad (2.15)$$

то необходимым и достаточным условием того, чтобы величины Q_1, \dots, Q_k оказались стохастически независимыми и описывались распределениями с f_1, \dots, f_k степенями свободы, является выполнение равенства

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = n. \quad (2.16)$$

Теорема разложения оказывается чрезвычайно полезной для различных статистических оценок.

3. Функция распределения Фишера (F-распределение). Рассмотрим случайную величину:

$$F(f_1, f_2) = \frac{\frac{\chi_1^2}{f_1}}{\frac{\chi_2^2}{f_2}} \quad (0 \leq F < \infty), \quad (2.17)$$

где $\chi_{1,2}^2$ определяются согласно формулам (2.12) и (2.13).

Плотность распределения F описывается соотношением Фишера

$$\rho(F) = \frac{\Gamma(\frac{f_1 + f_2}{2})}{\Gamma(\frac{f_1}{2})\Gamma(\frac{f_2}{2})} \cdot f_1^{\frac{f_1}{2}} \cdot f_2^{\frac{f_1}{2}} \cdot \frac{(F)^{\frac{f_1}{2}-1}}{(f_2 + f_1 F)^{\frac{f_1 + f_2}{2}}}. \quad (2.18)$$

Кривые плотности F-распределения для различных f_1 и f_2 представлены на рис. 2.3.

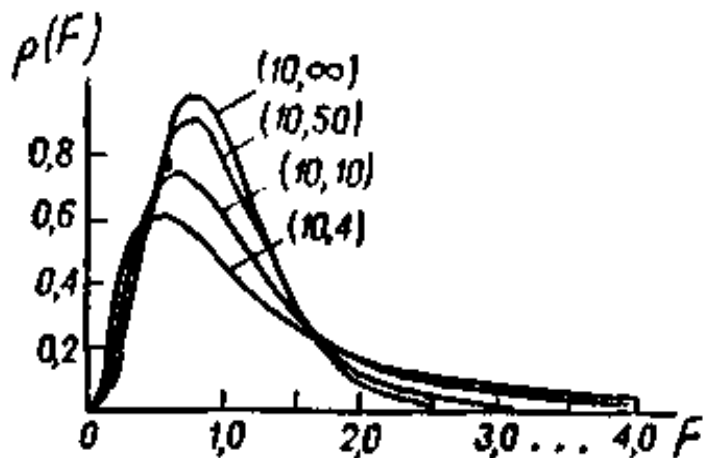


Рис. 2.3. F-распределение при различных f_1 и f_2

Согласно (2.18) среднее значение $\bar{F} = f_2 / (f_2 - 2)$, если $f_2 > 2$.

4. Распределение Стьюдента (t-распределение).

Случайная величина

$$t = u / \sqrt{\chi^2 / f} \quad (-\infty < t < \infty), \quad (2.19)$$

где u и χ^2 определяются согласно (2.12), (2.13), имеет распределение Стьюдента

$$\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi f}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{f}\right)^{-\frac{f+1}{2}}, \quad (2.20)$$

которое может быть получено непосредственно из (2.18) преобразованием $t = \pm\sqrt{F(1, f)}$,

где t – распределение симметрично относительно нуля. При $f \rightarrow \infty$ распределение стремится к нормальному с параметрами (0,1) (рис. 2.4).

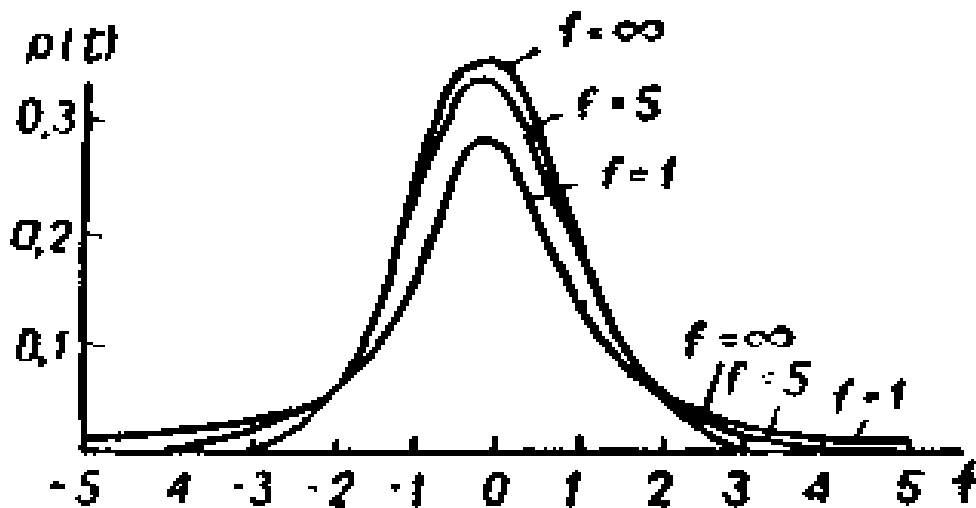


Рис. 2.4. Кривые плотности t-распределения

2.2. ВЫБОРКА И ЕЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

На практике исследователь имеет дело с конечным набором реализаций случайной величины, полученным в результате эксперимента. В очень редких случаях в распоряжении исследователя находится вся генеральная совокупность значений, при этом случайная величина фактически превращается в детерминированную.

Некоторый набор значений случайной величины $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$ называют **выборкой**.

Число полученных экспериментальных результатов N называется объемом выборки. Основная задача математической статистики заключается в том, чтобы по результатам эксперимента (по данным выборки) высказать обоснованное суждение о свойствах генеральной совокупности.

Выборка должна достаточно полно характеризовать генеральную совокупность, она должна быть представительной. Чтобы представительность выборки была обеспечена, необходимо выполнение двух важных условий: во-первых, все элементы генеральной сово-

купности должны появляться в выборке с одинаковой вероятностью; во-вторых, наблюдения должны быть независимыми, т. е. появление каждого из элементов выборки не должно влиять на вероятность появления других элементов. Так как элементы выборки случайные, все заключения и результаты, полученные на основе выборочных данных, носят вероятностный характер.

2.2.1. Оценки числовых характеристик по выборке

Выборка содержит лишь часть генеральной совокупности, по которой можно попытаться оценить числовые характеристики всей генеральной совокупности. Для этого предложены различные формулы. Следовательно, возможны различные оценки одной и той же числовой характеристики (например, математического ожидания) по результатам одной и той же выборки. Конечно, хотелось бы, чтобы оценки были «хорошими», близкими к той величине, которую они оценивают. Но что это означает? Существуют три меры близости оценки к оцениваемому параметру:

несмещенность – равенство математического ожидания оценки значению соответствующей числовой характеристики при любом объеме выборки;

состоятельность – сходимость по вероятности оценки к оцениваемому параметру (выражающаяся в том, что при увеличении объема выборки оценка приближается к оцениваемому значению числовой характеристики);

эффективность – мера рассеяния оценки в окрестности оцениваемого параметра. Эффективная оценка обладает наименьшей дисперсией по сравнению с другими оценками данной числовой характеристики. Чаще всего в качестве оценки математического ожидания используется среднее арифметическое значение \bar{x} .

$$\widehat{M} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (2.21)$$

где $\widehat{M}[X]$ обозначает оценку $M[X]$. Эта оценка является несмещенной, состоятельной, а для нормального распределения – эффективной.

Другой возможной оценкой математического ожидания является полусумма максимального и минимального значений случайной величины, полученных в выборке.

$$\widehat{M}[X] = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}. \quad (2.22)$$

Эта оценка несмещена, состоятельна для симметричных распределений, но эффективна только для равномерного распределения. На практике нередко именно x_{\min} и x_{\max} испытывают наибольший разброс от выборки к выборке, что делает последнюю оценку очень чувствительной к такой неравномерности распределения.

Для нахождения оценок дисперсии $\widehat{\sigma}^2[X]$ (S^2) чаще всего используются следующие формулы:

$$\widehat{\sigma}^2[x] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (2.23)$$

и

$$\widehat{\sigma}^2[X] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2. \quad (2.24)$$

Оценка (2.23) состоятельна, эффективна для нормального распределения, но смещена. Она, следовательно, носит некоторую систематическую ошибку.

Оценка (2.24) лишена этого недостатка. Она несмещена, состоятельна, но для нормального распределения неэффективна. Обычно предпочитают пользоваться несмещенной оценкой (2.24).

Приведенные выше оценки числовых характеристик генеральной совокупности называются точечными оценками. Получение точечных оценок дает важную информацию, но не позволяет судить о степени их близости к оцениваемой числовой характеристике. Более содержательные процедуры оценивания связаны с построением интервала, который накрывает оцениваемое значение с известной степенью достоверности. Такие процедуры являются интервальными оценками.

2.2.2. Построение доверительного интервала

Примером интервальной оценки является доверительный интервал. **Доверительный интервал** – это отрезок, центром которого является точечная оценка числовой характеристики, включающий истинное значение данной числовой характеристики с заданной вероятностью. Эта вероятность называется **доверительной вероятностью**. Таким образом, доверительный интервал является мерой точности оценки, а доверительная вероятность характеризует достоверность оценки. Размер доверительного интервала зависит от того, каким значением доверительной вероятности задается экспериментатор. Чем выше доверительная вероятность, тем шире должен быть интервал, чтобы с заданной вероятностью включать в себя истинное значение числовой характеристики. Практически часто выбирают значение доверительной вероятности $P = 0,95$, полагая, что это значение достаточно велико, чтобы считать, что доверительный интервал «практически всегда» накрывает истинное значение. Только иногда, в случае ответственных и очень ответственных исследований полагают $P = 0,99$ и $0,999$ соответственно.

Процедура построения доверительного интервала включает в себя два этапа:

– записывается вероятностное утверждение относительно некоторой случайной функции, включающей в себя разность или отношение оценки и числовой характеристики. Такая функция несет информацию о степени близости этих величин. Необходимо, чтобы закон распределения упомянутой функции был известен;

– вероятностное утверждение преобразуется к виду, при котором границы доверительного интервала числовой характеристики представлены в явном виде.

Примерами функций с известным распределением, которые удовлетворяют необходимым требованиям, являются следующие:

$$1) \frac{\bar{x} - M(X)}{\sigma[X]/\sqrt{N}}, \quad (2.25)$$

имеющая нормальное распределение;

$$2) \frac{\bar{x} - M(X)}{\sigma[X]/\sqrt{N}}, \quad (2.26)$$

имеющая распределение Стьюдента с числом степеней свободы $m = N - 1$;

$$3) \frac{m\hat{\sigma}[X]}{\sigma[X]}, \quad (2.27)$$

имеющая распределение Пирсона с числом степеней свободы $m = N - 1$.

Здесь использованы обозначения: \bar{x} – среднее арифметическое значение; $\sigma^2[X]$ – дисперсия X ; $\hat{\sigma}^2[X]$ – несмещенная оценка дисперсии; вычисляемая по формуле (2.24); N – объем выборки.

Построим доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии. Поскольку функция (2.25) распределена нормально, можно использовать соответствующую таблицу для определения значения Z_α такого, что за пределами $-Z_\alpha$ и $+Z_\alpha$ остается часть площади, равная α , тогда как в пределах $[-Z_\alpha, +Z_\alpha]$ заключена часть площади, равная $1 - \alpha$ (рис. 2.5).

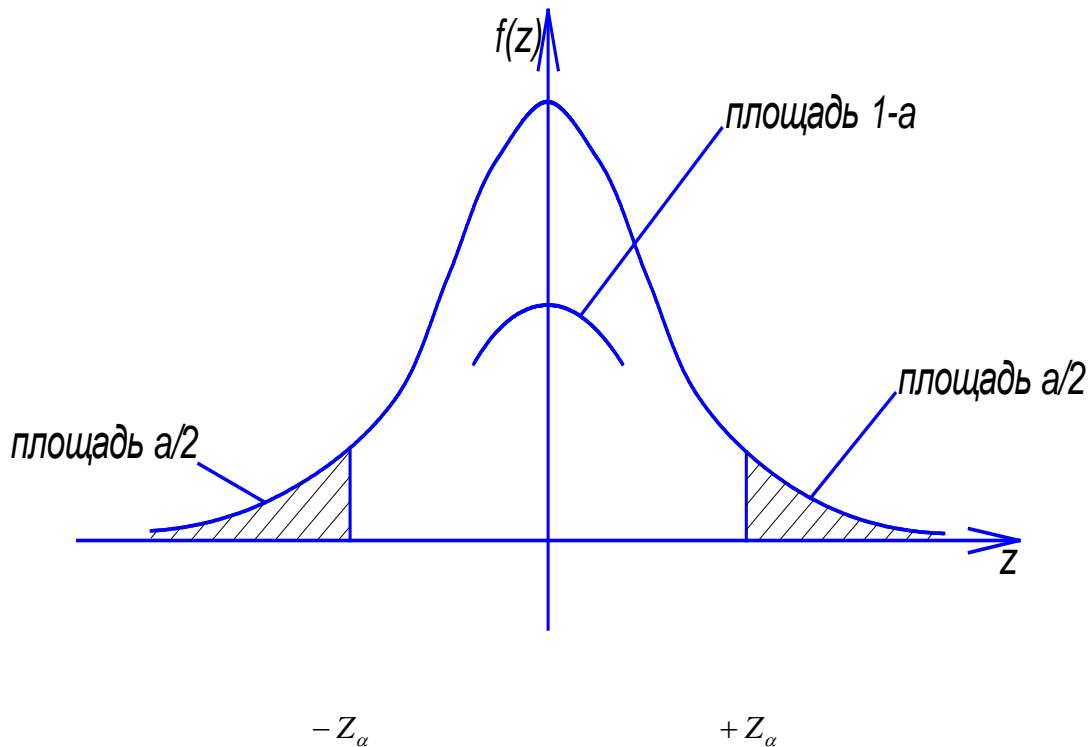


Рис. 2.5. Кривая нормального распределения

Можно вышесказанное записать в виде следующего вероятностного утверждения:

$$P\left\{-Z_\alpha \leq \frac{\bar{x} - M(X)}{\sigma[X]/\sqrt{N}} \leq Z_\alpha\right\} = 1 - \alpha \quad (2.28)$$

(вероятность выполнения неравенства, заключенного в фигурных скобках, равна $1 - \alpha$).

Преобразуем выражение в скобках:

$$P\left\{-Z_\alpha \frac{\sigma[X]}{\sqrt{N}} \leq \bar{x} - M[X] \leq Z_\alpha \frac{\sigma[X]}{\sqrt{N}}\right\} = 1 - \alpha \quad (2.29)$$

или

$$P\left\{\bar{x} - Z_\alpha \frac{\sigma[X]}{\sqrt{N}} \leq M[X] \leq \bar{x} + Z_\alpha \frac{\sigma[X]}{\sqrt{N}}\right\} = 1 - \alpha . \quad (2.30)$$

Назовем величину $1 - \alpha = P_D$ доверительной вероятностью P_D . При этой доверительной вероятности доверительный интервал $M[X]$ задается пределами $\left[\bar{X} - Z_\alpha \frac{\sigma[X]}{\sqrt{N}}, \bar{X} + Z_\alpha \frac{\sigma[X]}{\sqrt{N}}\right]$.

При построении доверительного интервала для математического ожидания $M[X]$ при неизвестной дисперсии используются функция (2.26) и распределение Стьюдента.

При построении доверительного интервала для дисперсии $\sigma^2[X]$ (S^2) используются функция (2.27) и распределение Пирсона.

2.2.3. Проверка статистических гипотез

Статистической гипотезой называется некоторое утверждение о свойствах генеральной совокупности. Например, утверждение о том, что некоторая случайная величина распределена нормально, является статистической гипотезой. Можно также высказывать гипотезы о значениях, числовых характеристиках, их соотношениях и т. д. Любая гипотеза формулируется до опыта и проверяется на основе предыдущего

эксперимента. Основная проверяемая гипотеза (нулевая гипотеза) обычно обозначается H_0 . Одновременно формулируется альтернативная гипотеза H_1 .

Процедура проверки статистической гипотезы производится при помощи критерия – функции результатов наблюдения, включающей в себя также параметры, по поводу которых высказаны предположения. Необходимо, чтобы случайная функция-критерий имела известный закон распределения. Критерий имеет некоторую область возможных значений, которые он принимает в зависимости от конкретной выборки. В соответствии с характером распределения одни значения критерия являются более вероятными, другие – менее. При проверке статистических гипотез ситуацию огрубляют тем, что область маловероятных значений критерия считают совсем запрещенной: если критерий принял столь маловероятное значение, то гипотеза считается неверной, отвергается. Если же критерий принял достаточно вероятное значение, то считается, что гипотеза не противоречит опыту и может быть принята. Таким образом, область возможных значений делится на две части. Одна называется областью принятия гипотезы, другая (где гипотеза должна быть отвергнута) – критической областью. Чтобы проверить гипотезу, надо вычислить критерий и посмотреть, в какую область попадает вычисленное значение.

Принимая или отклоняя гипотезу H_0 , можно допустить ошибки двух видов. Ошибка 1-го рода состоит в том, что гипотеза H_0 отвергается, в то время как в действительности она верна, ошибка 2-го рода – гипотеза H_0 принимается, в то время как верна гипотеза H_1 .

Примерами критериев для проверки гипотез могут служить функции (2.25)–(2.27), которые раньше использовались для построения доверительных интервалов.

2.2.4. Ошибки, допускаемые при проверке гипотез

Поскольку вычисления критерия производятся по случайной выборке, то и результат может быть различным. Всегда имеется некоторая вероятность получить как значение, отвергающее гипотезу, так и значение, требующее ее принятия. Иными словами, может быть совершена ошибка.

Итак, высказана некоторая гипотеза, которая может быть объективно верна или неверна. Затем берется выборка, вычисляется критерий и выносится решение принять гипотезу или ее отвергнуть. Возможные варианты приведены в табл. 2.1.

Вероятность совершить ошибку 1-го рода α называется **уровнем значимости**. Вероятность не совершить ошибку 2-го рода ($1 - \beta$) называется **мощностью критерия**.

Таблица. 2.1

Последствия решений

Гипотеза \ Решение	Объективно верна	Объективно неверна
Принять гипотезу	Ошибки нет	Ошибка 2-го рода β верна
Отвергнуть гипотезу	Ошибка 1-го рода α верна	Ошибки нет

Вероятности ошибок 1-го и 2-го рода зависят от выбора размеров области принятия гипотезы и критической области. При фиксированном объеме выборки N стремление уменьшить ошибку 1-го рода с необходимостью приводит к увеличению ошибки 2-го рода. Обычно, исходя из конкретной ситуации, задаются приемлемой вероятностью ошибки 1-го рода (уровнем значимости). Типичное значение выбираемого уровня значимости $\alpha = 0,05$. Задание уровня значи-

мости однозначно определяет критическую область, а следовательно, и область принятия гипотезы.

Распишем по этапам процесс проверки статистической гипотезы.

1. Формулировка гипотезы H_0 : обычно гипотеза высказывается в форме, отрицающей наличие каких-либо видимых эффектов. Поэтому основная гипотеза H_0 называется нулевой.

2. Формулировка альтернативной гипотезы H_1 : нулевой гипотезе может быть много альтернатив. Нужно выбрать одну, которая является более существенной.

3. Выбор уровня значимости α – выбор значения вероятности ошибки 1-го рода, которое представляется приемлемым.

4. Выбор критерия для проверки гипотезы H_0 .

5. Нахождение функции распределения критерия при условии, что нулевая гипотеза H_0 справедлива.

6. Нахождение критической области: при этом используются сведения о функции распределения критерия, альтернативной гипотезе H_1 и уровне значимости α .

7. Извлечение выборки (x_1, x_2, \dots, x_N) .

8. Вычисление по результатам выборки значения критерия.

9. Принятие решения: если вычисленное значение попадает в критическую область, то гипотеза H_0 отвергается, если же оно попадает в область принятия гипотезы, то она считается допустимой, т. е. данные выборки не противоречат гипотезе H_0 .

2.2.5. Примеры проверки некоторых гипотез

1. Проверка гипотезы о равенстве математического ожидания некоторому числу при известной дисперсии

Проведем проверку на конкретном примере.

Осуществляется литье изделий из алюминия. Случайная величина X – масса изделия. На основании предыдущего опыта известно,

что X – нормально распределенная величина с $\sigma^2[X] = 25 \text{ г}^2$. Номинальное значение массы изделия должно быть равным 100 г. Необходимо извлечь выборку объемом $N = 20$ изделий и решить вопрос о том, действительно ли в среднем значение изделий равно 100 г и процесс не нуждается в переналадке.

Решение.

1. Нулевая гипотеза $H_0: M(X) = 100 \text{ г}$.

2. Альтернативная гипотеза $H_1: M(X) \neq 100 \text{ г}$ (в принципе могли быть альтернативные гипотезы $M(X) < 100 \text{ г}$ или $M(X) > 100 \text{ г}$, но нас интересует, нет ли отклонения любого знака от номинального значения).

3. Выберем уровень значимости $\alpha = 0,05$. Это значит, что мы готовы в 5 % случаев ошибочно рекомендовать переналадку оборудования. Если мы не хотим мириться с таким процентом ошибок 1-го рода, то можем выбрать, например, $\alpha = 0,01$, но тогда мы должны быть готовы к увеличению числа ошибок 2-го рода, вследствие чего возрастут жалобы потребителей на несоответствие массы указанному номиналу.

4. Критерием для проверки гипотезы может служить функция $Z = \frac{\bar{X} - M(X)}{\sigma[X]/\sqrt{N}}$, поскольку в нее входят $M(X)$ и $\sigma[X]$.

5. Функция распределения критерия $\frac{\bar{X} - M(X)}{\sigma[X]/\sqrt{N}}$ при условии выполнения нулевой гипотезы является нормальной.

6. Для построения критической области следует воспользоваться таблицей нормального распределения и найти Z_α при $\alpha = 0,05$. Оно равно, согласно таблице приложения 1, значению 1,96. Критическая область будет расположена на крыльях распределения, попадание куда маловероятно.

Площадь кривой плотности распределения в заштрихованных крыльях, согласно выбранному уровню значимости, должна состав-

лять 0,05. Критическими значениями $Z_{\alpha=0,05} = 1,96$ и $-Z_{\alpha=0,05} = -1,96$ отделяются критические области от области принятия гипотезы. Альтернативная гипотеза H_1 была использована при определении расположения критических областей. Поскольку она не различает отклонений математического ожидания в большую или меньшую сторону, критические области должны включать оба крыла распределения, как это показано на рис. 2.6. Если бы альтернативная гипотеза имела, например, вид $M(X) < 100$ г, критическая область располагалась бы целиком слева.

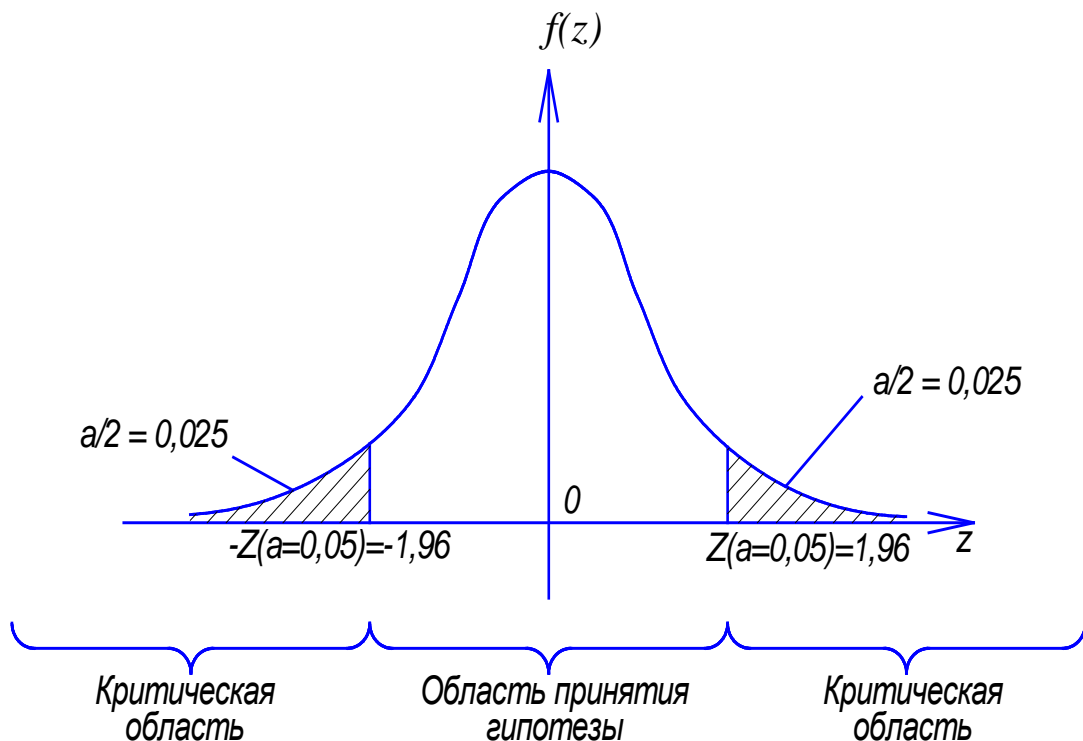


Рис. 2.6. Кривая нормального распределения, расположение области применения гипотезы и критических областей

7. Пусть извлечена выборка объемом $N = 20$, элементы которой представлены в таблице.

Масса, г	102,3	100,3	107,4	105,1	107,0	104,5	105,8	92,5	96,6	106,8
	97,6	93,1	95,0	100,0	107,0	91,6	100,5	93,4	94,2	101,3

Вычисляем сначала $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = 100,1$ г, а затем значение критерия

$$\frac{\bar{x} - M(X)}{\sigma[X]/\sqrt{N}} = \frac{100,1 - 100}{5/\sqrt{20}} = 0,09.$$

8. Значение критерия 0,09 попадает в область принятия гипотезы $[-Z_\alpha = -1,96; Z_\alpha = 1,96]$. Следовательно, нет основания отвергать гипотезу H_0 и переналаживать производство.

Таким образом, сравнение двух математических ожиданий сводится к проверке гипотезы:

$$H_0 : M[Y] = \mu_0,$$

при $H_1 : M[Y] \neq \mu_0$ (μ_0 – некоторое значение).

Выборка наблюдений объемом m для проверки нулевой гипотезы осуществляется из генеральной совокупности значений случайной величины Y , распределенных по нормальному закону.

Оценкой математического ожидания по выборке будет среднее арифметическое результатов параллельных измерений $\bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i$,

а оценкой дисперсии – $S^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2$. Для проверки нулевой гипотезы вычисляется наблюдаемое (расчетное) значение критерия Стьюдента

$$t_{расч} = \frac{|\bar{y} - \mu_0|}{S\sqrt{m}}.$$

Критическое значение критерия $t_{табл}$ определяется для выбранной доверительной вероятности $P = 1 - \alpha$ (или уровня значимости) и заданного объема выборки (числа степеней свободы) из таблицы приложения 2. При $t_{расч} < t_{табл}$ можно считать, что данные выборки не противоречат нулевой гипотезе; если $t_{расч} > t_{табл}$, гипотеза отвергается.

II. Проверка гипотезы о равенстве средних значений

Пусть выборки наблюдений объемом m_1 и m_2 берутся из двух генеральных совокупностей с нормальным распределением, причем дисперсии генеральных совокупностей σ_1^2 и σ_2^2 равны. Необходимо проверить гипотезу H_0 о равенстве математических ожиданий $M(Y_1) = M(Y_2)$.

По данным выборок определяются оценки математических ожиданий и дисперсий. Объединенная оценка дисперсии генеральных совокупностей

$$S^2 = [S_1^2(m_1 - 1) + S_2^2(m_2 - 1)] / (m_1 + m_2 - 1). \quad (2.31)$$

Для проверки нулевой гипотезы вычисляется наблюдаемое (расчетное) значение критерия Стьюдента

$$t_{расч} = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{S} \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}. \quad (2.32)$$

Критическое значение критерия определяется для данной доверительной вероятности P и $m = m_1 + m_2$. При $t_{расч} < t_{табл}$ гипотеза принимается; если $t_{расч} > t_{табл}$, она отвергается.

Пример. В одинаковых условиях было обработано по 25 втулок развертками диаметром 6 и 10 мм. Результаты измерений показали, что средняя величина разбивки отверстий (разность диаметра развертки и диаметра отверстия) для разверток диаметром 6 мм составляет 10,9 мкм, а диаметром 10 мм – 9,8 мкм. Оценки дисперсий в обоих случаях соответственно $S_1^2 = 3,8$ мкм²; $S_2^2 = 4,76$ мкм². Необходимо установить, влияет ли диаметр развертки на разбивку отверстия.

Согласно формуле (2.31)

$$S^2 = \frac{3,8 \cdot 24 + 4,76 \cdot 24}{49} = 4,19,$$

согласно формуле (2.32)

$$t_{расч} = \frac{10,9 - 9,8}{\sqrt{4,19}} \sqrt{\frac{25 \cdot 25}{25 + 25}} = 1,9.$$

По таблице приложения 2 при $\alpha = 0,05$ и $m = 50$ находим $t_{табл} = 2,01$. Поскольку $t_{расч} < t_{табл}$ ($1,9 < 2,01$), можно считать, что изменение диаметра развертки в пределах от 6 до 10 мм не оказывает существенного влияния на величину разбивки развернутого отверстия.

III. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий

При обработке экспериментальных данных часто требуется выяснить вопрос об однородности выборочных дисперсий, т. е. их равенстве дисперсии генеральной совокупности.

Пусть для двух независимых выборок из нормальной генеральной совокупности с объемами m_1 и m_2 вычислены оценки S_1^2 и S_2^2

(согласно $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2}{f}$ $f = m - 1$, Y_i – текущее значение случайной величины, f – число степеней свободы). Требуется проверить нулевую гипотезу (H_0) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ относительно альтернативной гипотезы (H_1) $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Проверка проводится при помощи критерия Фишера (F -критерия).

Наблюдаемое (расчетное) значение критерия

$$F_{расч} = S_1^2 / S_2^2, \quad S_1^2 > S_2^2 \quad (2.33)$$

сравнивается с критическим $F_{табл}$, которое определяется из таблицы приложения 3 для выбранных уровней значимости (доверительной

вероятности) и m_1 и m_2 . Если $F_{расч} < F_{табл}$, то выборочные данные не противоречат нулевой гипотезе.

При анализе выборочных данных могут выдвигаться гипотезы об однородности дисперсий в нескольких выборках. В этом случае можно использовать критерий Кохрена. Наблюдаемое (расчетное) значение критерия $G_{расч}$ определяется по формуле

$$G_{расч} = S^2_{i\max} / \sum_{i=1}^n S_i^2, \quad (2.34)$$

где $S^2_{i\max}$ – максимальная оценка дисперсии среди n сравниваемых дисперсий (все n выборок имеют одинаковый объем m).

Критическое значение критерия определяется из таблицы приложения 4 в зависимости от принятых доверительной вероятности (уровня значимости), объема выборок m и их числа n .

Пример. Проверить гипотезу о равенстве дисперсий в примере, рассмотренном выше.

По формуле (2.33) определяем наблюдаемое значение критерия Фишера $F_{расч} = 4,76/3,8 = 1,25$. Для $P = 0,95$, $m_1 = m_2 = 20$ находим $F_{табл} = 2,16$, а для $m_1 = m_2 = 30$ – $F_{табл} = 1,84$. Искомое значение $F_{табл}$ для $m_1 = m_2 = 25$ находим линейной интерполяцией: $F_{табл} = (1,84 + 2,16)/2 = 2$.

Так как $F_{расч} < F_{табл}$ ($1,25 < 2$), нулевая гипотеза о равенстве дисперсий принимается.

Пример. С четырех автоматов, настроенных на обработку одних и тех же деталей, взято по одной текущей выборке объемом $m = 10$. Оценки дисперсий их размеров имели следующие значения:

$S_1^2 = 106$ мкм²; $S_2^2 = 294$ мкм²; $S_3^2 = 216$ мкм²; $S_4^2 = 410$ мкм². Требуется определить, одинакова ли точность автоматов, т. е. можно ли принять гипотезу об однородности дисперсий.

Согласно (2.34) имеем

$$G_{расч} = \frac{410}{106 + 294 + 216 + 410} = 0,3996.$$

По таблице приложения 4 для $m(f) = 10$, $n(k) = 4$ находим $G_{табл} = 0,4884$. Поскольку $G_{расч} < G_{табл}$ ($0,3996 < 0,4884$), то можно считать точность автоматов практически одинаковой.

IV. Проверка случайности и независимости результатов измерений в выборке

До статистической обработки результатов измерения отклика необходимо убедиться в том, что они являются стохастически независимыми. Альтернативной гипотезой может быть предположение о наличии монотонного или циклического смещения (дрейфа) значения отклика, вызванного неконтролируемым фактором. Подобный случай может иметь место при анализе размеров деталей, обрабатываемых на настроенном станке, когда вследствие изнашивания инструмента или нагрева станка центр группирования размеров постепенно смещается при неизменной стандартной погрешности. Наиболее мощным критерием проверки нулевой гипотезы будет критерий последовательных разностей τ .

Наблюдаемое (расчетное) значение критерия

$$\tau_{расч} = c^2/S^2,$$

где $c^2 = \frac{1}{2(m-1)} \sum_{i=1}^{m-1} (Y_{i+1} - Y_i)^2$; m – объем выборки; i – порядковый номер измерения отклика в выборке; S^2 – оценка дисперсии.

Критическое значение $\tau_{табл}$ определяется из таблицы приложения 6 в зависимости от принятой доверительной вероятности P и объема выборки m . Если $\tau_{расч} < \tau_{табл}$, то гипотеза о независимости и случайности измерений в выборке отвергается.

Пример. По результатам измерения деталей, обработанных на токарно-револьверном автомате, необходимо проверить наличие или отсутствие дрейфа размеров. Объем выборки $m = 40$.

$$\bar{y} = \frac{1}{40} \sum_{i=1}^{40} Y_i = 45 \text{ мкм},$$

$$S^2 = \frac{1}{40-1} \sum_{i=1}^{40} (Y_i - \bar{y})^2 = 267,95 \text{ мкм}^2,$$

$$c^2 = \frac{1}{2(40-1)} \sum_{i=1}^{39} (Y_{i+1} - Y_i)^2 = 114,74 \text{ мкм}^2,$$

$$\tau_{расч} = 114,74 / 267,95 = 0,428.$$

По таблице приложения 6 для $m = 40$ и $P = 0,95$ получаем $\tau_{табл} = 0,742$. Так как $\tau_{расч} < \tau_{табл}$ ($0,428 < 0,742$), гипотезу об отсутствии дрейфа следует отклонить. Следовательно, размер обрабатываемых деталей зависит от неучтенного фактора, вызвавшего циклическое смещение центра группирования размеров.

3. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

В настоящее время при статистической обработке результатов измерения большое место занимает дисперсионный анализ. Основы дисперсионного анализа были разработаны в 20–30-х годах английским ученым Р. Фишером. По идее Фишера, если результаты наблюдения зависят от некоторых независимых факторов и случайных причин, то возможно разделить вклады этих факторов, анализируя соотношения между дисперсиями, связанными с влиянием упомянутых факторов. А именно, общая дисперсия случайной величины разлагается на независимые случайные слагаемые, обусловленные действием независимых факторов, и остаточную дисперсию, обусловленную своим возникновением ошибкам эксперимента. Решение о том, играет ли роль некоторый фактор, т. е. влияет ли он существенным образом на исход эксперимента, зависит от того, насколько значимой является составляющая дисперсии, обусловленная этим фактором, по сравнению с дисперсией, обусловленной ошибкой эксперимента. Наиболее простым является случай, когда проверяется действие только одного фактора. Такая проверка осуществляется при однофакторном дисперсионном анализе. Если исследуется влияние двух одновременно действующих факторов, то такой дисперсионный анализ называется двухфакторным.

Проведение дисперсионного анализа возможно, если результаты измерений являются независимыми случайными величинами, подчиняющимися нормальному закону распределения.

3.1. ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

При однофакторном дисперсионном анализе выявляется степень влияния одного фактора X на математическое ожидание отклика $M(Y)$. Фактор может быть количественным (скорость резания, размер

заготовки и т. д.) или качественным (модель станка, марка инструментального материала и т. д.). В процессе эксперимента фактор поддерживают на n уровнях. На каждом уровне фактора проводится m дублирующих опытов. Значение m может быть одинаковым или разным для каждого из уровней. Результаты всех измерений удобно представлять в виде таблицы, которую называют матрицей наблюдений (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Номер уровня фактора	Уровень фактора	Наблюдения	Число дублирующих опытов
1	X_1	$Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1j}, \dots, Y_{1m^1}$	m_1
2	X_2	$Y_{21}, Y_{22}, \dots, Y_{2j}, \dots, Y_{2m^2}$	m_2
3	X_3	$Y_{31}, Y_{32}, \dots, Y_{3j}, \dots, Y_{3m^3}$	m_3
i	X_i	$Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{ij}, \dots, Y_{im^i}$	m_i
n	X_n	$Y_{n1}, Y_{n2}, \dots, Y_{nj}, \dots, Y_{nm^n}$	m_n

Вначале для каждой серии дублирующих опытов вычисляют оценки $M(Y_i)$, равные \bar{y}_i , и дисперсии воспроизводимости $S_{\text{воспр}}^2$:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} Y_{ij}; \quad S_{\text{воспр}}^2 = \frac{1}{m_i - 1} \sum_{j=1}^{m_i} (Y_{ij} - \bar{y}_i)^2. \quad (3.1)$$

Затем проверяют однородность ряда дисперсий $S_1^2, S_2^2, \dots, S_i^2, S_N^2$ для каждой пары при помощи критерия Фишера, если m_i различны, или при помощи критерия Кохрена, если $m_i = \text{const}$. После подтверждения гипотезы об однородности дисперсий можно приступить

к анализу. При этом полагают, что результат любого измерения Y_{ij} , можно представить моделью

$$Y_{ij} = \mu + \gamma_i + \varepsilon_{ij}, \quad (3.2)$$

где μ – общая средняя; γ_i – отклонение, вызванное изменением контролируемого фактора; ε_{ij} – отклонение, вызванное неконтролируемыми факторами.

Задача дисперсионного анализа состоит в оценке существенности влияния изменения уровня фактора.

Влияние неконтролируемых факторов, т. е. вклад ε_{ij} можно оценить средней дисперсией воспроизводимости

$$S_{\text{воспр}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{\text{воспр}i}^2. \quad (3.3)$$

Общее рассеивание значений отклика, вызванное как контролируруемыми, так и неконтролируемыми факторами, оценивается полной (или общей) дисперсией:

$$S_0^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} (Y_{ij} - \mu)^2,$$

где $N = \sum_{i=1}^n m_i; \quad \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{y}_i.$ (3.4)

Рассеивание значений отклика, вызванное контролируемым фактором, оценивается дисперсией

$$S_{(X)}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n m_i (\bar{y}_i - \mu)^2. \quad (3.5)$$

Для выявления степени влияния фактора X и сопоставления ее с разбросом, вызванным случайными, неконтролируемыми причинами, проверяют однородность дисперсий $S_{(X)}^2$ и $S_{воспр}^2$. Если отношение

$$F_{расч} = \frac{S_{(X)}^2}{S_{воспр}^2} \text{ окажется меньше критического (табличного) } F_{табл},$$

найденного для заданной доверительной вероятности P и числа степеней свободы $f_x = n - 1$ и $f_{воспр} = N - n$, то влияние фактора X несущественно и все полученные результаты измерений принадлежат одной генеральной совокупности, распределенной нормально с параметрами σ^2 и $M(Y)$, точечные оценки которых равны соответственно S_O^2 и μ . При $F_{расч} > F_{табл}$ влияние фактора существенно. Считается, что в данном случае есть n нормально распределенных совокупностей, каждая из которых имеет одну и ту же дисперсию σ^2 и соответствующее математическое ожидание. Точечной оценкой σ^2 в данном случае является $S_{воспр}^2$, а математического ожидания – \bar{y}_i . Оценку дисперсии средних значений, вызванную влиянием исследуемого фактора X , производят по формуле

$$S_{\mu}^2 = \frac{n-1}{N} [S_{(X)}^2 - S_{воспр}^2]. \quad (3.6)$$

Пример. Требуется оценить качество пяти марок СОЖ, используемых для бесцентрового шлифования. Критерием качества выбрана шероховатость деталей, прошлифованных при одинаковых режимах.

Марки СОЖ ранжированы цифрами натурального ряда 1...5. Результаты опытов приведены в матрице наблюдений (табл. 3.2).

По формуле (3.1) получены: $\bar{y}_i = 0,6; 0,32; 0,44; 0,91; 0,71$; $S_i^2 = 0,028; 0,028; 0,012; 0,031; 0,04$. Однородность дисперсий проверяем при помощи критерия Кохрена:

$$G_{расч} = 0,04 / \sum_{i=1}^5 S_i^2 = 0,29.$$

Таблица 3.2

№ уровня фактора (марка СОЖ)	Уровень фактора	R _a					
		1	2	3	4	5	6
1	X ₁	0,72	0,60	0,65	0,32	0,80	0,52
2	X ₂	0,15	0,62	0,22	0,4	0,25	0,30
3	X ₃	0,45	0,30	0,50	0,58	0,48	0,32
4	X ₄	1,20	0,92	0,72	0,80	1,00	0,80
5	X ₅	0,58	0,9	0,70	1,00	0,48	0,60

Согласно таблице приложения 4 $G_{табл} = 0,4783$. Поскольку $G_{расч} < G_{табл}$, то разницу между дисперсиями можно считать незначимой и принять нулевую гипотезу. По формуле (3.3) $S_{воспр}^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 S_i^2 = 0,0278$, а согласно формулам (3.4) и (3.5)

$$\mu = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \bar{y}_i = 0,596; \quad S_{(X)}^2 = \frac{5}{6-1} \sum_{i=1}^5 m_i (\bar{y}_i - \mu)^2 = 0,212.$$

Расчетное (наблюдаемое) значение критерия Фишера $F_{расч} = 0,212/0,0278 = 7,63$. Число степеней свободы $f_x = 5 - 1 = 4$ и $f_{воспр} = 30 - 5 = 25$.

По таблице $F_{табл} = 2,67$. Поскольку $F_{расч} > F_{табл}$ ($7,63 > 2,67$), то изменение шероховатости детали при изменении марки СОЖ следует считать значимым. Согласно формуле (3.6) $S_{\mu}^2 = 4(0,212 - 0,0278)/30 = 0,0246$.

Для более глубокого анализа рекомендуется оценить значимость различия влияния СОЖ марок 1 и 3, которые обеспечивают минимальную высоту микронеровностей. Это делается при помощи критерия Стьюдента.

3.2. ДВУХФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

В данном случае при оценке степени влияния двух одновременно действующих факторов X_1 и X_2 предполагается, что каждый фактор изменяется независимо от другого. В процессе эксперимента первый фактор поддерживается на n уровнях, а второй на r . Для каждого сочетания i -го уровня фактора X_1 и j -го уровня фактора X_2 проводится m_{ij} дублирующих опытов. В частном случае $m_{ij} = 1$ или $m_{ij} = m$. Результаты опытов заносятся в матрицу наблюдений (табл. 3.3), где в (i, j) -й ячейке записывается в общем случае матрица наблюдений:

$$\bar{Y}_{ij} = \begin{pmatrix} Y_{ij1} \\ Y_{ij2} \\ \dots \\ Y_{ijm} \end{pmatrix}.$$

Таблица 3.3

$X_1 \backslash X_2$	X_{21}	X_{22}	...	X_{2j}	...	X_{2r}
X_{11}	\bar{Y}_{11}	\bar{Y}_{12}	...	\bar{Y}_{1j}	...	\bar{Y}_{1r}
X_{12}	\bar{Y}_{21}	\bar{Y}_{22}	...	\bar{Y}_{2j}	...	\bar{Y}_{2r}
X_{1i}	\bar{Y}_{i1}	\bar{Y}_{i2}	...	\bar{Y}_{ij}	...	\bar{Y}_{ir}
X_{1n}	\bar{Y}_{n1}	\bar{Y}_{n2}	...	\bar{Y}_{nj}	...	\bar{Y}_{nr}

Результаты любого наблюдения можно представить моделью

$$Y_{ijv} = \mu + \gamma_{iv} + g_{ij} + v_{ij} + \varepsilon_{ijv},$$

где μ – общая средняя; γ_{iv} – отклонение, вызванное влиянием первого фактора на i -м уровне в v -м дублирующем опыте; g_{ij} – отклонение,

вызванное влиянием второго фактора на j -м уровне; v_{ij} – отклонение за счет взаимодействия факторов; ε_{ijv} – отклонение, вызванное влиянием неконтролируемых факторов.

На первом этапе для каждой ячейки вычисляются следующие значения:

$$\bar{y}_{ij} = \frac{1}{m_{ij}} \sum_{v=1}^{m_{ij}} Y_{ijv}; \quad S_{воспр_{ij}}^2 = \frac{1}{m_{ij} - 1} \sum_{v=1}^{m_{ij}} (Y_{ijv} - \bar{y}_{ij})^2. \quad (3.7)$$

Затем проверяется однородность полученного ряда дисперсий. После подтверждения нулевой гипотезы приступают к вычислениям средних значений по строкам и столбцам матрицы наблюдений (табл. 3.4):

$$\bar{y}_i = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \bar{y}_{ij}; \quad \bar{y}'_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{y}_{ij}; \quad \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{y}_i = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \bar{y}'_j.$$

Средняя дисперсия воспроизводимости

$$S_{воспр}^2 = \frac{1}{nr} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r S_{воспр_{ij}}^2; \quad (3.8)$$

Таблица 3.4

$X_1 \backslash X_2$	X_{21}	X_{22}	...	X_{2j}	...	X_{2r}	Средние значения по строкам
X_{11}	\bar{y}_{11}	\bar{y}_{12}	...	\bar{y}_{1j}	...	\bar{y}_{1r}	\bar{y}_1
X_{12}	\bar{y}_{21}	\bar{y}_{22}	...	\bar{y}_{2j}	...	\bar{y}_{2r}	\bar{y}_2
X_{1i}	\bar{y}_{i1}	\bar{y}_{i2}	...	\bar{y}_{ij}	...	\bar{y}_{ir}	\bar{y}_i
X_{1n}	\bar{y}_{n1}	\bar{y}_{n2}	...	\bar{y}_{nj}	...	\bar{y}_{nr}	\bar{y}_n
Средние значения по столбцам	\bar{y}'_1	\bar{y}'_2		\bar{y}'_j			μ

дисперсия изменчивости отклика под влиянием фактора X_1

$$S_{(X_1)}^2 = \frac{mr}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \mu)^2; \quad (3.9)$$

дисперсия изменчивости отклика под влиянием фактора X_2

$$S_{(X_2)}^2 = \frac{mn}{r-1} \sum_{j=1}^r (\bar{y}_j - \mu)^2; \quad (3.10)$$

дисперсия за счет взаимодействия факторов X_1 и X_2

$$S_{(X_2, X_1)}^2 = \frac{m}{(n-1)(r-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_i - \bar{y}_j + \mu)^2. \quad (3.11)$$

Формулами (3.9)–(3.11) можно пользоваться, если количество дублирующих опытов постоянно и равно m .

Значимость влияния факторов X_1 и X_2 , а также их взаимодействия проверяются при помощи критерия Фишера. Расчетные (наблюдаемые) значения критерия определяются по формулам

$$F_{расч}(x_1) = \frac{S_{(X_1)}^2}{S_{воспр}^2}; \quad F_{расч}(x_2) = \frac{S_{(X_2)}^2}{S_{воспр}^2}; \quad F_{расч}(x_3) = \frac{S_{(X_3)}^2}{S_{воспр}^2},$$

а критические (табличные) – по таблице приложения 3 согласно заданному значению доверительной вероятности, числу степеней свободы $f(X_1) = n - 1$; $f(X_2) = r - 1$; $f(X_1, X_2) = (n - 1)(r - 1)$; $f_{воспр} = nr(m - 1)$.

Если $m = 1$, т. е. при каждом сочетании уровней факторов проводится только один опыт, то анализ можно проводить, если эффект взаимодействия факторов X_1 и X_2 незначим. Тогда дисперсия воспроизводимости вычисляется по формуле (3.11).

4. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

4.1. ПАРНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ

Основная задача корреляционного анализа – выявление значимости связи между значениями различных случайных величин. Величины, значения которых не зависят от того, какие значения получили некоторые другие величины, называются **независимыми** от них.

Зависимость между величинами (в том числе и случайными), при которых каждому значению одной величины (аргумента) отвечает одно или несколько вполне определенных значений другой, называют соответственно **однозначной** или **многозначной функциональной зависимостью**.

Зависимость между величинами, при которой каждому значению одной величины отвечает с соответствующей вероятностью множество возможных значений другой, называют **вероятностной** (стохастической, статистической). В общем случае вероятностной связи при изменении значения одной величины изменяется условный закон распределения другой.

Если при наличии вероятностной зависимости между двумя величинами с изменением значения одной величины изменяется только математическое ожидание второй (и наоборот), а дисперсия, области возможных значений и тип закона распределения остаются неизменными, то для таких величин характерна **корреляционная зависимость**.

Примерами корреляционной связи являются зависимости: между пределами прочности и текучести стали определенной марки, между погрешностью размера и погрешностью формы поверхности детали, обработанной определенным методом, между температурой ис-

питания и ударной вязкостью стали, между усилием прижима ролика и шероховатостью накатанной детали. В первых двух примерах имеет место корреляционная связь между двумя откликами, а в третьем и четвертом – между фактором, который является случайной величиной в связи с погрешностью измерения, и откликом.

По характеру корреляционные связи могут быть прямолинейными и криволинейными.

Прямолинейной называется такая корреляционная связь, когда равным изменениям одной переменной соответствуют равные изменения другой переменной (рис. 4.1, а, б). В случае **криволинейной корреляции** равным изменениям одной переменной могут соответствовать любые изменения другой переменной (рис. 4.1, в).

Под **положительной корреляцией** подразумевается такая корреляция, когда с увеличением одной переменной увеличивается другая переменная (рис. 4.1, а). При **отрицательной корреляции** с увеличением одной переменной другая, наоборот, убывает (рис. 4.1, б).

На рис. 4.1, г представлен случай, когда между переменными отсутствует связь (нет корреляции).

Пусть X и Y – случайные переменные, имеющие нормальное распределение. Силу линейной статистической связи между ними можно оценить коэффициентом корреляции:

$$\rho = M \left[\frac{X - M(X)}{\sqrt{D(X)}} \right] \cdot \left[\frac{Y - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \right]. \quad (4.1)$$

Коэффициент корреляции принимает значения в интервале $(-1, +1)$ и не зависит от выбора начала отсчета и единиц величин X и Y . Чем больше отличается от нуля коэффициент корреляции, тем сильнее зависимость между величинами X и Y . Коэффициент корреляции независимых величин равен нулю. Однако обратное утверждение не все-

гда является верным, потому что на коэффициент корреляции оказывает влияние также отклонение от линейности связи.

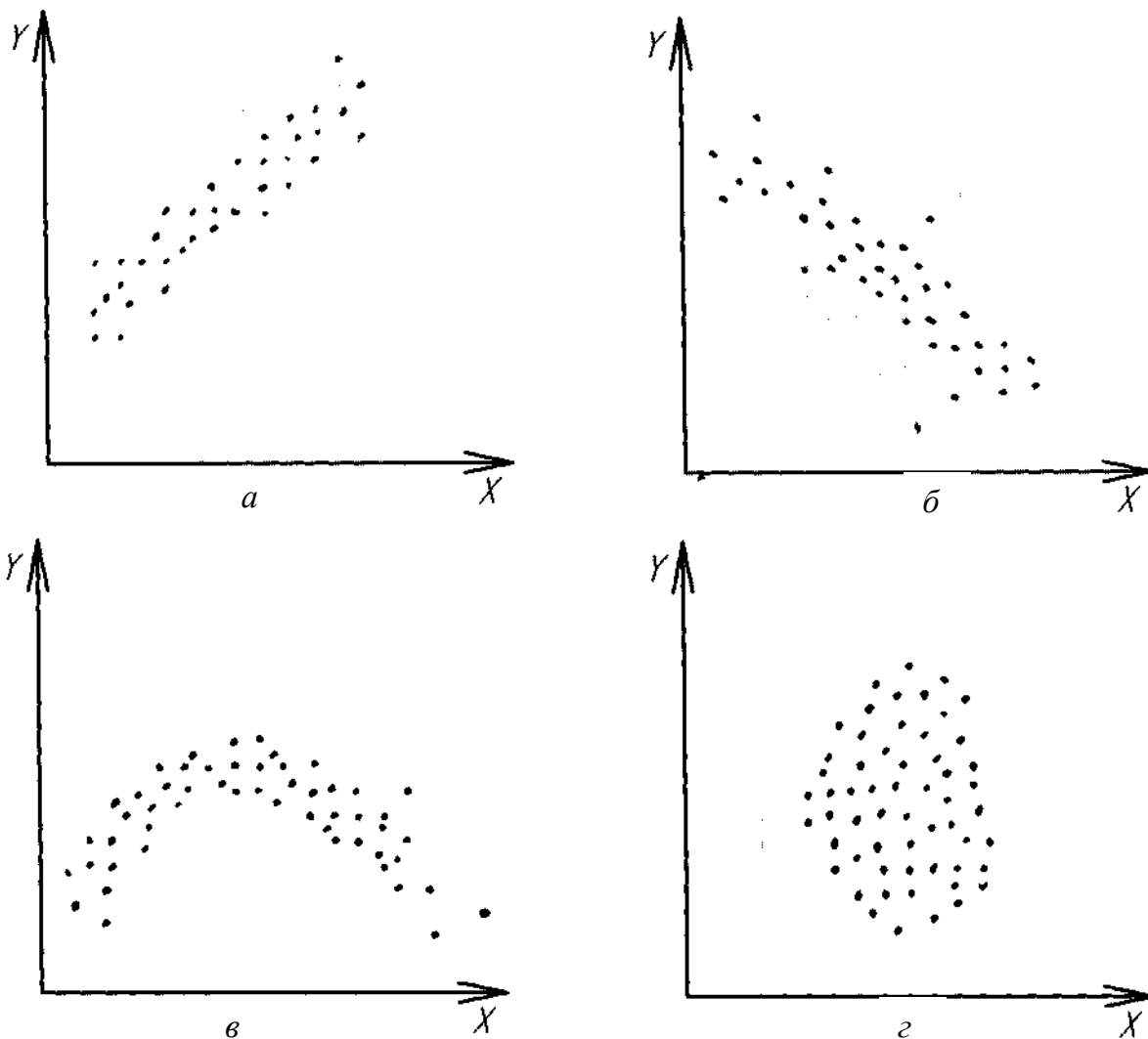


Рис. 4.1. Корреляционные зависимости

Характеристикой нелинейной корреляционной связи является корреляционное отношение

$$\eta_r^2 = \{M [M (Y/X = x) - M (Y)]^2\} / M [Y - M (Y)]^2, \quad (4.2)$$

где $M (Y / X = x)$ – условное математическое ожидание случайной переменной Y , рассматриваемое как функция x .

Оценкой коэффициента корреляции является значение коэффициента r . Для его вычисления необходимо знать оценки математических ожиданий $M(X)$ и $M(Y)$, а также дисперсий $D(X)$ и $D(Y)$. Если выполнено m наблюдений:

$$r = \left[\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \right] / [(m-1)S(X)S(Y)]. \quad (4.3)$$

При относительно небольшом значении m удобно пользоваться следующей системой формул:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum_{i=1}^m X_i Y_i - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i \sum_{i=1}^m Y_i; \\ (m-1)S^2(X) = \sum_{i=1}^m X_i^2 - \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m X_i \right)^2; \\ (m-1)S^2(Y) = \sum_{i=1}^m Y_i^2 - \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m Y_i \right)^2. \end{cases} \quad (4.4)$$

На практике при небольших значениях m для вычисления выборочного коэффициента корреляции r используют поле корреляции и корреляционную таблицу.

Пару случайных чисел X_i, Y_i можно изобразить графически в виде точки с координатами (X_i, Y_i) . По осям координат откладываются интервалы изменения переменных и наносится координатная сетка. Каждую пару переменных из данной выборки изображают точкой в соответствующей клетке. Такое изображение называют полем корреляции. На рис. 4.2 показано поле корреляции для 106 совместных измерений предела прочности σ_B и предела текучести σ_T стали 30ХГСА.

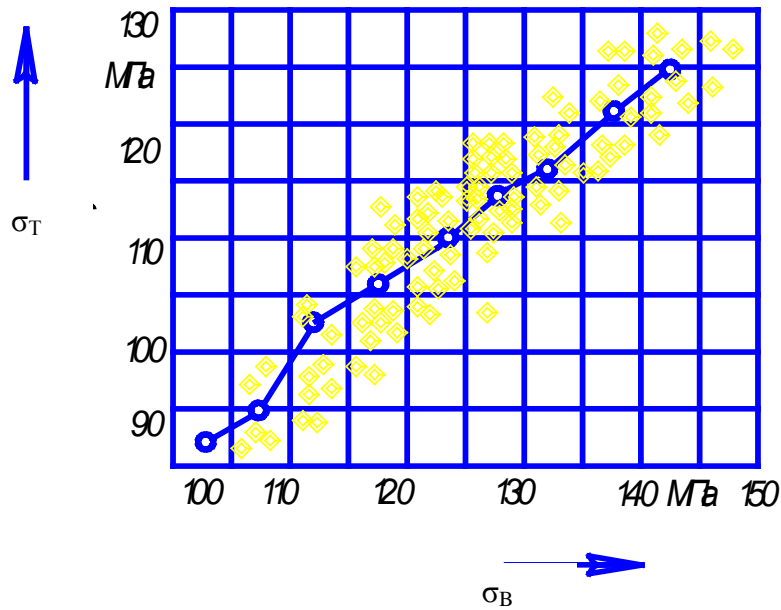


Рис. 4.2. Поле корреляции совместных измерений предела прочности σ_B и предела текучести σ_T стали 30ХГСА

Поле корреляции позволяет построить корреляционную таблицу (табл. 4.1).

В ячейки, образованные пересечением строк и столбцов, заносятся частоты m_{xy} попадания пар значений (X, Y) в соответствующие интервалы поля корреляции. В первом столбце и первой строке корреляционной таблицы указывают середины интервалов изменения случайных величин, а в последних – суммы частот m_{xy} по строкам и столбцам (m_x и m_y соответственно).

Система формул (4.4) может быть преобразована следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum_{i=1}^m x_i y_i m_{XE} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i m_X \sum_{i=1}^m y_i m_Y; \\ mS^2(X) = \sum_{i=1}^{m_1} x_i^2 m_X - \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^{m_1} x_i m_X \right)^2; \\ mS^2(Y) = \sum_{i=1}^{m_2} y_i^2 m_Y - \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^{m_2} y_i m_Y \right)^2, \end{array} \right. \quad (4.5)$$

где x_i и y_i – середины соответствующих интервалов изменения величин; m_1 – число столбцов; m_2 – число строк корреляционной таблицы; $m = \sum m_{XY} = \sum m_X = \sum m_Y$.

Таблица 4.1

Корреляционная матрица для σ_B и σ_T

$\sigma_T \backslash \sigma_B$	925 (0)	975 (1)	1025 (2)	1075 (3)	1125 (4)	1175 (5)	1225 (6)	1275 (7)	Итого
1025 (2)	1								1
1075 (3)	1	1							2
1125 (4)		2	4	2					8
1175 (5)		1	7	11	1				20
1225 (6)			1	13	13				27
1275 (7)			1	2	15	9			27
1325 (8)					4	10	1		15
1375 (9)						1	3		4
1425 (10)							1	1	2
Итого	2	4	13	28	33	20	5	1	106

Если диапазоны изменения X и Y разделены на равные интервалы (Δx , Δy), то вместо натуральных значений можно использовать це-

лочисленные коды. Для этого нужно выполнить линейное преобразование x и y по формулам

$$x_{ki} = \frac{x_i - x_{\min}}{\Delta x}; \quad y_{ki} = \frac{y_i - y_{\min}}{\Delta y}. \quad (4.6)$$

Тогда коды x_i примут значения $x_{ki} = 0, 1, 2, \dots, i$, а коды y_{ki} будут сдвинуты на целое число $\Delta = y_{\min} / \Delta y - x_{\min} / \Delta x$.

Проверка значимости коэффициента корреляции производится при помощи критерия Стьюдента. Расчетное (наблюдаемое) значение критерия

$$t_{расч} = r \sqrt{(m - 2) / (1 - r^2)}. \quad (4.7)$$

Критическое (табличное) значение критерия определяется из таблицы приложения 2 по принятому значению доверительной вероятности и числу степеней свободы. Если $|t_{расч}| < t_{табл}$, то принимается нулевая гипотеза ($p = 0$). В противном случае она отклоняется.

Выборочное корреляционное отношение вычисляется по формуле

$$\eta^2 = S^2(Y/x) / S^2(Y), \quad (4.8)$$

где $S^2(Y)$ определяется по формуле (4.5); $S^2(Y/x)$ – условная дисперсия.

$$S^2(Y/x) = \frac{1}{m} \sum [\bar{y}(x) - \bar{y}]^2 m_x, \quad (4.9)$$

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{m_x} \sum y_i m_{xy}. \quad (4.10)$$

Корреляционное отношение η_T^2 связано с ρ^2 следующим образом: $0 \leq \rho^2 \leq \eta_T^2 \leq 1$. В случае линейной зависимости между переменными $\rho^2 = \eta_T^2$. Разность $\eta_T^2 - \rho^2$ может служить показателем нелинейной связи.

Пример. На основании данных корреляционной табл. 4.1 необходимо определить выборочный коэффициент корреляции r между σ_B и σ_T .

Кодом для σ_B выбираем x , а для $\sigma_T - y$. Тогда $\Delta = 2$. Коды записаны в корреляционной таблице под действительными значениями в скобках.

На основании формулы (4.5) получим:

$$\sum_{i=1}^{106} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 2569 - \frac{1}{106} 667 \cdot 384 = 152,698;$$

$$mS^2(X) = 4429 - \frac{1}{106} 667^2 = 231,934; \quad S(x) = 1,479;$$

$$mS^2(Y) = 1566 - \frac{1}{106} 384^2 = 174,906; \quad S(y) = 1,285.$$

Согласно уравнению (4.3) $r = 152,698 / (105 \cdot 1,479 \cdot 1,285) = 0,763$.

Пример. Для условий примера, представленного выше, определить корреляционное отношение. Значение $\bar{y}(x)$, вычисленное по формуле (4.10), для соответствующих значений кодов σ_B (первый столбец табл. 4.1):

\bar{x}	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{y}(x)$	0	0,5	2	2,6	3,44	4,19	4,8	5,75	6,5

$$\bar{y} - \frac{1}{m} \sum y_i m_Y = 3,62; \quad S^2(Y|x) = 1,317; \quad \eta^2 = 1,317 / 1,285^2 = 0,798;$$

$r^2 = 0,763^2 = 0,582$. Характеристика нелинейности в данном случае $\eta^2 - r^2 = 0,798 - 0,582 = 0,216$.

Если соединить значения $\bar{y}(x)$, обозначенные на рис. 4.2 светлыми точками, штриховой линией, то будет видно, что полученная ломаная линия незначительно отклоняется от прямой.

4.2. МНОГОМЕРНЫЙ КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Если имеется многомерная нормально распределенная совокупность с n признаками X_1, X_2, \dots, X_n , то взаимозависимость между ними описывается корреляционной матрицей, под которой понимают матрицу, составленную из парных коэффициентов корреляции:

$$Q_n = \begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \dots & \rho_{1l} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \dots & \rho_{2k} & \dots & \rho_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{j1} & \rho_{j2} & \rho_{jk} & \dots & \rho_{jk} & \dots & \rho_{jk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \rho_{nk} & \dots & \rho_{nk} & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

где ρ_{jk} – парные коэффициенты корреляции.

Оценку парного коэффициента корреляции находят по формулам (4.3)–(4.5), в которые вместо x_i подставляют x_{ij} , а вместо $y_i - x_{ki}$.

В случае многомерной корреляции нельзя ограничиться одной корреляционной матрицей, так как зависимости между признаками сложны. Для более детального анализа используются частные коэффи-

циенты корреляций различных порядков, позволяющие оценивать связь между двумя признаками при фиксированном значении остальных.

Если исходная совокупность состоит из n признаков, то частный коэффициент корреляции l -го порядка отражает зависимость между двумя из них при фиксированных значениях l признаков из $(n - 2)$ оставшихся. Если имеется, например, система из трех признаков X_1 , X_2 и X_3 , то можно определять частные коэффициенты корреляции только первого порядка, так как в данном случае нельзя фиксировать больше одного признака. Если фиксировать значение X_3 , то

$$\rho_{2,3} = (\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23}) / \sqrt{(1 - \rho_{13}^2)(1 - \rho_{23}^2)}, \quad (4.11)$$

где $\rho_{2,3}$ – частный коэффициент корреляции между признаками X_1 и X_2 при фиксированном значении X_3 ; ρ_{12} , ρ_{13} , ρ_{23} – парные коэффициенты корреляции.

Аналогично определяются $\rho_{13,2}$ и $\rho_{23,1}$.

Расчет частных коэффициентов позволяет оценить взаимное влияние признаков. Если, например, корреляция между X_1 и X_2 основана только на общем влиянии X_3 , то $\rho_{2,3} = 0$. Если имеются четыре признака, то можно зафиксировать значения одного или двух признаков. В последнем случае:

$$\rho_{2,34} = \frac{\rho_{12,4} - \rho_{13,4}\rho_{23,4}}{\sqrt{(1 - \rho_{13,4}^2)(1 - \rho_{23,4}^2)}} = \frac{\rho_{12,3} - \rho_{14,3}\rho_{24,3}}{\sqrt{(1 - \rho_{14,3}^2)(1 - \rho_{24,3}^2)}}. \quad (4.12)$$

Частные коэффициенты корреляции вычисляются на основании оценок парных коэффициентов корреляции. Так же, как и для парных, проверяется значимость частных коэффициентов корреляции, но при этом число степеней свободы при исключении каждого признака

уменьшается на единицу. Если фиксируется значение одного признака, то в формулу (4.7) вместо $(m - 2)$ следует подставить $(m - 3)$, а если фиксируется значение двух признаков, $-(m - 4)$.

Для оценки линейной связи одного из признаков со всеми остальными используется множественный, или совокупный, коэффициент корреляции. Для случая трех признаков коэффициент множественной корреляции оценивается по формуле

$$R_{123} = \sqrt{(r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}) / (1 - r_{23}^2)},$$

при этом X_2 и X_3 , зависимость признака X_1 от которых оценивает R_{123} , считаются независимыми.

Для случая четырех признаков

$$R_{1234}^2 = 1 - (1 - r_{12}^2)(1 - r_{13,2}^2)(1 - r_{14,23}^2).$$

Значимость коэффициента множественной корреляции определяется при помощи критерия Фишера (F-критерия). Расчетное (наблюдаемое) значение критерия

$$F_{расч} = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{m - l - 2}{l},$$

где m – число наблюдений; $l = n - 1$; n – число признаков.

Согласно принятым доверительной вероятности и числу степеней свободы выбираем табличное значение коэффициента Фишера.

Пример. При изучении бесцентрового шлифования роликов методом на проход контролировались следующие показатели качества: погрешность формы X_1 , погрешность размера X_3 и параметр шерохо-

ватости X_2 . Всего было прошлифовано 50 образцов. При этом получена следующая матрица парных коэффициентов корреляции:

$$r_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0,85 & 0,62 \\ & 1 & 0,53 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Необходимо установить характер взаимовлияния признаков.

Согласно (4.11) имеем

$$r_{12,3} = (0,85 - 0,62 \cdot 0,53) / \sqrt{(1 - 0,62^2)(1 - 0,53^2)} = 0,784;$$

$$r_{23,1} = (0,53 - 0,85 \cdot 0,62) / \sqrt{(1 - 0,85^2)(1 - 0,62^2)} = 0,007;$$

$$r_{31,2} = (0,62 - 0,85 \cdot 0,53) / \sqrt{(1 - 0,85^2)(1 - 0,53^2)} = 0,379.$$

Проверяем значимости коэффициентов корреляции при помощи критерия Стьюдента (формула (4.7)). Расчетное (наблюдаемое) значение критерия:

$$t_{расч 1} = 0,784 \sqrt{47 / (1 - 0,784^2)} = 8,6584;$$

$$t_{расч 2} = 0,007 \sqrt{47 / (1 - 0,007^2)} = 0,048;$$

$$t_{расч 3} = 0,379 \sqrt{47 / (1 - 0,379^2)} = 2,808.$$

Согласно таблице приложения 2, при вероятности 0,95, числе степеней свободы 60 $t_{табл} = 2,00$. Поскольку $t_{расч 1} > t_{табл}$ и $t_{расч 3} > t_{табл}$,

то нулевая гипотеза о незначимости связи между X_1 и X_2 , а также X_1 и X_3 отвергается. Но $t_{расч 2} < t_{табл}$, поэтому величины X_2 и X_3 являются независимыми. Следовательно, условия шлифования, обуславливающие изменение погрешностей формы, влияют одновременно на уровень значения параметра шероховатости и погрешности размера. Причем эти условия сильнее влияют на шероховатость, чем на погрешность размера, так как $r_{12,3} > r_{31,2}$.

4.3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Получение корреляционных уравнений – заключительный этап исследования связей между случайными величинами. Корреляционные уравнения позволяют вычислить вероятные значения одной случайной величины в зависимости от значений других случайных величин. Вероятным значением случайной величины Y называется ее значение, вычисленное с помощью корреляционного уравнения и близкое к условному математическому ожиданию $M(Y/X_i = X_i)$.

Корреляционное уравнение удобнее всего записывать в виде разложения по ортогональным многочленам Чебышева, что позволяет последовательно уточнять математическую модель с вычислением ошибки аппроксимации корреляционного уравнения полиномом данной степени.

Вначале корреляционная модель предполагается линейной:

$$(Y - \bar{Y})S(Y) = r\varepsilon, \quad (4.13)$$

где $\varepsilon = (X - \bar{X}) / [\Delta X \cdot S(X)]$; r – оценка коэффициента корреляции между Y и X ; $S(X)$, $S(Y)$ – оценки стандартного отклонения случайных величин X и Y ; \bar{X} , \bar{Y} – оценки математического ожидания величин; ΔX – шаг разбиения интервала изменения случайной величины X (см. формулу (4.6)).

Значения $S(X)$ и $S(Y)$ определяются из (4.5), r – из (4.3), при условии, что

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k x_i m_i ;$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^l y_j m_j ,$$

где k и l – соответственно количество строк и столбцов корреляционной таблицы; m_i и m_j – суммы частот m_{XY} соответственно по i -й строке и j -му столбцу; m – общее число наблюдений; x_i и y_j – середины интервалов значений случайных величин.

Оценка ошибки определения Y с помощью корреляционного уравнения осуществляется по остаточной дисперсии:

$$S_0^2 = S^2(Y) \cdot (l - r^2).$$

Проверка линейности связи между Y и X производится при помощи критерия линейности:

$$K_1 = \eta^2 - r^2,$$

который вычисляется с ошибкой:

$$S(K_1) = \sqrt{K_1 / m} .$$

Значение η^2 рассчитывается по формулам (4.8) и (4.9). Если K_1 незначимо отличается от $S(K_1)$, то можно остановиться на линейной модели ((формула (4.13)). Если K_1 значимо отличается от нуля, то

корреляционное уравнение предполагается в виде полинома второй степени:

$$(Y - \bar{Y}) / S(Y) = r\varepsilon + \frac{b_1}{a_1}(\varepsilon^2 + r_{30}\varepsilon - 1),$$

где $a_1 = r_{40} - r_{30}^2 - 1$; $b_1 = r_{21} - r_{30}r$;

$$r_{30} = \frac{\mu_{30}}{S^3(X)}; \quad r_{40} = \frac{\mu_{40}}{S^4(X)}; \quad r_{21} = \frac{\mu_{21}}{S^2(X)S(Y)};$$

$$\mu_{30} = M_{30} - 3\mu_{20}M_{10} - M_{10}^3; \quad \mu_{20} = M_{20} - M_{10}^2 = S^2(X);$$

$$\mu_{40} = M_{40} - 2\mu_{11}M_{10} - 6\mu_{20}M_{10}^2 - M_{10}^4; \quad \mu_{21} = M_{21} - 2\mu_{11}M_{10} - M_{20}M_{01};$$

$$\mu_{11} = M_{11} - M_{10}M_{01}; \quad M_{10} = \bar{X}; \quad M_{01} = \bar{Y};$$

$$M_{20} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k x_i^2 m_i; \quad M_{30} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k x_i^3 m_i;$$

$$M_{40} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k x_i^4 m_i; \quad M_{02} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^l x_j^2 m_j;$$

$$M_{11} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^k x_i y_j m_{XY}; \quad M_{21} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^k x_i^2 y_j m_{XY}.$$

Погрешность определения Y с помощью корреляционного уравнения второго порядка оценивается остаточной дисперсией:

$$S_0^2 = S^2(Y) \cdot (l - r^2 - b_1^2 / a_1).$$

Проверка квадратичности связи между X и Y производится при помощи критерия квадратичности:

$$K_2 = K_1 - b_1^2 / a_1,$$

который вычисляется с ошибкой:

$$S(K_2) = \sqrt{K_2 / m}.$$

Если K_2 значимо отличается от нуля, то корреляционное уравнение можно представить в виде полинома второй степени, и т. п.

5. РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Во многих задачах встречаются две или более переменных, между которыми существует характерная связь, причем необходимо исследовать природу этой связи. Связь между этими переменными характеризуется математической моделью, которая называется **уравнением регрессии**. Регрессионная модель должна аппроксимировать совокупность экспериментальных данных. Для аппроксимации широко используются полиномиальные модели. Регрессионные методы часто используются при анализе данных непланируемых экспериментов; такая ситуация может возникнуть при наблюдении неконтролируемых явлений. Однако планирование экспериментов для исследований регрессии дает больше преимуществ.

Регрессионный анализ как всякий статистический метод применим при определенных предположениях:

- 1) параметр оптимизаций y есть случайная величина с нормальным законом распределения;
- 2) дисперсия y не зависит от абсолютной величины y (однородность дисперсии в различных точках пространства);
- 3) значения факторов есть неслучайные величины (установление каждого фактора на заданном уровне и его поддержание существенно точнее, чем ошибка воспроизводимости).

5.1. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В математической статистике разработано множество различных способов обработки результатов эксперимента. Среди всех этих методов выделяется своей простотой метод наименьших квадратов (МНК), разработанный более 150 лет назад Гауссом и Лежандром.

Пусть производится серия опытов, целью которых является исследование зависимости некоторой физической величины y от физической величины x . Предполагается, что величины x и y связаны функциональной зависимостью $y = f(x)$, вид которой необходимо определить из опытов. По МНК наилучшей считается та функция, для которой сумма квадрата разности отклонений наблюдаемых (экспериментальных) значений $f(x)$ от вычисленных y является наименьшей:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i)]^2 = \min, \quad (5.1)$$

$f(x_i)$ можно записать как $f(x_i, b_0, b_1, \dots)$, тогда требуется выбрать коэффициенты $b_i (i = 0, 1, 2, \dots)$, чтобы $\Phi = \sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i, b_0, b_1, \dots)]^2 = \min$.

Из курса математики: минимум некоторой функции, если он существует, достигается при одновременном равенстве нулю частных производных по всем неизвестным, то есть:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_0} = \frac{\partial \Phi}{\partial b_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial b_2} = \dots = 0 \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N 2[y_i - f(x_i, b_0, b_1, b_2, \dots)] \frac{\partial f(x_i)}{\partial b_0} = 0, \\ \sum_{i=1}^N 2[y_i - f(x_i, b_0, b_1, b_2, \dots)] \frac{\partial f(x_i)}{\partial b_1} = 0, \\ \sum_{i=1}^N 2[y_i - f(x_i, b_0, b_1, b_2, \dots)] \frac{\partial f(x_i)}{\partial b_2} = 0, \\ \dots \end{cases} \quad (5.2)$$

Система уравнений содержит столько же уравнений, сколько неизвестных коэффициентов b_0, b_1, b_2, \dots .

На практике более часто встречаются три случая: когда функция f линейна, когда она выражается уравнением второй степени (параболой) и в виде множественной регрессии.

5.2. ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Требуется подобрать по МНК коэффициенты линейного уравнения регрессии $y = b_0 + b_1x$ при выборке объемом N .

Система нормальных уравнений при этом имеет вид

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N (b_0 + b_1 x_i) = 0; \\ \sum_{i=1}^N y_i x_i - \sum_{i=1}^N (b_0 + b_1 x_i) x_i = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

ИЛИ

$$\begin{cases} Nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^N x_{1i} = \sum_{i=1}^N y_i; \\ b_0 \sum_{i=1}^N x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 = \sum_{i=1}^N x_{1i} y_i. \end{cases} \quad (5.4)$$

Коэффициенты b_0 и b_1 можно найти с помощью определителей:

$$b_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^N y_i & \sum_{i=1}^N x_{1i} \\ \sum_{i=1}^N x_{1i} y_i & \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^N x_{1i} \\ \sum_{i=1}^N x_{1i} & \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 - \sum_{i=1}^N x_{1i} y_i \sum_{i=1}^N x_{1i}}{N \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 - (\sum_{i=1}^N x_{1i})^2}; \quad (5.5)$$

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^N y_i \\ \sum_{i=1}^N x_{1i} & \sum_{i=1}^N x_{1i} y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^N x_{1i} y_i \\ \sum_{i=1}^N x_{1i} & \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 \end{vmatrix}} = \frac{N \sum_{i=1}^N x_{1i} y_i - \sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N x_{1i}}{N \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 - (\sum_{i=1}^N x_{1i})^2}. \quad (5.6)$$

Результаты эксперимента можно представить табл. 5.1.

Таблица 5.1

№ опыта	X_1	Y
1	X_{11}	Y_1
2	X_{12}	Y_2
3	X_{13}	Y_3
:	:	:
N	X_{1N}	Y_N

Для выполнения вычислений ее расширяют (табл. 5.2).

Таблица 5.2

№ опыта	X_1	Y	X_1^2	YX_1	Y^2	$X_1 + Y$	$(X_1 + Y)^2$
1	X_{11}	Y_1	X_{11}^2	$Y_1 X_{11}$	Y_1^2	$X_{11} + Y_1$	$(X_{11} + Y_1)^2$
2	X_{12}	Y_2	X_{12}^2	$Y_2 X_{12}$	Y_2^2	$X_{12} + Y_2$	$(X_{12} + Y_2)^2$
3	X_{13}	Y_3	X_{13}^2	$Y_3 X_{13}$	Y_3^2	$X_{13} + Y_3$	$(X_{13} + Y_3)^2$
i	X_{1i}	Y_i	X_{1i}^2	$Y_i X_{1i}$	Y_i^2	$X_{1i} + Y_i$	$(X_{1i} + Y_i)^2$
N	X_{1N}	Y_N	X_{1N}^2	$Y_N X_{1N}$	Y_N^2	$X_{1N} + Y_N$	$(X_{1N} + Y_N)^2$
Σ	$\sum_{i=1}^N X_{1i}$	$\sum_{i=1}^N Y_i$	$\sum_{i=1}^N X_{1i}^2$	$\sum_{i=1}^N Y_i X_{1i}$	$\sum_{i=1}^N Y_i^2$	—	$\sum_{i=1}^N (X_{1i} + Y_i)^2$
среднее	\bar{X}_1	\bar{Y}					

«Лишние» данные нужны для проверки правильности расчетов:

$$1 \text{ способ проверки: } \sum_{i=1}^N (x_{1i} + y_i)^2 = \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 + 2 \sum_{i=1}^N y_i x_{1i} + \sum_{i=1}^N y_i^2, \quad (5.7)$$

2 способ проверки: $\bar{y} = b_0 + b_1 \bar{x}_1$. Подставляя в соотношение \bar{y} и \bar{x}_1 и один из коэффициентов, можно найти другой коэффициент и сравнить его с расчетным.

Разделив все члены уравнений (5.5) и (5.6) на N^2 , коэффициенты b_0 и b_1 определим через статистические моменты:

$$m_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{1i}; \quad m_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i;$$

$$a_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{1i}^2; \quad a_{11} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{1i} y_i.$$

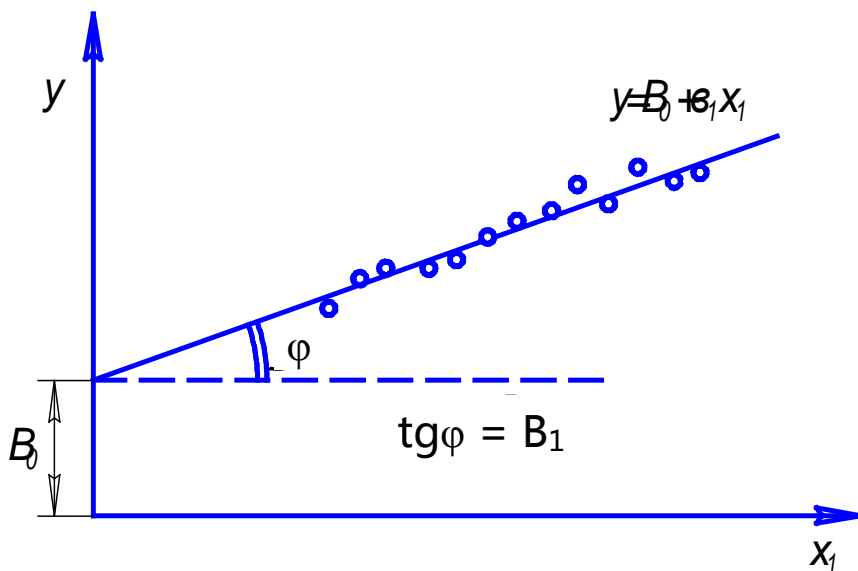
В результате получим:

$$b_0 = \frac{m_y a_2 - m_x a_{11}}{a_2 - m_x^2}; \quad b_1 = \frac{a_{11} - m_x m_y}{a_2 - m_x^2}. \quad (5.8)$$

Таким образом,

$$y = \frac{m_y a_2 - m_x a_{11}}{a_2 - m_x^2} + x \frac{a_{11} - m_x m_y}{a_2 - m_x^2}. \quad (5.9)$$

На рис. 5.1 представлен график уравнения (5.9).



Если $b_0=0$, то
 $\text{tg } \varphi = y/x$,
 $y = \text{tg } \varphi \cdot x$

Рис. 5.1. Линейное уравнение регрессии

Геометрический смысл МНК рассмотрим на примере рис. 5.2.

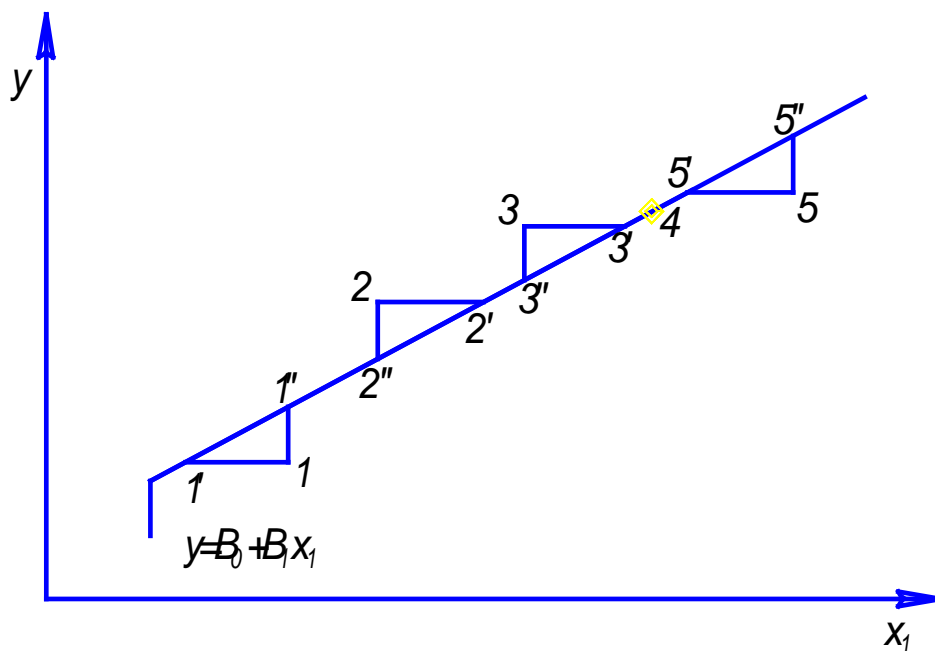


Рис. 5.2. Линейное уравнение регрессии (фрагмент)

Выберем пять экспериментальных точек. МНК состоит в том, чтобы минимизировать сумму квадратов отрезков, характеризующих расхождение между экспериментальными точками и полученным уравне-

нием. Минимизировали отрезки, параллельные оси y . Из рисунка видно, что необходимо определить y в условиях каждого опыта. Будем называть такое значение предсказанным и обозначать \hat{y} . Затем находим все отрезки – разницу значений между теоретическим графиком и экспериментальными данными, возводим их в квадрат и складываем (табл. 5.3).

Таблица 5.3

№ опыта	Y	\hat{Y}	$\Delta Y = Y - \hat{Y}$	ΔY^2
1	Y_1	\hat{Y}_1	ΔY_1	ΔY_1^2
2	Y_2	\hat{Y}_2	ΔY_2	ΔY_2^2
3	Y_3	\hat{Y}_3	ΔY_3	ΔY_3^2
i	Y_i	\hat{Y}_i	ΔY_i	ΔY_i^2
N	Y_N	\hat{Y}_N	ΔY_N	ΔY_N^2
				$\sum_{i=1}^N \Delta Y_i^2$

Величина $\sum_{i=1}^N \Delta Y_i^2$ – остаточная сумма квадратов. МНК гарантирует, что эта величина минимально возможная.

5.3. ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ РЕГРЕССИЯ

Уравнение представляет собой полином второй степени $y = b_0 + b_1x + b_2x^2$, для определения b_0, b_1, b_2 необходимо решить систему уравнений:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial b_0} = 1; \frac{\partial f(x)}{\partial b_1} = x; \frac{\partial f(x)}{\partial b_2} = x^2, \quad (5.10)$$

ИЛИ

$$\begin{cases} b_0 N + b_1 \sum_{i=1}^N x_i + b_2 \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N y_i, \\ b_0 \sum_{i=1}^N x_i + b_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 + b_2 \sum_{i=1}^N x_i^3 = \sum_{i=1}^N x_i y_i, \\ b_0 \sum_{i=1}^N x_i^2 + b_1 \sum_{i=1}^N x_i^3 + b_2 \sum_{i=1}^N x_i^4 = \sum_{i=1}^N x_i^2 y_i. \end{cases} \quad (5.11)$$

Коэффициенты этой системы также представляют собой статистические моменты системы двух величин x и y , а именно:

$$m_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i ; \quad m_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i ;$$

$$a_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 ; \quad a_{11} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i .$$

$$a_3 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^3 ; \quad a_4 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^4 ;$$

$$a_{21} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 y_i .$$

Пользуясь выражениями для коэффициентов, систему нормальных уравнений можно записать так:

$$\begin{cases} b_0 + b_1 m_x + b_2 a_2 = m_y ; \\ b_0 m_x + b_1 a_2 + b_2 a_3 = a_{11} ; \\ b_0 a_2 + b_1 a_3 + b_2 a_4 = a_{21} . \end{cases} \quad (5.12)$$

Решив систему уравнений относительно коэффициентов методом определителей, получим: $b_0 = \Delta b_0 / \Delta$, $b_1 = \Delta b_1 / \Delta$, $b_2 = \Delta b_2 / \Delta$, где

$$\Delta b_0 = \begin{vmatrix} m_y & m_x & a_2 \\ a_{11} & a_2 & a_3 \\ a_{21} & a_3 & a_4 \end{vmatrix}; \quad \Delta b_1 = \begin{vmatrix} 1 & m_x & m_y \\ m_x & a_{11} & a_3 \\ a_2 & a_{21} & a_4 \end{vmatrix};$$

$$\Delta b_2 = \begin{vmatrix} 1 & m_x & m_y \\ m_x & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & m_y & a_2 \\ m_x & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

После подстановки значений коэффициентов b_i квадратическая модель имеет вид

$$y = \frac{\Delta b_2}{\Delta} x^2 + \frac{\Delta b_1}{\Delta} x + \frac{\Delta b_0}{\Delta}. \quad (5.13)$$

Аналогичными по структуре уравнениями будут определяться коэффициенты параболы любого порядка. Таким образом, когда экспериментальная зависимость определяется по методу наименьших квадратов для полинома некоторой степени, коэффициенты этого полинома находятся решением системы линейных уравнений. Коэффициенты этой системы линейных уравнений представляют собой статистические моменты различных порядков, характеризующие систему величин $(x; y)$, если ее рассматривать как систему случайных величин.

5.4. МНОЖЕСТВЕННАЯ РЕГРЕССИЯ

Если необходимо исследовать корреляционную связь между многими величинами, то пользуются уравнениями множественной регрессии:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{\kappa} b_i x_i . \quad (5.14)$$

Однако решение системы нормальных уравнений с большим числом неизвестных b_i представляет собой достаточно трудоемкую задачу. В этом случае для проведения регрессионного анализа целесообразно использовать ЭВМ.

Перепишем уравнение (5.14) в виде

$$y = b_0 x_0 + \sum_{i=1}^{\kappa} b_i x_i , \quad (5.15)$$

где x_0 – фиксированная переменная, равная 1.

Статистические данные для выполнения вычислений представим в матричной форме:

матрицу независимых переменных как

$$x = \begin{vmatrix} x_{01} & x_{11} & \dots & x_{\kappa 1} \\ x_{02} & x_{12} & \dots & x_{\kappa 2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{0N} & x_{1N} & \dots & x_{\kappa N} \end{vmatrix} ; \quad (5.16)$$

вектор наблюдений y_i как

$$y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_N \end{vmatrix} ; \quad (5.17)$$

вектор коэффициентов b_i как

$$B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix}; \quad (5.18)$$

транспонированную матрицу X как

$$x^T = \begin{pmatrix} x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0N} \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kN} \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Система нормальных уравнений для определения коэффициентов b_0, b_1, \dots, b_k имеет вид

$$\begin{cases} b_0 \sum_{i=1}^N x_{0i}^2 + b_1 \sum_{i=1}^N x_{0i}x_{1i} + \dots + b_k \sum_{i=1}^N x_{0i}x_{ki} = \sum_{i=1}^N x_{0i}y_i; \\ b_0 \sum_{i=1}^N x_{1i}x_{0i} + b_1 \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 + \dots + b_k \sum_{i=1}^N x_{1i}x_{ki} = \sum_{i=1}^N x_{1i}y_i; \\ \dots \\ b_0 \sum_{i=1}^N x_{ki}x_{0i} + b_1 \sum_{i=1}^N x_{ki}x_{1i} + \dots + b_k \sum_{i=1}^N x_{ki}^2 = \sum_{i=1}^N x_{ki}y_i. \end{cases} \quad (5.20)$$

Или в матричной форме

$$x^T x B = x^T y; \quad (5.21)$$

$$x^T x = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N x_{0i}^2 & \sum_{i=1}^N x_{0i}x_{1i} & \dots & \sum_{i=1}^N x_{0i}x_{ki} \\ \sum_{i=1}^N x_{1i}x_{0i} & \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 & \dots & \sum_{i=1}^N x_{1i}x_{ki} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^N x_{ki}x_{0i} & \sum_{i=1}^N x_{ki}x_{1i} & \dots & \sum_{i=1}^N x_{ki}^2 \end{pmatrix};$$

$$x^T x B = \begin{vmatrix} b_0 \sum_{i=1}^N x_{0i}^2 & b_1 \sum_{i=1}^N x_{0i} x_{1i} & \dots & b_k \sum_{i=1}^N x_{0i} x_{ki} \\ b_0 \sum_{i=1}^N x_{1i} x_{0i} & b_1 \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 & \dots & b_k \sum_{i=1}^N x_{1i} x_{ki} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_0 \sum_{i=1}^N x_{ki} x_{0i} & b_1 \sum_{i=1}^N x_{ki} x_{1i} & \dots & b_k \sum_{i=1}^N x_{ki}^2 \end{vmatrix};$$

$$x^T y = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^N x_{0i} y_i \\ \sum_{i=1}^N x_{1i} y_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^N x_{ki} y_i \end{vmatrix}.$$

Матрица-столбец коэффициентов B определяется следующим образом:

$$B = (x^T x)^{-1} x^T y, \quad (5.22)$$

где $(x^T x)^{-1}$ – матрица, обратная матрице $(x^T x)$.

$$(x^T x)^{-1} = \begin{vmatrix} d_{00} & d_{01} & \dots & d_{0k} \\ d_{10} & d_{11} & \dots & d_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{k0} & d_{k1} & \dots & d_{kk} \end{vmatrix}. \quad (5.23)$$

Элемент обратной матрицы вычислим из соотношения

$$d_{jh} = \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^N x_{ui} x_{ji} \right),$$

где Δ – определитель матрицы $(x^T x)$; $\sum_{i=1}^N x_{ui} x_{ji}$ – алгебраическое дополнение элемента в матрице $(x^T x)$.

Вычисления возможны, если обратная матрица (5.23) не вырождена, то есть переменные x_1, x_2, \dots, x_k линейно независимы.

Геометрический смысл метода наименьших квадратов можно интерпретировать, как показано на рис. 5.3. В идеальном случае $Y = BX$ ($Y = \bar{Y}$). В реальности из-за наличия погрешности $\hat{Y} = BX + \varepsilon$.

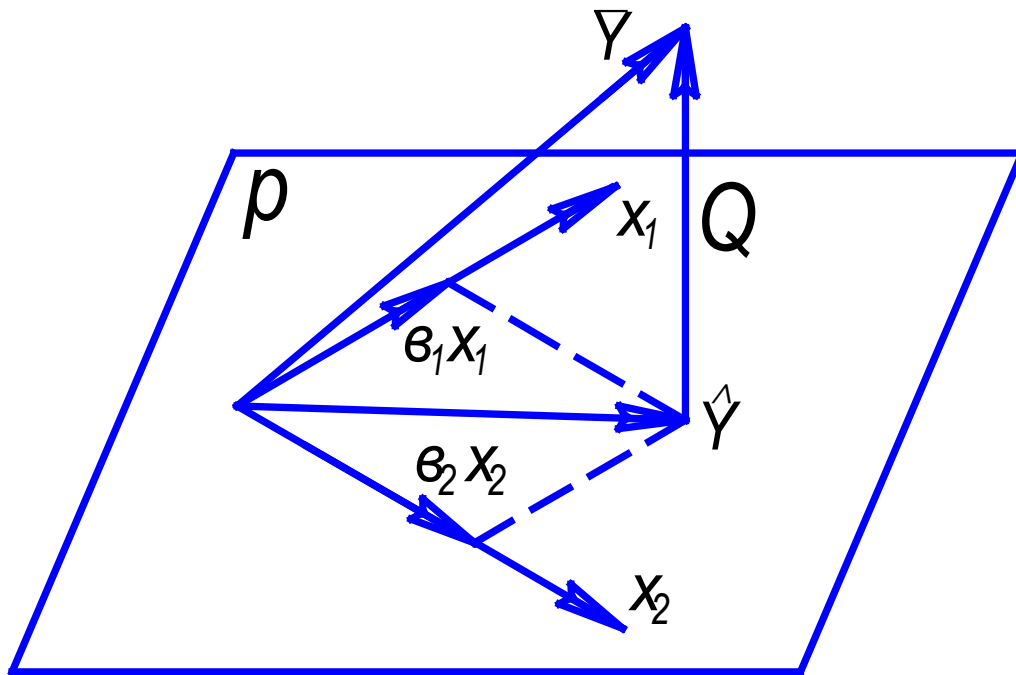


Рис. 5.3. Геометрическое представление метода наименьших квадратов

Минимальное расстояние между вектором наблюдений \hat{Y} и гиперплоскостью P будет соответствовать длине перпендикуляра, опущенного из конца этого вектора на гиперплоскость ($Q = |\hat{Y} - Y|$ будет минимальным).

По условию ортогональности вектор $\hat{Y} - Y$ к гиперплоскости можно записать в виде $X^T(\hat{Y} - Y) = 0$ (X^T – транспонированная матрица). Приняв во внимание, что $Y = BX$, получим нормальное уравнение $X^T X B = X^T \hat{Y}$.

5.5. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

Пример. Проводился некоторый эксперимент, результаты которого представлены в табл. 5.4. Необходимо определить теоретические значения по методу наименьших квадратов. Построить график экспериментальных и вычисленных (теоретических) зависимостей.

Таблица 5.4

№ опыта	X	\bar{y}
1	1	223
2	2	218
3	3	212
4	4	208
5	5	202
6	6	198
Σ	21	1261

Регрессионная зависимость имеет вид $\hat{y} = b_0 + b_1 x$.

По МНК суммарное квадратическое отклонение $Q = \sum_1^6 (\bar{y} - \hat{y})^2$ должно быть минимальным.

$$\begin{aligned} \sum_1^6 (\bar{y} - \hat{y})^2 &= \sum_1^6 (\bar{y} - (b_0 + b_1 x))^2 = \sum_1^6 (\bar{y}^2 - 2 \bar{y}(b_0 + b_1 x) + (b_0 + b_1 x)^2) = \\ &= \sum_1^6 (\bar{y}^2 - 2 \bar{y} b_0 - 2 \bar{y} b_1 x) + b_0^2 + 2 b_0 b_1 x + b_1^2 x^2. \end{aligned}$$

Вычисляем частные производные по b_0 и b_1 :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial b_0} = -\sum_1^6 2\bar{y} + \sum_1^6 2b_0 + \sum_1^6 2b_1 x = 0; \\ \frac{\partial Q}{\partial b_1} = -\sum_1^6 2\bar{y}x + \sum_1^6 2b_0 x + \sum_1^6 2b_1 x^2 = 0. \end{cases}$$

Вывод полученной системы уравнений аналогичен формуле (5.4).

Преобразуем систему к следующему виду:

$$\begin{cases} -\sum_1^6 \bar{y} + 6b_0 + \sum_1^6 b_1 x = 0; \\ -\sum_1^6 \bar{y}x + \sum_1^6 2b_0 x + \sum_1^6 b_1 x^2 = 0. \end{cases} \quad (5.24)$$

Подставляем в систему уравнений численные значения из табл. 5.4. Для удобства расчетов табл. 5.4 дополним новыми колонками, куда внесем значения, полученные при расчетах (табл. 5.5).

Таблица 5.5

№ опыта	X	\bar{y}	X^2	$X \cdot \bar{y}$	\hat{y}	$\varepsilon, \%$
1	1	223	1	223	222,81	0,08
2	2	218	4	436	217,76	0,11
3	3	212	9	636	212,69	0,33
4	4	208	16	832	207,64	0,17
5	5	202	25	1010	202,59	0,28
6	6	198	36	1188	197,53	0,24
Σ	21	1261	91	4325		

Подставляя значения из табл. 5.5 в систему уравнений (5.24), получим

$$\begin{cases} 1261 = 6b_0 + 21b_1; \\ 4325 = 21b_0 + 91b_1. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим $b_0 = 227,87$ и $b_1 = -5,057$.

Подставляя коэффициенты b_0 и b_1 в исходное уравнение, получим $\hat{y} = 227,87 - 5,057x$.

Рассчитаем теоретические значения для каждой точки плана:

$$\hat{y}_1 = b_0 + b_1 x_1 = 227,87 - 5,057 \cdot 1 = 222,81;$$

$$\hat{y}_2 = b_0 + b_1 x_2 = 227,87 - 5,057 \cdot 2 = 217,76;$$

$$\hat{y}_3 = b_0 + b_1 x_3 = 227,87 - 5,057 \cdot 3 = 212,69;$$

$$\hat{y}_4 = b_0 + b_1 x_4 = 227,87 - 5,057 \cdot 4 = 207,64;$$

$$\hat{y}_5 = b_0 + b_1 x_5 = 227,87 - 5,057 \cdot 5 = 202,59;$$

$$\hat{y}_6 = b_0 + b_1 x_6 = 227,87 - 5,057 \cdot 6 = 197,53.$$

Относительная ошибка вычисляется по формуле $\varepsilon = (\hat{y} - \bar{y})/\hat{y} \cdot 100 \%$.

По результатам обработки данных строим экспериментальные и вычисленные зависимости (рис. 5.4).

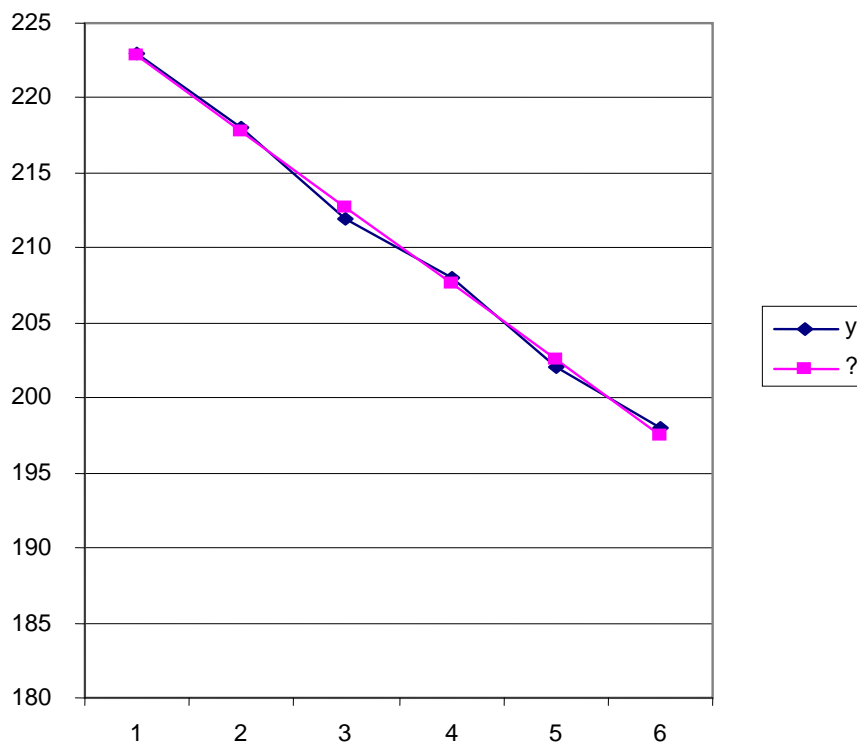


Рис. 5.4. Экспериментальные и вычисленные (теоретические) зависимости

Пример. Пусть отклик y линейно зависит от факторов X_1 и X_2 . Исходные данные для проведения регрессионного анализа приведены в табл. 5.6.

Таблица 5.6

Точка j \ Фактор i	X_0	X_1	X_2	\bar{y}_i
1	+1	2	1	10
2	+1	2	2	12
3	+1	8	10	17
4	+1	2	4	13
5	+1	6	8	15
6	+1	3	4	10
7	+1	5	7	14
8	+1	3	3	12
9	+1	9	10	16
10	+1	10	11	18

Таким образом, на основании формул (5.16)–(5.18) и табл. 5.6 можно записать:

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 17 \\ 13 \\ 15 \\ 10 \\ 14 \\ 12 \\ 16 \\ 18 \end{bmatrix} ; \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 10 & 11 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_N \end{bmatrix} = ?$$

Для вычисления коэффициентов воспользуемся формулой (5.22).

Тогда:

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & 8 & \dots & 10 \\ 1 & 2 & 10 & \dots & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 8 & 10 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 10 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 50 & 60 \\ 50 & 336 & 398 \\ 60 & 398 & 480 \end{bmatrix};$$

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,402 & -0,017 & -0,036 \\ -0,017 & 0,168 & -0,136 \\ -0,036 & -0,137 & 0,120 \end{bmatrix};$$

$$X^T \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & 8 & \dots & 10 \\ 1 & 2 & 10 & \dots & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 17 \\ \vdots \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 137 \\ 756 \\ 908 \end{bmatrix}.$$

После этого находим

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y = \begin{bmatrix} 0,402 & -0,017 & -0,036 \\ -0,017 & 0,168 & -0,137 \\ -0,036 & -0,137 & 0,120 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 137 \\ 756 \\ 908 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,39 \\ 0,13 \\ 0,61 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $b_0 = 9,39$; $b_1 = 0,13$; $b_2 = 0,61$ и уравнение регрессии имеет вид $\bar{y} = 9,39 + 0,13x_1 + 0,61x_2$.

6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ ПЛАНОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

6.1. ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

6.1.1. Общие сведения

В практике научных исследований чаще всего встречаются задачи, в которых параметр оптимизации зависит от нескольких факторов. Такие задачи могут решаться по-разному. Например, можно изучить поведение параметра оптимизации в зависимости от каждого фактора в отдельности и получают несколько уравнений, выражающих их взаимосвязь (пример: метод наименьших квадратов).

Другой метод заключается в том, что в каждом опыте эксперимента варьируются все факторы одновременно, а затем, после обработки экспериментальных данных, получают единое уравнение, описывающее изучаемый процесс. Если факторы варьируются в опытах по определенному типу, то такой эксперимент называют «активным». Если же варьировать факторы по определенному плану по каким-либо причинам не представляется возможным, то такой эксперимент называют «пассивным» (метод наименьших квадратов).

Полный факторный эксперимент (ПФЭ) – это эксперимент, в котором реализуются все возможные, неповторяющиеся комбинации уровней факторов.

Если **число факторов** равно k , а **число уровней** каждого из них равно S , то **число комбинаций (опытов)** N при ПФЭ будет равно: $N = S^k$.

Обычно встречаются планы эксперимента типа 2^k (два уровня варьирования факторов), реже 3^k и очень редко при $S > 3$ в связи с резким ростом числа независимых опытов (табл. 6.1).

Пример : $2^2 = 4$ опыта $2^3 = 8$ опытов $2^4 = 16$ опытов
 $3^2 = 9$ $3^3 = 27$ $3^4 = 81$
 $4^2 = 16$ $4^3 = 64$ $4^4 = 256$

Таблица 6.1

$S \backslash k$	2	3	4
2	4	8	16
3	9	27	81
4	16	64	256

Наиболее широко применяются планы типа 2^k .

ПФЭ – эксперимент $N = 2^k$ – позволяет описать процесс математической моделью первого порядка вида

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i \neq j}^k b_{ij} x_i x_j. \quad (6.1)$$

Следует отметить, что порядок математического уравнения на единицу меньше, чем принятое в плане эксперимента число уровней факторов.

2^k – два уровня варьирования факторов – верхний и нижний, кодирование факторов будет соответствовать +1, -1.

Этапы планирования и реализации ПФЭ:

1) выбор параметров оптимизации, факторов и уровней их варьирования (2^k);

2) кодирование факторов;

- 3) составление плана-матрицы (матрица планирования) эксперимента;
- 4) рандомизация опытов;
- 5) реализация плана эксперимента;
- 6) проверка однородности дисперсий параллельных опытов, их воспроизводимости;
- 7) расчет коэффициентов уравнения регрессии, их ошибок и значимости;
- 8) проверка адекватности модели.

Условия эксперимента обычно записывают в виде матриц планирования эксперимента (табл. 6.2), где строки соответствуют различным независимым опытам, а столбцы – значениям (уровням) факторов. На рис. 6.1 представлена геометрическая интерпретация ПФЭ.

Таблица 6.2

Матрица планирования ПФЭ

№ опыта	X_1	X_2	y
1	-1	-1	y_1
2	+1	-1	y_2
3	-1	+1	y_3
4	+1	+1	y_4

Каждая комбинация +1, -1 X_1X_2 должна встречаться один раз.

В общем случае планы типа 2^k геометрически представляют собой совокупность точек, расположенных в вершинах гиперкуба, раз-

мещенного в многомерном пространстве. Пространство, заключенное внутри гиперкуба, является областью планирования эксперимента.

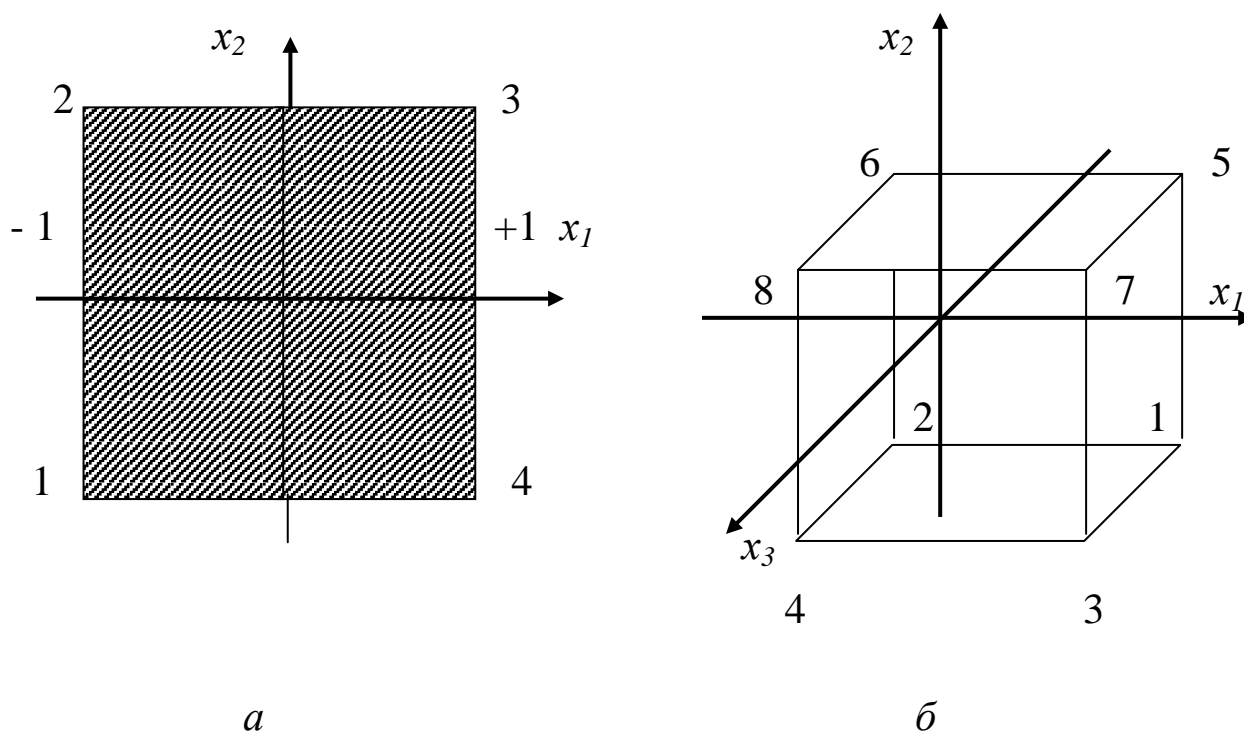


Рис. 6.1. Геометрическая интерпретация ПФЭ: *a* – в двухмерном пространстве ($N = 2^2$); *б* – в трехмерном пространстве ($N = 2^3$)

Имеется несколько способов построения матрицы планирования большой размерности. Один из них основан на чередовании знаков: в первом столбце знаки меняются поочередно, во втором – через два, в третьем – через четыре и т. д.

В табл. 6.3 представлена матрица полного факторного эксперимента (от 2^2 до 2^4), построенная по данному способу. Вместо единиц с соответствующими знаками указаны только одни знаки. Такое обозначение возможно для полного факторного эксперимента, построенного на двух уровнях факторов.

Таблица 6.3

Матрица планирования ПФЭ

	№ опыта	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
2 ²	1	+	+	+	+
	2	-	+	+	+
	3	+	-	+	+
	4	-	-	+	+
2 ³	5	+	+	-	+
	6	-	+	-	+
	7	+	-	-	+
	8	-	-	-	+
2 ⁴	9	+	+	+	-
	10	-	+	+	-
	11	+	-	+	-
	12	-	-	+	-
	13	+	+	-	-
	14	-	+	-	-
	15	+	-	-	-
	16	-	-	-	-

6.1.2. Свойства матрицы ПФЭ

ПФЭ относится к числу планов, которые являются наиболее эффективными при построении линейных моделей. Эффективность достигается за счет следующих свойств.

1. Симметричность относительно центра эксперимента – алгебраическая сумма значений каждого из столбцов матрицы (кроме x_0) равна нулю:

$$\sum_{u=1}^N X_{iu} = 0, \quad (6.2)$$

где u – номер фактора ($u = 1, 2, \dots, k$); i – номер опыта; N – число опытов.

2. Условие нормировки – сумма квадратов элементов каждого столбца-матрицы равна числу опытов:

$$\sum_{u=1}^N X_{iu}^2 = N. \quad (6.3)$$

Это является следствием того, что значения факторов в матрице задаются равными $+1$ и -1 .

3. Ортогональность – сумма почленных произведений двух столбцов матрицы равна нулю:

$$\sum_{u=1}^N X_{iu} X_{ju} = 0 \quad j \neq i. \quad (6.4)$$

4. Ротатабельность – экспериментальные точки в матрице планирования располагаются так, чтобы точность предсказания параметра оптимизации была одинакова на равных расстояниях от центра плана и не зависела от направления.

6.1.3. Расчет коэффициентов регрессии

По результатам эксперимента находим значения коэффициентов регрессии b_i и b_{ij} (формула (6.1), табл. 6.2), позволяющие оценить сте-

пень воздействия факторов и их взаимодействий на параметр оптимизации. Чем больше численная величина коэффициента, тем большее влияние оказывает фактор. Если коэффициент имеет знак «+», то с увеличением значения фактора параметр оптимизации увеличивается, а если «-», – уменьшается. Величина коэффициента соответствует вкладу данного фактора в величину параметра оптимизации при переходе фактора с нулевого уровня на верхний или нижний. Иногда удобно оценивать линейный (главный) эффект фактора при переходе из нижнего уровня к верхнему. Численно он равен удвоенному коэффициенту полиномиальной модели $2b_i$.

$$b_i = \frac{\sum_{i=1}^N X_{ji} y_i}{N}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k. \quad (6.5)$$

$$y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2.$$

Для подсчета коэффициента b_1 используют столбец X_1 , а для b_2 – X_2 . Остается неясным, как определить b_0 . Если наше уравнение $\bar{y} = b_0 + b_1 \bar{X}_1 + b_2 \bar{X}_2$ справедливо, то оно верно и для средних арифметических значений переменных $\bar{y} = b_0 + b_1 \bar{X}_1 + b_2 \bar{X}_2$. Но в силу свойства симметрии $\bar{X}_1 = \bar{X}_2 = 0 \rightarrow \bar{y} = b_0$, где b_0 есть среднее арифметическое значение параметра оптимизации.

Чтобы привести процедуру в соответствие с формулой для вычисления коэффициентов, в матрицу планирования удобно ввести столбец **фиктивной переменной** X_0 , которая принимает во всех опытах значение +1 (табл. 6.4).

Если есть основания считать, что модель нелинейна, то следует ее усложнить. Один из часто встречающихся видов нелинейности связан с тем, что эффект одного фактора зависит от уровня, на кото-

ром находится другой фактор. В этом случае говорят, что существует эффект взаимодействия двух факторов. ПФЭ позволяет количественно оценить эффект взаимодействия. Для этого надо, пользуясь правилом перемножения столбцов, получить столбец произведения двух факторов (табл. 6.5).

Таблица 6.4

Матрица планирования ПФЭ

№ опыта	X ₀	X ₁	X ₂	y
1	+	-	-	y ₁
2	+	+	-	y ₂
3	+	-	+	y ₃
4	+	+	+	y ₄

$$b_1 = ((-1) y_1 + (+1) y_2 + (-1) y_3 + (+1) y_4) / 4;$$

$$b_2 = ((-1) y_1 + (-1) y_2 + (+1) y_3 + (+1) y_4) / 4; \quad (6.6)$$

$$b_0 = ((+1) y_1 + (+1) y_2 + (+1) y_3 + (+1) y_4) / 4.$$

Таблица 6.5

Матрица планирования ПФЭ

№ опыта	X ₀	X ₁	X ₂	X ₁ X ₂	y
1	+	-	-	+	y ₁
2	+	+	-	-	y ₂
3	+	-	+	-	y ₃
4	+	+	+	+	y ₄

Теперь модель выглядит так:

$$y = b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_{12} X_1 X_2$$

$$b_{12} = ((+1) y_1 + (-1) y_2 + (-1) y_3 + (+1) y_4) / 4 \quad (6.7)$$

Пример. Рассчитать коэффициенты регрессии уравнения

$$y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_{12} X_1 X_2.$$

Матрица планирования ПФЭ представлена в табл. 6.6.

Таблица 6.6

Матрица планирования ПФЭ

№ опыта	X ₀	X ₁	X ₂	X ₁ X ₂	y
1	+	-	-	+	95
2	+	+	-	-	90
3	+	-	+	-	85
4	+	+	+	+	82

$$b_1 = (-95 + 90 - 85 + 82)/4 = -2;$$

$$b_2 = (-95 - 90 + 85 + 82)/4 = -4,5;$$

$$b_0 = (95 + 90 + 85 + 82)/4 = 88;$$

$$b_{12} = (95 - 90 - 85 + 82)/4 = 0,5.$$

Для расчета коэффициентов существует и другой метод – **метод Йетса**. Рассмотрим этот метод на примере табл. 6.7.

Таблица 6.7

1	2	3
y ₁	y ₁ + y ₂	y ₁ + y ₂ + y ₃ + y ₄
y ₂	y ₃ + y ₄	y ₂ - y ₁ + y ₄ - y ₃
y ₃	y ₂ -y ₁	y ₃ + y ₄ - y ₁ - y ₂
y ₄	y ₄ - y ₃	y ₄ - y ₃ - y ₂ + y ₁

Первый столбец – значения параметра оптимизации. Первая операция (второй столбец) состоит в попарном сложении и вычитании этих значений, причем верхнее число вычитается из нижнего.

Вторая операция (третий столбец) состоит в том же действии, но уже с числами второго столбца. Если теперь числа, оказавшиеся в третьем столбце, разделить на число опытов, то получим значения коэффициентов. Операции сложения и вычитания повторяются столько раз, сколько имеется факторов.

Пример. Рассчитать значение коэффициентов (*b*) по методу Йетса, воспользовавшись данными примера, приведенного выше.

Выполненные расчеты представлены в табл. 6.8.

Таблица 6.8

1	2	3	4	
95	95+90	95+90+85+82	88	b_0
90	85+82	90-95+82-85	-2	b_1
85	90-95	85+82-95-90	-4,5	b_2
82	82-85	82-85-90+95	0,5	b_{12}

В ПФЭ встречаются различные уровни взаимодействия факторов. В табл. 6.9 представлены такие взаимодействия.

Таблица 6.9

№ опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	y
1	+	-	-	+	+	-	-	+	y_1
2	+	+	-	+	-	+	-	-	y_2
3	+	-	+	+	-	-	+	-	y_3
4	+	+	+	+	+	+	+	+	y_4
5	+	-	-	-	+	+	+	-	y_5
6	+	+	-	-	-	-	+	+	y_6
7	+	-	+	-	-	+	-	+	y_7
8	+	+	+	-	+	-	-	-	y_8

Чтобы найти число возможных взаимодействий некоторого порядка, можно воспользоваться обычной формулой числа сочетаний

$$C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}, \quad (6.8)$$

где k – число факторов; m – число элементов во взаимодействии. Так, для плана 2^4 число взаимодействий равно 6: $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$.

Из ПФЭ нельзя извлечь информацию о квадратичных членах. Столбцы для квадратичных членов (X_1^2 ; X_2^2) совпадают друг с другом и со столбцом X_0 .

В ПФЭ разность между числом опытов и числом коэффициентов велика. Возникает проблема уменьшения числа опытов. **Дробный факторный эксперимент** позволяет это осуществить.

6.2. ДРОБНЫЕ РЕПЛИКИ ОТ ПОЛНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

6.2.1. Общие сведения

Число опытов ПФЭ $N = 2^k$ быстро растет с увеличением размерности факторного пространства « k ». При больших значениях « k » такие планы оказываются практически неприемлемы, т. к. количество опытов в плане значительно превышает число определяемых коэффициентов регрессии (табл. 6.10). В таком случае для наибольшей эффективности из множества точек может быть отобрана некоторая часть, например $1/2$, $1/4$ и т. д., представляющая **дробный факторный план (ДФЭ)**. Эксперимент, составляющий по объему только часть ПФЭ, называется **дробной репликой от полного факторного эксперимента**.

Таблица 6.10

Число факторов	Число опытов	Число оцениваемых коэффициентов линейного уравнения	Избыточность опытов	Число коэффициентов с учетом взаимодействий	Избыточность опытов
k	$N=2^k$	$k+1$	$2^k-(k+1)$	$k(k+1)/2+1$	$2^k-k(k+1)/2-1$
2	4	3	1	4	0
3	8	4	4	7	1
4	16	5	11	11	5
5	32	6	26	16	16
6	64	7	57	22	42
7	128	8	120	29	99
8	256	9	247	37	219

Рассмотрим принцип построения дробной реплики на примере двухфакторного эксперимента 2^2 (табл. 6.11). Параметр оптимизации выражается равенством $y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_{12}X_1X_2$.

Если есть основания полагать, что в выбранных интервалах варьирования y может быть представлен линейной моделью (т. е. $b_{12} \rightarrow 0$), то достаточно определить только три коэффициента: b_0, b_1, b_2 . Взаимодействие факторов X_1X_2 отсутствует или несущественно, тогда в матрице плана ПФЭ вводят столбец X_3 вместо X_1X_2 , ($X_3 = X_1X_2$). При этом получается матрица планирования для трех факторов, полностью совпадающая с матрицей планирования 2^2 . Планирование по такой матрице представляет собой планирование типа 2^{3-1} , т. е. в основе лежит ПФЭ для $3 - 1 = 2$ переменных. Построив 4 опыта для оценки влияния трех факторов, воспользовались половиной ПФЭ – 2^3 , или полурепликой. При этом матрица планирования не теряет своих оптимальных свойств (ортогональность, ротатабельность и т. д.).

Таблица 6.11

№ опыта	X_0	X_1	X_2	$X_1X_2,$ ($X_3 = X_1X_2$)	y
1	+	-	-	+	y_1
2	+	+	-	-	y_2
3	+	-	+	-	y_3
4	+	+	+	+	y_4

Правило: Чтобы сократить число опытов, нужно новому фактору присвоить столбец матрицы, принадлежащий взаимодействию, которым можно пренебречь. Тогда значение нового фактора в условиях опытов определяется знаками этого столбца.

Если в дополнение к столбцам (табл. 6.11) вычислим еще столбцы для произведения X_1X_3 , X_2X_3 и X_1X_2 , то увидим, что элементы столбца $X_1X_3 = X_2$, $X_2X_3 = X_1$, $X_1X_2 = X_3$ (табл. 6.12).

Таблица 6.12

№ опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3
1	+	-	-	+	+	-	-
2	+	+	-	-	-	-	+
3	+	-	+	-	-	+	-
4	+	+	+	+	+	+	+

Это означает, что невозможно отличить эффект X_1 от эффекта X_2X_3 , т. е. найденный коэффициент регрессии b_i будет служить совместной оценкой для β_1 и β_{23} , что записывается как $b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}$ и аналогично $b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}$; $b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}$. Такие **оценки** называются **смешанными**.

Таким образом, мы смешали эффекты взаимодействия с основными эффектами из-за наличия корреляции. Так как модель является линейной, то предполагается, что эффекты взаимодействия близки к нулю и поэтому $b_1 \cong \beta_1$, $b_2 \cong \beta_2$, $b_3 \cong \beta_3$. В ходе эксперимента стремятся к тому, чтобы максимальное число линейных эффектов оказалось не смешанным с парными взаимодействиями. Число линейных эффектов, которые не смешаны в данном плане, называют **разрешающей способностью плана**.

Планирование 2^{3-1} можно осуществлять иначе: $X_3 = -X_1X_2$; $X_1 = -X_2X_3$; $X_2 = -X_1X_3$, тогда $b_1 \rightarrow \beta_1 - \beta_{23}$, $b_2 \rightarrow \beta_2 - \beta_{13}$, $b_3 \rightarrow \beta_3 - \beta_{12}$.

Количество опытов ДФЭ рассчитывается по формуле

$$N = 2^{k-p}, \quad (6.9)$$

где k – число факторов; p – число факторов, приравненных к произведениям; 2 – число уровней варьирования факторов.

Дробным факторным экспериментом называется эксперимент, реализующий строго определенную часть полного факторного эксперимента.

Пример. 2^{3-1} (рассмотренный выше случай)

$$2^3 = 8 \text{ опытов} \quad 2^{3-1} = 4 \text{ опыта.}$$

Так, полуреплика от ПФЭ 2^5 ($2^5 = 32$ опыта) записывается в виде 2^{5-1} ($2^{5-1} = 16$ опытов), а четверть от ПФЭ 2^5 в виде ($2^{5-2} = 8$ опытов).

В табл. 6.13 приведены реплики, количество опытов для дробной реплики и число опытов полного факторного эксперимента.

Таблица 6.13

Число факторов k	Дробные реплики: 2^{k-p}	Условное обозначение	Число опытов дробной реплики	Число опытов ПФЭ
3	$\frac{1}{2}$ реплики от 2^3	2^{3-1}	4	8
4	$\frac{1}{2}$ реплики от 2^4	2^{4-1}	8	16
5	$\frac{1}{2}$ реплики от 2^5	2^{5-1}	16	32
5	$\frac{1}{4}$ реплики от 2^5	2^{5-2}	8	32
6	$\frac{1}{2}$ реплики от 2^6	2^{6-1}	32	64
6	$\frac{1}{4}$ реплики от 2^6	2^{6-2}	16	64
6	$\frac{1}{8}$ реплики от 2^6	2^{6-3}	8	64
7	$\frac{1}{4}$ реплики от 2^7	2^{7-2}	32	128
7	$\frac{1}{8}$ реплики от 2^7	2^{7-3}	16	128
7	$\frac{1}{16}$ реплики от 2^7	2^{7-4}	8	128
8	$\frac{1}{8}$ реплики от 2^8	2^{8-3}	32	256
8	$\frac{1}{16}$ реплики от 2^8	2^{8-4}	16	256

6.2.2. Генерирующие соотношения и определяющие контрасты.

Выбор реплик

Перед построением плана эксперимента по дробной реплике необходимо определить те взаимодействия, которыми можно пренебречь при замене их новыми факторами.

Рассмотрим 2^{3-1} ; $X_3 = X_1X_2$; $X_3 = -X_1X_2$.

Матрица эксперимента представлена в табл. 6.14. Она состоит из двух частей: I часть для условия $X_3 = X_1X_2$, II часть для условия $X_3 = -X_1X_2$.

Таблица 6.14

I. $X_3 = X_1X_2$						II. $X_3 = -X_1X_2$					
№ опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	$X_1X_2X_3$	№ опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	$X_1X_2X_3$
1	+	+	+	+	+	1	-	+	+	-	-
2	+	-	-	+	+	2	-	-	-	-	-
3	+	+	-	-	+	3	-	+	-	+	-
4	+	-	+	-	+	4	-	-	+	+	-

Для произведения трех столбцов матрицы I выполняется соотношение $+1 = X_1X_2X_3$, а для матрицы II $-1 = X_1X_2X_3$. Произведения столбцов матрицы, равные $+1$ или -1 , называются **определяющим контрастом**.

Например, определяющий контраст может быть $1 = X_1X_2X_3X_4$ или $1 = X_1X_2X_3X_4X_5$ и т. д.

Определяющий контраст позволяет установить разрешающую способность дробной реплики, которая задается системой смешивания эффектов. Для того чтобы определить, какой эффект смешан с другими эффектами, нужно умножить обе части определяющего контраста на столбец эффекта, интересующего исследователя.

$$+1 = X_1X_2X_3$$

$$X_1 = X_1^2X_2X_3 = X_2X_3, \quad \text{так как } X_1^2 = 1$$

$$X_2 = X_1X_2^2X_3 = X_1X_3, \quad X_2^2 = 1$$

$$X_3 = X_1X_2X_3^2 = X_1X_2, \quad X_3^2 = 1$$

Эти соотношения указывают на равенство соответствующих столбцов в матрице планирования. Так, например, столбцы X_1 и X_2X_3 одинаковы. Поэтому b_1 оценивается как $\beta_1 + \beta_{23}$ и записывается $b_1 = \beta_1 + \beta_{23}$, $b_2 = \beta_2 + \beta_{13}$, $b_3 = \beta_3 + \beta_{12}$.

Соотношение, показывающее, с каким из эффектов смешан данный эффект, называется **генерирующим соотношением**.

Пример. $X_3 = X_1X_2$ – генерирует (создает) дробную реплику.

X_1X_2 – незначительное взаимодействие.

$X_3^2 = X_1X_2X_3$.

$1 = X_1X_2X_3$ – **определяющий контраст**.

Разрешающая способность дробной реплики считается максимальной, если линейные эффекты смешаны с эффектами взаимодействия наиболее высокого порядка. Реплики, в которых линейные эффекты смешаны с двухфакторными взаимодействиями, называются планами с разрешающей способностью III (по наибольшему числу факторов в определяющем контрасте). Например, 2_{III}^{3-1} .

Вообще, номер разрешающей способности реплики определяется числом факторов в определяющем контрасте.

Пример. 2^{4-1} . При выборе полуреплики 2^{4-1} выражены 8 решений.

1. $X_4 = X_1X_2$
2. $X_4 = -X_1X_2$
3. $X_4 = X_2X_3$
4. $X_4 = -X_2X_3$
5. $X_4 = X_1X_3$
6. $X_4 = -X_1X_3$

где с 1 по 6 имеют три фактора в определяющем контрасте

7. $X_4 = X_1X_2X_3$ } 7 и 8 имеют четыре фактора в определяющем контрасте.
 8. $X_4 = -X_1X_2X_3$ } 7 и 8 имеют максимальную разрешающую способность; они называются главными.

Пример (Полуреплика). Необходимо спланировать эксперимент с целью выбора оптимальных параметров устройства для получения максимального значения выходной характеристики y . Данные представлены в табл. 6.15.

Таблица 6.15

Факторы	Уровни факторов			Интервал варьирования
	-1	0	+1	
X_1	200	220	240	20
X_2	3	6	9	3
X_3	40	100	160	60
X_4	1	2	3	1

Полуреплики.

ПФЭ – $2^4 = 16$ опытов.

Полуреплика $2^4 - 8$ опытов, заданная 2^{4-1} .

$X_4 = X_1X_2X_3$ – генерирующие соотношения.

$1 = X_1X_2X_3X_4$ – определяющий контраст.

Умножая определяющий контраст на X_1 ; X_2 ; X_3 и X_4 , получим

$$X_1 = X_2X_3X_4; \quad b_1 = \beta_1 + \beta_{234}.$$

$$X_2 = X_1X_3X_4; \quad b_2 = \beta_2 + \beta_{134}.$$

$$X_3 = X_1X_2X_4; \quad b_3 = \beta_3 + \beta_{124}.$$

$$\begin{aligned}
X_4 &= X_1X_2X_3; & b_4 &= \beta_4 + \beta_{123}. \\
X_1X_2 &= X_3X_4; & b_1b_2 &= \beta_{12} + \beta_{34}. \\
X_1X_3 &= X_2X_4; & b_1b_3 &= \beta_{13} + \beta_{24}. \\
X_1X_4 &= X_2X_3; & b_1b_4 &= \beta_{14} + \beta_{23}.
\end{aligned}$$

В реальных задачах тройные взаимодействия бывают равны нулю значительно чаще, чем двойные. Число опытов N в дробной реплике должно удовлетворять неравенству $k + 1 \leq N \leq 2^k$. Если число опытов N равно $k + 1$ числу определяемых коэффициентов в линейном уравнении регрессий, то дробная реплика представляет собой насыщенный линейный ортогональный план (табл. 6.16).

Таблица 6.16

Матрица планирования и результаты эксперимента

№ опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	$X_1X_2=X_3X_4$	$X_1X_3=X_2X_4$	$X_1X_4=X_2X_3$	y
1	+	+	+	-	-	+	-	-	10
2	+	-	-	-	-	+	+	+	9
3	+	+	-	-	+	-	-	+	15
4	+	-	+	-	+	-	+	-	25
5	+	+	+	+	+	+	+	+	26
6	+	-	-	+	+	+	-	-	14
7	+	+	-	+	-	-	+	-	5
8	+	-	+	+	-	-	-	+	20
b_i	15	-1,5	4,75	0,75	4,5	-0,75	0,75	2	-

Рассчитываем коэффициенты по формуле (6.5):

$$b_0 = 1/8(+10+9+15+25+26+14+5+20) = 15;$$

$$b_1 = 1/8(+10-9+15-25+26-14+5-20) = -1,5 \text{ и т.д.};$$

$$y = 15 - 1,5X_1 + 4,75X_2 + 0,75X_3 + 4,5X_4 - 0,75X_1X_2 + 0,75X_1X_3 + 2X_1X_4.$$

Полуреплики типа 2^5 (32 опыта) план 2^{5-1} (16 опытов).

В распоряжении экспериментатора имеется множество вариантов. X_5 можно приравнять.

- | | | |
|----|--------------------|---|
| 1) | 1. $X_5 = X_1 X_2$ | Полуреплика с разрешающей способностью III (не лучшая полуреплика 2_{III}^{5-1}) |
| | 2. $X_5 = X_1 X_3$ | |
| | 3. $X_5 = X_1 X_4$ | |
| | 4. $X_5 = X_2 X_3$ | |
| | 5. $X_5 = X_2 X_4$ | |
| | 6. $X_5 = X_3 X_4$ | |

X_5 приравниваем к одному из парных взаимодействий.

ИЛИ

- | | | |
|----|------------------------|---|
| 2) | 1. $X_5 = X_1 X_2 X_3$ | Полуреплика с разрешающей способностью IV, все линейные эффекты будут смешаны с тройными взаимодействиями, 2_{IV}^{5-1} |
| | 2. $X_5 = X_1 X_3 X_4$ | |
| | 3. $X_5 = X_1 X_2 X_4$ | |
| | 4. $X_5 = X_2 X_3 X_4$ | |

X_5 приравнивается к одному из четырех тройных взаимодействий

ИЛИ

- | | | |
|----|---|---|
| 3) | $X_5 = X_1 X_2 X_3 X_4$ –
генерирующее соотношение | Полуреплика с разрешающей способностью V, 2_V^{5-1} . |
| | $1 = X_1 X_2 X_3 X_4$ –
определяющий контраст | |

Четверть реплики плана типа 2^k .

При достаточно большом числе факторов часто оказывается полезным использовать более легкие дробные реплики. Такой план содержит 2^{k-2} наблюдений. План типа 2^{k-2} можно построить, если выбрать два эффекта или генератора (два генерирующих соотношения) и разбить полный план 2^k на четыре блока.

Если выбранные генерирующие соотношения $1 = P$ и $1 = Q$ ($P \neq Q$, $P; Q \rightarrow X_1 X_2 X_i$). Знак «плюс» или «минус» зависит от того, какой из четырех блоков выбран в качестве дробной решетки. Дробная реплика, для которой P и Q положительны, называется **главной**. Полное определяющее соотношение для плана включает в себя P , Q и их обобщенное взаимодействие PQ , то есть имеет вид $1 = P = Q = PQ$.

Пример.

Рассмотрим 2^{5-2} ($2^5 = 32$ опыта, $2^{5-2} = 2^3 = 8$ опытов, пять факторов).

При анализе априорной информации предполагается что $X_4 = X_1 X_2$ и $X_5 = X_1 X_2 X_3$ – генерирующие соотношения, тогда $1 = X_1 X_2 X_4$ и $1 = X_1 X_2 X_3 X_5$ – определяющие контрасты. Если перемножить между собой эти исходные определяющие контрасты, то получим еще один определяющий контраст $1 = X_3 X_4 X_5$.

$1 = X_1 X_2 X_4 = X_1 X_2 X_3 X_5 = X_3 X_4 X_5$ – **обобщенный определяющий контраст**.

Умножая обобщенный определяющий контраст последовательно на X_1 ; X_2 ; X_3 ; X_4 ; X_5 , получим следующую систему смешивания независимых переменных и взаимодействий:

$$\begin{aligned} 1 &= X_0 = X_1 X_2 X_4 = X_3 X_4 X_5 = X_1 X_2 X_3 X_5 \\ X_1 &= X_2 X_4 = X_1 X_3 X_4 X_5 = X_2 X_3 X_5 \\ X_2 &= X_1 X_4 = X_2 X_3 X_4 X_5 = X_1 X_3 X_5 \\ X_3 &= X_1 X_2 X_3 X_4 = X_4 X_5 = X_1 X_2 X_5 \end{aligned} \tag{6.10}$$

$$X_4 = X_1X_2 = X_3X_5 = X_1X_2X_3 X_4X_5$$

$$X_5 = X_1X_2X_3 X_4X_5 = X_3 X_4 = X_1X_2X_3$$

Если модель включает значимые взаимодействия X_1X_3 и X_1X_5 , то

$$X_1X_3 = X_2X_3 X_4 = X_1X_4X_5 = X_2X_5$$

$$X_1X_5 = X_2X_4X_5 = X_1X_3X_4 = X_2X_3$$

Получается довольно сложная система смешивания линейных эффектов с эффектами взаимодействия первого, второго, третьего и четвертого порядков.

Если, например, коэффициенты $b_{13} = \beta_{13} + \beta_{234} + \beta_{145} + \beta_{25}$ и $b_{15} = \beta_{15} + \beta_{245} + \beta_{134} + \beta_{23}$ отличаются от нуля, то возникают сомнения, можно ли пренебрегать другими парными взаимодействиями, с которыми смешаны линейные эффекты. Тогда следует поставить вторую серию опытов, выбрав нужным образом другую 1/4 реплики или же данный ДФЭ не позволяет разделить коэффициенты, то есть необходимо вначале достроить до полуреплики, а если это не поможет, то достроить до ПФЭ.

Кроме того, можно воспользоваться методом «перевала», заключающимся в том, что вторая четверть реплики получается из первой путем изменения всех знаков матрицы на противоположные. Тогда в обобщающем определяющем контрасте тройные произведения имеют знак, противоположный знаку в первой четверти реплики.

Вообще существуют 12 возможных решений 2^{5-2} :

1. $X_4 = X_1X_2$ $X_5 = X_1X_2X_3$ (было рассмотрено)
2. $X_4 = X_1X_2$ $X_5 = -X_1X_2X_3$
3. $X_4 = -X_1X_2$ $X_5 = X_1X_2X_3$ ← если возможно выберем другую
4. $X_4 = -X_1X_2$ $X_5 = -X_1X_2X_3$ генерирующую
5. $X_4 = X_1X_3$ $X_5 = X_1X_2X_3$ совокупность
6. $X_4 = X_1X_3$ $X_5 = -X_1X_2X_3$ $X_4 = -X_1X_2$

7. $X_4 = -X_1X_3$ $X_5 = X_1X_2X_3$
8. $X_4 = -X_1X_3$ $X_5 = -X_1X_2X_3$
9. $X_4 = X_2X_3$ $X_5 = X_1X_2X_3$
10. $X_4 = X_2X_3$ $X_5 = -X_1X_2X_3$
11. $X_4 = -X_2X_3$ $X_5 = X_1X_2X_3$
12. $X_4 = -X_2X_3$ $X_5 = -X_1X_2X_3$

$X_5 = X_1X_2X_3$,
 обобщающий
 контраст будет
 $1 = -X_1X_2X_4 =$
 $= X_1X_2X_3X_5 =$
 $-X_3X_4X_5$.

Система смешивания будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 X_1 &= -X_2X_4 = X_1X_3 & X_4X_5 &= -X_2X_3X_5 \\
 X_2 &= -X_1X_4 = X_2X_3 & X_4X_5 &= -X_1X_3X_5 \\
 X_3 &= -X_1X_2X_3 & X_4 &= X_4X_5 = -X_1X_2X_5 \\
 X_4 &= -X_1X_2 = X_3X_5 = -X_1X_2X_3 & X_4X_5 & \\
 X_5 &= -X_1X_2X_4X_5 = X_3X_4 = -X_1X_2X_3 \\
 X_1X_3 &= -X_2X_3 & X_4 &= X_1X_4X_5 = -X_2X_5 \\
 X_1X_5 &= -X_2X_4X_5 = X_1X_3 & X_4 &= -X_2X_3
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

При сложении двух 1/4 реплик ((6.10) и (6.11)) получается следующая картина:

$$b_1 = \beta_1 + \beta_{1345}$$

$$b_2 = \beta_2 + \beta_{2345}$$

$$b_3 = \beta_3 + \beta_{45}$$

$$b_4 = \beta_4 + \beta_{35}$$

$$b_5 = \beta_5 + \beta_{34}$$

$$b_{13} = \beta_{13} + \beta_{145}$$

$$b_{15} = \beta_{15} + \beta_{134}$$

Итак, линейные эффекты освободились от совместных оценок с тройными эффектами взаимодействия и в некоторых случаях – с пар-

ными. Такое планирование целесообразно, если ставится задача освободить все линейные эффекты от взаимодействия второго ($X_1X_2X_3$) и третьего порядков (X_1X_2) для b_1 и b_2 .

Реплики большой дробности.

При выборе $1/8$ реплики от $2^6 \Rightarrow 2^{6-3}$ можно воспользоваться столбцами трех взаимодействий максимум.

1. $X_4 = X_1X_2$ $X_5 = X_1X_3$ $X_6 = X_2X_3$ – наиболее удачное решение, так как все линейные эффекты смешиваются с парными взаимодействиями.

2. $X_4 = X_1X_3$ $X_5 = X_2X_3$ $X_6 = X_1X_2X_3$

3. $X_4 = X_1X_2$ $X_5 = X_2X_3$ $X_6 = X_1X_2X_3$

4. $X_4 = X_1X_2$ $X_5 = X_1X_3$ $X_6 = X_1X_2X_3$

Если априорно известно, что из всех взаимодействий наиболее существенно X_1X_2 , то нужно выбрать второе решение, если X_1X_3 – третье решение, если X_2X_3 – четвертое.

С ростом числа факторов увеличивается дробность реплики и усложняется система смешивания. Предельное число факторов для 8 опытов – 7. В этом случае оценивается восемь коэффициентов линейного уравнения $y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_4X_4 + b_5X_5 + b_6X_6 + b_7X_7$.

При числе факторов от 8 до 15 приходится ставить 16 опытов. С ростом числа факторов дробность реплики растет следующим образом: $1/32$ реплики от 2^9 ; $1/64$ реплики от 2^{10} ; $1/128$ реплики от 2^{11} ; $1/256$ реплики от 2^{12} ; $1/512$ реплики от 2^{13} ; $1/1024$ реплики от 2^{14} ; $1/2048$ реплики от 2^{15} . Предельное число факторов для 16 опытов – 15. **План** с предельным числом факторов для данного числа опытов и заданной модели называется **насыщенным**. В этом случае число опытов равно числу оцениваемых коэффициентов.

6.2.3. ОсобенностиДФЭ

ПреимуществаДФЭ по сравнению с ПФЭ следующие.

1. Эффекты факторов, представляющих первостепенный интерес, могут быть изучены в более общих условиях, чем это возможно в других случаях.

2. Уменьшается число опытов, необходимых для исследования заданного числа главных эффектов и эффектов парных взаимодействий.

Принципиальными недостатками дробных реплик являются следующие.

1. Может остаться слишком мало степеней свободы для выявления разнообразных возможных случаев недостаточно высокого качества описания.

2. Более высокая по сравнению с полными планами уязвимость по отношению к обычным опасностям экспериментирования: ошибочным данным, перепутанным наблюдателем, недопустимым условиям опытов.

Таким образом, дробные решетки находят широкое применение для исследования сложных процессов особенно на первом этапе оптимизаций.

6.2.4. Особенности планов с разрешающей способностью III, IV, V

1. Планы разрешающей способности III.

К ним относятся планы, в которых никакие главные эффекты не являются совместимыми друг с другом, но с главными эффектами со-

вместны двухфакторные взаимодействия, которые совместны друг с другом (например, 2^{3-1}).

2. Планы разрешающей способности IV.

К ним относятся планы, в которых никакие главные эффекты не являются совместными друг с другом или двухфакторными взаимодействиями, но последние друг с другом совместны (например, 2^{4-1}).

3. Планы разрешающей способности V.

К ним относятся планы, в которых никакие главные эффекты и двухфакторные взаимодействия не являются совместными друг с другом, но двухфакторные взаимодействия совместны с трехфакторными взаимодействиями (например, 2^{5-1}).

Свойства: планы 2^k и 2^{k-1} – ортогональны (коэффициенты вычисляются независимо друг от друга).

6.3. ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

После планирования проводят непосредственно сам эксперимент. Для каждого принятого сочетания факторов измеряют значения параметра оптимизаций. Следует учитывать, что результаты каждого опыта обладают статической неопределенностью. Она получается за счет погрешности измерения значений факторов и самого параметра оптимизаций, влияния неутонченных факторов. Поэтому если воспроизвести несколько раз опыт при одних и тех же значениях факторов, то каждый раз значение параметра оптимизаций будет разным. Обычно стараются при каждом сочетании значений факторов («в каждой точке») провести несколько повторных опытов, которые называ-

ются **параллельными (дублированными)**. Дублирование позволяет проверить воспроизводимость эксперимента.

6.3.1. Проверка однородности дисперсии параллельных опытов (ошибки параллельных опытов)

Эта проверка необходима для того, чтобы установить и доказать нормальный закон распределения ошибок отдельных опытов в эксперименте. В противном случае нельзя приступить к регрессионному анализу – расчету коэффициентов регрессии, проверке их значимости и проверке адекватности математической модели экспериментальных данных.

Проверку однородности проводят с помощью одного из статистических критериев – критерия Кохрена (G-критерий). Проверка состоит в следующем.

- Среди вычисленных по формулам (2.23), (2.24) оценок дисперсий находят наибольшую S^2_{max} .
- Вычисляют отношение наибольшей оценки к сумме всех оценок дисперсии. Критерий Кохрена – это отношение максимальной дисперсии к сумме всех дисперсий:

$$G_{расч} = \frac{S^2_{max}}{\sum_{i=1}^n S_i^2}, \quad (6.12)$$

где S^2_{max} – максимальная дисперсия; S_i^2 – i -дисперсия.

- Определяют числа степеней свободы f_1 и f_2 : $f_1 = n - 1$; $f_2 = N$, где n – количество параллельных опытов, а N – все количество опытов.

- Выбирают уровень значимости (обычно $g = 0,05$).
- В специальных таблицах по заданным $g; f; n$ находят критическое отклонение $G_{табл}$.
- Сравнивают величины $G_{расч}$ и $G_{табл}$. Если $G_{расч} \leq G_{табл}$, то дисперсия однородна, в противном случае – неоднородна.
- Делают вывод об однородности дисперсии параллельных опытов.

Если эта проверка дала отрицательный результат, то полученный эмпирический материал использовать для аппроксимации функции не рекомендуется. Следует повторить эксперимент, увеличив при этом число повторений для каждого опыта.

Критерий Кохрена используется, когда сравниваемое количество дисперсии больше двух и одна дисперсия значительно превышает остальные. Этот критерий пригоден для случаев, когда во всех точках имеется одинаковое число повторных опытов.

Для оценки однородности дисперсии кроме критерия Кохрена (G -критерий) используют критерий Фишера (F -критерий), критерий Бартлета (B -критерий). В табл. 6.17 представлены расчетные формулы и случаи применения критериев.

Таблица 6.17

Критерии для оценки однородности дисперсии

Критерий	Расчетная формула	Условие опровержения гипотезы об однородности дисперсии	В каких случаях применяется
F -критерий Фишера	$F_{расч} = \frac{S_{max}^2}{S_{min}^2} \quad (6.13)$	Если $F_{расч} > F_{табл}$	Используется для сравнения двух дисперсий

Критерий	Расчетная формула	Условие опровержения гипотезы об однородности дисперсии	В каких случаях применяется
G-критерий Кохрена	$G_{расч} = \frac{S_{\max}^2}{\sum_{i=1}^N S_i^2} \quad (6.14)$	Если $G_{расч} > G_{табл}$	Используется при одинаковом числе параллельных опытов
B-критерий Бартлета	$B_{расч} = \frac{2,303}{C} (f \lg S^2(y) - \sum_{i=1}^N f_i \lg S_i^2)$ $C = 1 + \frac{1}{3(N-1)} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{f_i} - \frac{1}{f} \right)$ <p>f – число степеней свободы всего эксперимента; f_i – число степеней свободы параллельных опытов</p>	Если $B_{расч} > B_{табл}$	Используется в случае неравномерного числа опытов во всех точках плана

6.3.2. Дисперсия воспроизводимости и ошибка всего эксперимента

В случае однородности дисперсий параллельных опытов рассчитывают дисперсию воспроизводимости и ошибку всего эксперимента.

Матрица планирования состоит из серии опытов, и дисперсия всего эксперимента получается в результате усреднения дисперсии всех опытов. По терминологии, принятой в планировании эксперимента, речь идет о подсчете дисперсии параметра оптимизации $S^2(y)$ или, что то же самое, дисперсии воспроизводимости эксперимента $S^2_{воспр}$.

При подсчете дисперсии параметра оптимизации квадрат разности между результатом отдельного опыта (значением y_g) и средними значениями (\bar{y}) из n повторенных наблюдений нужно просуммировать по числу опытов в матрице N , а затем разделить на $N(n-1)$:

$$S^2(y) = \frac{\sum_1^N \sum_1^n (y_{ig} - \bar{y}_i)^2}{N(n-1)} = \frac{1}{N} \sum_1^N S^2 \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad g = 1, 2, \dots, n. \quad (6.15)$$

Такой формулой можно пользоваться в случаях, когда число повторных опытов одинаково во всей матрице. Для двух повторных опытов ($n = 2$) формула принимает вид

$$S^2(y) = \frac{2 \sum_1^N (y_{ig} + \bar{y}_i)^2}{N}. \quad (6.16)$$

На практике часто приходится сталкиваться со случаями, когда число повторных опытов различно. Это происходит вследствие отброса грубых наблюдений, неуверенности экспериментатора в правильности некоторых результатов.

Тогда пользуются средневзвешенным значением дисперсии, взятым с учетом числа степеней свободы:

$$S^2(y) = \frac{S_1^2 f_1 + S_2^2 f_2 + \dots + S_N^2 f_N}{f_1 + f_2 + \dots + f_N} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i S_i^2}{\sum_{i=1}^N f_i}, \quad (6.17)$$

где S_1^2 – дисперсия первого опыта; S_N^2 – дисперсия N опыта; f_1 – число степеней свободы в первом опыте: $f_1 = n_1 - 1$ (равное числу параллельных опытов n_1 минус 1: $n_1 - 1$).

Ошибка всего эксперимента:

$$S(y) = \sqrt{S^2(y)} . \quad (6.18)$$

6.3.3. Рандомизация

Чтобы исключить влияние систематических ошибок, вызванных внешними условиями, рекомендуется случайная последовательность при постановке опытов. Опыты необходимо рандомизировать во времени. Термин «рандомизация» происходит от английского слова random – случайный.

Пусть проводится эксперимент типа 2^3 . Матрица планирования представлена в табл. 6.18.

Например, опыты 1–4 ставим сегодня, а 5–8 – завтра. Различие в условиях эксперимента может вызвать систематическую ошибку, которая отразится на величине b_3 , так как в опытах 1–4 фактор X_3 находится на верхнем уровне, а в опытах 5–8 – на нижнем уровне.

Таблица 6.18

№ опыта	X_1	X_2	X_3
1	+	+	+
2	–	–	+
3	+	–	+
4	–	+	+
5	+	+	–
6	–	–	–
7	+	–	–
8	–	+	–

Отличие в условиях первого и второго дня вызовет некоторую ошибку E .

$$b_3 = \frac{1}{8} [(y_1 + E) + (y_2 + E) + (y_3 + E) + (y_4 + E) - y_5 - y_6 - y_7 - y_8] \rightarrow \beta_3 + \frac{E}{2},$$

где β_3 – истинное значение коэффициента при X_3 .

Из рассмотренного выше следует, что в такой последовательности опыты ставить нельзя.

Если в просмотренном опыте 2^3 предполагается каждое значение параметра оптимизации (y) определить по двум параллельным опытам, то всего получается 16 опытов ($8 \cdot 2 = 16$), тогда для определения порядка проведения опытов воспользуемся таблицей случайных чисел. Например, начиная с четвертого столбца записываем числа с 1 до 16, отбрасывая больше 16, то можно получить следующую последовательность: 2; 15; 9; 12; 14; 8; 13; 16; 1; 3; 7; 4; 6; 11; 10. Тогда можно составить таблицу проведения опытов (табл. 6.19).

Таблица 6.19

Номер опыта по матрице планирования	1	2	3	4	5	6	7	8
Случайный порядок реализаций опытов	2	15	9	5	12	14	8	13
	16	1	3	7	4	6	11	10

Выбранную случайным образом последовательность опытов не рекомендуется нарушать.

6.4. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

6.4.1. Проверка значимости коэффициентов регрессий

Эта проверка производится с целью упрощения уравнения регрессии путем исключения статистически незначительных коэффициентов.

Проверку можно осуществлять двумя способами: проверка по t -критерию Стьюдента или построение доверительного интервала. Доверительные интервалы для всех коэффициентов равны друг другу. Ошибки всех коэффициентов одинаковы.

$S_{b_0} = S_{b_i} = S_{b_{ig}}$ – среднеквадратические ошибки в определении коэффициентов.

Расчет ошибок коэффициентов производится по формуле

$$S_{b_i} = \frac{S(y)}{\sqrt{Nn}} \quad (S_{b_i}^2 = \frac{S^2(y)}{Nn} = \frac{S_{\text{вост}}^2}{Nn}). \quad (6.19)$$

Коэффициент регрессий считается значимым, если он по абсолютной величине больше величины доверительного интервала $|b| > \Delta b$.

Величина доверительного интервала рассчитывается, как правило, при помощи критерия Стьюдента (t -критерия).

$$b = \pm t \cdot S_{b_i} \quad (6.20)$$

или
$$b = \pm \frac{t \cdot S(y)}{\sqrt{Nn}}. \quad (6.21)$$

Для отыскания значения t -критерия пользуются таблицами. Кроме того, проверять значимость коэффициентов можно по t -критерию следующим образом.

– Находят ошибки определения коэффициентов по формуле (6.19).

– Определяют отношения абсолютного значения коэффициента регрессий b_i к среднему квадратическому отклонению ошибки его

определения: $t_i = \frac{|b_i|}{S(b_i)}$.

– Находят число степеней свободы $f = N(n - 1)$.

– Выбирают уровень значимости g (обычно 0,05).

– По таблице при заданных величинах f и g находят критическое значение $t_{табл}$.

Если рассчитанное значение отношения больше критического, то есть $t_i > t_{табл}$, то коэффициент b_i признается значимым, в противном случае – статически незначимым.

Незначимость коэффициентов может быть обусловлена рядом причин:

– фактор, соответствующий незначимому коэффициенту, не влияет на функцию;

– имеет место большая ошибка;

– выбран малый шаг варьирования независимой переменной;

– экстремум функции по переменной находится вблизи центра

планирования: $b_i \approx \frac{\partial f(0,0,0...0)}{\partial X_i}$.

Если какой-то коэффициент назначен, он отбрасывается без пересчета всех остальных коэффициентов. Однако, прежде чем исключить коэффициент, необходимо проанализировать причины, вызвавшие незначимость коэффициента.

6.4.2. Проверка адекватности модели

Данная проверка проводится с целью доказательства пригодности полученного уравнения регрессии для описания экспериментальных данных с заданной точностью. Для этого оценивают отклонения вычисленных по уравнениям регрессии значений функции оптимизации \hat{y} от экспериментально установленных \bar{y} . Для оценки отклонений используют критерий Фишера F-критерий.

Наиболее надежные результаты проверки адекватности получаются в планах, обеспечивающих одинаковую точность предсказанных значений функции отклика в точках, находящихся на одинаковых расстояниях от центра эксперимента. Проверку адекватности математической модели выполняют в несколько этапов.

1. Находят дисперсию адекватности:

$$S_{ad}^2 = \frac{1}{n-l} \sum_{i=1}^N m_i (\bar{y}_i - \hat{y})^2, \quad (6.22)$$

где m_i – число параллельных опытов в i -й строчке матрицы планирования; \bar{y}_i – среднеарифметическое функции отклика из m параллельных опытов; \hat{y} – значение функции отклика, предсказанное по уравнению в i -м опыте; l – число значимых коэффициентов в уравнении регрессии; N – число независимых опытов.

Если все опыты повторяются m раз, то формула будет иметь вид

$$S_{ад}^2 = \frac{m}{N-l} \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \hat{y})^2. \quad (6.23)$$

2. Находят значения F -критерия Фишера (дисперсное отношение):

$$F_{расч} = \frac{S_{ад}^2}{S_{восн}^2} = \frac{S_{ад}^2}{S^2(y)}, \quad (6.24)$$

где $S^2(y)$ – дисперсия параметра оптимизации.

3. Определяют число степеней свободы :

$$f_{ад} = N - l; \quad (6.25)$$

$$f_{восн} = N(m - 1). \quad (6.26)$$

4. Выбирают уровень значимости g (обычно 0,05).

5. По значениям $f_{ад}; f_{восн}; g$ находят F табличное.

6. Если $F_{расч} \leq F_{табл}$, то математическое описание функции отклика уравнениями регрессий считается адекватным, в противном случае описание признается неадекватным изучаемому процессу.

Если математическая модель неадекватна данным эксперимента, то необходимо перейти к более сложной форме уравнения регрессии или уменьшить интервал варьирования факторов в эксперименте. Например, если неадекватна линейная модель, то следует дополнить, введя в нее числа, соответствующие эффектам взаимодействия.

6.5. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПЛАНОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Пример 1. Применение полного факторного эксперимента рассмотрим на примере исследования влияния нагрузки и скорости, а также качества обработки на температуру в узле трения. Ранее было выяснено, что на температуру в узлах трения без смазки влияют следующие факторы: удельная нагрузка p , скорость скольжения v и первоначальная шероховатость трущейся шейки стального валика R_a .

Для оценки влияния указанных факторов и математического описания процесса трения использована модель первого порядка вида

$$\hat{y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + b_{23}X_2X_3 + b_{123}X_1X_2X_3. \quad (6.27)$$

Значения выбранных уровней варьируемых факторов даны в табл. 6.20.

Таблица 6.20

Уровень варьируемых факторов	Обозначение кодовое	p , кг/см ²	v , м/с	R_a , мкм
		X_1	X_2	X_3
Основной уровень	0	6,84	0,59	1,575
Интервал варьирования	Δx_i	4,00	0,31	0,925
Верхний уровень	+1	10,84	0,90	0,65
Нижний уровень	-1	2,84	0,28	2,50

Для получения оценок коэффициентов уравнения (6.27) использовали полный факторный эксперимент типа 2^3 . Матрица планирования эксперимента с расчетными столбцами взаимодействия факторов представлена в табл. 6.21.

Таблица 6.21

№ опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$
1	+	-	-	-	+	+	+	-
2	+	+	-	-	-	-	+	+
3	+	-	+	-	-	+	-	+
4	+	+	+	-	+	-	-	-
5	+	-	-	+	+	-	-	+
6	+	+	-	+	-	+	-	-
7	+	-	+	+	-	-	+	-
8	+	+	+	+	+	+	+	+

Испытывалась пара трения: пластмасса (фторопласт 3) и металл (сталь марки 45 незакаленная). Каждый опыт проводили трижды. Порядок испытаний рандомизирован с помощью таблиц случайных чисел. Результаты испытаний приведены в табл. 6.22.

Среднее значение параметра оптимизации по параллельным опытам определяли, например, для первого опыта:

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{r} \sum_{v=1}^r y_{1v} = \frac{57 + 60 + 55}{3} = 57,3 \quad \text{и т. д.}$$

Определяли дисперсию параллельных опытов, например, для первого опыта:

$$S_1^2 = \frac{1}{r-1} \sum_{v=1}^r (y_{1v} - \bar{y}_1)^2 = \frac{0,09 + 7,29 + 5,29}{2} = 6,34.$$

Таблица 6.22

№ опыта	Температура, °С				$y_{u1} - \bar{y}_u$	$y_{u2} - \bar{y}_u$	$y_{u3} - \bar{y}_u$	$(y_{u1} - \bar{y}_u)^2$	$(y_{u2} - \bar{y}_u)^2$	$(y_{u3} - \bar{y}_u)^2$	S_u^2
	y_{u1}	y_{u2}	y_{u3}	\bar{y}_u							
1	57	60	55	57,3	-0,3	+2,7	-2,3	0,099	7,29	5,29	6,34
2	57	55	52	54,7	+2,3	+0,3	+22,7	5,29	0,09	7,29	6,34
3	80	85	90	85	-5,0	0	+5,0	25,00	0	25,00	25,00
4	120	125	130	125	-5,0	0	+5,0	25,00	0	25,00	25,00
5	50	55	45	50	0	+5,0	-5,0	0	25,00	25,00	25,00
6	54	55	60	56,3	-2,3	-1,3	+3,7	5,29	1,69	13,69	10,34
7	55	50	60	55,0	0	-5,0	+5,0	0	25,00	25,00	25,00
8	98	105	115	106	-8,0	-1,0	+9,0	64,00	1,00	81,00	73,00
Σ				589,3							196

Для определения возможности проведения регрессионного анализа рассчитали однородности дисперсий параллельных опытов по критерию Кохрена:

$$G_{расч} = \frac{S_{u_{max}}^2}{\sum_{u=1}^N S_u^2} = \frac{73,0}{196,02} = 0,373.$$

Расчетное значение критерия сравнивали с табличным для степеней свободы: числителя $f_1 = r - 1$, $f_2 = N$ и соответственно при выбранном уровне значимости 0,05:

$$G_{табл} = 0,5157 > G_{расч} = 0,373.$$

Следовательно, гипотеза об однородности дисперсий параллельных опытов принимается. Отсюда дисперсия воспроизводимости

$$S_{восп}^2 = S_{(y)}^2 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N s_u^2 = \frac{196,02}{8} = 24,5.$$

Ошибка эксперимента

$$S(y) = +\sqrt{S_{(y)}^2} = \sqrt{24,5} \approx 4,95 \approx 5,0.$$

Далее рассчитывали коэффициенты уравнения (6.1). Например, для коэффициента b_1 :

$$b_1 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N X_{1u} y_u = \frac{-57,3 + 54,7 - 85 + 125 - 50 + 56,3 - 55 - 106}{8} = \frac{94,7}{8} = 11,8 \text{ и т. д.}$$

После расчета всех коэффициентов уравнение (6.1) принимает вид

$$\hat{y} = 73,7 + 11,8 X_1 + 19,1 X_2 - 6,8X_3 + 10,9 X_1X_2 + 2,5 X_1X_3 - 5,4 X_2X_3 + 0,3 X_1X_2X_3.$$

Проверку статистической значимости коэффициентов проводили с помощью t -критерия. Для полного факторного эксперимента ошибки всех коэффициентов равны между собой и определяются как

$$S(b_i) = \frac{S(y)}{\sqrt{Nr}} = \frac{5,0}{\sqrt{8 \cdot 3}} = 1,02 \approx 1,0.$$

Далее определяли доверительный интервал длиной $2\Delta b_i$:

$$\Delta b_i = t_{табл} S(b_i) = 2,12 \cdot 1,02 = 2,16.$$

Критическое значение $t_{табл}$ выбирали по таблице для числа степеней свободы $N(r - 1) = 16$ и при принятом уровне значимости 0,05. Все коэффициенты уравнения (6.27), кроме b_{123} , оказались статистически значимыми. После исключения статистически незначимого коэффициента b_{123} уравнение регрессии принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{y} = 73,7 + 11,8 X_1 + 19,1 X_2 - 6,8X_3 + 10,9 X_1X_2 + \\ + 2,5 X_1X_3 - 5,4 X_2X_3 . \end{aligned} \quad (6.28)$$

Полученное уравнение проверяли на адекватность. В табл. 6.23 представлены результаты расчета дисперсии адекватности с учетом коэффициента b_{13} и без него (коэффициент b_{13} статистически незначим при уровне значимости 0,02).

Таблица 6.23

№ опыта	С учетом коэффициента				Без учета коэффициента			
	\bar{y}_u	\hat{y}_u	$\bar{y}_u - \hat{y}_u$	$(\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2$	\bar{y}_u	\hat{y}_u	$\bar{y}_u - \hat{y}_u$	$(\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2$
1	57,3	57,6	- 0,3	0,09	57,3	55,1	+ 2,2	4,84
2	54,7	54,4	+ 0,3	0,09	54,7	56,9	- 2,2	4,84
3	85,0	84,8	+ 0,2	0,04	85,0	82,3	+ 2,7	7,29
4	125,0	125,0	- 0,2	0,04	125,0	127,7	- 2,7	7,29
5	50,0	49,8	+ 0,2	0,04	50,0	52,3	- 2,3	5,29
6	56,3	56,6	- 0,3	0,09	56,3	54,3	+ 2,2	4,84
7	55,0	55,4	- 0,4	0,16	55,0	57,9	- 2,9	8,41
8	106,0	105,8	+ 0,2	0,04	106,0	103,3	+2,7	7,27
Σ				0,59				50,09

Гипотезу об адекватности уравнения (6.28) проверяли с учетом значимости коэффициента b_{13} и соответственно без его учета.

$$F_{1,расч} = \frac{S_{1ад}^2}{S^2(y)} = \frac{3 \cdot 0,59}{24,5} = 0,073.$$

Так как $F > 1$, то уравнение (6.28) адекватно.

$$F_{2,расч} = \frac{S_{2ад}^2}{S^2(y)} = \frac{(3 \cdot 50,09) / 2}{24,5} = 3,1.$$

$F_{2табл} = 3,00$ соответственно для степеней свободы $f_{ад} = 2$, $f_{восп} = 16$ и при уровне значимости 0,05. В связи с тем что $F_{2,расч} < F_{2табл}$, уравнение (6.29) можно считать адекватным при $b_{13} = 0$.

$$\hat{y} = 73,7 + 11,8 X_1 + 19,1 X_2 - 6,8X_3 + 10,9 X_1X_2 - 5,4 X_2X_3 . \quad (6.29)$$

Для приведения уравнения (6.29) к виду с натуральными значениями факторов используют формулу кодирования, подставляя в уравнение (6.29) вместо кодовых натуральных значения факторов.

На основании полученных результатов и анализа уравнения (6.29) можно сделать следующие выводы.

1. С увеличением удельной нагрузки p и скорости скольжения v температура в зоне трения возрастает (так как коэффициенты b_1 и b_2 при X_1 и X_2 положительные), причем наибольшее влияние оказывает скорость скольжения при выбранных условиях варьирования ($b_2 > b_1$).

2. С уменьшением шероховатости поверхности R_a снижается температура в зоне трения, так как b_3 отрицателен, но влияние этого фактора менее значительно, чем удельного давления и скорости скольжения ($b_3 < b_1 < b_2$).

3. Наряду с линейными эффектами значимыми оказались также и эффекты взаимодействия X_1X_2 и X_2X_3 , причем эти взаимодействия противоположны по своему эффекту (они имеют противоположные знаки). Для снижения температуры в зоне трения необходимо стремиться при увеличенных нагрузках снижать скорость скольжения. Снижение шероховатости поверхности позволяет несколько повысить скорость скольжения.

Использование полного факторного эксперимента позволило не только оценить влияние факторов и их взаимодействий на температуру трения, но и наметить гипотезы по выяснению механизма процесса.

Пример 2. Другим примером использования полного факторного эксперимента типа 2^3 является исследование износостойкости захватов грейферов железнодорожных кранов. Анализ литературных источников показал, что можно значительно повысить работоспособ-

ность захвата грейфера, работающего в абразивной среде, путем наплавки его режущих кромок порошковой проволокой. Лабораторные испытания на изнашивание проводили на машине трения типа «вращающаяся чаша».

Размер изнашиваемой поверхности образца (40×65 мм) и его форма были подобны режущей кромке захвата грейфера. В качестве абразивной среды был использован щебень твердостью 800–900 кг/см² и размером 40–50 мм. Предварительно образцы наплавляли следующими твердосплавными наплавками: электродом Т-590 и порошковыми проволоками ППАН-125, ППАН-170 и ППИСТО2. Проведенный технико-экономический расчет позволил выбрать наиболее приемлемый наплавочный материал – порошковую проволоку марки ППАН-125.

Наплавку образцов проводили на установке с помощью полуавтоматов типа А-537, переоборудованных для работы с порошковой проволокой. Режимы наплавки представлены в табл. 6.24.

Таблица 6.24

Наименование	Обозначение	Размерность	Значение
Сварочный ток	I	А	600
Напряжение дуги	U	В	31–37
Скорость подачи электродной проволоки	$v_{\text{п}}$	м/мин	4,7
Скорость наплавки	$v_{\text{н}}$	м/мин	2,6
Скорость перемещения образца	v_0	м/мин	0,47
Число колебаний	n	1/мин	58

Влияние режимов работы на износостойкость наплавленного слоя исследовали с помощью многофакторного эксперимента. В качестве плана эксперимента использовали полный факторный эксперимент типа 2³. За функцию отклика выбрана интенсивность изнашивания на 1 км пути.

Варьируемыми факторами были приняты: глубина погружения образца в абразивную среду h , скорость перемещения образца v и угол наклона рабочей поверхности (угол резания) φ . На основании априорной информации были выбраны уровни факторов и интервалы их варьирования. Значения натуральных уровней факторов и кодовых представлений в табл. 6.25.

Таблица 6.25

Уровни факторов и интервалы варьирования	Кодовые значения			Натуральные значения		
	X_1	X_2	X_3	h , см	v , м/с	φ , °
Основной уровень	0	0	0	10	0,18	33
Интервал варьирования	1	1	1	5	0,06	3
Верхний уровень	+ 1	+ 1	+ 1	15	0,24	36
Нижний уровень	- 1	- 1	- 1	5	0,12	30

Согласно принятому плану полного факторного эксперимента всего было проведено 8 опытов, каждый опыт повторяли трижды в случайном порядке для исключения систематических ошибок.

В табл. 6.26 представлены матрица планирования, экспериментальные данные по износу образцов и их расчетные значения.

На основании полученных экспериментальных данных рассчитывали среднее значение величины износа и дисперсии параллельных опытов. Например, для опыта 2

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{r} \sum_{v=1}^3 y_{2v} = \frac{1}{3} (0,43 + 0,45 + 0,44) = 0,44.$$

Таблица 6.26

№ опыта	Матрица плана				Результаты опытов (износ в граммах)				Расчетные значения износа \hat{y}
	X_0	X_1	X_2	X_3	y_{u1}	y_{u2}	y_{u3}	\bar{y}_u	
1	+ 1	- 1	- 1	- 1	0,15	0,17	0,14	0,153	0,154
2	+ 1	+ 1	- 1	- 1	0,43	0,45	0,44	0,440	0,436
3	+ 1	- 1	+ 1	- 1	0,11	0,13	0,10	0,113	0,108
4	+ 1	+ 1	+ 1	- 1	0,31	0,28	0,32	0,303	0,314
5	+ 1	- 1	- 1	+ 1	0,19	0,17	0,20	0,187	0,188
6	+ 1	+ 1	- 1	+ 1	0,44	0,47	0,48	0,463	0,470
7	+ 1	- 1	+ 1	+ 1	0,12	0,15	0,14	0,137	0,144
8	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	0,36	0,33	0,39	0,360	0,348

Дисперсии параллельных опытов определяли по формуле

$$S_u^2 = \frac{1}{r-1} \sum_{v=1}^r (y_{uv} - \bar{y}_u)^2 .$$

Например, для опыта 2 имеем

$$S_2^2 = \frac{1}{r-1} \sum_{v=1}^3 (y_{2v} - \bar{y}_2)^2 = \frac{1}{3-1} (1,00 + 1,00 + 0) \cdot 10^{-4} = 1,0 \cdot 10^{-4} .$$

Проверку однородности полученных дисперсий параллельных опытов проводили по критерию Кохрена:

$$G_{расч} = \frac{S_{u_{max}}^2}{\sum_{u=1}^N S_u^2} = \frac{9,0 \cdot 10^{-4}}{27,7 \cdot 10^{-4}} = 0,324,$$

где $S_{u_{max}}^2$ – наибольшее значение дисперсии параллельных опытов (табл. 6.27, опыт 8).

Полученные значения $G_{расч}$ сравнивали с табличным для числа степеней свободы $f = 2$ и $f_2 = 8$ при выбранном уровне значимости 0,05 $G_{табл} = 0,526 > G_{расч} = 0,324$.

Расчетные значения дисперсий параллельных опытов приведены в табл. 6.27.

Следовательно, дисперсии параллельных опытов оказались однородными, что позволило определить дисперсию воспроизводимости эксперимента. Дисперсия воспроизводимости

$$S^2(y) = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N S_u^2 = \frac{27,7 \cdot 10^{-4}}{8} = 3,45 \cdot 10^{-4}.$$

Ошибка эксперимента:

$$S(y) = \sqrt{S^2(y)} = \sqrt{3,45 \cdot 10^{-4}} = 1,85 \cdot 10^{-2}.$$

Далее рассчитали коэффициенты уравнения регрессии по формуле

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N X_{iu} \bar{y}_u$$

и их взаимодействия

$$b_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N X_{iu} X_{ju} \bar{y}_u.$$

Таблица 6.27

№ опыта	Результаты опытов			Среднее значение \bar{y}_u	$y_{u1} - \bar{y}_u$	$y_{u2} - \bar{y}_u$	$y_{u3} - \bar{y}_u$	$(y_{u1} - \bar{y}_u)^2 \cdot 10^4$	$(y_{u2} - \bar{y}_u)^2 \cdot 10^4$	$(y_{u3} - \bar{y}_u)^2 \cdot 10^4$	$S_u^2 \cdot 10^4$
	y_{u1}	y_{u2}	y_{u3}								
1	0,15	0,17	0,14	0,153	- 0,003	+ 0,007	+ 0,013	0,09	2,89	1,69	2,34
2	0,43	0,45	0,44	0,440	- 0,010	+ 0,010	0	1,00	1,00	0	1,00
3	0,11	0,13	0,10	0,113	- 0,003	+ 0,017	- 0,013	0,09	2,89	1,89	2,34
4	0,31	0,28	0,32	0,303	+ 0,007	- 0,023	+ 0,017	0,49	5,29	2,89	4,34
5	0,19	0,17	0,20	0,187	+ 0,003	- 0,017	+ 0,013	0,09	2,89	1,69	2,34
6	0,44	0,47	0,48	0,463	- 0,023	+ 0,007	+ 0,017	5,29	0,49	2,89	4,34
7	0,12	0,15	0,14	0,137	- 0,017	+ 0,013	+ 0,003	2,89	1,69	0,09	2,34
8	0,36	0,33	0,39	0,360	0	- 0,030	- 0,030	0	9,00	9,00	9,00
Σ				2,156							27,70

Так, для коэффициента b_0 :

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N X_{0u} \bar{y}_u = \frac{2,156}{8} = 0,270.$$

Остальные коэффициенты рассчитывали аналогично.

Проверку статистической значимости коэффициентов проводили по t -критерию. Для этого определялась средняя квадратическая ошибка коэффициентов регрессии:

$$S(b_i) = S(b_{ij}) = \frac{S(y)}{\sqrt{Nr}} = \frac{1,85 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{8 \cdot 3}} = 0,38 \cdot 10^{-2}.$$

Затем определяли доверительный интервал $2\Delta b_i$:

$$\Delta b_i = t_{табл} S(b_i) = 2,12 \cdot 0,38 \cdot 10^{-2} = 0,8 \cdot 10^{-2}.$$

Критическое значение t -критерия выбрали из таблицы для числа степеней свободы $f = N(r-1) = 16$ и при принятом уровне значимости 0,05. Видно, что не все коэффициенты уравнения оказались статистически значимыми. После исключения статистически незначимых коэффициентов уравнение регрессии приняло вид

$$\hat{y} = 0,270 + 0,122 X_1 - 0,042 X_2 + 0,017 X_3 - 0,019 X_1 X_2. \quad (6.30)$$

Полученное уравнение проверили на адекватность по методике, представленной в примере 1:

$$F_{расч} = \frac{S_{ад}^2}{S^2(y)} = \frac{4,06 \cdot 10^{-4}}{3,45 \cdot 10^{-4}} = 1,17.$$

Так как $F_{расч} = 1,17 < F_{табл} = 3,2$ при уровне значимости 0,05 и степенях свободы $f_1 = 3$ и $f_2 = 16$, то уравнение (6.30) является адекватным.

Анализ уравнения позволяет сделать следующие выводы.

1. Наибольшее влияние на износ оказывает глубина погружения образца в абразивную среду. Величина износа растет также и с увеличением угла резания.

2. С повышением скорости перемещения абразива относительно образца при одном и том же пути трения износ уменьшается.

3. Выявлено взаимодействие факторов скорости и глубины погружения образца в абразив и показано, что при увеличении глубины погружения образца в абразив целесообразно работать с повышенной скоростью.

Пример 3. Применение ПФЭ с преобразованием параметра оптимизации и факторов.

В ряде случаев как параметр оптимизации, так и факторы точнее выражают изучаемый процесс не одной физической величиной каждый, а комплексами (безразмерными критериями) физических величин. Кроме того, связь между ними нелинейна. Однако, используя ПФЭ типа 2^k , путем преобразования параметра оптимизации и факторов можно получить более сложную нелинейную зависимость. Как правило, в данном случае принимается уравнение следующего вида:

$$y = ax_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \dots, \quad (6.31)$$

где y – параметр оптимизации, может быть представлен комплексом физических величин; α – постоянная, отражающая влияние на процесс неучтенных факторов; $\alpha, \beta, \gamma \dots$ – коэффициенты, которые опре-

деляются опытным путем; $x_1, x_2, x_3 \dots$ – независимые переменные (факторы), которые являются безразмерными комплексами физических величин.

Преобразование независимых переменных x_i в безразмерные (кодовые) переменные X_i производится с помощью уравнения преобразования, где за единицу нового масштаба принимается выражение

$$\frac{1}{2} (\ln x_{i_{\max}} - \ln x_{i_{\min}}) . \quad (6.32)$$

Ниже рассмотрим случай, когда параметр оптимизации и факторы представляются комплексами (безразмерными критериями), составленными из ряда физических величин, и связь между ними может подчиняться нормальному логарифмическому закону. Рассмотрим применение ПФЭ на следующем примере.

Найти зависимость изнашивания твердосплавных материалов группы WC – Co по стали марки 45 (нетермообработанной и термообработанной) от основных факторов. Изнашивание материала осуществлялось на установке МДП-1, схема которой представлена на рис. 6.2. Анализ факторов, произведенный методом отсеивающего эксперимента, позволил выделить следующие параметры:

- 1) нагрузка на образец P , кгс;
- 2) скорость скольжения v , м/мин;
- 3) радиус сферической поверхности контакта образца R , мм;
- 4) время испытаний T , мин;
- 5) процентное содержание кобальта в твердосплавном материале $Co, \%$;
- 6) твердость твердосплавного материала образца H , кгс/мм²;
- 7) твердость вращающегося диска H_2 , кгс/мм²;

- 8) коэффициент теплопроводности испытываемого материала λ_1 , кал/см·с·°С;
- 9) удельная теплоемкость вращающегося диска C_2 , кал/г·°С.

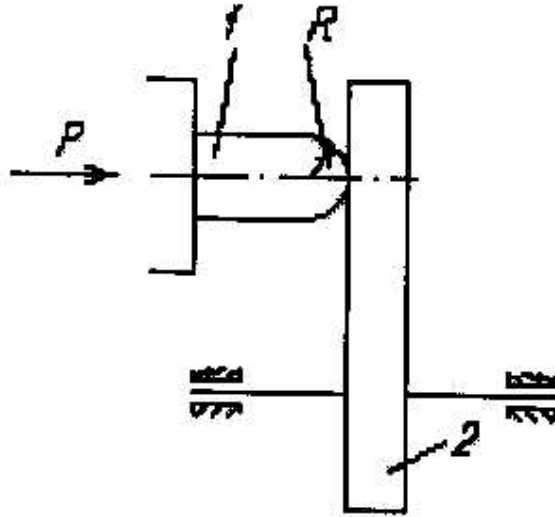


Рис. 6.2. Схема контактирования трущейся пары:
1 – образец; 2 – контрообразец

Установлено, что влияние этих величин проявляется комплексно, в определенных обобщенных переменных (комплексах). Использование методов теории подобия и анализа размерностей позволяет получить комплексы (критерии) исходных параметров и в конечном счете установить критериальное уравнение из изучаемых факторов. Функциональная зависимость между параметром оптимизации y – весовым износом u (килограммы) и исследуемыми факторами имеет вид

$$u = \Phi \left(p, v, R, T, C_0, \frac{H_1}{H_2}, \lambda, C_2 \dots \right), \quad (6.33)$$

где C_0 и H_1/H_2 – безразмерные симплексы (соотношения).

Выразим размерности переменных:

$$\begin{aligned}
 u &= [P], \\
 p &= [P], \\
 v &= [LT^{-1}], \\
 T &= [T], \\
 R &= [L], \\
 \lambda &= [PT^{-1}\theta^{-1}], \\
 C_2 &= [L^2T^{-2}\theta^{-1}].
 \end{aligned}
 \tag{6.34}$$

Тогда уравнение (6.34) можно представить в виде

$$u = \Phi \left(p^a, v^b, R^c, T^d, Co^e, \left(\frac{H_1}{H_2} \right)^f, \lambda^h, C_2^i \dots \right).
 \tag{6.35}$$

Подставим вместо символов их размерности:

$$[P] = \Phi \{ [p]^a; [LT^{-1}]^b; [L]^c; [T]^d; 1^e; 1^f [pT^{-1}\theta^{-1}]^h; [L^2T^{-2}\theta^{-1}]^i \}.
 \tag{6.36}$$

Согласно первой теореме подобия уравнение (6.36) должно быть однородным относительно размерностей. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 [P] - 1 &= a + h; \\
 [L] - 0 &= b + c + 2i; \\
 [T] - 0 &= -b + d - h - 2i; \\
 [\theta] - 0 &= -h - i.
 \end{aligned}
 \tag{6.37}$$

Подставляя в уравнение (6.35) найденные значения степеней, получим

$$u = \Phi \left(p^{1+i}, \nu^b, R^{-b-2i}, T^{b+i}, Co^e, \left(\frac{H_1}{H_2} \right)^f, \lambda^{-i}, C_2^{-i} \right). \quad (6.38)$$

Объединим члены с одинаковыми показателями степеней:

$$\frac{u}{P} = \Phi \left[\left(\frac{PTC_2}{R^2 \lambda} \right)^i; \left(\frac{\nu T}{R} \right)^b; Co^e; \left(\frac{H_1}{H_2} \right)^f \right]. \quad (6.39)$$

Согласно второй теореме подобия число безразмерных комбинаций (комплексов и симплексов) равно разности между количеством факторов и основных единиц размерности, т. е. $k = \Phi - p = 8 - 4 = 4$. Общий вид критериального уравнения (6.39) служит основанием для получения расчетного уравнения. Для этого надо экспериментально определить коэффициенты уравнения. Представим эту функцию как непрерывный ряд, рассматривая только первый член ряда:

$$\frac{u}{P} = a \left(\frac{PTC_2}{R^2 \lambda} \right)^\alpha \left(\frac{\nu T}{R} \right)^\beta (Co)^\gamma \left(\frac{H_1}{H_2} \right)^\varepsilon, \quad (6.40)$$

где a – постоянная, отражающая влияние на процесс неучтенных факторов; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$, – коэффициенты, определяются экспериментальным путем. Полученная модель может быть использована в условиях соблюдения подобия схемы контактирования, нагружения и геометрической формы. Зависимость (6.40) представим в виде

$$y = ax_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma x_4^\varepsilon, \quad (6.41)$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 – независимые переменные, безразмерные параметры, которые считаем управляемыми параметрами или факторами.

Процесс трения осуществлялся на машине трения МДП-1 (рис. 6.2) при нагрузке 2; 6; 10 кгс, скорости скольжения 40; 80; 120 м/мин, в течение 15 мин. Образцы сплавов ВК2, ВК8, ВК15 твердостью $H_1=1400$ кгс/мм², сферической поверхности радиусом $R = 5$ мм истирались о вращающийся диск твердостью $H_2 = 180; 206; 510$ кгс/мм². Теплофизические константы трущихся тел: теплопроводность твердых сплавов $\lambda = 0,18$ кал/см·с °С; удельная теплоемкость стальных дисков $C_2 = 0,112$ кал/г °С. Согласно принятым исходным данным уровни независимых переменных (факторов) получили значения, представленные в табл. 6.28.

Проведем преобразование уравнения (6.41), прологарифмировав его:

$$\ln y = \ln a + \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2 + \gamma \ln x_3 + \varepsilon \ln x_4, \quad (6.42)$$

запишем его в виде

$$\hat{y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_4X_4, \quad (6.43)$$

где \hat{y} – оценка $\ln y$ по уравнению (6.43); b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 – соответственно оценки коэффициентов.

Таблица 6.28

Уровни факторов	Факторы							
	$\frac{PTC_2}{R^2 \lambda}$		$\frac{\nu T}{R}$		Co		$\frac{H_1}{H_2}$	
	x_1	$\ln x_1$	x_2	$\ln x_2$	x_3	$\ln x_3$	x_4	$\ln x_4$
+	$2240 \cdot 10^4$	16,926	$36 \cdot 10^4$	12,794	14	2,639	10,8	2,376
0	$1344 \cdot 10^4$	16,414	$24 \cdot 10^4$	12,386	8	2,079	6,8	1,475
–	$448 \cdot 10^4$	15,315	$12 \cdot 10^4$	11,696	2	0,693	2,8	1,010

Для определения коэффициентов уравнения был поставлен ПФЭ типа 2^4 . Преобразование независимых переменных x_i в переменные X_i производилось с помощью уравнения преобразования, где за единицу нового масштаба принято выражение

$$X_i = \frac{2(\ln x_i - \ln x_{i \max})}{\ln x_{i \max} - \ln x_{i \min}} + 1. \quad (6.44)$$

Матрица планирования, результаты эксперимента приведены в табл. 6.29.

Используя ортогональность матрицы эксперимента, вычисления коэффициентов уравнения регрессии проводили по формуле

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N X_{iu} \ln \bar{y}_u, \quad (6.45)$$

где $i = 0; 1; 2; 3; 4$ – номер фактора; $\ln \bar{y}_u$ – средний отклик по трем опытам в точке с номером u . Уравнение в преобразованных переменных приняло вид

$$\ln y = -15,36 - 0,752X_1 + 0,305X_2 + 0,436X_3 + 0,596X_4. \quad (6.46)$$

Таблица 6.29

№ точки	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	\bar{y}_u	$\ln \bar{y}_u$	$\ln \hat{y}_u$	$(\ln \bar{y}_u - \ln \hat{y}_u)$
1	+	+	+	+	+	$34 \cdot 10^{-8}$	- 14,899	- 14,800	0,01
2	+	-	+	+	+	$17 \cdot 10^{-7}$	- 13,287	- 13,319	0,0009
3	+	+	-	+	+	$25 \cdot 10^{-8}$	- 15,207	- 15,419	0,04
4	+	-	-	+	+	$12 \cdot 10^{-7}$	- 13,713	- 13,913	0,04

5	+	+	+	-	+	$14 \cdot 10^{-8}$	- 15,792	- 15,097	0,01
6	+	-	+	-	+	$7 \cdot 10^{-7}$	- 14,176	- 14,197	0,0004
7	+	+	-	-	+	$8 \cdot 10^{-8}$	- 16,366	- 16,297	0,0036
8	+	-	-	-	+	$3 \cdot 10^{-7}$	- 15,011	- 14,797	0,04
9	+	+	+	+	-	$14 \cdot 10^{-8}$	- 15,82	- 15,016	0,04
10	+	-	+	+	-	$4 \cdot 10^{-7}$	- 14,721	- 14,516	0,04
11	+	+	-	+	-	$5 \cdot 10^{-8}$	- 16,816	- 16,616	0,04
12	+	-	-	+	-	$3 \cdot 10^{-7}$	- 15,018	- 15,116	0,01
13	+	+	+	-	-	$6 \cdot 10^{-8}$	- 16,685	- 16,865	0,004
14	+	-	+	-	-	$2 \cdot 10^{-7}$	- 15,448	- 15,394	0,0025
15	+	+	-	-	-	$3 \cdot 10^{-8}$	- 17,365	- 17,494	0,01
16	+	-	-	-	-	$1 \cdot 10^{-7}$	- 16,08	- 15,994	0,01
b_i	- 15,36	- 0,752	0,305	0,436	0,596				$\Sigma=0,3014$

Для получения уравнения в натуральных значениях факторов подставим значения X_1 согласно формуле преобразования (6.44) и получим

$$\ln \hat{y} = - 9,386 - 0,433 \ln x_1 + 0,555 \ln x_2 + 0,450 \ln x_3 + 0,874 \ln x_4 . \quad (6.47)$$

Проведем статистический анализ результатов с целью оценки достоверности полученной зависимости.

Дисперсия параметра оптимизации определялась как

$$S^2(y) = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N S_u^2 = 0,0568 ,$$

где S_u^2 – построчечные дисперсии.

Проверка значимости коэффициентов модели производилась по t -критерию Стьюдента.

Дисперсия коэффициента регрессии определялась по формуле

$$S^2(b_i) = \frac{S^2(y)}{Nr} = \frac{0,0568}{16 \cdot 3} = 0,00118 = 1,18 \cdot 10^{-3},$$

$$S(b_i) = 0,0343.$$

Значение t -критерия находилось из выражения

$$t_i = \frac{|b_i|}{S(b_i)}.$$

Значение t -критерия при уровне значимости $\alpha = 5\%$ и $N(r-1) = 32$ степенях свободы $t_{табл} = 2,04$. В рассматриваемом случае $t_i > t_{табл}$, следовательно, найденные коэффициенты статистически значимы.

Проверка гипотезы об адекватности модели проводилась с использованием F -критерия:

$$F_{расч} = \frac{S_{ад}^2}{S^2(y)} < F_{табл}.$$

Дисперсия адекватности $S_{ад}^2$ характеризует рассеяние результатов эксперимента относительно уравнения связи и рассчитывается по формуле

$$S_{ад}^2 = \frac{r}{N - \lambda} \sum_{u=1}^N \left(\ln \bar{y}_u - \ln y_u \right)^2,$$

где $\lambda = 5$ – число членов аппроксимирующего полинома.

Подставляя данные табл. 6.29, получаем

$$S_{ад}^2 = \frac{3}{16-5} \cdot 0,3014 = 0,0925, \quad F_{расч} = \frac{0,0925}{0,0568} = 1,63.$$

Табличное значение $F_{табл}$ -критерия для уровня значимости $\alpha = 0,05$ при $f_{ад} = N - \lambda = 16 - 5 = 11$ и $f_{восп} = N(r - 1) = 16 \cdot 2 = 32$ степенях свободы составляет $F_{табл} = 2,14$. Так как $F_{расч} < F_{табл}$, то уравнение адекватно.

Убедимся, что для описания искомой зависимости достаточно уравнения 1-й степени и не требуется членов 2-й степени. Для этого проверим нуль-гипотезу (H_0) о том, что сумма всех коэффициентов регрессии $\sum b_{ii}$ при квадратичных членах X_i^2 равна нулю. Среднее значение опытов в центральной точке (опыт 17) $\ln y_0 = -15,594$, а ошибка эксперимента $S(y) = 0,2383$. Таким образом, $(b_0 - \ln \bar{y}_0) = (15,36 - 15,594) = -0,234$, что меньше $S(y)$. Следовательно, квадратичные эффекты, по-видимому, отсутствуют, и линейную модель можно считать адекватной.

После потенцирования уравнения (6.47) и подстановки натуральных значений факторов окончательно получим

$$\frac{u}{P} = e^{-9,386 \left(\frac{PTC}{R^2 \lambda} \right)^{-0,933} \left(\frac{\nu T}{R} \right)^{0,555} Co^{0,45} \left(\frac{H_1}{H_2} \right)^{0,874}}. \quad (6.48)$$

Располагая зависимостью (6.48), можно решать задачи об оптимальных условиях износа при поиске области оптимума. Учитывая многофакторность исследуемого процесса, использовали теорию подобия, которая позволила существенно уменьшить число переменных, входящих в задачу.

Анализ уравнения (6.48) показывает, что наиболее сильное влияние на параметр оптимизации оказывает комплекс механических свойств трущихся пар. Скорость трения и отношение твердостей материалов являются также весомыми факторами, но в меньшей степени; наименее ощутимым в процессе изнашивания является изменение нагрузки. Особая роль отводится процентному содержанию кобальта в сплавах. Учитывая, что этот параметр представлен в чистом виде и не является составляющим комплексом, становится понятным его первостепенное значение для процесса изнашивания.

Пример 4. Для исследования влияния режимов борохромирования на износостойкость узла трения была применена дробная реплика от полного факторного эксперимента.

В последнее десятилетие с целью увеличения износостойкости, коррозионной стойкости, теплостойкости, поверхностный слой металла насыщают бором совместно с другими легирующими компонентами. Была поставлена задача – разработать и реализовать методику определения оптимальных режимов борохромирования металлов, минимизирующих их износ, с применением методов планирования эксперимента. Исследования проводили на никелевых покрытиях при работе их в водно-абразивной среде.

Априорная информация и предварительно проведенные опыты показали, что основными факторами, существенно влияющими на качество поверхностных слоев при борохромировании, являются температура электролита T , плотность тока j , время процесса τ и содержание окиси хрома в ванне q . Эти факторы и были выбраны в качестве варьируемых. Параметром оптимизации, характеризующим свойства борохромированного слоя, выбран износ, который оценивался при испытании весовым способом. Борохромированию подвергались образцы из стали марки 45 с предварительным никелевым покрытием толщиной до 0,1 мм. Испытание износостойкости проводили на тор-

цевой установке трения в водно-абразивной среде (вода водопродонная с 5 % абразива) при удельном давлении $p = 3 \text{ кгс/см}^2$ и скорости скольжения $v = 3 \text{ м/с}$. В табл. 6.30 представлены уровни варьируемых факторов, интервалы их варьирования.

Таблица 6.30

Уровни факторов	Кодовые значения факторов				Натуральные значения факторов			
	X_1	X_2	X_3	X_4	$T, \text{ }^\circ\text{C}$	$j, \text{ А/см}^2$	$\tau, \text{ мин}$	$q, \text{ \%}$
Основной уровень	0	0	0	0	930	0,15	3	5
Интервал варьирования	1	1	1	1	30	0,05	1	2
Верхний уровень	1	1	1	1	960	0,20	4	7
Нижний уровень	-1	-1	-1	-1	900	0,10	2	3

В качестве плана эксперимента использована дробная реплика (полуреплика) с генерирующим соотношением $X_4 = X_1X_2X_3$.

Для уменьшения систематических ошибок опыты проводили в случайном порядке. Каждый из опытов осуществляли дважды. В табл. 6.31 представлены матрица планирования и результаты эксперимента.

Таблица 6.31

№ опыта	Матрица плана эксперимента					Результаты эксперимента		Среднее значение \bar{y}_u	Расчетное значение
	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	y_{u1}	y_{u2}		
1	+1	-1	-1	-1	-1	15,4	16,2	15,8	12,2
2	+1	+1	-1	-1	+1	3,9	3,5	3,7	5,1
3	+1	-1	+1	-1	+1	13,7	13,4	13,55	12,6

4	+1	+1	+1	-1	-1	5,1	5,5	5,3	8,3
5	+1	-1	-1	+1	+1	6,2	5,6	5,9	8,7
6	+1	+1	-1	+1	-1	4,1	4,4	4,25	4,00
7	+1	-1	+1	+1	-1	10,4	10,8	10,6	11,9
8	+1	+1	+1	+1	+1	8,9	8,7	8,8	5,0

Коэффициенты уравнения регрессии рассчитывали по формулам

$$b_0 = \frac{1}{8} \sum_{u=1}^8 X_{0u} \bar{y}_u, \quad b_i = \frac{1}{8} \sum_{u=1}^8 X_{iu} \bar{y}_u, \quad b_{ij} = \frac{1}{8} \sum_{u=1}^8 X_{iu} X_{ju} \bar{y}_u.$$

Например, для $b_1 = 1/8[15,8(-1) + 3,7(+1) + \dots + 8,8(+1)] = -2,9$.

В табл. 6.32 представлен расчет дисперсий параллельных опытов.

Таблица 6.32

№ опыта	$y_{u1} - \bar{y}_u$	$y_{u2} - \bar{y}_u$	$(y_{u1} - \bar{y}_u)^2$	$(y_{u2} - \bar{y}_u)^2$	$\sum (y_{uv} - \bar{y}_u)^2$	S_u^2
1	-0,40	0,40	0,1600	0,1600	0,3200	0,320
2	0,20	-0,20	0,0400	0,0400	0,0800	0,080
3	0,15	-0,15	0,0225	0,0225	0,0450	0,045
4	-0,20	0,20	0,0400	0,0400	0,0800	0,080
5	0,30	-0,30	0,0900	0,0900	0,1800	0,180
6	-0,15	0,15	0,0225	0,0225	0,0450	0,045
7	-0,20	0,20	0,0400	0,0400	0,0800	0,080
8	0,10	-0,10	0,0100	0,0100	0,0200	0,020
Σ					0,8500	0,850

Однородность дисперсий параллельных опытов проверяли по критерию Кохрена

$$G_{расч} = \frac{S_{u_{max}}^2}{\sum_{u=1}^N S_u^2} = \frac{0,320}{0,850} = 0,376.$$

Расчетное значение $G_{расч}$ -критерия сравнивали с табличным соответственно для степеней свободы $f_1 = 1$ и $f_2 = 8$ и уровня значимости 0,05. $G_{табл} = 0,680$. Так как $G_{расч} = 0,376 < G_{табл} = 0,680$, то дисперсии можно считать однородными.

Далее рассчитывали дисперсию воспроизводимости и среднюю квадратичную ошибку эксперимента:

$$S^2(y) = \frac{1}{8} \sum_{u=1}^8 S_u^2 = \frac{0,850}{8} = 0,106,$$

$$S(y) = +\sqrt{S^2(y)} = \sqrt{0,106} = 0,32.$$

Ошибки коэффициентов уравнения регрессии определяли по формуле

$$S(b_i) = \frac{S(y)}{\sqrt{Nr}} = \frac{0,32}{\sqrt{8 \cdot 2}} = 0,08.$$

Все коэффициенты уравнения регрессии оказались статистически значимыми. После расчета коэффициентов и учета только линейных членов уравнение приняло следующий вид:

$$\hat{y} = 8,50 - 2,90X_1 + 1,05X_2 - 1,10X_3 - 0,55X_4. \quad (6.49)$$

На основании уравнения (6.49) были получены расчетные значения интенсивности изнашивания и рассчитана дисперсия адекватности:

$$S_{ад}^2 = \frac{r}{N - \lambda} \sum_{u=1}^8 (\bar{y}_u - y_u)^2 = \frac{2 \cdot 49125}{8 - 5} = 32,75.$$

Адекватность уравнения (6.49) проверяли по F -критерию:

$$F_{расч} = \frac{s_{ад}^2}{s^2(y)} = \frac{32,75}{0,106} = 309.$$

Так как $F_{расч} = 309$ оказалось значительно больше, чем $F_{табл} = 4,46$ соответственно для $f_{ад} = 3$ и $f_{восн} = 8$ степеней свободы и уровня значимости 0,05, то уравнение получилось неадекватным.

Анализ уравнения (6.49) показывает, что влияние фактора X_4 и его взаимодействие с другими факторами являются менее значимыми, а поэтому дальнейшее исследование процесса проводили при фиксированном значении X_4 , соответствующем 5-процентному содержанию окиси хрома.

Реализация ортогонального плана второго порядка с тремя факторами позволила получить уравнение, адекватно описывающее процесс борохромирования, и определить оптимальные режимы.

6.6. ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МОДЕЛИ ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Модель вида (6.1) для наглядности и дальнейшего анализа можно представить графически в виде поверхности отклика. При $k = 2$ поверхность отклика представляет собой гиперболический параболо-

ид, имеющий седлообразную форму. При пересечении его плоскостями, перпендикулярными оси y , в сечении получаем совокупность гипербол. При отсутствии эффектов взаимодействий факторов $\left(\sum_{i \neq j}^k b_{ij} X_i X_j = 0 \right)$ функция отклика представляет плоскость в трехмерном пространстве. Функцию отклика можно представить также на плоскости в виде совокупности гипербол или прямых равных значений параметра y .

При $k \geq 3$ геометрическая интерпретация функции отклика возможна при изменении двух факторов и фиксации остальных на постоянных уровнях.

1. Геометрическая интерпретация модели вида (6.1) при $k = 2$.
Геометрическое изображение модели вида

$$y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_{12} X_1 X_2 \quad (6.50)$$

рассмотрим на примере нахождения функции отклика при абразивном изнашивании пары трения чугун – сталь. Задача формулируется следующим образом. Найти функцию отклика для весовой интенсивности изнашивания (u_n , мг/см²·км) чугунного подшипника, работающего в качестве опоры винтового конвейера на асфальтобетонном заводе.

Транспортировалась абразивная масса, которая подвергла поверхность подшипника абразивному износу. На основании априорной информации и испытаний установлено, что функция отклика должна иметь модель вида (6.50). Требуется графически представить функцию отклика.

Кодирование факторов, план-матрица полного факторного эксперимента (ПФЭ) вида 2^2 , условия и результаты опыта представлены в табл. 6.33.

Таблица 6.33

№	Уровни факторов	Кодовое обозначение	Значение факторов		План-матрица			Параметр оптимизации		\bar{y}_u	№ точки
			$p, \text{ кгс/см}^2$	$v, \text{ м/с}$	X_1	X_2	$X_1 X_2$	y_{u1}	y_{u2}		
1	Нулевой уровень	$X_i = 0$	35	6	-1	-1	+1	27	28	27,5	1
2	Интервал варьирования	Δx_i	5	2	+1	-1	-1	15,9	17,1	16,5	2
3	Нижний уровень	$X_i = -1$	30	4	-1	+1	-1	22,1	22,9	22,5	3
4	Верхний уровень	$X_i = +1$	40	8	+1	+1	+1	13,4	13,6	13,5	4

Коэффициенты регрессии:

$$b_0 = 20, b_1 = -5, b_2 = -2, b_{12} = 0,5.$$

Уравнение регрессии

$$\hat{y} = 20 - 5X_1 - 2X_2 + 0,5X_1X_2. \quad (6.51)$$

В натуральных значениях, подставляя $X_1 = \frac{p-35}{5}$, $X_2 = \frac{v-6}{2}$

в уравнение (6.51), имеем

$$\hat{y} = 71,5 - 1,3 p - 2,75 v + 0,05 pv. \quad (6.52)$$

Воспроизводимость опытов проверяли по критерию Кохрена $G_{расч} \leq G_{табл} (\alpha = 0,05)$, так как получено $G_{расч} = 0,4615$, $G_{табл} = 0,9065$.

Дисперсия воспроизводимости $S^2(y) = 0,39$.

Проверка адекватности линейной модели выполнялась с помощью критерия Фишера F : $F_{расч} \leq F_{табл}$, т. е. $F_{расч} = 2,56 \leq F_{табл} = 7,71$, при $\alpha = 0,05$; $f_{ад} = N - \lambda = 4 - 3 = 1$, $f_{воспр} = N(r - 1) = 4(2 - 1) = 4$ модель адекватна. Все коэффициенты значимы, кроме $b_{12} = 0,5$.

При $k = 2$ линейная модель иллюстрируется плоскостью в $(k+1)$ -мерном, т. е. $(2+1)$ -трехмерном пространстве (рис. 6.3). Как в кодovém (рис. 6.3, а), так и натуральном значении (рис. 6.3, б) характер плоскости остается без изменения.

Как следует из рис. 6.3, во всех случаях плоскость проходит через точку $y = b_0 = 20$, так как свободный член b_0 в линейном уравнении регрессии численно равен значению отклика при $X_1 = X_2 = 0$. Коэффициенты регрессии при линейных членах характеризуют ее наклон к соответствующим осям.

Точки 1, 2, 3, 4 являются координатами опытов при постановке ПФЭ типа 2^2 . Из них проведены прямые, параллельные оси y , на которых отложены значения откликов в соответствующих опытах (табл. 6.33).

Если провести плоскость, перпендикулярную оси y , то в пересечении этой плоскости с поверхностью получаем кривую, каждой точке которой соответствует одно и то же значение функции отклика (рис. 6.3, в).

Для построения системы кривых равного отклика (линий равного уровня) для уравнения (6.52) использовалась табл. 6.34.

Если бы в уравнении (6.50) не учитывался член, характеризующий парное взаимодействие факторов, т. е. член $b_{12}X_1X_2 = 0,5X_1X_2$ или $0,05pv$, то на рис. 6.3 мы бы имели систему прямых.

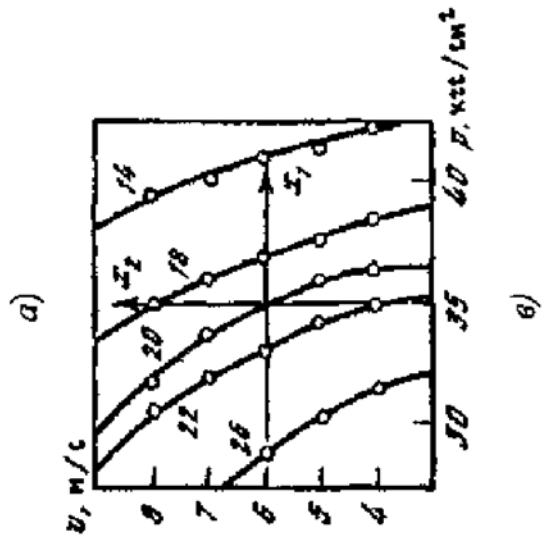
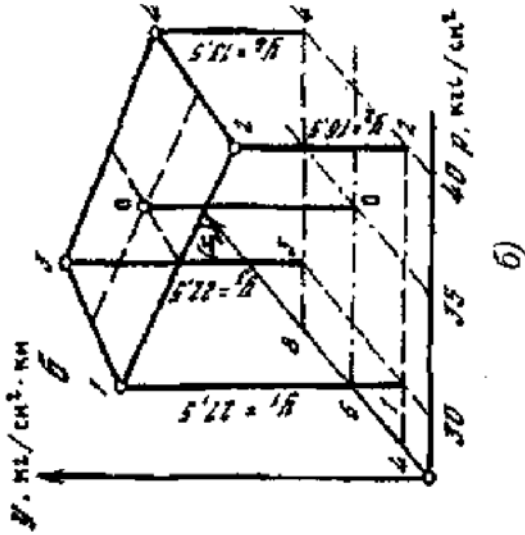
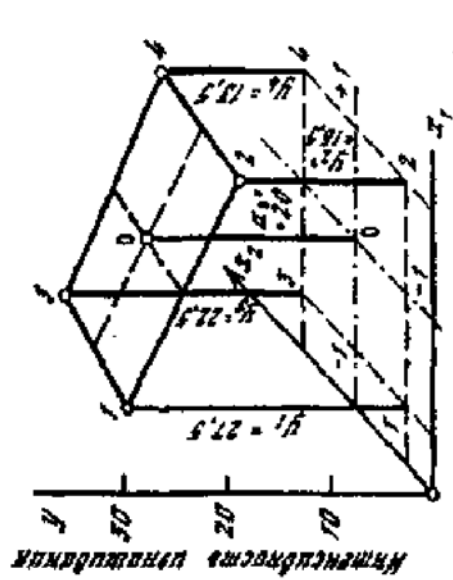


Рис. 6.3. Гиперплоскость в $(k+1)$ – мерном пространстве при $k=2$: а) – в кодовой; б) – в натуральной форме; в) – графическая интерпретация уравнения (6.52) в виде линий равного уровня

Таблица 6.34

№ точки	Значение отклика y , мг/см ² км	Заданные скорости, м/с				
		8	7	6	5	4
		Полученное значение p , кгс/см ²				
1	14	39,45	40,26	41	41,67	42,27
2	18	35	36,05	37	37,85	38,64
3	20	32,77	33,68	35	35,95	36,5
4	22	30,56	31,84	33	34,04	35,0
5	26	26,1	27,63	29	30,24	31,4

Из рис. 6.3, в следует, что даже при незначимости коэффициента b_{12} в уравнении (6.51) его роль достаточно существенна. Если бы знак перед b_{12} был « \leftarrow », то кривизна линий равного уровня имела бы противоположное направление.

2. Геометрическое изображение модели вида

$$y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + b_{23}X_2X_3 + b_{123}X_1X_2X_3.$$

В данном случае $k = 3$ и пространство должно быть четырехмерное. Вследствие этого графическое представление функции отклика можно изобразить при фиксированном значении одной из координат, т. е. один из факторов должен получить ряд постоянных значений.

Данную задачу рассмотрим на примере нахождения функции отклика, которой является температура трения.

На основании проведенных исследований было выяснено, что на объемную температуру трения t пары пластмасса–сталь при граничной смазке влияют нагрузка, скорость, первоначальная шероховатость

стальной поверхности. Функция отклика y приближается к линейной зависимости.

Требуется графически представить функцию отклика.

Кодирование факторов, план-матрица факторного эксперимента типа 2^3 и функция отклика представлены в табл. 6.35.

Получили уравнение в преобразованных переменных

$$y = 73,7 + 11,8 X_1 + 19,1 X_2 - 6,8X_3 + 10,95 X_1X_2 + 14,1 X_1X_3 + \\ + 5,44 X_2X_3 + 0,187 X_1X_2X_3. \quad (6.53)$$

Однородность дисперсий была проверена по критерию Кохрена: $G_{расч} = 0,376$; $G_{табл} = 0,516$, т. е. $G_p < G_{табл}$. Гипотеза об однородности принимается. Модель адекватна, так как $F_{расч} = 2,02$, а $F_{табл} = 4,50$ при $\alpha = 0,05$.

Все коэффициенты, за исключением b_{123} , значимы.

Уравнение (6.53) в натуральных значениях факторов имеет вид

$$\hat{y} = 121,9 - 8,1p + 33,7v - 21,6Ra + 8,5pv + 3,8Ra - \\ - 20,1vRa + 0,16pvRa. \quad (6.54)$$

Для графического изображения функции отклика примем один из факторов, например первоначальную шероховатость стальной поверхности Ra фиксированной: $Ra' = 0,65$ мкм и $Ra'' = 2,5$ мкм. Тогда получим плоскость в трехмерном пространстве (рис. 6.4, *a*, *б*).

При построении диаграмм использованы основные точки 1–2–3–4 и вспомогательные 5–6–7–8, которые учитывают криволинейность плоскостей откликов. Результаты расчетов поверхностей откликов по формуле (6.53) представлены в табл. 6.36.

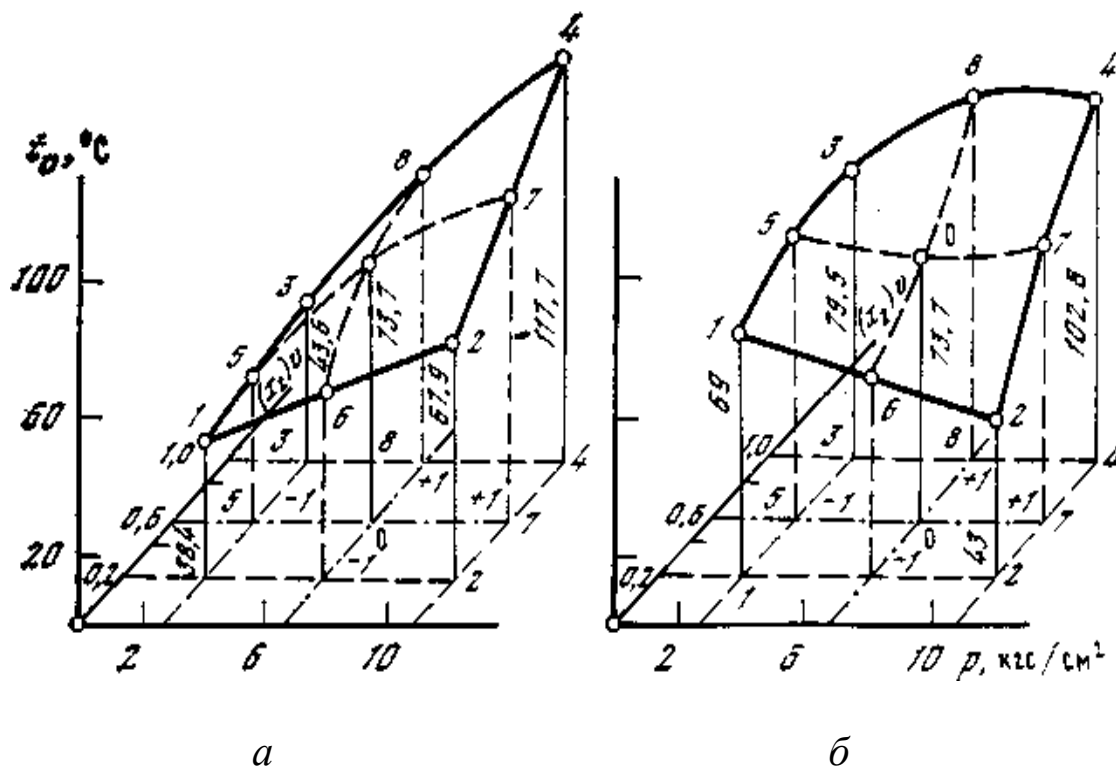


Рис. 6.4. Изменение объемной температуры трения t_v от нагрузки и скорости при различной первоначальной шероховатости стального (сталь марки 45) тела: $a - R_a = 0,65 \text{ мкм}$; $б - R_a = 2,5 \text{ мкм}$. Материал контртела – полимер (капрон Б), смазка граничная, масло промышленное 20

Таблица 6.35

Уровни факторов		Обозначение	X_1	X_2	X_3							
			$p, \text{ кгс/см}^2$	$v, \text{ м/с}$	$R_a, \text{ мкм}$							
Основной уровень		0	6,84	0,59	1,575							
Интервал варьирования		Δx_i	4,0	0,31	0,925							
Верхний уровень		+ 1	10,8	0,90	0,65							
Нижний уровень		- 1	2,88	0,28	2,5							
Матрица планирования 2^3							Параметр оптимизации					
Точка плана	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	y_{u1}	y_{u2}	y_{u3}	\bar{y}_u
1	+	+	+	+	+	+	+	+	98	105	115	106
2	+	+	+	-	+	-	-	-	120	125	130	125

Окончание табл. 6.35

3	+	+	-	+	-	+	-	-	54	55	60	56,4
4	+	+	-	-	-	-	+	-	57	55	52	54,5
5	+	-	+	+	-	-	+	-	55	50	60	55
6	+	-	+	-	-	+	-	+	80	85	90	85
7	+	-	-	+	+	-	-	+	50	55	45	50
8	+	-	-	-	+	+	+	-	57	60	55	57,4

Таблица 6.36

Точка плана	Факторы, их знаки			Параметр оптимизации \hat{y}	Факторы, их знаки			Параметр оптимизации \hat{y}
	X_1	X_2	X_3		X_1	X_2	X_3	
1	-1	-1	+1	38,357	-1	-1	-1	68,94
2	+1	-1	+1	67,88	+1	-1	-1	42,81
3	-1	+1	+1	43,6	-1	+1	-1	79,44
4	+1	+1	+1	117,68	+1	+1	-1	102,75
5	-1	0	+1	40,98	-1	0	-1	82,82
6	0	-1	+1	53,12	0	-1	-1	55,88
7	+1	0	+1	92,78	+1	0	-1	78,22
8	0	+1	+1	80,64	0	+1	-1	105,16
0	0	0	+1	73,7	0	0	-1	73,7

7. ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ И ЭКОНОМИЧНОСТИ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Перед проведением эксперимента необходимо установить, какие из факторов включить в круг рассматриваемых, влияющих на выходную величину исследуемого объекта, а какие нет. Отсутствие в модели хотя бы одного из существенных факторов может привести к ошибочным результатам, к неверным выводам. Однако при числе факторов $k \geq 7$ возникает необходимость в их сокращении, т. е. отсеивание из-за необходимости выполнения большого числа опытов. Для этой цели разработаны методы отсеивающего эксперимента:

- метод ранжирования априорной информации, основанный на опросе специалистов-экспертов, обработке литературных данных и объективной статистической обработке результатов;

- метод случайного баланса, позволяющий использовать сверхнасыщенные планы эксперимента, в которых число опытов меньше числа исследуемых эффектов.

7.1. АПРИОРНОЕ РАНЖИРОВАНИЕ ФАКТОРОВ

На стадии предварительного изучения объекта исследования в ряде случаев полезно проводить психологический эксперимент (априорное ранжирование факторов), заключающийся в объективной обработке данных, полученных в результате опроса специалистов или по результатам исследований, опубликованных в литературе. Цель такого эксперимента заключается в сравнительной оценке влияния различных факторов на параметры оптимизации. Тем самым становится возможным правильный отбор факторов для последующего эксперимента, обоснованное исключение тех факторов, влияние которых незначительно.

Особенность метода априорного ранжирования факторов заключается в том, что факторы ранжируют (устанавливают) в порядке убывания вносимого ими вклада. Вклад каждого фактора оценивается по величине ранга (места), который отведен исследователем (специалистом при опросе, экспертом) данному фактору в степени его влияния на параметры оптимизации.

Процедура эксперимента заключается в том, что каждый специалист, участвующий в опросе, заполняет анкету, в которой перечислены факторы, их размерность и предполагаемые интервалы варьирования. Заполняя анкету, специалист определяет место факторов в ранжированном ряду. Одновременно он может включить дополнительные факторы или высказать мнение об изменении интервала варьирования.

Пример. Определим основные факторы, влияющие на абразивный износ. Используем мнения четырех экспертов.

На основании предварительного анализа было установлено, что основными факторами, определяющими данный процесс, являются следующие:

- 1) X_1 – удельная нагрузка P , кгс/см²;
- 2) X_2 – скорость скольжения v , м/с;
- 3) X_3 – путь трения $S_{\text{ТР}}$, м;
- 4) X_4 – твердость трущегося материала H_M , кгс/см²;
- 5) X_5 – твердость абразивных частиц H_A , кгс/см²;
- 6) X_6 – геометрический размер абразивных частиц r_A , мкм;
- 7) X_7 – количество абразива и его расход Q_A , см³/ч;
- 8) X_8 – наличие влаги в зоне контакта;
- 9) X_9 – температура в зоне трения t , °С;
- 10) X_{10} – коэффициент трения f .

В табл. 7.1 представлено ранжирование факторов, влияющих на процесс абразивного износа. Оценка осуществлялась по 10-балльной шкале.

Таблица 7.1

Таблица результатов опроса специалистов

Эксперты	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉	X ₁₀
1	3	7	5	1	2	6	4	9	8	10
2	3	9	6	2	1	5	7	8	4	10
3	6	10	9	1	2	4	5	7	3	8
4	4	9	6	2	3	1	5	8	7	10

Безусловно, этот метод оценки влияния факторов на параметр оптимизации, в данном случае износ, с частичным использованием литературных данных будет приближенным, так как эту задачу частично решает один исследователь и ранжирование факторов не происходит независимо, а связано отчасти с его мнением.

По результатам опроса вычисляется коэффициент **конкордации** **W**, определяющий степень согласованности мнения специалистов:

$$W = \frac{12S}{m^2(k^3 - k) - m \sum_{j=1}^m T_j}, \quad (7.1)$$

где m – число опрошенных специалистов; k – число факторов; S – сумма квадратов отклонений; T_j – поправочный коэффициент.

$$T_j = \sum (t_j^3 - t_j), \quad (7.2)$$

где t_j – число одинаковых рангов в j -ранжировании;

$$S = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} - L \right)^2, \quad (7.3)$$

где a_{ij} – ранг (порядковый номер при опросе) i -го фактора у j -го специалиста; L – среднее значение сумм рангов по каждому фактору:

$$L = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_{ij}. \quad (7.4)$$

Значения коэффициента конкордации изменяются в интервале от 0 до 1, и чем больше его значение, тем больше согласованность мнений специалистов.

После вычисления коэффициента конкордации определяют его значимость по χ^2 -критерию, так как величина $m(k-1)$ имеет χ^2 -распределение с числом степеней свободы $f = k-1$. Расчетное значение χ^2 определяется по формуле

$$\chi^2 = \frac{12S}{mk(k+1) - \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^m T_i}. \quad (7.5)$$

Если расчетное значение χ^2 больше табличного при соответствующем числе степеней свободы, то коэффициент конкордации значительно отличается от нуля и можно утверждать, что согласованность мнений специалистов не является случайной.

Оценив согласованность мнений всех специалистов, строят среднюю диаграмму рангов (рис. 7.1), откладывая по одной оси факторы, а по другой – соответствующие суммы рангов. Чем меньше сумма рангов данного фактора, тем выше его место в диаграмме. С помощью последней оценивается значимость факторов.

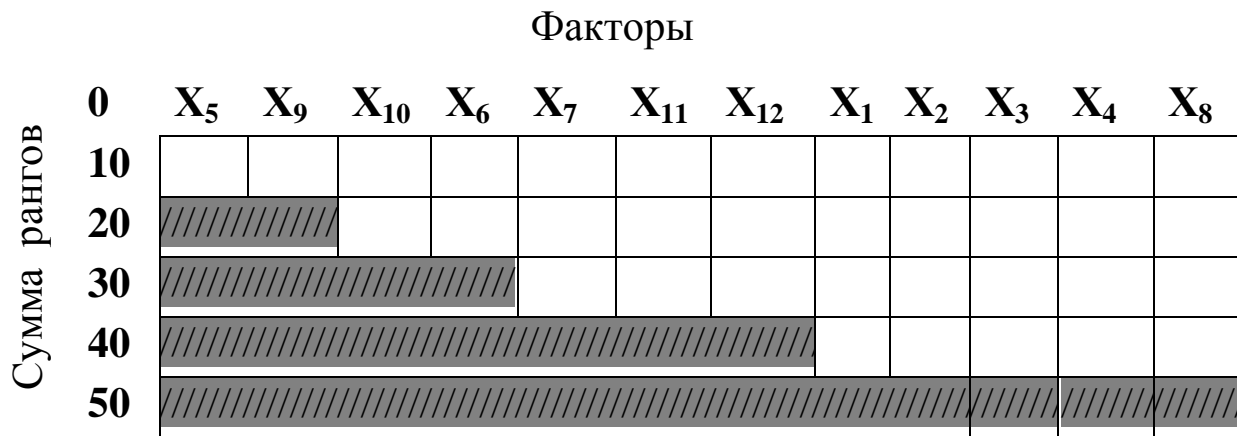


Рис. 7.1. Диаграмма рангов

Пример. Был проведен опрос четырех специалистов ($m = 4$) с помощью анкеты, содержащей 12 факторов ($k = 12$), которые нужно проранжировать с учетом степени их влияния на результаты опроса. Специалисты определили значимость 12 факторов следующим образом (табл. 7.2).

Таблица 7.2

Таблица результатов опроса специалистов

Специалисты m	Факторы (k)											
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}
1	8	10,5	10,5	10,5	1	2,5	2,5	10,5	5	4	7	6
2	8	9	10	11	1	6,5	6,5	12	2	3	4	5
3	6	7,5	7,5	11	2	4,5	4,5	12	1	3	9,5	9,5
4	7	4	8	10,5	2	10,5	10,5	10,5	1	3	5,5	5,5

Обработка результатов опроса осуществляется в следующей последовательности (результаты заносят в табл. 7.3).

1. Сначала определяем сумму рангов для каждого фактора:

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} = 8 + 8 + 6 + 7 = 29 \text{ (например } X_1 \text{. Для других факторов}$$

проводят аналогичные расчеты).

2. Вычисляем среднее значение суммы рангов:

$$L = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_{ij}}{k} = \frac{29 + 31 + 36 + 43 + 6 + 24 + 24 + 45 + 9 + 13 + 26 + 26}{12} = 26.$$

3. Находим разность между суммой рангов каждого из факторов и средним значением суммы рангов:

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} - L = 29 - 26 = 3 \text{ (для } X_1); \sum_{j=1}^m a_{ij} - L = 31 - 26 = 5 \text{ (для } X_2).$$

4. Вычисляем квадрат разности: $3^2 = 9$ (для X_1); $5^2 = 25$ (для X_2).

5. Вычисляем сумму квадратов отклонений:

$$S = \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^m a_{ij} - L)^2 = 9 + 25 + 100 + 289 + 400 + 4 + 4 + 361 + 289 + 169 + 0 + 0 = 1650.$$

6. $T_j = \sum (t_j^3 - t_j)$, t_j – число одинаковых рангов в j -м ранжировании.

Первый специалист оценку 10,5 поставил 4 раза, а оценку 2,5 – 2 раза, тогда $T_j = (4^3 - 4) + (2^3 - 2) = 60 + 6 = 66$.

Для второго специалиста: 6,5 – 2 раза, тогда $T_j = (2^3 - 2) = 6$.

Для третьего специалиста: 7,5 – 2 раза, 4,5 – 2 раза, 9,5 – 2 раза, тогда $T_j = (2^3 - 2) + (2^3 - 2) + (2^3 - 2) = 18$.

Для четвертого специалиста: 10,5 – 4 раза, 5,5 – 2 раза, тогда $T_j = (4^3 - 4) + (2^3 - 2) = 60 + 6 = 66$.

7. Находим $\sum T_j = 66 + 6 + 18 + 66 = 156$.

8. Вычисляем коэффициент конкордации:

$$W = \frac{12S}{m^2(k^3 - k) - m \sum_{j=1}^m T_j} = \frac{12 \cdot 1650}{4^2(12^3 - 12) - 4 \cdot 156} = 0,738.$$

9. Проверяем значимость коэффициента по χ^2 -критерию:

$$\chi^2_{\text{расч}} = \frac{12S}{mk(k+1) - \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^m T_i} = \frac{12 \cdot 1650}{4 \cdot 12 \cdot (12+1) - \frac{1}{(12+1)} \cdot 156} = 32,3;$$

$$f = k - 1 = 12 - 1 = 11.$$

По таблице χ^2 -распределения при уровне значимости 0,05 (5 %) и числе степеней свободы 11 $\chi^2_{\text{табл}} = 19,68$; $19,68 < 32,3 \rightarrow \chi^2_{\text{табл}} < \chi^2_{\text{расч}} \rightarrow$ можно с 95-процентной достоверностью утверждать о согласованности мнений специалистов.

Это позволяет построить гистограмму результатов (рис. 7.2).

Таблица 7.3

Таблица результатов опроса специалистов

Специалисты m	Факторы (k)												T_j
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	
1	8	10,5	10,5	10,5	1	2,5	2,5	10,5	5	4	7	6	66
2	8	9	10	11	1	6,5	6,5	12	2	3	4	5	6
3	6	7,5	7,5	11	2	4,5	4,5	12	1	3	9,5	9,5	18
4	7	4	8	10,5	2	10,5	10,5	10,5	1	3	5,5	5,5	66
$\sum_{j=1}^m a_{ij}$	29	31	36	43	6	24	24	45	9	13	26	26	156
$\sum_{j=1}^m a_{ij} - L$	3	5	10	17	-20	-2	-2	19	-17	-13	0	0	
$(\sum_{j=1}^m a_{ij} - L)^2$	9	25	100	289	400	4	4	361	289	169	0	0	$S = 1650$

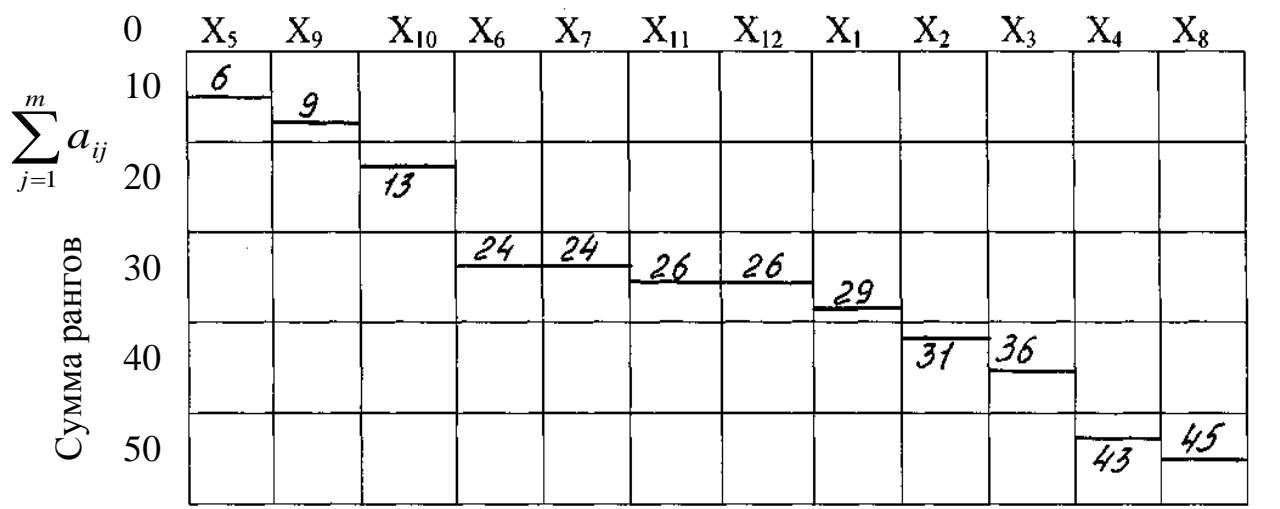


Рис. 7.2. Гистограмма результатов

Факторы, имеющие наименьшую сумму рангов, отсеиваются, а для дальнейших исследований отбираются наиболее сильно влияющие факторы.

7.2. МЕТОД СЛУЧАЙНОГО БАЛАНСА

После ранжирования эффектов для исключения малозначащих факторов проводятся отсеивающие эксперименты. Наиболее распространенным методом постановки экспериментов является метод случайного баланса, предложенный в 1956 году Саттерзвайтом. Метод базируется на сверхнасыщенном ПФЭ. **Сверхнасыщенными** называются планы, имеющие отрицательное число степеней свободы, то есть число коэффициентов модели превышает число опытов N . Метод случайного баланса эффективен в тех случаях, когда из всей совокупности независимых величин только 15...20 % являются существенными. При этом должны выполняться предпосылки множественного регрессионного анализа.

Первоначально все линейные независимые переменные разбиваются на группы, содержащие по три-четыре фактора. При этом необходимо учитывать, исходя из физики процесса, взаимодействие факторов. Если таковое существует, то данные факторы необходимо включать в одну группу. Затем для каждой группы известными методами составляется матрица планирования ПФЭ. Пусть имеются

10 факторов, разбитых на три группы: I – $X_1 \dots X_4$; II – $X_5 \dots X_8$; III – $X_9 \dots X_{10}$.

Для каждой группы составим матрицу планирования. Так как группа III содержит только 2 фактора, то матрица плана 2^2 повторяется четыре раза (как будто взяты два столбца из матрицы ПФЭ 2^4). Данные матрицы представлены в табл. 7.4

Для формирования общей матрицы отсеивающего эксперимента строкам матриц групп присваиваются случайные номера в соответствии с таблицей случайных чисел (k_I, k_{II}, k_{III}).

Затем строится матрица отсеивающего эксперимента (табл. 7.5): в первую строку матрицы записывается 8 строка из матрицы ПФЭ I группы, 14 строка из II группы и 15 строка из III группы; во вторую строку: 12, 15 и 3 строки из соответствующих групп и т. д. (табл. 7.4).

Таблица 7.4

Матрица планирования ПФЭ

№ опыта	I				k_I	II				k_{II}	III		k_{III}
	X_1	X_2	X_3	X_4		X_5	X_6	X_7	X_8		X_9	X_{10}	
1	-	-	-	-	7	-	-	-	-	11	-	-	10
2	+	-	-	-	5	+	-	-	-	16	+	-	15
3	-	+	-	-	8	-	+	-	-	3	-	+	2
4	+	+	-	-	10	+	+	-	-	7	+	+	6
5	-	-	+	-	11	-	-	+	-	9	-	-	8
6	+	-	+	-	15	+	-	+	-	8	+	-	7
7	-	+	+	-	14	-	+	+	-	4	-	+	3
8	+	+	+	-	1	+	+	+	-	12	+	+	11
9	-	-	-	+	13	-	-	-	+	5	-	-	4
10	+	-	-	+	6	+	-	-	+	13	+	-	12
11	-	+	-	+	9	-	+	-	+	14	-	+	13
12	+	+	-	+	2	+	+	-	+	10	+	+	9
13	-	-	+	+	4	-	-	+	+	15	-	-	14
14	+	-	+	+	3	+	-	+	+	1	+	-	16
15	-	+	+	+	12	-	+	+	+	2	-	+	1
16	+	+	+	+	16	+	+	+	+	6	+	+	5

В соответствии с полученной матрицей (табл. 7.5) проводится эксперимент. Порядок проведения опытов выбирают в соответствии с законом случайных чисел, то есть проводят рандомизацию.

Для оценки воспроизводимости опытов для каждой строки проводят опыт несколько раз. В табл. 7.5 приведены y_{i1} и y_{i2} и среднее значение \bar{y}_i . На основе полученных результатов строится диаграмма рассеяния (рис. 7.3). Для этого по оси абсцисс наносят все факторы (X_i). Слева от нее отмечают точками те значения выходной величины \bar{y}_i , которые были получены, когда данный фактор находился на верхнем уровне (+1), а справа – когда (-1). Затем находят частные медианы для групп точек слева и справа X_i (по обе стороны от медианы число точек одинаково).

Таблица 7.5

Матрица планирования эксперимента

№ опыта	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	y_{i1}	y_{i2}	\bar{y}_i	y_i
1	+	+	+	-	+	-	+	+	-	+	58,5	56,6	57,5	26,1
2	+	+	-	+	-	+	+	+	-	+	78,6	79,8	79,2	79,2
3	+	-	+	+	-	+	-	-	-	+	54,2	55,8	55,0	55,0
4	+	-	+	+	-	+	+	-	-	-	20,2	18,6	19,4	19,4
5	+	-	-	-	-	-	-	+	+	+	8,2	8,6	8,4	8,4
6	+	-	-	+	+	+	+	+	+	+	80,2	82,4	81,3	49,9
7	-	-	-	-	+	+	-	-	+	-	30,6	32,4	31,5	0,1
8	-	+	-	-	+	-	+	-	-	-	42,2	44,8	43,5	12,1
9	-	+	-	+	-	-	+	-	+	+	6,8	7,6	7,2	7,2
10	+	+	-	-	+	+	-	+	-	-	38,6	40,2	39,4	8,0
11	-	-	+	-	-	-	-	-	+	+	15,2	16,0	15,6	15,6
12	-	+	+	+	+	+	+	-	+	-	62,2	64,4	63,3	31,9
13	-	-	-	+	+	-	-	+	-	+	68,6	66,4	67,5	36,1
14	-	+	+	-	-	+	-	+	-	-	18,2	19,2	18,7	18,7
15	+	-	+	-	-	-	+	+	+	-	24,6	26,0	25,3	25,3
16	+	+	+	+	+	-	-	-	+	-	42,2	43,8	43,0	11,6

Разность между медианами качественно характеризует роль фактора в процессе. Чем больше разность между медианами, тем больший вклад X_i фактора в изменение входной величины.

Для рассматриваемого случая наибольший вклад вносит фактор X_5 . Поле рассеяния для фактора X_5 представлено на рис.7.4 («выделяющиеся» точки – это точки выходной величины \bar{y}_i , которые при $X_i = +1$ расположены выше «наибольшей» точки, а при $X_i = -1$ – ниже наименьшей). Таким образом, вклад факторов оценивается по медиане и выделяющимся точкам.

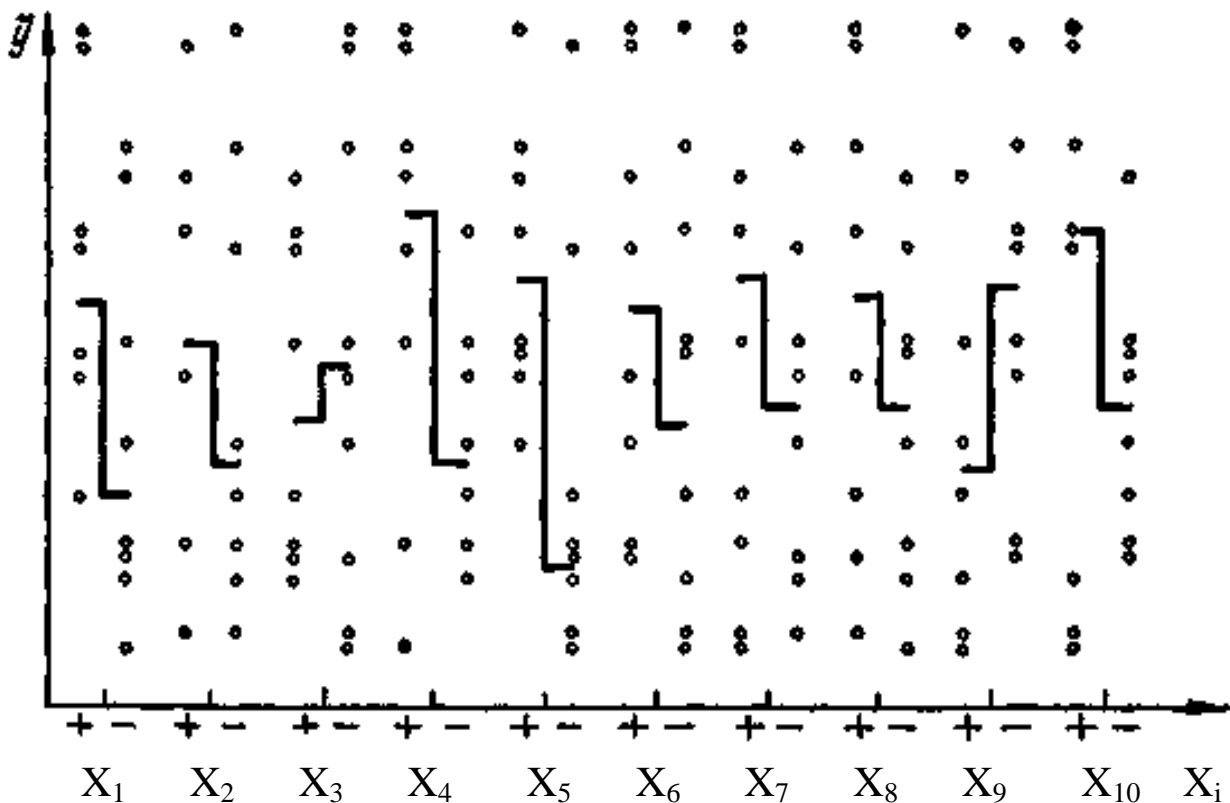


Рис. 7.3. Диаграмма рассеяния, построенная на основе матрицы планирования эксперимента

Для определения оценки вклада данного фактора необходимо найти B_j – разность между медианами слева и справа. Из рис. 7.4 и табл. 7.5 $B_5 = (57,5 + 43,5)/2 - (19,4 + 18,7)/2 = 31,4$.

Исходя из значения B_j можно найти «грубую» (приближенную) оценку коэффициента $b_i = B_j/2$ ($b_5 = 15,7$). Для выделения других существенных факторов необходимо исключить влияние уже выделенного существенного фактора на \bar{y} . Для этого из столбца \bar{y} вычитаем B_5 в точках, где $X_5 = +1$, и получаем вектор-столбец y_i , в котором не учитывается влияние X_5 . Для данного вектор-столбца опять строим диаграмму рассеивания, из которой опять находим наиболее существенный фактор (X_5 исключаем).

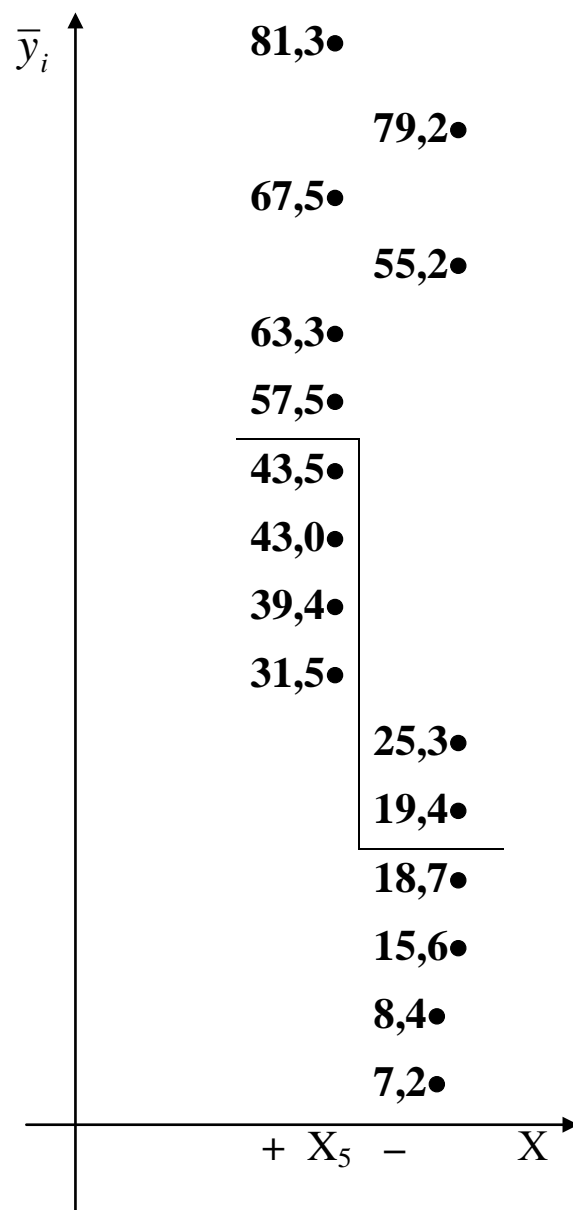


Рис. 7.4. Поле рассеивания для фактора X_5

Если в результате сопоставления разных медиан окажутся равноценно значимы сразу несколько факторов: X_r ; X_m ; X_k , то поступают следующим образом: строят таблицу (табл. 7.6), в соответствующие графы которой заняты значения y'_i , полученные при соответствующих сочетаниях факторов, и находят среднее значение выходной величины для каждой графы. Например, y'_1 равно сумме значений, полученных, когда X_r , X_m , X_k принимают значение +1, деленной на число этих значений.

Например: $X_m = X_6$; $X_r = X_7$; $X_k = X_8$.

Таблица 7.6

		$+X_r (X_7)$		$-X_r$	
		$+X_k (X_8)$	$-X_k$	$+X_k$	$-X_k$
$+X_m (X_6)$		y'_1	y'_2	y'_3	y'_4
$-X_m$		y'_5	y'_6	y'_7	y'_8

Из табл. 7.5 следует: $y'_1 = (y_2 + y_6)/2 = (79,2 + 49,9)/2 = 64,55$.

Оценки вкладов факторов определяются разностью между суммами средних значений для уровней «плюс» и «минус»:

$$B_r = \frac{y'_1 + y'_2 + y'_5 + y'_6}{4} - \frac{y'_3 + y'_4 + y'_7 + y'_8}{4},$$

аналогично для $B_m; B_k$.

Определив B_j , можно найти приближенную оценку коэффициента b_i . Полученные оценки коэффициентов проверяют на значимость по t -критерию Стьюдента.

Условие значимости имеет вид $|b_i| \geq t_{kp} S_{b_i}$. Для определения $S_{(b_i)}^2$ необходимо вычислить дисперсию каждой i -й графы таблицы:

$$S_i^2 = \sum_{u=1}^l (y_{iu} - y_i)^2 / f_i,$$

где $f_i = l_i - 1$ – число степеней свободы; l_i – число значений выходной величины, «попавшее» в i -ю графу таблицы; $i = 1 \dots n$ – текущий номер графы таблицы.

Затем определяют усредненное значение дисперсии всех граф таблицы (аналогично усреднению построчных дисперсий для получения дисперсии воспроизводимости):

$$S^2 = \sum_{i=1}^n S_i^2 f_i / \sum_{i=1}^n f_i.$$

Если число степеней свободы f_i для каждой из граф одиноково, то последнее выражение можно переписать в виде $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n S_i^2}{n}$, где n – число граф таблицы.

В результате получаем оценку дисперсии коэффициента регрессий

$$S_{b_i}^2 = \frac{S^2}{\sum_{i=1}^n l_i}$$

с числом степеней свободы $f = \sum_{i=1}^n l_i - n$.

Такую проверку значимости можно проводить в том случае, когда каждая графа таблицы содержит по меньшей мере два значения входной величины.

Если в результате проверки статистической значимости коэффициентов окажется, что коэффициент при одном из факторов, например X_r , незначим, то для дальнейшего выявления существенных факторов необходимо из вектор-столбца выходных величин вычитать значения B_m или (и) B_k для тех строчек матрицы отсеивающего эксперимента, когда фактор $X_m = +1$ или (и) $X_k = +1$.

После расстановки и ранжировки существенных факторов необходимо установить парные значимые взаимодействия. Построение диаграммы рассеяния для большого числа взаимодействий – трудная, да и ненужная задача. Значимые парные взаимодействия можно определить на основе визуального изучения диаграммы рассеяния для независимых переменных. Для того чтобы парное взаимодействие факторов X_j и X_k отнести к числу существенных, необходимо, чтобы на уровнях $X_j X_k = +1$ и $X_k X_j = -1$ были «выделяющиеся» точки. Из этого следует, что наибольшее число «выделяющихся» точек, а следовательно, наибольший вклад вносит то взаимодействие $X_k X_j$, у которого факторы X_k и X_j будут иметь большее число «выделяющихся» точек как на одинаковых, так и на разных уровнях; у таких факторов нижняя часть диаграммы должна быть похожа на зеркальное отображение верхней.

Процесс выделения существенных факторов заканчивается на основании F -критерия Фишера. После очередного этапа выделения значимых факторов и исключения их влияния на выходную величину

определяют дисперсию преобразованного вектор-столбца y^m выходной величины по отношению к ее среднему:

$$S_{cp}^2 = S_m^2 = \sum_{i=1}^N (y_i^m - y^m)^2,$$

где m – номер шага выделения существенных переменных; N – число строк в общей матрице отсеивающего эксперимента; $y^m = \sum_{i=1}^N y_i^m / N$ – среднее значение вектор-столбца преобразованных выходных величин на m -м шаге выделения существенных факторов.

Эту дисперсию сравнивают с оценкой дисперсии погрешности измерения $S^2(S^2_{(y)})$, которую вычисляют на основании серии дополнительных опытов. Для этого рассчитывают значение коэффициента Фишера:

$$F_{расч} = S_{cp}^2 / S^2$$

и сравнивают с табличным при числе свободы числителя $(N-1)$ и знаменателя $(u-1)$, где u – число параллельных опытов.

Процесс уменьшения дисперсии S_{cp}^2 является быстросходящимся. Когда $F_{расч}$ будет больше $F_{табл}$, то дисперсия измерения будет соизмерима с дисперсией выходной величины, обусловленной изменением оставшихся невыделенных факторов. На этом процесс выделения существенных факторов заканчивается, а невыделенные факторы относятся к «шуму» – к несущественным входным переменным, мало влияющим на входную величину.

Пример. Применение метода случайного баланса рассмотрим на примере оценки влияния факторов на величину коэффициента трения

скольжения. В качестве трущейся пары использовали: пластмасса (капрон Б) – металл (сталь марки 45 в нормализованном состоянии); смазка – масло индустриальное 20; изучалось граничное трение. Наименование независимых переменных и уровни их варьирования даны в табл. 7.7.

Таблица 7.7

№ п/п	Факторы	Обозначение		Уровни варьирования		
				кодовые		
		натуральное	кодовое	0	+1	-1
				натуральные		
1	Среднее удельное давление, кгс/см ²	p	X_1	6,84	10,8	2,8
2	Скорость скольжения, м/с	v	X_2	0,59	0,90	0,28
3	Расход смазки, см ³ /ч	q	X_3	8,5	12	5
4	Начальная шероховатость поверхности вала, мкм	Ra	X_4	1,575	0,65	2,5
5	Диаметр вала, мм	D	X_5	75	110	40

Для построения матрицы случайного баланса применяли полуматрицу полного факторного эксперимента типа 2^3 . Первые три столбца (факторы X_1 , X_2 ; X_3) были построены по обычному плану. Они составили полуреплику типа 2^{3-1} .

Факторы X_4 и X_5 образовали вторую полуреплику при генерирующих соотношениях: $X_4 = (-X_1 X_2)$ и $X_5 = (-X_2 X_3)$.

В качестве параметра оптимизации примем коэффициент трения f .

Матрица планирования и результаты эксперимента представлены в табл. 7.8.

Таблица 7.8

№ опы- та	Уровни факторов, их значения					Параметр оптимизации. Коэффициент трения			
	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	Значение текущих опытов			Среднее значение
	<i>p</i>	<i>v</i>	<i>q</i>	<i>Ra</i>	<i>D</i>	<i>y</i> ₁	<i>y</i> ₂	<i>y</i> ₃	\bar{y}
1	+	+	+	-	-				
	10,80	0,90	12	2,5	40	0,065	0,075	0,080	0,0755
2	+	+	-	-	+				
	10,80	0,90	5	2,5	110	0,12	0,13	0,15	0,1330
3	+	-	+	+	+				
	10,80	0,28	12	0,65	110	0,065	0,060	0,060	0,0617
4	+	-	-	+	-				
	10,80	0,28	5	0,65	40	0,069	0,070	0,060	0,0660
5	-	+	+	-	-				
	2,88	0,90	12	0,65	40	0,030	0,040	0,030	0,0334
6	-	+	-	+	+				
	2,88	0,90	5	0,65	110	0,052	0,050	0,055	0,0529
7	-	-	+	-	+				
	2,88	0,28	12	2,5	110	0,040	0,045	0,035	0,0400
8	-	-	-	-	-				
	2,88	0,28	5	2,5	40	0,041	0,040	0,050	0,0430

Для предварительного анализа значимости влияния отдельных факторов на параметр оптимизации – коэффициент трения – построены диаграммы рассеивания средних значений результатов наблюдений по уровням факторов (по исходным данным табл. 7.8, рис. 7.5). Для этого по оси абсцисс отложены все факторы с их уровнями (+ или -), а по оси ординат – значения критерия оптимизации, полу-

ченные в результате испытаний (табл. 7.8). Причем каждый фактор рассматривали независимо от других.

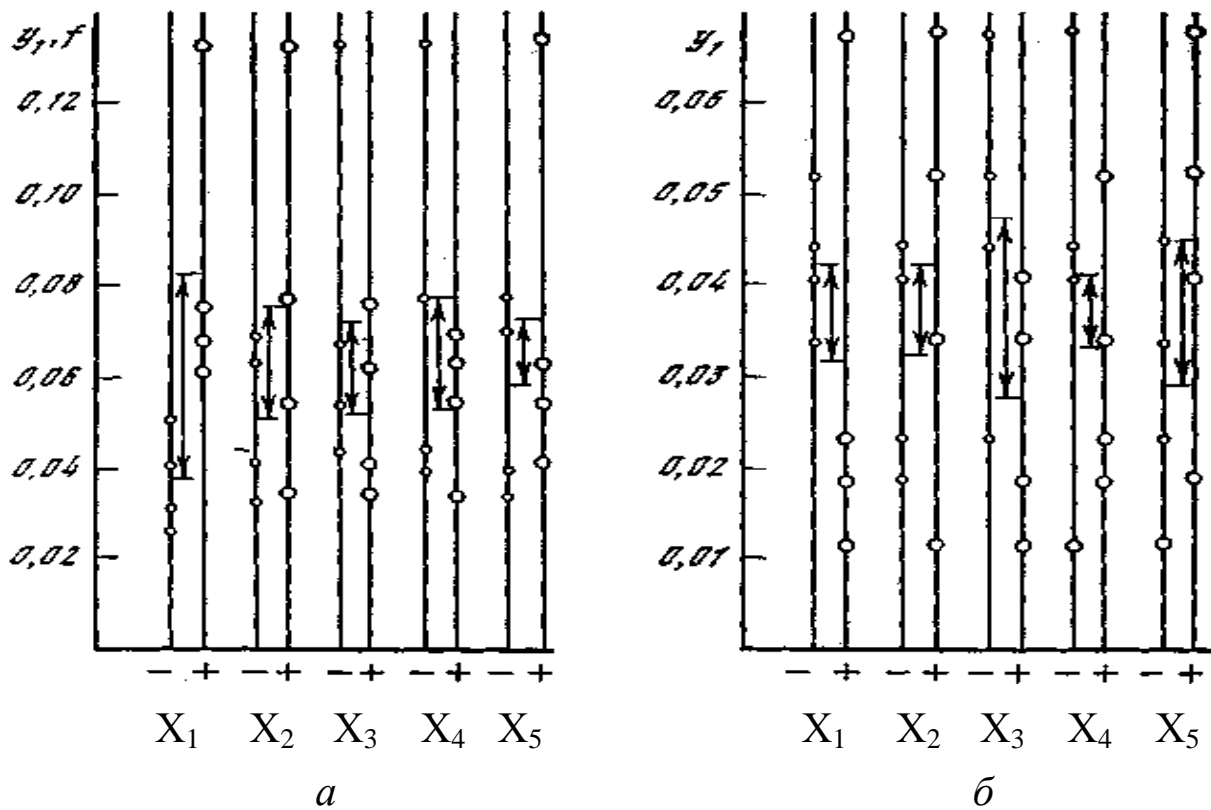


Рис. 7.5. Диаграмма рассеяния для $y_1 (f)$:
 а – по исходным данным; б – по скорректированным данным

Численные значения медиан параметра оптимизации (коэффициента трения) даны в табл. 7.9.

По диаграммам (рис. 7.5) визуально выделены значимые линейные эффекты. Для этого сравнивали между собой медианы при верхнем (+) и нижнем (-) уровнях. Считалось, что чем больше расстояние между медианами, тем выше статистическая значимость фактора. Также можно принимать во внимание количество точек, выделяющихся в верхней и нижней частях диаграммы рассеивания. Чем больше выделяющихся точек, тем сильнее влияние данного фактора на параметр оптимизации.

Таблица 7.9

Факторы и их значения		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
		кгс/см ²	м/с	см ³ /ч	мкм	мм
Значения медиан параметра оптимизации f для различных уровней факторов	Верхн. +	0,0844	0,0737	0,0526	0,0537	0,0718
	Нижн. –	0,0391	0,0485	0,0740	0,0730	0,0547
Разность значений медиан		+ 0,0453	+ 0,0252	– 0,0214	– 0,0193	+ 0,0171

Например, при анализе диаграмм рассеяния (рис. 7.5, *a*) для параметра оптимизации y (коэффициента трения f) существенное влияние оказывает фактор X_1 (удельная нагрузка на подшипник), так как расстояние между медианами для уровней наибольшее (по сравнению с другими факторами и их эффектами). Для фактора X_1 на уровне (+) имеются четыре точки, для которых значения выхода y больше, чем самое большое значение выхода на нижнем уровне (–). Из двух факторов X_3 (расход смазки q) и X_4 (первоначальная шероховатость поверхности вала Ra) – надо было выбрать наиболее значимый. По разности медиан некоторое предпочтение имел фактор X_3 . Суммарное значение выделяющихся точек для X_3 равно трем, для фактора X_4 – также трем. При их равнозначности все же некоторое предпочтение следует отдать фактору X_3 – расходу смазки q . По аналогичной методике были проанализированы и остальные факторы.

Предварительная последовательность факторов по значимости их влияния на параметр оптимизации оказалась следующей: X_1 (удельная нагрузка p), X_2 (скорость скольжения v), X_3 (расход смазки q), X_4 (шероховатость поверхности Ra), X_5 (диаметр вала D) (рис. 7.5, *a*). Однако факторы X_1 , X_2 и X_2 имеют почти одинаковую значимость, поэтому следует произвести дополнительно ранжировку

факторов и их взаимодействий по количественной оценке. Значимость факторов X_1 , X_2 оценивали с помощью табл. 7.10 с двумя входами.

Отсюда получали эффекты факторов:

$$B_1 = (\bar{y}'_1 + \bar{y}'_3)/2 - (\bar{y}'_2 + \bar{y}'_4)/2 = (0,1042+0,0638)/2 - (0,0431+0,0415)/2 = 0,0417;$$

$$B_2 = (\bar{y}'_1 + \bar{y}'_2)/2 - (\bar{y}'_3 + \bar{y}'_4)/2 = (0,1042+0,0430)/2 - (0,0638+0,0415)/2 = 0,02105.$$

Для оценки значений эффектов факторов определяли их значимость по t -критерию, который рассчитывали по формуле

$$t = [(y_1 + y_3 + \dots + y_n) - (y_2 + y_4 + \dots + y_{n+1})] / S \sqrt{\sum \frac{1}{l_i}},$$

где t – средняя квадратическая ошибка, характеризующая рассеяние относительно средних значений \bar{y} (в клетках табл. 7.10), в данном случае

с двумя входами (статистическое рассеяние); $S = \sqrt{\frac{\sum \bar{y}_i^2}{l_i - 1} - \frac{(\sum y_i)^2}{l_i(l_i - 1)}}$;

l_i – число опытов в клетке табл. 7.10 с двумя входами.

Для вычисления t -критерия использовали табл. 7.11. Далее рассчитывали t -критерии для факторов X_1 и X_2 :

$$t_{x1} = \left(\frac{(\bar{y}'_1 + \bar{y}'_3) - (\bar{y}'_2 + \bar{y}'_4)}{\sqrt{\sum s^2 / l_i}} \right) = \left(\frac{(0,1042 + 0,0638) - (0,0431 + 0,0415)}{0,00092} \right) = 2,75;$$

$$t_{x2} = \left(\frac{0,1473 - 0,1053}{0,03033} \right) = \frac{0,0420}{0,03033} = 1,396 = 1,40.$$

Таблица 7.10

Факторы	+X ₁	-X ₁
+X ₂	0,0755 + <u>0,1330</u> $\Sigma y'_1 = 0,2085 \quad \bar{y}'_1 = 0,1042$	0,0334 + <u>0,0529</u> $\Sigma y'_2 = 0,0863 \quad \bar{y}'_2 = 0,0431$
-X ₂	0,0617 + <u>0,0660</u> $\Sigma y'_3 = 0,1277 \quad \bar{y}'_3 = 0,0638$	0,0400 + <u>0,0430</u> $\Sigma y'_4 = 0,0830 \quad \bar{y}'_4 = 0,0415$

Таблица 7.11

№ клетки табл.	l_i	$\Sigma y'_i$	$(\Sigma y'_i)^2$	$\Sigma \bar{y}'_i^2$	S^2	S^2/l_i
1	2	0,2085	0,043472	0,023389	0,001653	0,000826
2	2	0,0863	0,007482	0,003915	0,000172	0,000086
3	2	0,1277	0,016307	0,008163	0,000010	0,000005
4	2	0,0830	0,006889	0,003449	0,000005	0,000003
Σ						0,000920

При 5-процентном уровне значимости и числе степеней свободы $f = \Sigma l_i - k = 8 - 4 = 4$ (где k – число клеток, табл. 7.11) табличное значение t -критерия равно 2,78. Так как $t_{\text{расч}} > t_{\text{табл}}$, можно считать эффект фактора X_1 статистически значимым.

Для фактора X_2 табличное значение критерия равно 1,20 при уровне значимости 30 % и числе степени свободы $f = 4$. Последнее говорит о том, что X_2 влияет менее значимо, чем X_1 , или для него взят узкий интервал варьирования.

После оценки эффектов факторов X_1 и X_2 было произведено корректирование результатов опытов для более четкого выделения менее сильнодействующих факторов и их парных взаимодействий. Для «снятия» действия выделенных эффектов факторов X_1 и X_2 по всем результатам на уровне $+X_1$ прибавляли $-0,0417$, а на уровне $+X_2$ прибавляли $-0,0210$.

Результаты пересчета значений параметра оптимизации \bar{y} даны в табл. 7.12.

Таблица 7.12

№ опыта	Уровни факторов, их значения					Пересчетный критерий оптимизации
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
	p	v	q	Ra	D	\bar{y}
1	+	+	+	-	-	0,0128
	10,80	0,90	12	2,5	40	
2	+	+	-	-	+	0,0703
	10,80	0,90	5	2,5	110	
3	+	-	+	+	+	0,0200
	10,80	0,28	12	0,65	110	
4	+	-	-	+	-	0,0246
	10,80	0,28	5	0,65	40	
5	-	+	+	-	-	0,0124
	2,88	0,90	12	0,65	40	
6	-	+	-	+	+	0,0319
	2,88	0,90	5	0,65	110	
7	-	-	+	-	+	0,0400
	2,88	0,28	12	2,5	110	
8	-	-	-	-	-	0,0430
	2,88	0,28	5	2,5	40	

Для скорректированных результатов эксперимента были построены новые диаграммы рассеивания, включая оставшиеся линейные эффекты и некоторые парные эффекты взаимодействия (рис. 7.5, б).

Численные значения медиан факторов для параметра оптимизации $\bar{y}(f)$ даны в табл. 7.13. Для оценки выделенных эффектов строим вспомогательную табл. 7.14.

Отсюда

$$B_1 = (\bar{y}'_1 + \bar{y}'_3)/2 - (\bar{y}'_2 + \bar{y}'_4)/2 = (0,0416 + 0,0221)/2 - (0,0221 + 0,0415)/2 = -0,00005;$$

$$B_2 = (\bar{y}'_1 + \bar{y}'_2)/2 - (\bar{y}'_3 + \bar{y}'_4)/2 = (0,0416 + 0,0221)/2 - (0,0221 + 0,0415)/2 = -0,00005.$$

Таблица 7.13

Факторы	Кодовые	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅
	Натуральные	<i>p</i>	<i>v</i>	<i>q</i>	<i>Ra</i>	<i>D</i>
Медианы для оптимизации	–	0,0424	0,0310	0,0466	0,406	0,0276
	+	0,0300	0,0414	0,0526	0,0320	0,0448

Таблица 7.14

Оцениваемые эффекты	+X ₁	–X ₁
+X ₂	0,0128 + <u>0,0703</u> Σy' ₁ = 0,0831 $\bar{y}'_1 = 0,0416$	0,0124 + <u>0,0319</u> Σy' ₂ = 0,0443 $\bar{y}'_2 = 0,0221$
–X ₂	0,0200 + <u>0,0243</u> Σy' ₃ = 0,0443 $\bar{y}'_3 = 0,0221$	0,0400 + <u>0,0430</u> Σy' ₄ = 0,0830 $\bar{y}'_4 = 0,0415$

После оценки эффектов факторов X_1 и X_2 по t -критерию они оказываются статистически незначимыми. По аналогичной методике выделялись эффекты от факторов X_3 , X_4 , X_5 и парных взаимодействий:

$$X_1X_2, X_1X_3, X_1X_4, X_1X_5, X_2X_3, X_2X_4, X_2X_5, X_3X_4, X_3X_5, X_4X_5.$$

Окончательная диаграмма выделенных эффектов отдельных факторов и их взаимодействий представлена на рис. 7.6.

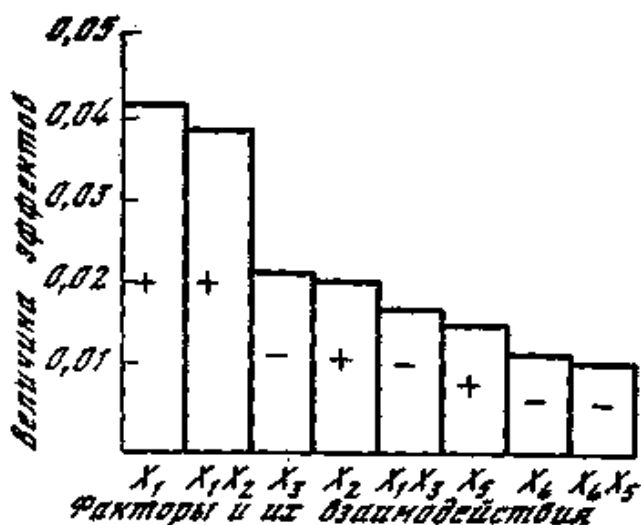


Рис. 7.6. Диаграмма выделенных эффектов отдельных факторов

В табл. 7.15 даны статистически значимые величины эффектов факторов и их двойных взаимодействий с учетом знаков и их ранжировки по значимости и t -критерию.

Момент прекращения отсеивания эффектов оценивали с помощью F -критерия:

$$F_p = S_{cp}^2 / S^2,$$

где S_{cp}^2 – дисперсия результатов опытов относительно среднего арифметического этих результатов; $S^2(S^2_{(y)})$ – дисперсия, подсчитанная по результатам нескольких параллельных опытов в центре экспериментального пространства.

Таблица 7.15

№ факторов	Обозначение факторов	Критерий		Уровень значимости	Величина эффекта	Знаки эффекта
		табличный	расчетный			
1	$X_1 - p$, кгс/см ²	2,78	2,80	0,05	0,0417	+
2	$X_1X_2 - p\nu$, кгс/см ² · м/с	2,17	2,48	0,10	0,386	+
3	$X_3 - q$, см ³ /ч	1,50	1,68	0,20	0,0211	-
4	$X_2 - \nu$, м/с	1,20	1,40	0,30	0,0210	+
5	$X_2X_3 - \nu q$, м/с· см ³ /ч	2,13	2,46	0,10	0,0173	-
6	$X_5 - D$, мм	0,74	0,82	0,50	0,0148	+
7	$X_4 - Ra$, мкм	0,74	0,25	0,50	0,0112	-
8	$X_4X_5 - RaD$, мкм· мм	1,50	1,98	0,20	0,0099	-

Примечание. Величины значений выделенных эффектов для остальных двойных взаимодействий оказались статистически незначимы и были опущены.

Для определения значения S_{cp}^2 проводили несколько параллельных опытов на нулевом уровне (табл. 7.16).

Таблица 7.16

№ опыта	Значение факторов					Параметр оптимизации
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
1	7,0	0,5	9,0	1,5	80	0,0592
2	7,0	0,6	8,0	1,5	74	0,0715
3	6,5	0,5	8,0	1,5	74	0,0645
4	6,0	0,6	8,5	1,5	80	0,0650

Затем находилось среднее значение параметра оптимизации:

$$\bar{y} = (\sum y)/4 = 0,2602/4 = 0,065.$$

В табл. 7.17 представлен расчет дисперсии параллельных опытов в центре эксперимента.

$$S^2 = (\sum S^2)/l - 1 = (73,45 \cdot 10^{-6})/4 - 1 = 24,5 \cdot 10^{-6}.$$

Таблица 7.17

№ опыта	y_i	$y_i - \bar{y}$	S^2
1	0,0592	+0,0058	$33,70 \cdot 10^{-6}$
2	0,0715	-0,0065	$39,50 \cdot 10^{-6}$
3	0,0645	+0,0005	$0,25 \cdot 10^{-6}$
4	0,0650	0	0
			$\sum S^2 = 73,45 \cdot 10^{-6}$

Дисперсии опытов при выделении X_1, X_2 : $S^2_{1cp} = 9,0 \cdot 10^{-4}$;

при выделении X_1, X_2 и X_3 : $S^2_{2cp} = 6,13 \cdot 10^{-4}$;

при выделении X_4, X_5 : $S^2_{3cp} = 2,02 \cdot 10^{-4}$ и т. д. На основании табл. 7.16 и приведенных значений S^2_{icp} получены F-критерии:

$$1. F_1 = S^2_{1cp} / S^2 = (9,0 \cdot 10^{-4}) / 24,5 \cdot 10^{-6} = 36,73.$$

$$2. F_2 = S^2_{2cp} / S^2 = (6,13 \cdot 10^{-4}) / 24,5 \cdot 10^{-6} = 25,02.$$

$$3. F_3 = S^2_{3cp} / S^2 = (2,02 \cdot 10^{-4}) / 24,5 \cdot 10^{-6} = 52,73 \text{ и т. д.}$$

Табличное значение F-критерия при числе степеней свободы для большей $f = 7$ и меньшей $f = 3$ дисперсий при доверительной вероят-

ности 0,95 равно $F_{табл} = 8,84$. Следовательно, гипотеза об остаточном рассеянии за счет ошибок опытов может быть принята с 95-процентной доверительной вероятностью, так как $F_{расч} < F_{табл}$.

На основании анализа данных табл. 7.14 и диаграммы выделенных эффектов (рис. 7.6) сделаны следующие выводы.

1. Наибольшее влияние на изменения коэффициента трения металлополимерной пары при данных режимах оказывает фактор X_1 – удельное давление (p) и двойное взаимодействие факторов X_1X_2 ($p\nu$) – произведение нагрузки p на скорость ν . С повышением этих факторов значение коэффициента трения возрастает.

2. Следующими по значимости факторами, влияющими на коэффициент трения, являются фактор X_3 – удельный расход смазки q и фактор X_2 – скорость скольжения ν . С увеличением расхода смазки коэффициент трения понижается, а с ростом скорости – возрастает. Однако при одновременном увеличении расхода смазки q и скорости скольжения ν коэффициент трения снижается и наоборот.

3. Влияние геометрических параметров узла трения, определяемых диаметром вала D (фактор X_5) и первоначальной шероховатостью стального вала Ra (фактор X_4), на коэффициент трения менее значительно, также незначительно влияет и их парное взаимодействие. С увеличением диаметра вала коэффициент трения будет несколько возрастать, а с уменьшением шероховатости – снижаться.

4. Следует считать, что основными факторами, определяющими процесс трения пары пластмасса (капрон Б) – металл (сталь марки 45 незакаленная), являются нагрузка p (фактор X_1), расход смазки q (фактор X_3), скорость скольжения ν (фактор X_2) и их парные взаимодействия.

7.3. РАЗБИЕНИЕ ФАКТОРНЫХ ПЛАНОВ НА БЛОКИ

Полный факторный план с n_a уровнями фактора А, n_b уровнями фактора В и т. д. требует $N_I = n_a n_b \dots$ измерений отклика. Это число может оказаться настолько большим, что возникают сомнения в целесообразности проведения экспериментов. Поэтому необходимо найти такие части факторного плана, которые позволят получить лучшие результаты при минимальных затратах.

Части факторных планов (ПФЭ) называют **блоками**. Чаще всего в качестве блоков рассматривают источники неоднородностей, лежащие в основе эксперимента:

- при изучении различных технических систем – отдельные подсистемы, технические характеристики подсистем;
- в микроэлектронике при исследовании свойств интегральных схем – различные кристаллические структуры, способы крепления выводов и др.;
- в промышленных экспериментах при изучении загрузки цехов – отдельные участки, рабочие места, группы специалистов, рабочие смены и др.;
- при физико-химических исследованиях свойств различных материалов, например при изучении коррозионной стойкости материалов, – методы нанесения покрытий, способы механической обработки материалов и т.д.

Блочное планирование широко применяется при планировании экспериментов в биологических, технических, химических, технологических и промышленных исследованиях. Теорию блочного планирования используют как математический аппарат при построении других планов, например ПФЭ,ДФЭ второго и третьего порядков.

Рассмотрим эксперимент с тремя неизвестными переменными (факторами) $X_1; X_2; X_3$, варьирующими на двух уровнях. Чтобы исчер-

пять все возможные комбинации этих факторов, нужно поставить 8 опытов (табл. 7.18), где буквы a , b , c обозначают, что в соответствующих строчках на уровне +1 был только один из факторов X_1 ; X_2 ; X_3 :

- произведение трех букв abc – на верхнем уровне были все три фактора;
- символ (+1) – все факторы были на нижнем уровне;
- произведение двух букв ac , bc , ab – в соответствующих строчках на верхних уровнях были два фактора X_1 и X_3 ; X_2 и X_3 ; X_1 и X_2 .

С помощью такого кодового обозначения матрицу планирования, представленную в табл. 7.18, можно записать одной строчкой.

Таблица 7.18

Блоки	№ опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	Кодовое обозначение строк	Вектор выхода y
1	1	+	-	-	+	+	-	-	+	c	$y_1 + \beta_q$
	2	+	+	-	-	-	-	+	+	a	$y_2 + \beta_q$
	3	+	-	+	-	-	+	-	+	b	$y_3 + \beta_q$
	4	+	+	+	+	+	+	+	+	abc	$y_4 + \beta_q$
2	5	+	-	-	-	+	+	+	-	(1)	$y_5 - \beta_q$
	6	+	+	-	+	-	+	-	-	ac	$y_6 - \beta_q$
	7	+	-	+	+	-	-	+	-	bc	$y_7 - \beta_q$
	8	+	+	+	-	+	-	-	-	ab	$y_8 - \beta_q$

Матрицу планирования в кодовых обозначениях для трех независимых переменных получают из планирования для двух переменных, повторив его дважды: первый раз при значениях X_3 , находящихся на нижнем уровне, второй раз – на верхнем уровне. Если нужно

включить в рассмотрение четвертый фактор X_4 , то аналогичным образом дважды повторяют планирование для трех переменных: один раз для фактора X_4 , находящегося на нижнем уровне, другой раз – на верхнем. В результате получают матрицу планирования, которая будет представлена следующей строчкой:

(1) $a, b, ab, c, ac, bc, abc, d, ad, abd, cd, acd, bcd, abcd.$

Аналогичным образом можно построить планы для сколь угодно большого числа независимых переменных.

Воздействие неуправляемых временных изменений некоторых факторов на план называется **временным дрейфом**.

Влияние этого временного дрейфа на параметры математического моделирования процесса можно устранить, разбив серию опытов на отдельные блоки так, чтобы эффект от временного дрейфа оказался смешанным с произведением факторов, для которых коэффициенты регрессии достаточно малы. Допустим, нужно устранить влияние временного дрейфа на параметры управления регрессии, получаемого в результате полного трехфакторного эксперимента. С этой целью разобьем эксперимент на два блока и введем новую независимую переменную $X_q = X_1 X_2 X_3$, характеризующую дрейф.

В один из блоков отберем опыты, для которых $X_q = +1$, а в другой – для которых $X_q = -1$. Формально план, приведенный в табл. 7.18, можно рассматривать как эксперимент типа 2^{4-1} с генерирующим соотношением $I = X_1 X_2 X_3$. Исходя из матрицы планирования, можно считать, что в первом блоке все результаты опытов вследствие временно́го дрейфа превышены на β_q , а во втором – занижены на β_q (табл. 7.19).

Таблица 7.19

Блоки	$X_1 X_2 X_3$	Кодовое обозначение	Вектор выхода
1	+	c	$y_1 + \beta_q$
	+	a	$y_2 + \beta_q$
	+	b	$y_3 + \beta_q$
	+	abc	$y_4 + \beta_q$
2	-	(1)	$y_5 - \beta_q$
	-	ac	$y_6 - \beta_q$
	-	bc	$y_7 - \beta_q$
	-	ab	$y_8 - \beta_q$

Если уравнение регрессии записано в виде $y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + b_{23}X_2X_3 + b_{123}X_1X_2X_3$, то для коэффициентов регрессии b_i можно получить следующие оценки:

$$b_1 = 1/8 [-(y_1 + \beta_q) + (y_2 + \beta_q) - (y_3 + \beta_q) + (y_4 + \beta_q) - (y_5 - \beta_q) + (y_6 - \beta_q) - (y_7 - \beta_q) + (y_8 - \beta_q)] = 1/8(-y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + y_6 - y_7 + y_8),$$

аналогично определяются другие коэффициенты, кроме b_{123} :

$$b_{123} = 1/8 [(y_1 + \beta_q) + (y_2 + \beta_q) + (y_3 + \beta_q) + (y_4 + \beta_q) - (y_5 - \beta_q) - (y_6 - \beta_q) - (y_7 - \beta_q) - (y_8 - \beta_q)] = 1/8(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - y_5 - y_6 - y_7 - y_8) + b_q.$$

Все коэффициенты, кроме b_{123} , не содержат погрешностей, обусловленных временным дрейфом.

Временной дрейф смещает координаты экстремума поверхности облика без значимой ее деформации. Таким образом, если есть возможность отказаться от определения взаимодействий высокого порядка (в данном случае от третьего порядка), то за счет этого можно сократить число опытов по сравнению с планом ПФЭ.

Пример. Рассмотрим пример разбивки на блоки матрицы эксперимента 2^4 . Известно, что имеются четыре источника неоднородностей, которые могут значительно исказить результаты эксперимента. Поэтому в данном случае матрицу 2^4 следует разбить на 4 блока, чтобы линейные эффекты были освобождены от влияния межблочного эффекта. Чтобы произвести разбивку на 4 блока по 4 опыта в каждом блоке, нужно выбрать три взаимодействия, которыми можно пожертвовать. Два таких взаимодействия можно выбрать произвольно (предпочтительно взаимодействие высокого порядка, которое можно считать пренебрежительно малым), а третье оказывается однозначно определенным по следующему правилу: нужно взять алгебраическое произведение первых двух выбранных взаимодействий и заменить единицей каждый множитель, стоящий в квадрате. Так, если выбраны парные взаимодействия X_1X_2 и X_3X_4 , то третьим будет $X_1X_2X_3X_4$. Если выбраны тройные взаимодействия $X_1X_2X_3$ и $X_2X_3X_4$, то третьим будет X_1X_4 .

Матрицу планирования эксперимента 2^4 разбиваем на блоки (табл. 7.20).

Межблочные эффекты отразятся на подсчете коэффициентов b_0 , b_{14} , b_{123} , b_{234} .

8. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ОТЫСКАНИИ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Одной из основных задач планирования эксперимента является задача поиска экстремума функции отклика. Эта задача возникает при оптимизации производственных и научно-технических процессов, осуществляемых для улучшения свойств изделий, изучения предельных возможностей приборов и устройств и т. д.

Поиск экстремума функции отклика происходит путем исследования поверхности отклика. Анализ результатов первой серии опытов позволяет выбрать направление движения в область оптимума по кратчайшему пути, проводя сравнительно небольшое число опытов. Для поиска оптимальных значений параметра оптимизации применяют следующие методы: градиентный, безградиентный и методы случайного поиска.

Наиболее широкое распространение получили градиентный метод крутого восхождения и безградиентный метод последовательного симплекс-планирования.

Преимущества указанных методов перед другими состоит в том, что они позволяют определить оптимум при минимальном числе опытов и избежать ошибок, присущих другим методам оптимизации.

8.1. МЕТОД ГАУССА-ЗЕЙДЕЛЯ

При использовании метода Гаусса–Зейделя или, как часто его называют, метода сечений, последовательное продвижение к оптимуму осуществляется путем поочередного варьирования каждого фактора до достижения частного наилучшего значения параметра оптимизации по одному из факторов при находящихся на неизменных

уровнях остальных факторов. Затем в следующей серии опытов варьируют другой фактор при стабилизации остальных, включая первый, и т. д. На рис. 8.1 представлена графическая интерпретация использования указанного метода для двух последовательно варьируемых факторов X_1 и X_2 .

После достижения частного оптимума по фактору X_2 (точка 1) переходят к достижению по фактору X_1 . Затем при достижении частного оптимума по X_1 переходят к движению по X_2 и т. д. Поиск оптимума прекращается в точке, движение из которой не улучшает значение параметра оптимизации. Точность определения оптимальных условий зависит от шага варьирования ΔX_i (для увеличения точности нужно уменьшить шаг в окрестностях оптимума).

Метод Гаусса–Зейделя, широко распространенный среди экспериментаторов, оказывается малоэффективным при увеличении числа факторов ($k > 3$) в связи с резким увеличением количества опытов.

Достоинством метода Гаусса–Зейделя является его наглядность и простота. Кроме того, трудно стабилизировать все управляемые факторы, кроме одного, на длительное время, что вызывает дополнительные погрешности в нахождении частных экстремумов.

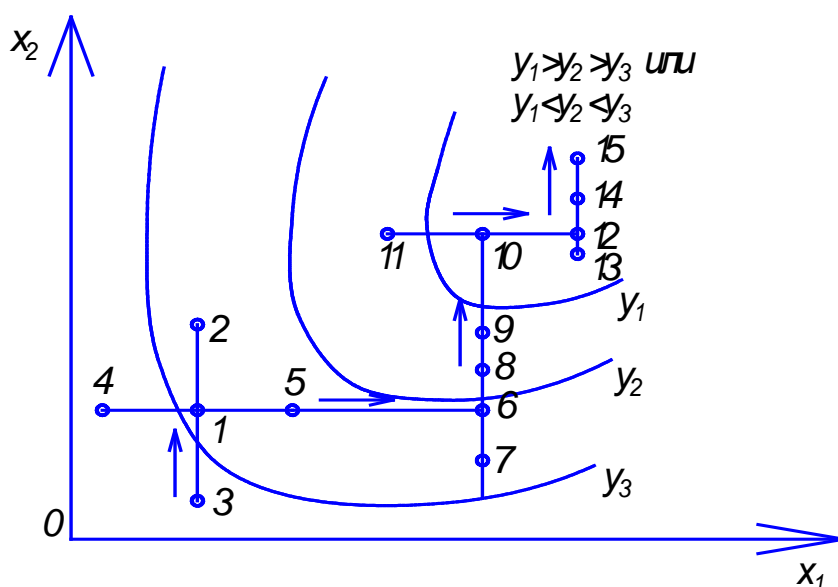


Рис. 8.1. Поиск оптимальных условий методом Гаусса–Зейделя

8.2. МЕТОД ГРАДИЕНТА

Особенность метода градиента заключается в том, что движение к оптимальной области осуществляется в направлении градиента функции отклика, причем направление движения уточняется после каждого шага по результатам специально поставленных пробных опытов. Градиент функции представляет собой вектор, величина и направление которого определяются по формуле

$$\mathit{grad} y = \frac{\partial y}{\partial X_1} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial X_2} \vec{j} + \dots + \frac{\partial y}{\partial X_k} \vec{k}, \quad (8.1)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \dots, \vec{k}$ – единичные векторы по соответствующим координатным осям факторного пространства; $\mathit{grad} y$ – обозначение градиента;

$\frac{\partial y}{\partial X_i}$ – частная производная функции отклика по i -му фактору.

Частные производные $\frac{\partial y}{\partial X_i}$ можно рассматривать как коэффициенты линейного уравнения вида $y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_k X_k$, полученного в результате эксперимента, проведенного, например, обычным традиционным способом.

Изменяя факторы пропорционально величинам коэффициентов регрессии ($b_i = \frac{\Delta y}{\Delta X_i} = \frac{\partial y}{\partial X_i}$), можно осуществить движение по самому короткому пути. Поэтому процедура движения к почти стационарной области называется крутым восхождением.

Эффективность градиента зависит в большей мере от характера поверхности отклика. Технику расчета крутого восхождения удобно рассматривать на однофакторном эксперименте (рис. 8.2).

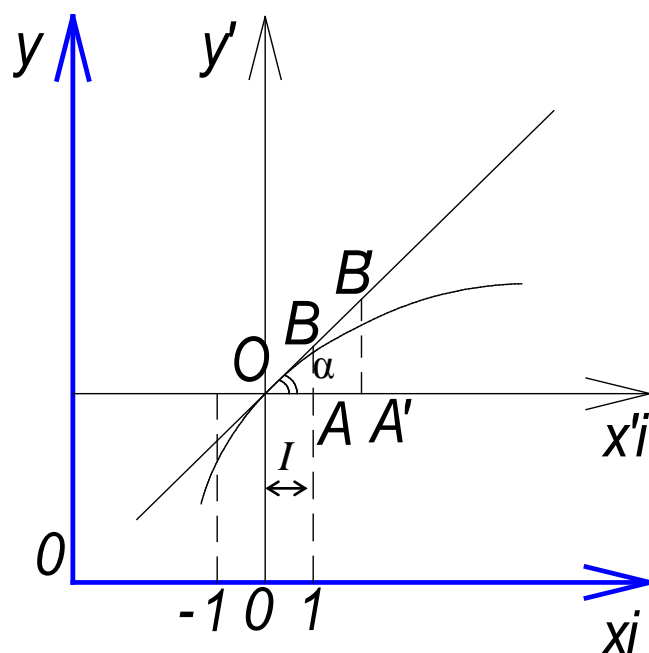


Рис. 8.2. Расчет координат точек в направлении градиента

В многофакторной задаче координаты точек градиента рассчитывают аналогично. Из рис. 8.2 видно, что если значение коэффициента регрессии, который равен тангенсу угла между линейной функцией и осью данного фактора ($\operatorname{tg} \alpha$), умножить на интервал варьирования, который является прилежащим катетом (I) в прямоугольном треугольнике OAB , то получится противоположный катет AB , который и дает координаты точки, лежащей на градиенте.

Если абсолютные величины $b_i I$ умножить или разделить на любое положительное число, то при этом получают координаты точек, также расположенных на градиенте, но с другим шагом (точка B'). Движение по градиенту получается последовательным приближением к основному уровню факторов величин, пропорциональных $b_i I$.

На рис. 8.3 представлен поиск оптимума методом градиента.

После определения составляющих градиента (частных производных – коэффициентов b_k) выполняют движение в направлении к оптимуму на величину рабочего шага.

$$\vec{X}_{h+1} = \vec{X}_h + p_p \text{grad } y(\vec{X}_h), \quad (8.2)$$

где $\text{grad } y(\vec{X}_h) = (b_{h1}; b_{h2}; \dots; b_{hk})$; p_p – параметр рабочего шага; h – номер шага.

Критерием оценки выхода в область оптимума является малое значение модуля градиента: $|\text{grad } y(\vec{X}_h)| \rightarrow 0$. Иными словами, все коэффициенты b_i становятся статистически незначимыми или равными нулю.

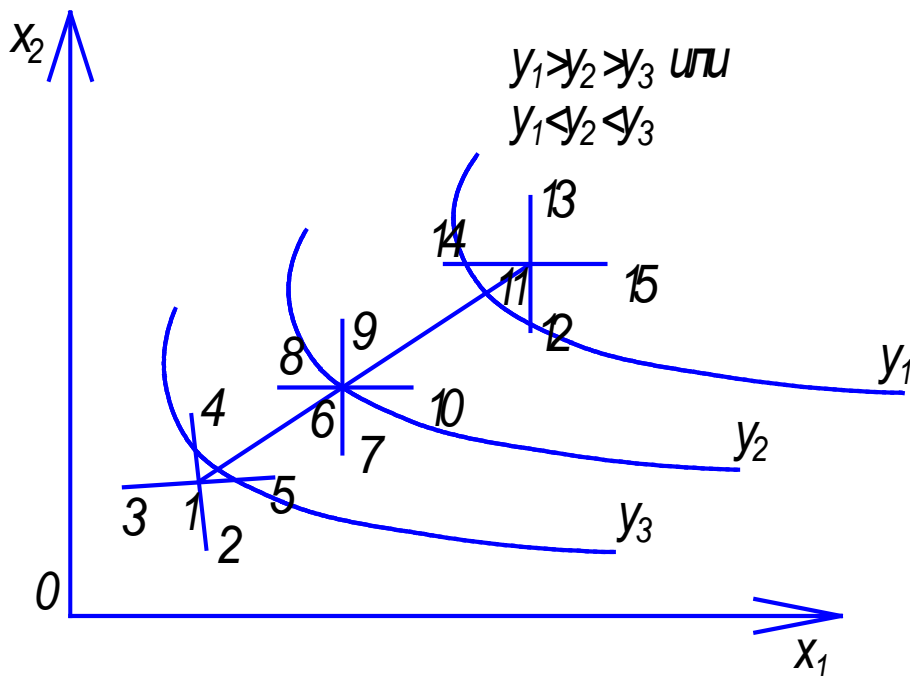


Рис. 8.3. Движение к оптимуму методом градиента

Количество опытов в каждой точке равно $2k$. Большое влияние на эффективность этого метода оказывает выбор величины рабочего шага. При малом шаге требуется большое количество опытов, при большом – можно проскочить область оптимума. Для сокращения числа опытов целесообразно изменять величину шага в зависимости от расстояния до экстремальной точки.

Размер рабочего шага можно определить по формуле

$$P_p = \frac{\rho}{h\gamma}, \quad (8.3)$$

где ρ – постоянная величина; γ – определяется предполагаемым видом поверхности отклика и обычно принимается равной 0,20...0,30; h – номер шага.

Шаг обычно округляют. Опыты представляют в натуральных переменных.

Методы оптимизации, основанные на использовании градиента, обычно обеспечивают быстрое приближение к оптимуму, но имеют ряд недостатков, которые ограничивают их применение. В частности, градиент определять на каждом шаге трудоемко. Кроме того, такие методы предполагают существование частных производных исследуемой неизвестной функции, что не всегда возможно.

8.3. МЕТОД КРУТОГО ВОСХОЖДЕНИЯ

Из градиентных методов наиболее широкое применение получил метод крутого восхождения. Этот метод впервые был предложен в 1951 г. Боксом и Уильсоном (поэтому его часто называют методом Бокса–Уильсона). Существенно новым в методе крутого восхождения является то, что в нем использован градиентный метод оптимизации в сочетании с факторным экспериментом (чаще всего дробная реплика) для локального описания поверхности. Этот метод предусматривает стратегию последовательного (шагового) проведения эксперимента, при котором весь эксперимент состоит из отдельных этапов, причем на каждом последующем этапе используют результаты предыдущих.

На первом этапе поверхность отклика аппроксимируют полиномиальной моделью первого порядка (полином первой степени), на основе которой определяют направления движения по градиенту в зону оптимума. Затем путем постановки опытов с учетом направления в факторном пространстве, выбранного с помощью градиента, достигают почти стационарной области, т. е. области оптимума. На третьем этапе исследования, если имеется необходимость, область оптимума аппроксимируют полиномиальным уравнением второго порядка и реже – третьего. И в каждом из этапов исследователь получает результаты, приближающие его к оптимальным условиям проведения процесса.

В отличие от чисто градиентного метода (при котором ставятся по два пробных опыта по обе стороны от базовой точки путем поочередного варьирования каждой из входных величин), экспериментальное изучение области оптимума методом крутого восхождения состоит в том, что оптимизация достигается при минимальном числе опытов за счет использования эффективных дробных реплик при выборе направления движения и рационального применения шаговой процедуры движения к зоне оптимума.

При факторном эксперименте в оценке каждого коэффициента модели, а следовательно, каждой составляющей градиента участвуют все N точек (опытов). Поэтому эти оценки получаются более точными, чем при классическом градиентном методе, где каждая составляющая градиента вычисляется только по двум точкам. Найденное таким образом по методу крутого восхождения направление градиента более достоверно. В этой связи в найденном направлении градиента можно осуществлять несколько, а не один, пробных шагов до достижения частного экстремума.

Допустим, задана базовая точка K_0 (рис. 8.4). Приняв ее за центр плана, поставим в ее окрестностях ПФЭ (или ДФЭ). Важной особен-

ностью метода крутого восхождения является проведение статистической оценки результатов ПФЭ, что значительно повышает надежность интерпретации этих результатов.

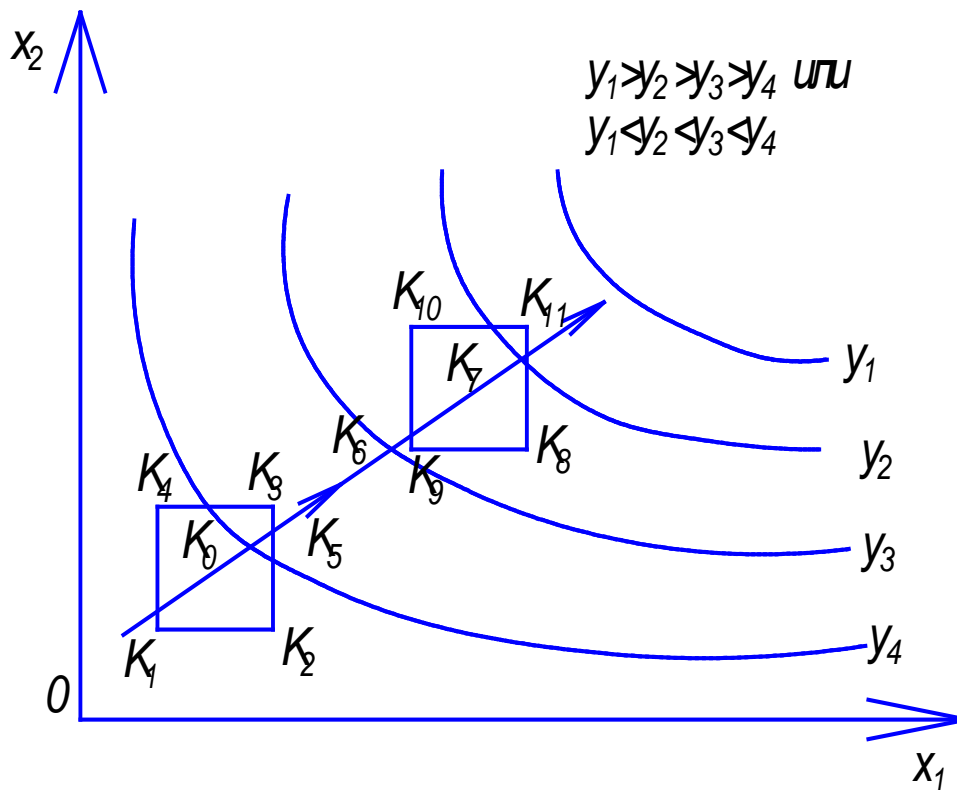


Рис. 8.4. Геометрическая интерпретация метода крутого восхождения

Допустим, по результатам опытов в области базовой точки получено линейное уравнение регрессии

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i . \quad (8.4)$$

Поверхность отклика в окрестностях некоторой точки экстремума аппроксимирована гиперплоскостью.

Ранее было показано, что оценки коэффициентов пропорциональны проекциям вектор-градиента на оси-факторы. Следовательно,

величины коэффициентов будут оценивать составляющие градиентов по соответствующим координатным осям ($b_i = \frac{\partial y}{\partial X_i}$).

Таким образом, задача определения наикротчайшего пути к экстремуму функции отклика состоит в нахождении расположенной на гиперплоскости прямой l , исходящей из начальной точки и обеспечивающей наиболее быстрое изменение функции отклика $\frac{\partial y}{\partial l} \rightarrow \max$.

Иными словами, изменение функции отклика будет наибольшим в направлении градиента функции:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)_{\max} = |\text{grad } y| = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_k}\right)^2}. \quad (8.5)$$

Если факторы X_i оценить пропорционально значениям соответствующих им коэффициентов, то будет обеспечено движение вдоль линии крутого восхождения.

О достижении частного экстремума судят по неравенству $y_{n-1} < y_n > y_{n+1}$. Если данное неравенство выполняется, то точка K_7 является точкой частного экстремума, ее принимают за базовую и в окрестностях реализуют ПФЭ (или ДФЭ).

Практически поиск экстремальных значений функции отклика сводят к следующим процедурам.

1. Проводят ПФЭ или ДФЭ.
2. Выполняют регрессионный анализ полученных результатов, вычисляя оценки коэффициентов регрессии b_i для определения составляющих градиента.
3. Рассчитывают произведение $b_i \Delta X_i$. Фактор, для которого это произведение наибольшее, принимают за базовый.

4. Выбирают шаг движения для базового фактора по направлению к оптимуму по формуле

$$\lambda |b_{\sigma}| \Delta X_{\sigma} = \mu \Delta X_{\sigma}, \quad (8.6)$$

где λ – параметр шага $\mu = \lambda |b_{\sigma}|$ ($0 < \mu \leq 1$).

Затем вычисляют размеры шагов по остальным факторам исследуемого процесса по формуле

$$\lambda b_i \Delta X_i = \frac{\mu b_i}{|b_{\sigma}|} \Delta X_i. \quad (8.7)$$

5. Далее проводят «мысленные» опыты, которые заключаются в вычислении значений функции отклика в точках факторного пространства, лежащих по пути к оптимуму, т. е. осуществляется мысленное движение к оптимуму. Движение начинают с центра эксперимента, имеющего координаты нулевого (начального) уровня. Координаты h ($h = 1, 2, \dots, m$) точки при движении методом крутого восхождения в область оптимума определяют по формуле

$$X_i^h = X_{i0} + h \lambda b_i \Delta X_i, \quad (8.8)$$

где h – номер шага ($h = 1, 2, 3, \dots, m$).

Подставляя в уравнение гиперплоскости натуральные значения переменных факторов, полученные по указанной выше формуле, определяют расчетную величину для каждого шага: $y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i \frac{X_{ih} - X_{i0}}{\Delta X_i}$.

6. Некоторые из «мысленных» опытов реализуют для проверки соответствия найденной зависимости исследуемому процессу. Полу-

ченные наблюдения значения параметра отклика сравнивают с предсказанными.

Движение вдоль направления крутого восхождения следует производить до тех пор, пока производная $\frac{dy}{dl}$ не обратится в нуль.

В этой точке вновь определяют направление градиента путем реализации плана-эксперимента с центром в точке, имеющей наилучший результат. Затем процедура поиска отклика продолжается до тех пор, пока коэффициенты регрессии станут сравнимыми с их ошибками и линейное уравнение окажется неадекватным.

Применение метода крутого восхождения неэффективно в зоне экстремума в связи с возникающей неопределенностью из-за малых значений b_i , увеличивающих вероятность движения в ложном направлении.

Для повышения эффективности метода крутого восхождения большое значение имеет выбор величины шага: эффективность поиска возрастает при использовании переменной величины шага.

Движение по градиенту наиболее эффективно для такой функции отклика, которая является адекватной и имеет коэффициенты b_i , несущественно различающиеся между собой, что достигается удачным выбором интервалов варьирования.

Методом крутого восхождения можно достигнуть оптимума значительно быстрее и с меньшими затратами времени и средств, чем другими методами оптимизации. Кроме того, можно получить математическую модель процесса, которая может быть в дальнейшем использована при переходе от лабораторных исследований к промышленным.

8.4. МЕТОД СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА

Характерная особенность этого метода – случайный выбор направления движения на каждом шаге. Если точка после h -го шага занимает \bar{X}_h положение в фактическом пространстве, то следующий шаг будет сделан после реализации пробного опыта в случайной точке \bar{X}_{h+1} , определяемой по формуле

$$\bar{X}_{h+1} = \bar{X}_h + \bar{X}, \quad (8.9)$$

где \bar{X} – случайный вектор определенной длины.

Значения параметра оптимизации $y(\bar{X}_h)$ и $y(\bar{X}_h + \bar{X})$ сравнивают между собой и затем выполняют рабочий шаг вдоль вектора \bar{X}' в направлении, в котором улучшается значение параметра оптимизации. Обычно длина рабочего шага превышает величину пробного.

На рис. 8.5 представлена графическая интерпретация метода случайного поиска.

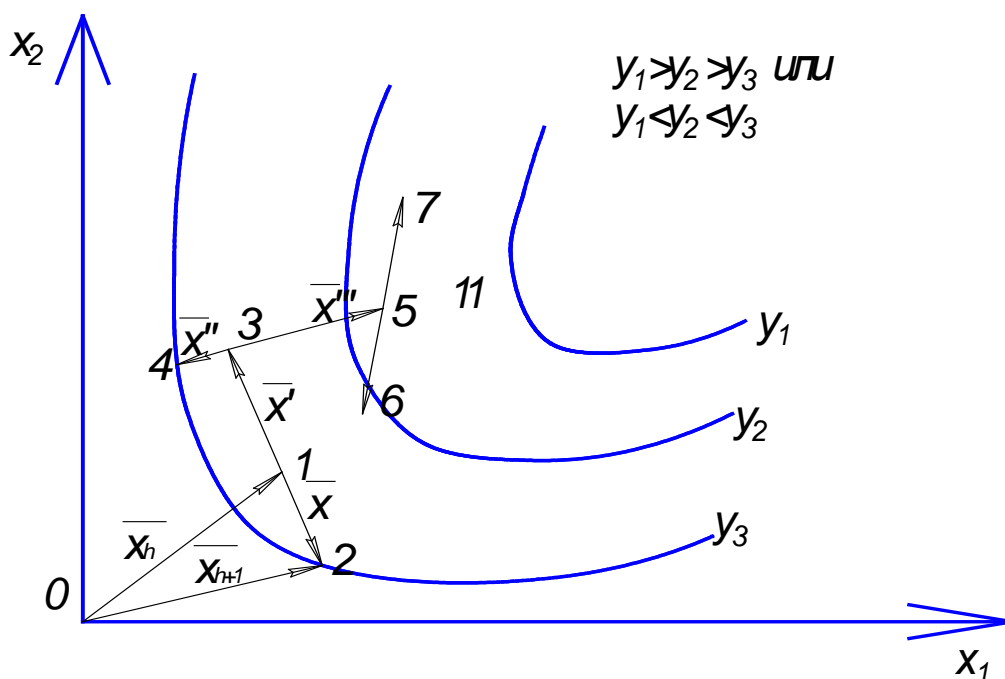


Рис. 8.5. Графическая интерпретация метода случайного поиска

Показателем выхода в область оптимизации функции отклика является возрастание количества опытов, не дающих улучшения параметра оптимизации.

Метод случайного поиска очень прост, но, очевидно, применим только для простых ситуаций. При большом числе факторов он весьма трудоемок и не обеспечивает быстрого поиска оптимальных условий изучаемого процесса.

8.5. МЕТОД СИМПЛЕКС-ПЛАНИРОВАНИЯ

Метод симплекс-планирования был предложен в 1962 г. Он основан на последовательном отражении в факторном пространстве правильного симплекса. Симплекс в k -мерном пространстве представляет собой выпуклый многогранник, образованный пересечением k -гиперплоскостей заданного пространства и имеющий $k + 1$ вершину. Число вершин на единицу больше, чем число факторов. Симплекс называется правильным, если расстояния между его вершинами равны между собой (рис. 8.6). Неправильный симплекс можно преобразовать в правильный путем кодирования факторов. На плоскости симплекс имеет вид правильного треугольника, в трехмерном пространстве – тетраэдра. Для целей оптимизации используют важное свойство симплекса – его отражение относительно одной из граней и построение новой вершины, противоположной старой относительно отражаемой грани. Таким последовательным отбрасыванием вершин (поворот симплекса вокруг грани, противоположной отброшенной вершине) и осуществляется перемещение симплекса в факторном пространстве (рис. 8.7). Следовательно, для построения нового симплекса, который представляет отражение предыдущего, требуется реализовать всего один опыт.

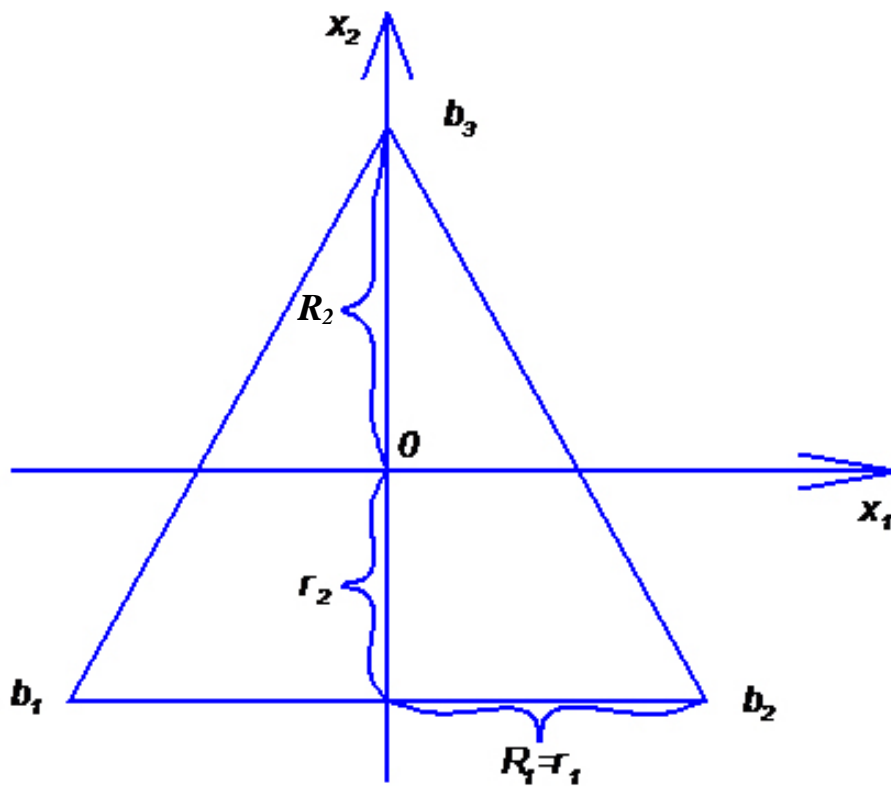


Рис. 8.6. Правильный симплекс (двухмерный) в ортогональной системе координат

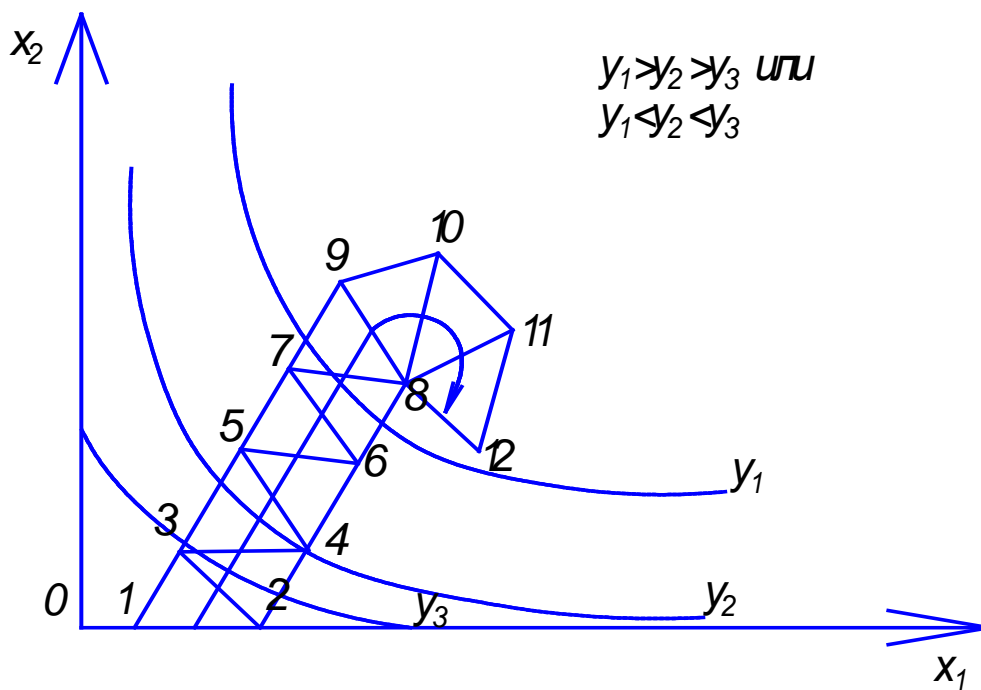


Рис. 8.7. Поиск оптимальной области метода симплексов

Например (рис. 8.7), если в точках 1, 2, 3 факторного пространства поставлен эксперимент и наихудшее значение параметра оптимизации оказалось в точке 1, то треугольник поворачивается вокруг сторон 2 – 3, в результате чего получают точку 4, в которой ставят очередной эксперимент. Из точек 2, 3, 4 выбирают наихудшую и снова делают поворот вокруг стороны, противоположащей наихудшей точке. Процедуру повторяют до тех пор, пока симплекс не начнет вращаться вокруг точки оптимума.

Исходный план, составляющий k -мерный симплекс с центром в начале координат, ориентирован таким образом, что одна из его вершин лежит на оси X_k , а остальные вершины расположились симметрично относительно координатных осей гиперплоскостей.

Первая задача при симплекс-планировании состоит в построении матрицы исходного симплекса – таблицы, в которой записаны координаты экспериментальных точек. Матрицу исходного симплекса строят путем последовательного перехода от одного симплекса к другому, увеличивая размерность симплекса на единицу. Координаты вершин симплекса можно определить из следующей матрицы:

$$X = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_i & r_{k-1} & r_k \\ -R_1 & r_2 & r_i & r_{k-1} & r_k \\ 0 & -R_2 & r_i & r_{k-1} & r_k \\ 0 & 0 & -R_i & r_{k-1} & r_k \\ 0 & 0 & 0 & -R_{k-1} & r_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_k \end{vmatrix}, \quad (8.10)$$

где r_i и R_i – соответственно радиусы вписанной и описанной гиперсферы для i -мерного симплекса. При стороне размерного симплекса, равного 1, радиусы гиперсфер, т. е. координат вершин симплекса, определяются по следующим формулам:

$$r_i = \frac{1}{\sqrt{2i(i+1)}}; \quad (8.11)$$

$$R_i = \sqrt{\frac{i}{2(i+1)}}, \quad (8.12)$$

где $i = 1, 2, 3, \dots, k$. Число опытов в симплексной матрице равно числу вершин симплекса.

В табл. 8.1 представлена матрица начального правильного симплекса с числовыми значениями его элементов.

Таблица 8.1

Номер вершин сим- плекса	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	...	X _k
1	0,5	0,289	0,204	0,158	0,129	0,109	0,0945		r_k
2	-0,5	0,289	0,204	0,158	0,129	0,109	0,0945		r_k
3	0	-0,578	0,204	0,158	0,129	0,109	0,0945		r_k
4	0	0	-0,612	0,158	0,129	0,109	0,0945		r_k
5	0	0	0	-0,632	0,129	0,109	0,0945		r_k
6	0	0	0	0	-0,645	0,109	0,0945		r_k
7	0	0	0	0	0	-0,654	0,0945		r_k
8	0	0	0	0	0	0	-0,661		r_k
k+1	0	0	0	0	0	0	0		$-R_k$

Примечание. k – число факторов.

После построения матрицы исходного симплекса решается вторая задача симплекс-планирования – движение в область оптимума. Перемещение симплекса в факторном пространстве осуществляется путем его поворота вокруг грани, противоположной вершине с минимальным значением параметра оптимизации. Координаты новой вершины определяются по формуле

$$X_{ij}^{k+2} = \frac{2}{k} \sum_{i=1}^k X_{ij} - X_{ij}^*, \quad (8.13)$$

или

$$X'_i = \frac{2}{k} [X_1 + X_2 + X_{p-1} + X_{p+1} + \dots + X_{k+1}] - X_p, \quad (8.14)$$

где X_{ij}^{k+2} , X'_i – координата новой точки; $\frac{2}{k} \sum_{i=1}^k X_{ij}$ – среднее из координат всех точек симплекса, кроме «плохой»; X_{ij}^* , X_p – координаты «плохой» точки (с минимальным значением отклика).

После построения нового симплекса и проведения опыта в найденной точке вновь решается вопрос о том, какая из точек может быть исключена.

Последовательное отображение различных величин симплекса приводит к тому, что центр симплекса перемещается по некоторой ломаной линии. Траектория его движения зависит от порядка, в котором отображаются вершины симплекса. Центр симплекса движется с максимальной скоростью, если порядок отображения вершин соответствует периодически повторяющемуся ряду всех вершин (рис. 8.8, а). Незаконмерная последовательность отображения вершин (некоторые вершины отображаются чаще остальных) замедляет движение центра симплекса (рис. 8.8, б).

При перемещении симплекса в факторном пространстве может возникнуть такое положение, когда во вновь полученной точке величина параметра оптимизации является минимальной, также и в точке, которая была исключена на предыдущем шаге. При отбрасывании этой точки происходит возврат к исходному симплексу, а далее начинают колебаться относительно одной грани (рис. 8.8, в). Подобное положение возможно, если вершины симплекса располагаются на гребне поверхности отклика. В этом случае рекомендуется уменьшить длину грани симплекса и эксперименты повторить.

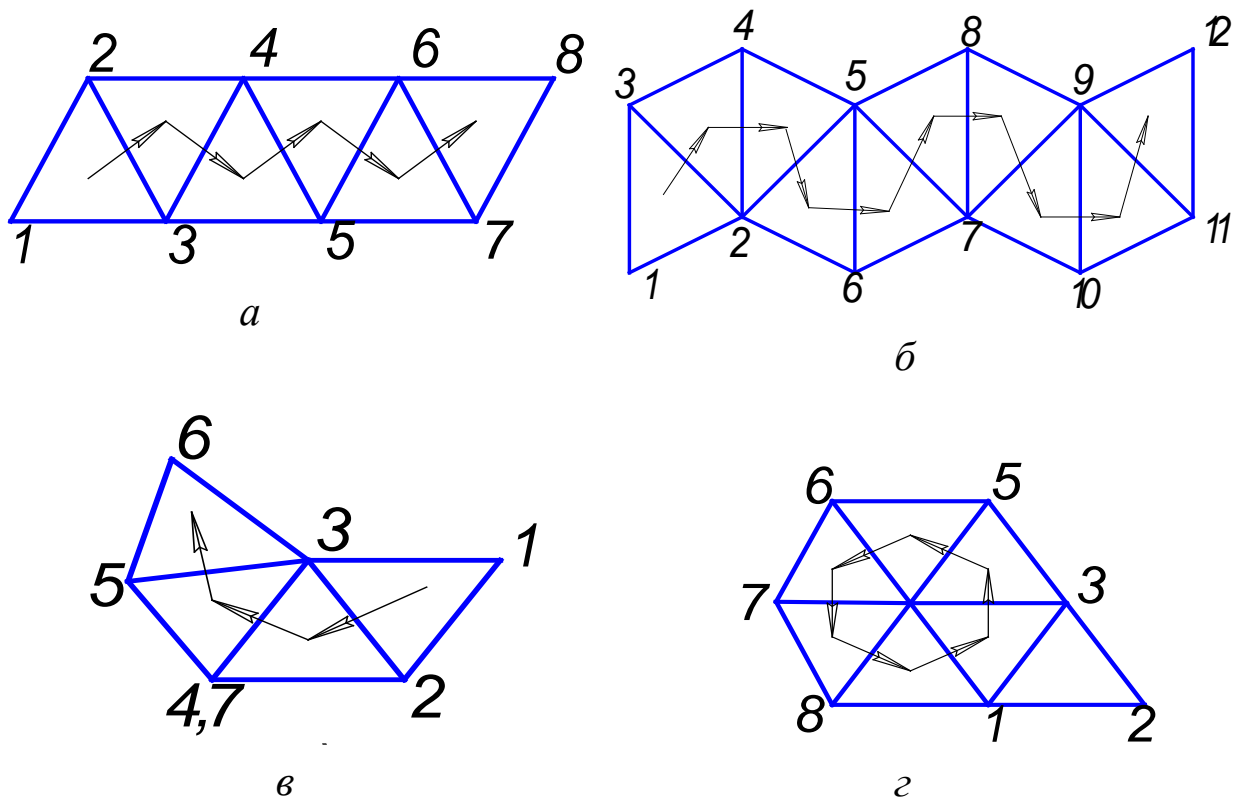


Рис. 8.8. Движение по поверхности отклика при симплекс-планировании:
 а – без ошибок; б – с образованием петли; в – с колебаниями; г – при зацикливании

При движении симплекса в факторном пространстве может наступить его вращение вокруг одной из вершин – зацикливание сим-

плекса (рис. 8.8, *з*). Это свидетельствует о том, что в результате движения достигнута область оптимума. Следует иметь в виду, что причиной заикливания симплекса может быть и ошибка эксперимента.

Симплекс-планирование является одним из наиболее эффективных методов поиска оптимальной области, однако данный метод обладает недостатками: не позволяет оценить влияние каждого фактора и их взаимодействий и дает ограниченное представление о поверхности отклика, кроме того, при этом методе невозможно обеспечить быстрое движение в области оптимума и получить высокую точность определения точки оптимума.

Для улучшения свойств симплекс-метода предложены его модификации. Например, используют алгоритм оптимизации с переменным размером симплекса, позволяющего определить с заданной точностью оптимальную точку в факторном пространстве.

8.6. ПРИМЕРЫ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Пример. Применение симплекс-планирования рассмотрим на примере оптимизации геометрических параметров концевых быстро-режущих фрез диаметром 22 мм и числом зубьев $z = 3$.

В качестве параметра оптимизации принята стойкость фрез T в минутах. Варьируемыми факторами выбраны геометрические параметры концевых фрез: задний угол α , передний угол γ , ширина ленточки зуба f . В табл. 8.2 представлены уровни факторов и интервалы их варьирования. Преобразование натуральных значений в кодовые (безразмерные) производилось по формуле (1.11).

Таблица 8.2

Факторы	Обозначения		Базовые значения факторов	Интервал варьирования
	кодовые	натуральные		
Задний угол, ...°	X ₁	α	14	4
Передний угол, ...°	X ₂	γ	15	6
Ширина ленточки, мм	X ₃	f	0,5	0,3

Первоначальный симплекс, представляющий правильный тетраэдр, был построен с центром в начале координат и расстояниями между вершинами, равными единице. Движение симплекса на основании результатов эксперимента можно проследить как по табл. 8.3, так и по рис. 8.9. При длине ребра трехмерного симплекса (тетраэдра), равной единице, координаты вершин симплекса были выбраны по табл. 8.1. Натуральные значения факторов в вершинах симплекса определяли по формуле

$$x_i = X_i \Delta x_i + x_{i0}, \quad (8.15)$$

Например, значение заднего угла в вершине *A* симплекса *ABCD*

$$\alpha_A = X_1 \Delta x_1 + x_{10} = X_1 \Delta \alpha + \alpha_0 = 0,5 \cdot 4 + 14 = 16^\circ.$$

Результаты испытаний фрез на стойкость приведены в табл. 8.3, из которой видно, что среди первых четырех опытов симплекса *ABCD* наименьшее значение стойкости *T* получилось в вершине *B*.

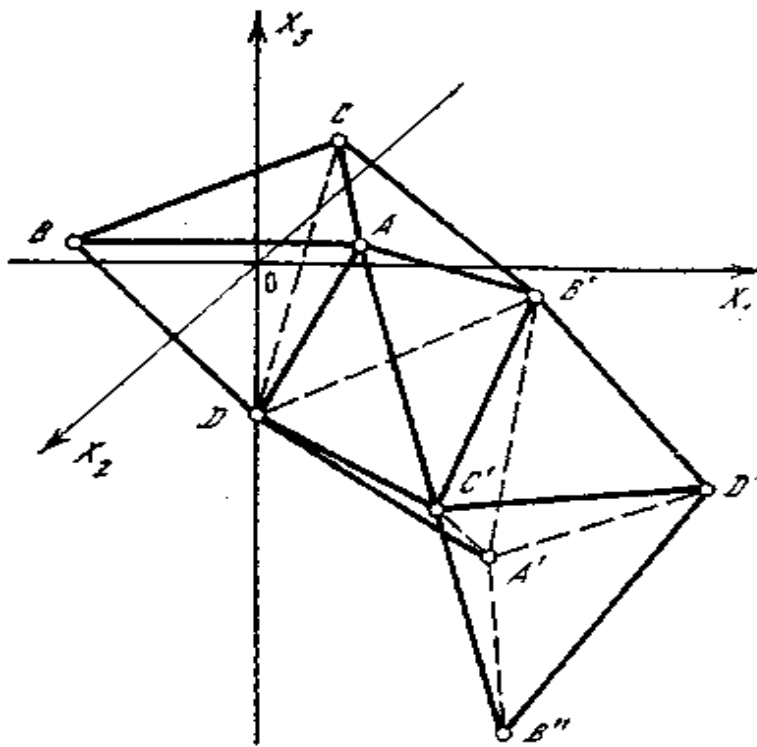


Рис. 8.9. Схема движения симплекса при оптимизации стойкости фрезы

Таблица 8.3

№ опыта	Симплекс	Вершина, в которой проводили опыт	Задний угол		Передний угол		Ширина ленточки		Среднее значение стойкости фрезы, мм
			Кодовое значение	Градусы	Кодовое значение	Градусы	Кодовое значение	мм	
1	$ABCD$	A	0,5	16	0,280	16,7	0,204	0,56	37,5
2	$ABCD$	B	-0,5	12	0,280	16,7	0,204	0,56	31,5
3	$ABCD$	C	0	14	-0,578	11,7	0,204	0,56	32,5
4	$ABCD$	D	0	14	0	15,0	-0,612	0,32	40,0
5	$ABCD$	B'	0,75	17	-0,483	12,1	-0,333	0,40	40,7
6	$ABCD$	C'	0,825	17,3	0,450	17,7	-0,70	-0,29	47,2
7	$AB'CD'$	A'	0,625	16,5	-0,300	13,2	-1,266	0,12	47,8
8	$AB'CD'$	D'	1,475	19,9	-0,217	13,7	-0,933	0,22	50,6
9	$AB''CD'$	B''	1,15	18,6	0,433	17,6	-1,60	0,02	67,0
10	$AB''C'D'$	C''	1,375	19,5	-0,500	12,0	-1,70	-0,01	-

Затем вершина B была отброшена и построен новый симплекс с новой точкой B , значение факторов в которой определяли по формуле (8.14). Например, для заднего угла зуба фрезы

$$X_1(B') = \frac{2}{3} [X_1(A) + X_1(C) + X_1(D)] - X_1(B) = \frac{2}{3}(16 + 14 + 14) - 12 = 17^\circ.$$

В точке B проводили опыт, значение которого представлено в табл. 8.3.

Затем отбрасывали точку с наименьшим значением стойкости T , т. е. точку C' , определяли координаты новой точки C' и проводили в ней опыт и т.д. В точке C'' опыты прекращались, так как возникало отрицательное значение ширины ленточки, что противоречит физическому смыслу. Наибольшее значение стойкости было получено при следующих значениях геометрических параметров фрез: задний угол $\alpha = 19^\circ$, передний угол $\gamma = 18^\circ$, ширина ленточки $f = 0,02$ мм. Для проверки результатов исследований были испытаны концевые фрезы с указанными геометрическими параметрами, близкими по значениям к оптимальным. Стойкость фрез оказалась равной 64–68 мин.

Итак, на основании всего десяти опытов методом симплекс-планирования были получены оптимальные геометрические параметры концевых фрез.

Пример. Для определения влияния температурных режимов (температуры и температурного градиента) на предел прочности полимерного материала был применен ПФЭ с последующим крутым восхождением. Исследования проводились на универсальной гидравлической испытательной машине типа УГ20/2 по ГОСТ 11262 – 76.

Для достижения и фиксации заданной температуры и температурного градиента в испытываемом образце была разработана и изготовлена термокамера специальной конструкции, в которую помещали

среднюю часть образца. Температурный режим создавали и поддерживали с помощью терморегулятора.

На основе априорных данных были выбраны основные уровни факторов (температуры и температурного градиента) и интервалы их варьирования. Условия планирования и реализации эксперимента по оптимизации предела прочности полимерного материала с помощью метода крутого восхождения представлены в табл. 8.4.

Для уменьшения систематических ошибок опыты по плану типа 2^2 проводили в случайном порядке. Для оценки ошибки эксперимента каждый опыт был осуществлен трижды. Статистическая проверка результатов эксперимента показала однородность дисперсии параллельных опытов. В табл. 8.4 указаны средние значения предела прочности полимерного материала. Далее определяли коэффициенты уравнения регрессии. В результате расчетов было получено линейное уравнение регрессии, связывающее предел прочности с варьируемыми факторами – температурным градиентом X_1 и температурой X_2 .

$$Y = 563 + 15X_1 - 93X_2 \quad . \quad (8.16)$$

Уравнение (8.16) оказалось адекватным при уровне значимости 0,05.

Затем рассчитывали произведение $b_i \Delta X_i$. Наибольшим оказалось произведение $b_2 \Delta X_2 = -1860$. Поэтому фактор X_2 был выбран за базовый. Выбирали параметр $\lambda = \frac{\mu}{|b_i|}$, где μ может принимать значения от

нуля до единицы. Принимали $\mu = 0,4$. Тогда $\lambda = \frac{0,4}{|-0,93|} = \frac{0,4}{93} = 0,0043$.

Далее определяли шаги при крутом восхождении. Для фактора X_1 шаг $\lambda (b_1 \Delta X_1) = 0,0043 \cdot 42 = 0,18 \approx 0,2$. Для фактора X_2 шаг $\lambda (b_2 \Delta X_2) = 0,0043 \cdot (-1860) = -8,0$.

Таблица 8.4

Последовательность этапов крутого восхождения	Факторы		Параметр оптимизации \bar{y} – предел прочности, кгс/см ²
	$grad t$, °С/мм	темпера- тура, °С	
1. Условия планирования эксперимента			
Основной уровень	4	50	
Интервал варьирования	2,8	20	
Верхний уровень	6,8	70	
Нижний уровень	1,2	30	
2. План эксперимента типа 2²			
Опыты: 1	-1	-1	640
2	+1	-1	673
3	-1	+1	457
4	+1	+1	483
Коэффициенты уравнения b_i	+15	-93	
Произведение $b_i \Delta X_i$	42	1860	
Параметр $\lambda = \frac{\mu}{ b_0 } = \frac{0,4}{ b_0 }$	-		
Шаг $\lambda = b_i \Delta X_i$	0,18	-8	
Шаг выбранный (округленный)	0,20	-8	
3. Опыты на линии крутого восхождения			
а) мысленный	4,2	42	633
б) реализованный	4,4	34	672
в) мысленный	4,6	26	678
г) реализованный	4,8	18	716
д) мысленный	5,0	10	786
е) реализованный	5,2	2	793

В табл. 8.4 представлены результаты движения по линии крутого восхождения. Для «мысленных» опытов использовали формулу (8.16). Для удобства расчетов кодовые значения факторов были переведены в натуральные путем декодирования. После декодирования полученная формула имела вид

$$\hat{y} = 774 + 5,4 \text{ grad } t - 4,56 t.$$

Сравнение результатов реализованных и «мысленных» опытов показывает некоторое расхождение: оно было вызвано не только ошибкой эксперимента, но и наличием квадратичных эффектов. Крутое восхождение было прекращено при температуре +2 °С. Дальнейшее исследование необходимо проводить при отрицательных температурах, что не входило в задачу исследования.

8.7. МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Наиболее важной функцией исследователя при проведении любых экспериментов (простых или сложных, с малыми или большими материальными затратами, с получением адекватных или неадекватных моделей) является принятие решения. Исследование поведения человека в процессе принятия решения в основном ограничивается задачами, связанными с выбором одного или нескольких независимых решений из ряда статистических вариантов, отличающихся друг от друга стоимостью и результатами.

Принимающий решение может и не знать всех доступных ему ответных реакций. Характеристики задач могут меняться с течением времени, и не всегда бывает ясно, какой момент для принятия реше-

ния является оптимальным. В многофункциональной системе принимающий решение специалист может отвечать лишь за какую-то часть решения по системе в целом. Часто исследователю приходится принимать решения в сложных ситуациях. Решения зависят от числа факторов, подробности плана, цели исследования (достижение оптимума, построение интерполяционной формулы) и т. д. Число возможных решений по примерной оценке может достигать нескольких десятков тысяч.

При разработке сложных систем (особенно это касается систем человек-машина) необходимо в процессе принятия решений изучать и моделировать поведение человека. Это вызвано следующими обстоятельствами.

1. Различные методики, технические средства отображения и обучения часто используются для того, чтобы усовершенствовать шаблонные методы принятия решений, используемые людьми. Для этого прежде всего необходимо иметь данные о том, как человек выполняет работу, и концептуальную структуру, в рамках которой можно интерпретировать его действия. Модели и переменные, описывающие действия человека, принимающего решение, должны быть совместимы с моделями и переменными, описывающими действия системы.

2. Автоматизированное принятие решений часто используется в сложных системах, при этом оно выполняется либо ЭВМ, либо самими людьми по заранее разработанному методу. Поэтому разработка лучших способов оценки субъективных знаний, величин и целей, которыми обладают люди, и введение их в методы принятия решений представляют собой важную техническую задачу.

3. Многие виды деятельности человека в системах человек-машина включают принятие решений в виде неявной составляющей. В таких случаях целесообразно иметь модели, связанные с принятием решений, даже если они предсказывают действия неточно.

Рассмотрим методы принятия решения, наиболее часто встречающиеся в практике.

Решение компромиссных задач. При изучении сложных технических систем во многих случаях возникает необходимость одновременного рассмотрения нескольких параметров оптимизации. В этих условиях решают компромиссные задачи – ведут поиск компромисса между несколькими параметрами оптимизации, так как на условный экстремум для одной поверхности отклика $y_i = f_i(x_i), i = \overline{1, k}$ налагаются ограничения другой поверхности $y_2 = f_2(x_i), i = \overline{1, k}$ или несколькими другими поверхностями отклика. При $k = 2$ эта задача решается просто графически. При большем числе независимых переменных задачу приходится решать, пользуясь методом неопределенных множителей Лагранжа. Для нахождения условного экстремума составляют вспомогательную функцию

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_k) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \tilde{f}_2(x_1, x_2, \dots, x_k), \quad (8.17)$$

где λ_i – множители Лагранжа, и решают систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= 0; \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= 0; \\ &\dots\dots\dots; \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \lambda \frac{\partial f_2}{\partial x_k} &= 0; \end{aligned} \quad (8.18)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

относительно переменных x_1, x_2, \dots, x_k и λ при некотором фиксированном значении y_2 .

Для двух критериев оптимизации решают систему уравнений (8.18). Если критериев больше двух, то для решения системы уравнений необходимо использовать ЭВМ. Применение этого метода позволяет успешно решать задачи, связанные с рассмотрением систем нелинейных уравнений, характеризующих различные свойства технических систем, в том числе как без ограничений, так и с ограничениями на критерии оптимизации.

Метод максимального правдоподобия. Сущность метода максимального правдоподобия заключается в нахождении таких оценок неизвестных параметров для принятия решения, для которых функция правдоподобия при случайной выборке объема будет иметь максимальное значение. Пусть на опыте получена выборка значений случайной величины x_1, x_2, \dots, x_k . Окружим каждую точку x_i окрестностью длиной ε . Вероятность поисков в интервале с границами p_{\min}, p_{\max} приближенно равна $x_i - \frac{1}{2}\varepsilon, x_i + \frac{1}{2}\varepsilon$. Если произведено $f(x_i)\varepsilon$ наблюдений, то вероятность того, что одновременно первое наблюдение попадает в первый интервал, второе – во второй и т. д., есть вероятность совместного осуществления событий. В силу независимости событий она равна произведению вероятностей:

$$p(x_1 b) f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k) \varepsilon^k. \quad (8.19)$$

В выражении (8.19) в качестве оценки следует взять то значение b из области допустимых значений параметра b^* , для которого эта вероятность принимает наибольшее возможное значение, т. е. корень уравнения

$$\frac{\partial p(x_1 b^*)}{\partial b^*} = 0,$$

представляющего собой необходимое условие экстремума вероятности. Достаточным условием максимума при этом является выполнение неравенства

$$\frac{\partial^2 p(x_1 b^*)}{\partial b^{*2}} < 0.$$

Если максимумов несколько, то необходимо выбрать среди них наибольший. Решение проще получить, если перейти к функции

$$L(x, b^*) = \ln \frac{p(x_1, b^*)}{\varepsilon^k} = \sum_{i=1}^k \ln f(x_i, b^*), \quad (8.20)$$

которая называется функцией правдоподобия. Вероятность p функции L имеет максимумы при одних и тех же значениях определяемых параметров, так как

$$\frac{\partial}{\partial b^*} \ln p = \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial b^*}; \quad p > 0.$$

Необходимым условием экстремума для функции (8.20) со многими переменными b_i^* ($i = \overline{1, k}$) является система уравнений

$$\frac{\partial L(x_1 b_1^*, b_2^*, \dots, b_k^*)}{\partial b_i^*} = 0 \quad (i = \overline{1, k}), \quad (8.21)$$

а неотрицательная определенность матрицы

$$\frac{\partial^2 L}{\partial b_i^* \partial b_j} \quad (i, j = \overline{1, k})$$

является достаточным условием того, чтобы этот локальный экстремум был максимумом функции правдоподобия.

Реализация метода максимального правдоподобия для принятия решения связана с большим количеством вычислений. Этим методом можно воспользоваться, если для решения системы (8.21) используются средства вычислительной техники. Значительно проще решается задача принятия решения с применением функции желательности.

Метод применения функции желательности. Метод применения функции желательности используется для решения задачи оптимизации процессов с большим количеством откликов. Для построения обобщенной функции желательности D предлагается преобразовать измеренные значения откликов в безразмерную шкалу желательности d . Простейшим является такое преобразование, в котором существуют верхний и нижний пределы спецификации, причем эти пределы являются единственным и недопускающим изменений критерием качества. Значение $d = 0$ (или $D = 0$) соответствует абсолютно неприемлемому значению данного отклика, а $d = 1$ ($D = 1$) – самому лучшему значению отклика, причем дальнейшее улучшение его или невозможно, или не представляет интереса.

Частная функция желательности при одностороннем ограничении имеет вид

$$d = \begin{cases} 0; y < y_{\min}; \\ l; y \geq y_{\min}. \end{cases} \quad (8.22)$$

Аналогичным образом получается частная функция желательности, если в спецификации задано ограничение сверху. Если для данного свойства существует двустороннее ограничение, то

$$d = \begin{cases} 0; y < y_{\min} \text{ и } y > y_{\max}; \\ l; y_{\min} \leq y \leq y_{\max}. \end{cases} \quad (8.23)$$

Если имеется несколько откликов, преобразованных в шкалу d , то можно с помощью арифметических операций скомбинировать из них некий обобщенный показатель желательности D . Математическим выражением, отвечающим этим требованиям, служит среднее геометрическое частных функций желательности, т. е.

$$D = \sqrt[k]{d_1 d_2 d_3 \dots d_k}. \quad (8.24)$$

С обобщенной функцией желательности D можно выполнять все вычислительные операции, как и с любым откликом системы, в частности можно использовать D в роли критерия оптимизации при исследовании параметров сложных систем. Очень эффективным оказывается применение обобщенной функции желательности для принятия решений, которое во многих случаях дает хорошие результаты. Эта функция не требует сложных вычислений и удобна для нахождения экстремумов функций откликов по информации, полученной в процессе проведения планирования эксперимента.

Использование функции полезности для принятия решения.

При последовательном планировании эксперимента исследователь может в известной степени контролировать распределение наблюдений, получаемых в процессе выбора и, следовательно, распределения своих выигрышей и затрат. Задача состоит в максимизации среднего значения некоторой функции выигрыша (доходов или убытков).

Если при сравнении двух векторов доходов каждый компонент первого вектора представляется более желательным, чем соответствующий компонент второго вектора, то, как правило, предпочтение отдается первому вектору. Если первый вектор выгоднее только в отношении некоторых своих компонентов, в то время как второй вектор предпочтительнее по другим компонентам, то не всегда очевидно, какому из этих двух векторов отдать итоговое предпочтение. Для окон-

чательного решения вопроса необходимо приписывать соответствующие веса отдельным компонентам. Например, при сравнении двух доходов $y_1 \in Y$ и $y_2 \in Y$ доход y_2 предпочтительнее y_1 , если выполняется условие $y_1 < y_2$.

Экспериментатор при решении практических задач не вполне свободен в выборе дохода. Обычно он может лишь выбирать из некоторого класса возможных распределений вероятностное распределение на Y , согласно которому будет определен его доход. Если имеется выбор между двумя случайными механизмами, один из которых составляет доход из Y согласно вероятностному распределению p_1 а другой – согласно вероятностному распределению p_2 , причем $p_1 < p_2$, тогда p_2 предпочтительнее p_1 .

Вещественная функция $u(y)$, заданная на множестве Y , для любого дохода y_i называется полезностью. Одно вероятностное распределение следует предпочесть другому лишь в том случае, если ожидаемая полезность получаемого дохода при первом распределении больше, чем при втором. Полезность вероятностного распределения – это ожидаемая полезность дохода, получаемого при этом распределении. По этой причине предположение о существовании функции полезности часто называют предположением о средней полезности.

Экспериментатор последовательно может наблюдать результаты в случайном порядке. Каждый раз после того, как просмотрено r ($1 \leq r \leq n$) опытов, он может упорядочить их по рангам от наиболее (ранг 1) до наименее предпочтительного (ранг n). По наблюдению очередных опытов экспериментатор определяет их ранги, включая их в уже имеющуюся шкалу рангов. Предположим, что $u(1) \geq u(2) \geq \dots \geq u_n$; $u(1) = 1$ и $u(b) = 0$ при $b = \overline{2, N}$. Тогда согласно такой функции полезности экспериментатор должен максимизировать вероятность выбора

опыта ранга 1 среди всех N опытов. В силу предположения о случайном порядке проведения опытов любой просматриваемый очередной z -й опыт с одинаковой вероятностью может принять значения $\overline{1, r}$ среди рангов r опытов. Если его ранг равен $b (b = \overline{1, r})$, то каждому из r значений b отвечает вероятность $1/r$.

В случае использования методов планирования экспериментов в качестве функции полезности может выступать функция отклика. Значения функции отклика $y_i = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, полученные в процессе проведения эксперимента или вычисленные по уравнению регрессии, можно представить в виде ранжированных рядов функций полезности $u(i) (i = \overline{1, N})$.

Функция отклика y_i характеризует качество исследуемой системы, а функция полезности $u(i)$ является мерой качества (или полезности). Наилучшее значение качества исследуемой системы (или полезности) соответствует наилучшему значению функции отклика (ранг этого события $r = 1$, а вероятность $1/r = 1/N$).

Экспериментатор на каждом шаге проведения эксперимента может принять два решения: 1) продолжить процесс наблюдения или прекратить его; 2) в случае решения продолжать, выбрать один из двух или большего числа экспериментов, доступных на этом шаге. Другими словами, всякий раз экспериментатор может выбирать из определенного класса случайных величин ту, которую на этом шаге он предпочитает наблюдать. Таким образом, можно утверждать, что современная теория планирования эксперимента, несмотря на то, что имеет много нерешенных вопросов, тесно связана с теориями численных методов, принятия решения и другими и прочно входит в практику инженерных исследований.

8.8. АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Проведение экспериментов для поиска оптимальных решений заключается в реализации некоторой вычислительной схемы определения экстремумов неизвестной функции отклика на заданном множестве точек факторного пространства. При решении этих задач используют различные принципы организации эксперимента: пассивную регистрацию данных эксперимента; проведение активного эксперимента с различными видами управления объектом исследований; одновременное использование методов пассивного и активного экспериментов. При этом исследователи встречаются с необходимостью регистрации большого объема информации, проведения большого количества вычислений различной сложности и различных работ для получения и оформления конечных результатов эксперимента. Многие из указанных работ приходится выполнять вручную, что приводит к существенному увеличению сроков получения результатов эксперимента и значительно снижает производительность труда исследователей. Это определяет необходимость автоматизации экспериментальных исследований.

Одна из конструкций, позволяющая строить математические модели сложных систем при минимальных затратах на эксперимент (на обработку экспериментальной информации), основана на использовании методов планирования эксперимента и ЭВМ. Методика проведения планирования эксперимента с использованием ЭВМ включает в себя следующие этапы: сбор и ввод в ЭВМ исходной информации для машинной обработки эксперимента; обработку экспериментальной информации по схеме полного факторного эксперимента; обработку экспериментальной информации по схеме планов для квадра-

тичных моделей; решение задач отыскания оптимальных параметров исследуемых систем и принятие решения по результатам эксперимента; решение задач адаптационной оптимизации. В системе автоматизированного эксперимента (с использованием ЭВМ), несмотря на то, что многие трудоемкие процессы возложены на ЭВМ, исследователь выполняет вручную такие операции, как планирование, организацию и проведение эксперимента; введение исходной информации в ЭВМ для обработки результатов эксперимента; контроль правильности выполнения плана эксперимента и внесение изменений в план (уточнение плана эксперимента); контроль достоверности получаемой информации об объекте исследования и уточнение исходной и текущей информации и т. д.

Если в состав рабочего места экспериментатора включить, кроме ранее используемого оборудования в автоматизированном эксперименте (исследуемый объект или его макет и ЭВМ), дополнительно средства автоматического измерения и отображения информации, а также аппаратуру сопряжения и управления измерительным (или его можно назвать контрольно-измерительным) комплексом, то многие из перечисленных операций можно автоматизировать, т. е. реализовать «машинный эксперимент».

Важной составной частью комплекса средств автоматизации эксперимента является его программное (или математическое) обеспечение. Разработка математического обеспечения (МО) для всего комплекса программ, реализующих методы и алгоритмы планирования эксперимента, составляет 60–70 % трудоемкости всех работ по созданию и внедрению комплекса средств автоматизации эксперимента. Как видно из практики, затраты времени на отдельные операции при разработке программы распределяются следующим образом: разработка алгоритмов и программирование – 30...40 %; автономная

отладка отдельных блоков и модулей программ – 10...20 %; комплексная отладка программы в целом – до 50 %. Поэтому к разработке МО предъявляются следующие требования:

- ориентация средств МО на класс задач, решаемых системой, и на тип используемых в системе ЭВМ;
- программирование задач в системе наиболее эффективным способом (необходимо ориентироваться на новейшие достижения в автоматизации программирования и выбирать наилучшие решения из существующих);
- разработка набора специальных языков эксперимента, обеспечивающих удобство постановки задач непосредственно исследователями, ведущими эксперименты в определенной области науки;
- ориентация на модульность программирования, что позволяет свести создание программ к синтезу соответствующих модулей;
- построение МО по иерархическому принципу, что позволяет упростить пользование большим числом взаимозависимых программ различной функциональной сложности;
- предоставление экспериментаторам максимальных удобств, простоты и наглядности при проведении экспериментальных исследований;
- обеспечение возможности поэтапного внедрения МО системы;
- обеспечение типовости МО (программных средств ввода-вывода, контроля, обработки данных, библиотеки стандартных подпрограмм);
- тщательное составление и подготовка документации по МО (описание алгоритмов, структурной схемы программ и инструкции), чем обеспечиваются его доступность и удобство использования.

Математическое обеспечение может быть общесистемным, машинным и специальным. Общесистемное МО – это совокупность программ, обеспечивающих ее нормальное функционирование сис-

темы, оптимальное решение всех задач. К нему относятся программы, реализующие организацию взаимодействия ЭВМ, входящих в систему, координацию работы этих машин и разнообразных внешних устройств и информационного обмена между ними. Машинное МО предназначено для организации вычислительного процесса в определенной машине, входящей в состав системы, эффективного использования оборудования, предоставления пользователям широкого круга средств для программирования. Специальное МО представляет собой пакеты специфических задач конкретной системы, например комплекса автоматизации эксперимента. Для построения специального МО используются средства машинного и общесистемного МО.

Комплексы автоматизации эксперимента в десятки и даже сотни раз ускоряют проведение экспериментов и повышают надежность получаемых данных. Использование «машинных экспериментов» стало мощным средством математической оценки соответствия модели и объекта.

9. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ ПЛАНОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

9.1. ПОСТРОЕНИЕ ПЛАНОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Очень часто невозможно описать процесс математической моделью первого порядка ввиду ее неадекватности. В частности, методы планирования эксперимента, основанные на локально-линейном приближении поверхности отклика с помощью планов первого порядка, не дают возможности детально изучить область оптимизации. Значительная кривизна поверхности отклика, как правило, не позволяет описать ее линейным уравнением даже в весьма узкой области факторного пространства.

В таких случаях необходимо описать исследуемый процесс с помощью полиномов более высоких порядков, например второго, имеющего следующий вид:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i \neq j}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_i x_{ii}^2 \dots \quad (9.1)$$

Для трех факторов уравнение имеет вид

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2. \quad (9.2)$$

Для математического описания процессов с помощью уравнения второго порядка необходимо применять такие планы эксперимента, в которых каждый фактор можно варьировать не менее чем на трех уровнях и выполнять условия получения отдельных оценок всех ко-

коэффициентов уравнения по результатам запланированного эксперимента. Следовательно, число опытов должно быть не менее чем число коэффициентов, равное числу сочетаний из $k + 2$ по два, так как

$$N \geq C_{k+2}^2 = \frac{(k+2)(k+1)}{2}. \quad (9.3)$$

Простейшим решением данной задачи является использование ПФЭ типа 3^k . Но это решение будет далеко не лучшим, особенно при $k > 3$, так как для реализации такого экспериментального плана требуется большое число опытов.

Для сокращения числа опытов для планов второго порядка предложено использовать в качестве ядра ортогональные планы первого порядка (ПФЭ 2^k илиДФЭ 2^{k-p}), а затем достраивать их до планов второго порядка. Такие планы получили название **композиционных**. Они соответствуют идее шагового поиска при нахождении оптимума функции. (Действительно, попав в область экстремума, экспериментатор реализует план первого порядка, проверяя гипотезу линейной аппроксимации. Убедившись в несостоятельности этой гипотезы, он делает следующий шаг – достраивает план первого порядка до плана второго порядка, реализует его и проверяет гипотезу об адекватности уравнения второго порядка.)

Рассмотрим принцип построения композиционного плана второго порядка.

В зависимости от того, какие точки добавляют к плану первого порядка, различают **центральные** и **нецентральные композиционные планы второго порядка**.

Центральное композиционное планирование используют, когда точки оптимума находятся внутри гиперкуба, образованного планом первого порядка. План такого вида получается добавлением к ядру плана точки в центре плана (центральная точка) с координатами $(0, 0..0)$

и так называемых «звездных» точек, расположенных на всех k осях – факторах по обе стороны от центра плана (базовой точки) на расстоянии α . Расстояние от центра плана до «звездной» точки (α) называют «звездным плечом» (рис. 9.1).

Общее число экспериментальных точек (опытов) определяется по формуле

$$N = N_{\text{я}} + N_{\alpha} + N_0, \quad (9.4)$$

где $N_{\text{я}}$ – число точек ядра (факторного планирования $N_{\text{я}} = 2^k$ или $N_{\text{я}} = 2^{k-p}$); N_{α} – число «звездных точек» ($N_{\alpha} = 2k$, k – число факторов); N_0 – число точек (опытов) в центре плана.

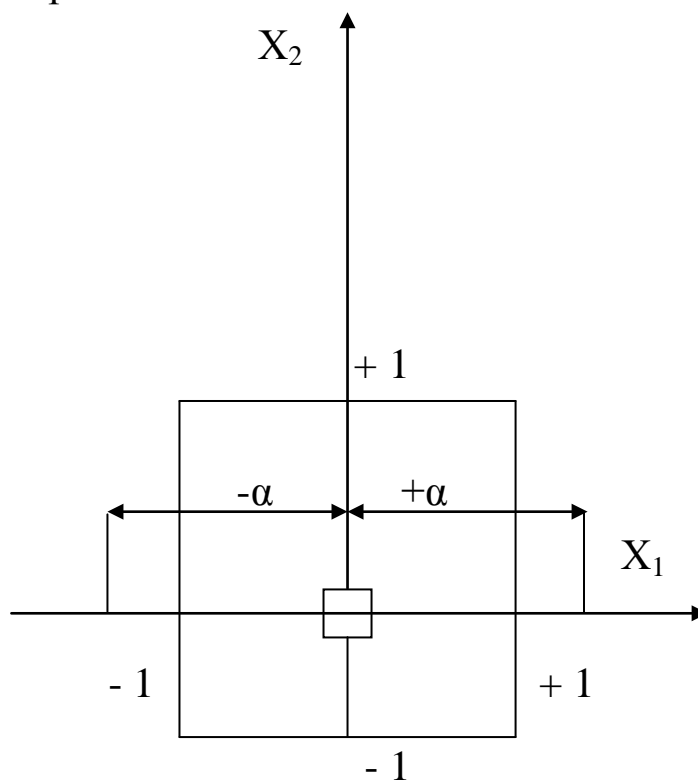


Рис. 9.1. Геометрическая интерпретация композиционных планов второго порядка

Такое планирование требует значительно меньшего числа опытов, чем ПФЭ. Так, например, при $k = 4$ число опытов при ПФЭ $N = 81$, тогда как для композиционного планирования $N = 25$.

В центральном композиционном плане варьирование независимых переменных осуществляется на пяти уровнях: $-\alpha$; -1 ; 0 ; $+1$; $+\alpha$.

Значение «звездного плеча» α выбирается из условия выполнения критерия оптимальности плана. Из этих же соображений выбирают число центральных точек N_0 .

Центральные композиционные планы в зависимости от критерия оптимальности бывают двух видов:

1) **ортогональные**, для которых критерием оптимальности является ортогональность всех вектор – столбцов матрицы планирования, что обеспечивает независимость оценок коэффициентов уравнения регрессии (в том числе и при квадратичных членах);

2) **ротатабельные**, для которых критерием оптимальности служит одинаковая точность прогнозирования функции отклика по уравнению регрессии в любом направлении исследуемой области факторного пространства на равном расстоянии от центра плана, обеспечивающие равномерное распределение информации по гиперсфере, центр которой совпадает с центром плана (базовой точкой).

Нецентральные композиционные планы находят применение в том случае, если область оптимизации находится вне гиперкуба, построенного ядром плана первого порядка.

Некомпозиционные планы второго порядка используют при наличии достаточной информации о кривизне поверхности отклика, позволяющей реализовать план второго порядка непосредственно на первом этапе исследования.

В настоящее время предложено большое число планов эксперимента для описания процессов с помощью уравнений второго порядка. Выбор плана второго порядка целесообразно обосновывать для каждой конкретной задачи, учитывая цель, условия проведения эксперимента, критерии оптимальности.

9.2. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ КОМПОЗИЦИОННЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ (ЦКОП) ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ортогональные планы являются наиболее простыми из планов второго порядка, так как позволяют упростить расчеты при оценке коэффициентов уравнения и оценке их ошибок. Один из существенных их недостатков состоит в том, что они не являются ротатабельными. Ортогональное планирование связано с преобразованием модели (9.1) к виду

$$y = b'_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i \neq j} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} (x'_i)^2, \quad (9.5)$$

$$b'_0 = b_0 + \lambda_2 \sum_{i=1}^k b_{ii}, \quad (9.6)$$

$$(x'_i)^2 = x_i^2 - \lambda_2, \quad (9.7)$$

где λ_2 – момент второго порядка, выражаемый формулой

$$\lambda_2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_{iu}^2}{N}, \quad (9.8)$$

где N – общее число опытов.

Наиболее распространены симметричные ЦКОП, содержащие всего один опыт в центре ($N_0 = 1$). Характеристики таких планов приведены в табл. 9.1.

Характеристики некоторых симметричных ЦКОП

Параметры	Число факторов k			
	2	3	4	5
Ядро плана	2^2	2^3	2^4	Полуреплика 2^{5-1} $1 \equiv x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$
Число опытов в ядре ($N_{я}$)	4	8	16	16
Звездное плечо (α)	1,000	1,215	1,414	1,547
Число звездных точек ($2 \cdot k$)	4	6	8	10
Число опытов в центре (N_0)	1	1	1	1
Общее число опытов (N)	9	15	25	27
a_1	0,11111	0,06667	0,04	0,03704
a_2	0,16667	0,9141	0,05	0,04811
a_3	0,25	0,125	0,0625	0,0625
a_4	0,5	0,23041	0,125	0,0722
a_5	0,33333	0,25820	0,2	0,19245
a_6	0,40825	0,30234	0,22361	0,21934
a_7	0,5	0,35355	0,25	0,25
a_8	0,70711	0,48001	0,35355	0,2687

Примечание: общее число опытов N принято без учета числа повторных опытов для расчета дисперсии опыта (воспроизводимости) $S_{(y)}^2$, $S_{восп}^2$ (см. п. 6.3).

Коэффициенты модели (9.5), их дисперсии и среднеквадратические отклонения рассчитываются по следующим формулам (коэффициенты $a_1 \dots a_8$ – см. табл. 9.1).

$$\left. \begin{aligned}
 b'_0 &= a_1 \sum_{u=1}^N y_u; & b_i &= a_2 \sum_{u=1}^N x_{iu} y_u \\
 b_{ij} &= a_3 \sum_{u=1}^N (x_i x_j)_u y_u; & b_{ii} &= a_4 \sum_{u=1}^N (x'_i)_u^2 y_u \\
 S_{b'_0}^2 &= a_1 \cdot S_y^2; & S_{b'_i} &= a_5 \cdot S_y; & S_{b_i}^2 &= a_2 \cdot S_y^2 \\
 S_{b_i} &= a_6 \cdot S_y; & S_{b_{ij}}^2 &= a_3 \cdot S_y^2; & S_{b_{ij}} &= a_7 \cdot S_y \\
 S_{b_{ii}}^2 &= a_4 \cdot S_y^2; & S_{b_{ii}} &= a_8 \cdot S_y
 \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

Коэффициент b_0 определяется по формуле

$$b_0 = b'_0 - \frac{a_1}{a_2} \sum_{i=1}^k b_{ii}, \quad (9.10)$$

а его дисперсия – по формуле

$$S_{b_0}^2 = S_{b'_0}^2 + \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 k S_{b_{ii}}^2. \quad (9.11)$$

Для ЦКОП выполняется условие ортогональности, т. е. независимости получения оценок управления регрессии и их дисперсий, что позволяет сократить объем вычислительной работы. Кроме то-

го, в случае статистической незначимости коэффициента регрессии он может быть исключен без пересчета остальных коэффициентов.

9.3. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ КОМПОЗИЦИОННЫЕ РОТАТАБЕЛЬНЫЕ УНИФОРМ-ПЛАНЫ (ЦКРУП) ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ротатабельные планы позволяют получить более точную, чем ортогональные планы, модель, но при этом они более трудоемки, чем первые. В зависимости от числа опытов в центре план эксперимента можно сделать почти ортогональным или равномерным. **Униформность плана** – это независимость дисперсии параметра оптимизации от расстояния, измеряемого до центра области планирования эксперимента.

Ротатабельный план строится аналогично ортогональному. Параметры ЦКРУП приведены в табл. 9.2.

Таблица 9.2

Параметры ЦКРУП

Число факторов k	Число опытов в ядре 2^k	Число «звездных точек» $2k$	Число опытов в центре плана N_0	Звездное плечо α	Общее число опытов N
2	4	4	5	1,414	13
3	8	6	6	1,682	20
4	16	8	7	2,0	31
5*	16	10	6	2,0	32

Примечание: * – для получения полуреплики 2^{5-1} .

Коэффициенты модели (9.1) рассчитываются по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= C_1 \sum_{u=1}^N y_u - C_2 \sum_{i=1}^K \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 y_u \\ b_i &= C_3 \sum_{u=1}^N x_{iu} y_u; \quad b_{ij} = C_4 \sum_{u=1}^N (x_i x_j)_u y_u \\ b_{ii} &= C_5 \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 y_u + C_6 \sum_{i=1}^K \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 y_u - C_2 \sum_{u=1}^N y_u \end{aligned} \right\}, \quad (9.12)$$

где значения коэффициентов $C_1 \dots C_6$ приведены в табл. 9.3.

Таблица 9.3

Вспомогательные константы для ротатбельных планов

C_i	Число факторов k			
	2	3	4	5
C_1	0,2	0,16635	0,14287	0,15909
C_2	0,1	0,0568	0,03571	0,03409
C_3	0,125	0,07322	0,04167	0,04167
C_4	0,25	0,125	0,0625	0,0625
C_5	0,125	0,0625	0,03125	0,03125
C_6	0,01875	0,00689	0,00372	0,00281
C_7	0,44721	0,40786	0,37798	0,39886
C_8	0,35355	0,27059	0,20413	0,20413
C_9	0,5	0,35355	0,25	0,25
C_{10}	0,37914	0,26342	0,18702	0,18456

Дисперсии в определении соответствующих коэффициентов регрессии рассчитываются по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} S_{b_0}^2 &= C_1 S_y^2; & S_{b_0} &= C_7 S_y; & S_{b_i}^2 &= C_3 S_y^2 \\ S_{b_i} &= C_8 S_y; & S_{b_{ij}}^2 &= C_4 S_y^2; & S_{b_{ij}} &= C_9 S_y \\ S_{b_{ii}}^2 &= (C_5 + C_6) S_y^2; & S_{b_{ii}} &= C_{10} S_y \end{aligned} \right\}, \quad (9.13)$$

где значения коэффициентов $C_1 \dots C_{10}$ приведены в табл. 9.3.

При использовании ротатабельных планов доверительные интервалы коэффициентов регрессии рассчитываются по формуле

$$\Delta b_i = t_{\alpha; f_1} S_{b_i}, \quad (9.14)$$

где t – критерий Стьюдента для выбранного уровня значимости α и числа степеней свободы f_1 при определении дисперсии опыта S_y^2 ; S_{b_i} – среднеквадратическая ошибка в определении коэффициента регрессии.

9.4. ЭТАПЫ ПРОВЕДЕНИЯ ПЛАНИРУЕМОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим основные этапы проведения планируемого эксперимента второго порядка на примере проведения ЦКРУП второго порядка для трех влияющих факторов.

9.4.1. Выбор параметра оптимизации, наиболее существенных факторов, интервалов и уровней варьирования

Данный этап выполняется в соответствии с рекомендациями, изложенными ранее (см. гл. 6).

Обозначим исследуемый параметр оптимизации y , три влияющих фактора $A(X_1)$, $B(X_2)$, $C(X_3)$. В соответствии с рекомендациями, изложенными в п. 9.2 для ЦКРУП второго порядка, звездное плечо $\alpha = 1,682$. Для принятых основного уровня и интервалов варьирования факторов A , B , C составляется таблица условий эксперимента (табл. 9.4).

Таблица 9.4

Условия эксперимента

Уровни факторов	Натурные значения		
	A	B	C
Основной уровень (0)	A0	B0	C0
Интервал варьирования	A1	B1	C1
Верхний уровень (+1)	A2	B2	C2
Нижний уровень (-1)	A3	B3	C3
Звездные точки:			
(+1, 682)	A4	B4	C4
(-1, 682)	A5	B5	C5

Уровни варьирования факторов из табл. 9.4 рассчитываются по формулам

$$A2 = A0 + A1; \quad (9.15)$$

$$A3 = A0 - A1; \quad (9.16)$$

$$A4 = A0 + 1,682 \cdot A1; \quad A5 = A0 - 1,682 \cdot A1 \quad (9.17)$$

(аналогично для факторов B, C).

Графическая интерпретация уровней варьирования на плоскости может быть представлена для двух факторов А и В (рис. 9.2).

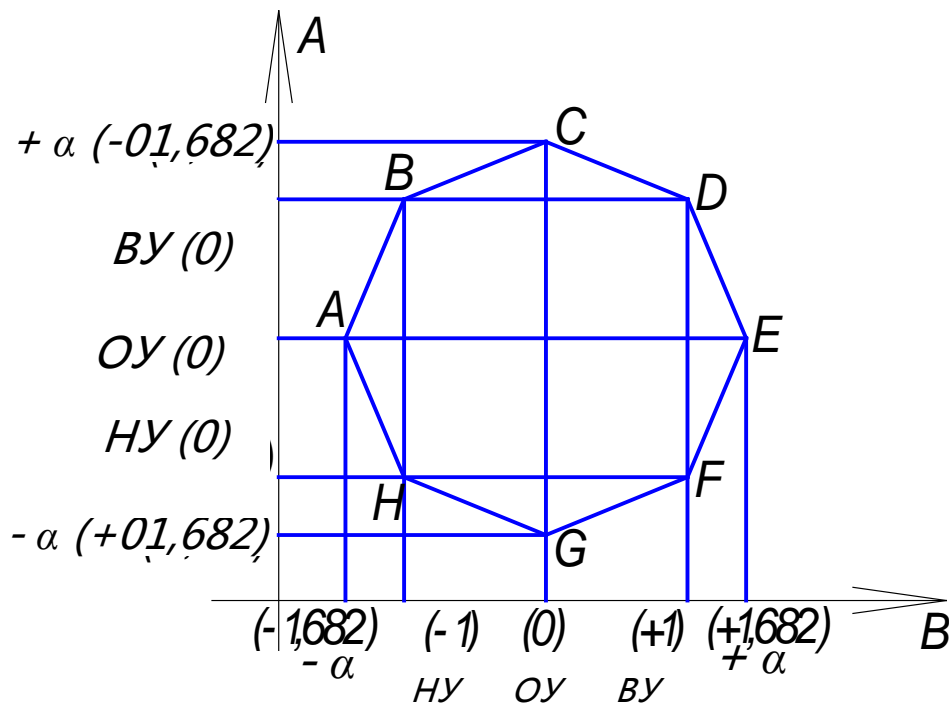


Рис. 9.2. Графическая интерпретация исходных условий эксперимента по факторам А и В: т.т. В, Д, F, Н – «ядро» плана; т.т. А, С, Е, G – «звездные точки»

9.4.2. Составление плана эксперимента

Построение матрицы ЦКРУП второго порядка производится в соответствии с рекомендациями, изложенными в п. 9.2. Матрица планирования представлена в табл. 9.5.

Матрица включает 8 опытов полного факторного эксперимента (опыты 1–8), 6 опытов в «звездных точках» (опыты 9–14) и 6 опытов в центре плана (опыты 15–20). Переход от натуральных значений факторов к кодовым и наоборот производится по формуле (1.11).

Таблица 9.5

Матрица ЦУРУП второго порядка

№ опыта	Уровни факторов															Примечание			
	В кодированном масштабе															В натуральном масштабе		У _{эксп}	У _{расч}
	X ₀	X ₁	X ₂	X ₃	X ₁ X ₂	X ₁ X ₃	X ₂ X ₃	X ₁ ²	X ₂ ²	X ₃ ²	A	B	C						
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15				
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	A2	B2	C2			Полный факторный эксперимент 2 ³			
2	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+	+	+	A3	B2	C2						
3	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+	+	+	A2	B3	C2						
4	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+	+	+	A3	B3	C2						
5	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+	+	+	A2	B2	C3						
6	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+	+	+	A3	B2	C3						
7	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+	+	+	A2	B3	C3						
8	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+	+	+	A3	B3	C3						
9	+1	+1,682	0	0	0	0	0	+2,83	0	0	A4	B0	C0			«Звездные точки»			
10	+1	-1,682	0	0	0	0	0	+2,83	0	0	A5	B0	C0						
11	+1	0	+1,682	0	0	0	0	0	+2,83	0	A0	B4	C0						
12	+1	0	-1,682	0	0	0	0	0	+2,83	0	A0	B5	C0						
13	+1	0	0	+1,682	0	0	0	0	0	+2,83	A0	B0	C4						
14	+1	0	0	-1,682	0	0	0	0	0	+2,83	A0	B0	C5						
15	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	A0	B0	C0			Опыты в центре плана			
16	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	A0	B0	C0						
17	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	A0	B0	C0						
18	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	A0	B0	C0						
19	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	A0	B0	C0						
20	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	A0	B0	C0						

9.4.3. Реализация плана эксперимента

Эксперименты проводятся в соответствии с условиями опытов, представленными в столбцах 11, 12, 13 матрицы (табл. 9.5), с помощью рандомизации опытов во времени (см. п. 6.3.3).

Каждый опыт проводится три раза в случайной последовательности. Средние значения параметров оптимизации по каждому опыту записываются в столбец 14 матрицы (табл. 9.5).

9.4.4. Расчет коэффициентов регрессии и оценка их статистической значимости

Расчет коэффициентов регрессии модели (9.1) производится по формулам (9.12).

Определение дисперсии опыта (воспроизводимости опытов) производится по результатам шести опытов (опыты 15–20 в табл. 9.5) на основном уровне (см. п. 6.3).

Расчет доверительных интервалов для коэффициентов регрессии производится по формуле (9.14).

Проверка статистической значимости коэффициентов проводится сравнением абсолютной величины коэффициентов регрессии $b_0, b_1, b_2, b_3, b_{12}, b_{13}, b_{23}, b_{11}, b_{22}, b_{33}$ с соответствующими доверительными интервалами $\Delta b_i, \Delta b_{ij}, \Delta b_{ii}$. Коэффициенты признаются статистически значимыми в случае превышения абсолютной величины коэффициента значения соответствующего доверительного интервала. Статистически незначимые коэффициенты в модель не включаются.

9.4.5. Проверка адекватности модели по F-критерию

Модель (9.1), полученная с учетом статистически значимых коэффициентов, проверяется на адекватность по F-критерию по формуле

$$F_{f_2, f_1}^{расч} = \frac{S_{ад}^2}{S_y^2}, \quad (9.18)$$

где S_y^2 – дисперсия опыта, найденная ранее (п. 9.4.4); $S_{ад}^2$ – дисперсия адекватности, определяемая по формуле

$$S_{ад}^2 = \frac{SS_{ост.} - SS_{\bar{y}}}{f_2}, \quad (9.19)$$

где $SS_{ост.}$ – остаточная сумма квадратов дисперсии неадекватности; $SS_{\bar{y}}$ – сумма квадратов дисперсии опытов (см. п. 9.4.4); f_2 – число степеней свободы при определении $S_{неад}^2$.

$$f_2 = N - k' - f_1, \quad (9.20)$$

где $N = 20$ – общее число опытов; k' – число статистически значимых коэффициентов полученной модели; $f_1 = 5$ – число степеней свободы, использованное при оценке дисперсии опыта (п. 9.4.4).

Значение $SS_{ост.}$ определяется из табл. 9.6.

Таблица 9.6

№ опыта	Y_u эксп.	Y_u расч.	$\Delta y = y_{u\dots\text{эксп}} - y_{u\dots\text{расч.}} $	Δy^2
1				
2				
.				
20				
				$SS_{ост}$

В табл. 9.6 $y_{\text{эксп.}}$ – экспериментально полученные значения параметра оптимизации (табл. 9.5, столбец 14); $y_{\text{расч.}}$ – расчетные значения параметра оптимизации, полученные с помощью найденной модели.

Таким образом, $SS_{ост}$ определяется по формуле

$$SS_{ост.} = \sum_{u=1}^N \left(y_{u \text{ эксп}} - y_{u \text{ расч.}} \right)^2. \quad (9.21)$$

Рассчитанное по формуле (9.18) значение F-критерия сравнивается с табличным значением F-критерия, выбираемым для определенного уровня значимости α при числе степеней свободы в числителе f_2 и в знаменателе f_1 . Гипотеза об адекватности найденной модели не отвергается при уровне значимости α , если выполняется условие

$$F_{расч} \leq F_{табл}.$$

9.4.6. Анализ квадратичной модели

Планирование второго порядка заканчивается отысканием адекватного квадратичного уравнения типа (9.1). Часть членов, признанных статистически незначимыми, может в этом уравнении отсутство-

вать. На следующем этапе производится анализ полученной модели с целью изучения характера изменения отклика в изученной области, а при решении экстремальной задачи следует попытаться выяснить, существует ли экстремум, и если он есть, найти его координаты.

Одним из наиболее простых способов анализа модели (9.1) является графический. При этом предварительно расчетные значения параметра оптимизации $y_{расч.}$ из табл. 9.6 переносятся в столбец 15 исходной матрицы ЦКРУП 2 порядка (табл. 9.5). Затем, используя $y_{расч.}$, производят следующие построения (для рассмотренного в п. 9.4 ЦКРУП второго порядка для трех факторов):

1) по точкам строятся графики зависимостей параметра оптимизации последовательно от каждого исследуемого фактора, т. е. $y_{расч.} = f(A)$, $y_{расч.} = f(B)$, $y_{расч.} = f(C)$ при постоянных значениях других факторов, взятых на основных уровнях; например, при построении зависимости $y_{расч.} = f(A)$ используются значения $y_{расч.}$, взятые в опытах 9, 10 и 15 (значения $y_{расч.}$ для 15-20 опытов одинаковы);

2) по точкам строятся три поверхности отклика для параметра оптимизации в трехкоординатном пространстве, принимая за две оси координат на горизонтальной плоскости, например, значения факторов А и В (согласно исходных условий по рис. 9.1), а за вертикальную ось – параметр оптимизации y ; при этом указанные выше поверхности отклика строятся для следующих случаев:

а) при постоянном значении фактора $C = C3$ (нижний уровень фактора С); учитываются значения $y_{расч.}$ для опытов 5–8;

б) при постоянном значении фактора $C=C0$ (основной уровень фактора С) учитываются значения $y_{расч.}$ для опытов 9, 12, 15;

в) при постоянном значении фактора $C=C2$ (верхний уровень фактора С); учитываются значения $y_{расч.}$ для опытов 1–4.

Другим способом анализа полученной модели (9.1) является преобразование ее к так называемому каноническому (стандартному) виду. Каноническое преобразование заключается в выборе новой системы координат, в которой облегчается геометрический анализ уравнения (9.1). Такого рода преобразование сводится к определению центра поверхности второго порядка (если он существует), переносу начала координат в новый центр (при этом в уравнении (9.1) исчезают линейные члены $\sum b_i x_i$) и к повороту координатных осей (при этом в уравнении (9.1) исчезают члены $\sum b_{ij} x_i x_j$).

Квадратичное уравнение в канонической форме имеет вид

$$y - y_s = B_{11} \tilde{x}_1^2 + B_{22} \tilde{x}_2^2 + \dots + B_{kk} \tilde{x}_k^2, \quad (9.22)$$

где y_s – значение отклика в новом начале координат (свободный член канонического уравнения); \tilde{x}_i – новые оси координат, повернутые в векторном пространстве на некоторый угол относительно старых осей (x_i) и линейно связанные с ними; B_{ii} – коэффициенты уравнения в канонической форме.

Удобство формы (9.22) для анализа и оптимизации определяется тем, что все x_i входят в нее в квадратах. Следовательно, изменение значений отклика зависит только от знака коэффициента и не зависит от направления движения по оси \tilde{x}_i от центра S . В частности, y будет возрастать всегда, когда изменяется \tilde{x}_i , имеющий при себе коэффициент $B_{ii} > 0$, и уменьшаться в случае, когда у \tilde{x}_i стоит коэффициент $B_{ii} < 0$.

Геометрический образ квадратичного уравнения в канонической форме можно представить себе в виде изолиний поверхности отклика при числе факторов $k = 2$ (рис. 9.3).

В случае $k = 2$ изолинии для уравнения $y - y_s = B_{11}\tilde{x}_1^2 + B_{22}\tilde{x}_2^2$ могут представлять собой следующие фигуры.

1. Эллипсы (рис. 9.3, а). Оба коэффициента B_{11} и B_{22} имеют одинаковые знаки. Центр эллипсов является максимумом, если B_{11} и B_{22} отрицательны, и минимумом, если B_{11} и B_{22} положительны. Если $|B_{22}| < |B_{11}|$, то эллипсы вытянуты по оси \tilde{x}_2 , и наоборот. Поверхность отклика является эллиптическим параболоидом.

2. Гиперболы (рис. 9.3, б). Коэффициенты B_{11} и B_{22} имеют разные знаки. Гиперболы вытянуты по той оси, которой соответствует меньшее по абсолютной величине значение коэффициента в каноническом уравнении. В этом случае значение отклика увеличивается при движении из центра фигуры по одной оси и уменьшается при движении по другой. Если, например, $B_{11} > 0$, а $B_{22} < 0$ ($y - y_s = B_{11}\tilde{x}_1^2 - B_{22}\tilde{x}_2^2$), то отклик будет увеличиваться при движении из центра S в направлении $+\tilde{x}_1$ и уменьшаться при движении в направлении $+\tilde{x}_2$ и $-\tilde{x}_2$. Центр S фигуры называется седлом или минимаксом. Поверхность отклика является гиперболическим параболоидом.

3. Параллельные прямые (рис. 9.3, в). Один из коэффициентов канонического уравнения равен нулю, при этом нет одного центра с экстремальным значением отклика. Поверхность отклика является стационарным возвышением.

4. Параболы (рис. 9.3, г). Один из коэффициентов канонического уравнения равен нулю, при этом центр фигуры находится в бесконечности. Поверхность отклика является возрастающим возвышением (гребнем). В практических задачах центр фигуры S удален за пределы той области, где проводился эксперимент, и тогда один из коэффициентов (B_{11} или B_{22}) близок к нулю.

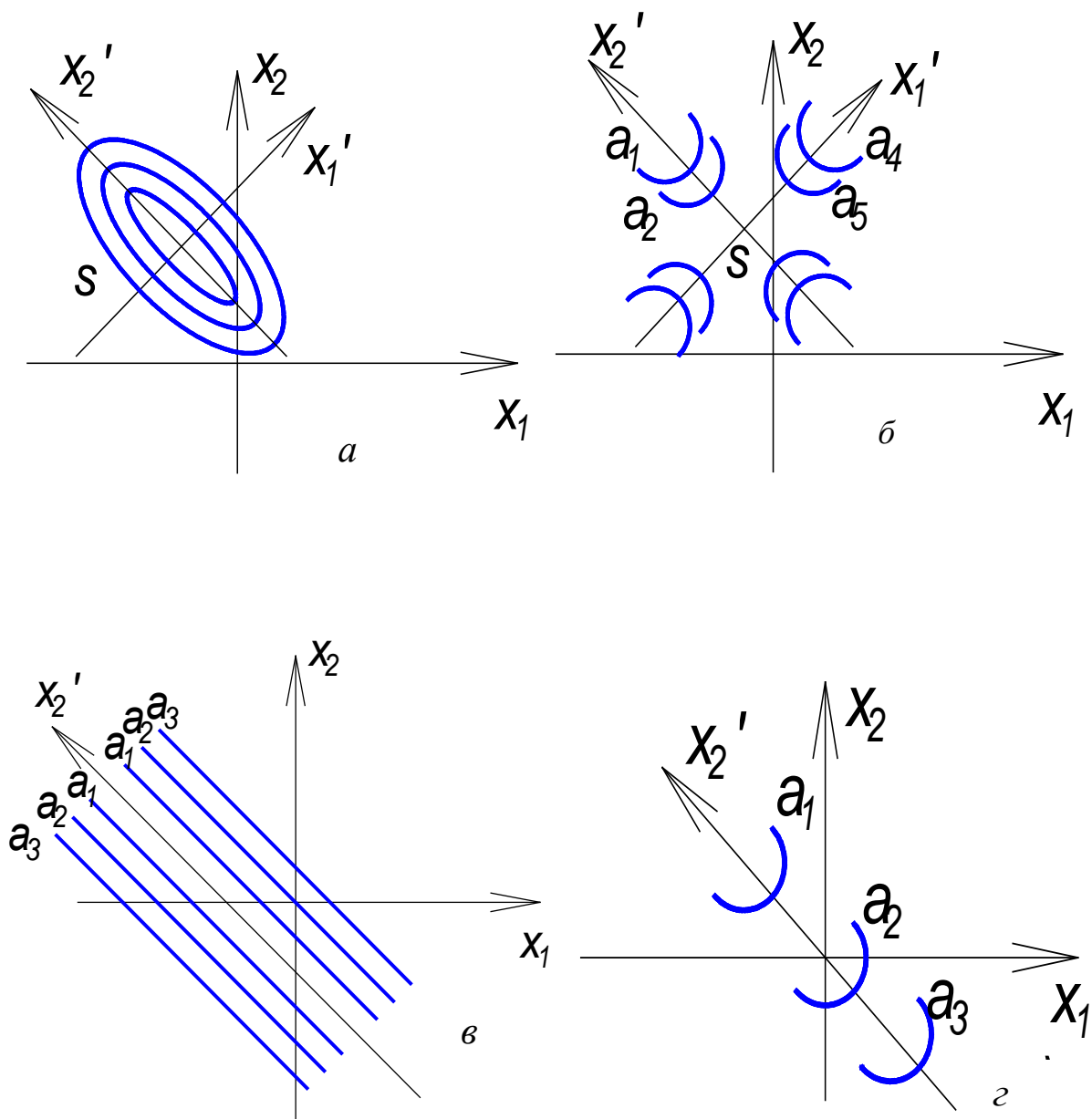


Рис. 9.3. Поверхности отклика,
описываемые квадратичной моделью для $k = 2$

Аналогично можно проводить анализ канонических уравнений
типа

$$y - y_s = B_{11}\tilde{x}_1^2 + B_{22}\tilde{x}_2^2 + B_{33}\tilde{x}_3^2 \quad (9.23)$$

при числе факторов $k = 3$ (рис. 9.4).

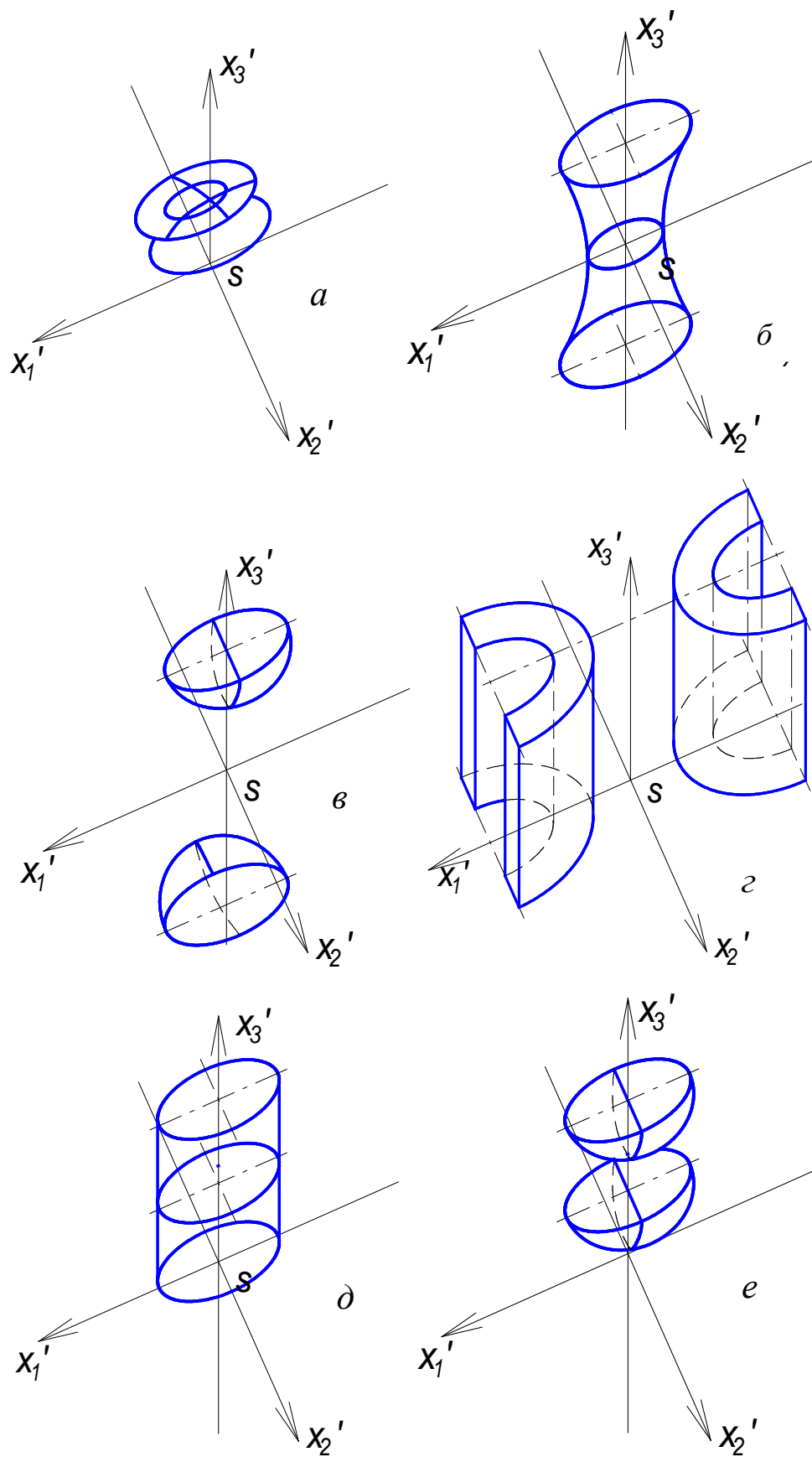


Рис. 9.4. Поверхности отклика, описываемые квадратичной моделью для $k = 3$ (окончание см. на стр. 272)

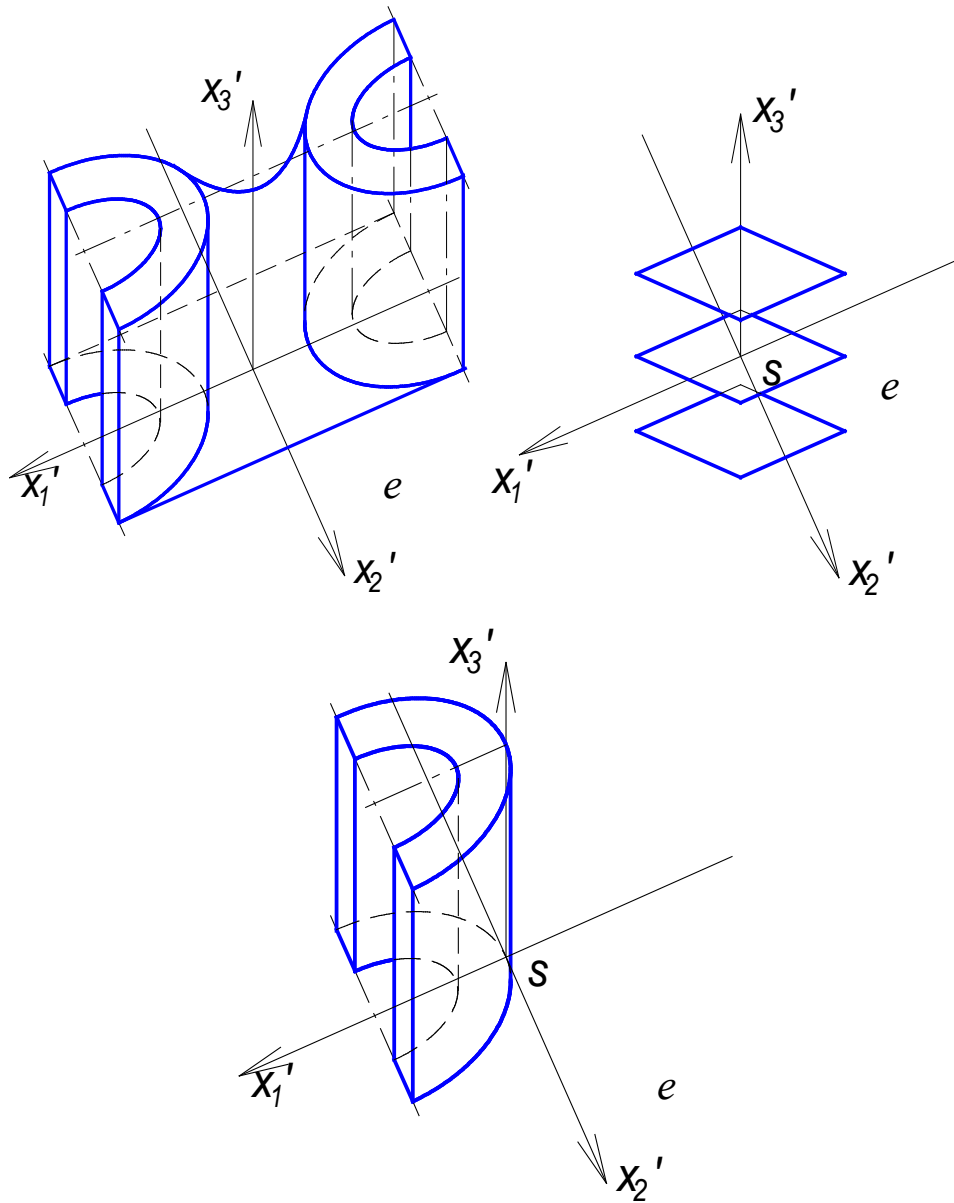


Рис. 9.4. Окончание (начало см. на стр. 271)

Если все коэффициенты имеют одинаковые знаки, поверхность отклика представляет собой эллипсоид вращения (рис. 9.4, *a*) и имеет экстремум в центре эллипсоида. Если знак одного из коэффициентов противоположен знаку двух других, имеет место одно- или двухполостной гиперboloид (соответственно рис. 9.4, *б* и *в*).

При близости одного из коэффициентов канонического уравнения к нулю, поверхность отклика может быть либо эллиптическим цилиндром (рис. 9.4, *з*), если остальные два коэффициента имеют одинаковые знаки, либо гиперболическим цилиндром (рис. 9.4, *д*), если знаки оставшихся коэффициентов разные.

В случае эллиптического цилиндра ось, соответствующая незначимому коэффициенту, является линией максимума, удаление от которой в любом направлении связано с уменьшением параметра оптимизации (стандартное возвышение). В этом же случае близости нулю одного из коэффициентов канонического уравнения поверхность отклика может также являться эллиптическим или гиперболическим параболоидом (соответственно рис. 9.4, *е* и *ж*).

Если два коэффициента канонического уравнения равны нулю, то поверхность отклика либо представляет собой серию параллельных плоскостей (рис. 9.4, *з*), либо имеет вид параболического цилиндра (рис. 9.4, *и*).

Наиболее целесообразно изучать геометрические поверхности с помощью двухфакторных моделей, что позволяет получить геометрическую интерпретацию зависимостей вида

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2. \quad (9.24)$$

Для получения таких моделей рекомендуется в найденное уравнение регрессии подставить значения всех факторов (желательно на оптимальных уровнях), кроме любых двух.

Каноническое преобразование для модели (9.24) заключается в переходе к стандартному уравнению вида

$$y - y_s = B_{11}\tilde{x}_1^2 - B_{22}\tilde{x}_2^2, \quad (9.25)$$

где y_s – значение параметра оптимизации в новом начале координат; \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 – новые оси координат, повернутые в факторном простран-

стве на некоторый угол относительно старых осей x_1, x_2 ; B_{11}, B_{22} – коэффициенты уравнения регрессии в канонической форме.

Для переноса начала координат в новую точку S необходимо продифференцировать полученное уравнение регрессии в частных производных по каждой из независимых переменных и приравнять их нулю:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0. \quad (9.26)$$

Решая систему уравнений (9.26), вычисляют координаты точки $S (x_{1S}, x_{2S})$. Подставляя значения координат в уравнение (9.25), определяют значения критерия оптимизации в новом центре u_S .

Угол поворота α осей координат в новом центре рассчитывается по формуле

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{b_{11} - b_{22}}{b_{12}}. \quad (9.27)$$

Положительный знак угла α показывает, что при повороте осей координат от оси x_1 необходимо их перемещать вверх и наоборот.

Коэффициенты регрессии в канонической форме определяются с помощью следующих уравнений:

$$\begin{aligned} B_{11} &= b_{11} \cos^2 \alpha + b_{12} \sin \alpha \cos \alpha + b_{22} \sin^2 \alpha, \\ B_{22} &= b_{11} \sin^2 \alpha - b_{12} \sin \alpha \cos \alpha + b_{22} \cos^2 \alpha. \end{aligned} \quad (9.28)$$

По значениям коэффициентов канонического уравнения можно определить характер и вид поверхности отклика (см. выше).

9.5. ПРИМЕРЫ ПРОВЕДЕНИЯ ПЛАНИРУЕМЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Задание на исследование.

Цель – исследовать влияние режимов резания на шероховатость поверхности при точении трубчатых образцов, изготовленных из органопластика методом намотки, найти оптимальные режимы точения.

Схема эксперимента.

Исследование проводится по обычной схеме точения на токарно-винторезном станке 1К62. Для точения выбираются трубчатые образцы, изготовленные из одной партии исходных материалов, по одной схеме намотки. Исследуемые режимы резания: скорость резания V , м/мин; подача S , мм/об; глубина резания t , мм. Обработка ведется режущим инструментом марки ВК60М при постоянной геометрии ($\gamma = 20^\circ$, $\alpha = 20^\circ$, $\varphi = 45^\circ$, $r = 2$ мм). Измерение шероховатости проводится в соответствии с ГОСТ 2789-73.

Исследуемый параметр оптимизации – R_z , мкм.

2. Составление таблицы условий эксперимента.

Используем ЦКОП второго порядка. Выбираем условия эксперимента после ознакомления с результатами исследований, имеющихся в технической литературе (табл. 9.7).

Таблица 9.7

Условия эксперимента

Уровни факторов	Натуральные значения		
	$A = V$, м/мин	$B = S$, мм/об	$C = t$, мм
Основной уровень (0)	150	0,3	0,3
Интервал варьирования	160	0,2	0,2
Верхний уровень (+1)	250	0,5	0,5
Нижний уровень (-1)	50	0,1	0,1
Звездные точки:			
+1,215	271,5	0,54	0,54
-1,215	28,5	0,06	0,06

3. Составление плана эксперимента.

Для получения модели второго порядка используем ЦКОП, параметры которого представлены в табл. 9.1, а матрица планирования – в табл. 9.8.

4. Реализация плана эксперимента.

Осуществляется рандомизацией опытов по времени, причем каждый опыт проводится 3 раза в случайной последовательности. Всего было обработано 45 трубчатых образцов. Результаты экспериментов представлены в табл. 9.8.

5. Расчет коэффициентов регрессии и оценка их статистической значимости.

В результате расчетов коэффициентов регрессии, выполненных по формулам (9.9), (9.10) с использованием данных табл. 9.1, получены следующие результаты:

$$\begin{array}{lll} b_0 = 10,5; & b_1 = 13,4; & b_2 = 9,6; \\ b_3 = 2,4; & b_{11} = 16,2; & b_{22} = 10,9; \\ b_{33} = 2,1; & b_{12} = 2,7; & b_{13} = 7,6. \\ b_{23} = 6,3. \end{array}$$

Пример расчета коэффициентов:

$$b_2 = 0,09141 (-26,9 - 28,5 + 30,8 + 43,3 - 9,9 - 39,8 + 30,5 + 76,0 - 22,4 + + 51) = 9,8.$$

Расчет доверительных интервалов для коэффициентов регрессии производился по формулам (9.9), (9.11) с использованием данных табл. 9.1.

Дисперсия воспроизводимости подсчитывалась с учетом того, что каждый опыт в матрице планирования повторялся 3 раза. В этом случае дисперсия подсчитывалась по обобщенной формуле

$$S_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^N (y_{ju} - \bar{y}_j)^2}{N(n-1)}. \quad (9.29)$$

Матрица ЦУРУП второго порядка

№ опыта	Уровни факторов											Параметр оптимизации \bar{R}_z , мкм		
	В кодовом масштабе						В натуральном масштабе							
	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1' = X_1^2 - 0,73$	$X_2' = X_2^2 - 0,73$	$X_3' = X_3^2 - 0,73$	V , м/мин		S , мм./об	t , мм
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	0,27	0,27	0,27	50	0,1	0,1	26,9
2	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	0,27	0,27	0,27	250	0,1	0,1	28,5
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	0,27	0,27	0,27	50	0,5	0,1	30,8
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	250	0,5	0,1	43,4
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	50	0,1	0,5	9,9
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	0,27	0,27	0,27	250	0,1	0,5	39,8
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	0,27	0,27	0,27	50	0,5	0,5	30,3
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	0,27	0,27	0,27	250	0,5	0,5	76,0
9	+1	-1,215	0	0	0	0	0	0,75	-0,73	-0,73	28,5	0,3	0,3	21,0
10	+1	+1,215	0	0	0	0	0	0,75	-0,73	-0,73	271,5	0,3	0,3	51,5
11	+1	0	-1,215	0	0	0	0	-0,73	0,75	-0,73	150	0,06	0,3	18,4
12	+1	0	+1,215	0	0	0	0	-0,73	0,75	-0,73	150	0,54	0,3	42,0
13	+1	0	0	-1,215	0	0	0	-0,73	-0,73	0,75	150	0,3	0,06	11,5
14	+1	0	0	+1,215	0	0	0	-0,73	-0,73	0,75	150	0,3	0,54	11,5
15	+1	0	0	0	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73	150	0,3	0,3	12,3

В итоге расчета $S_y^2 = 16,1$ при числе степеней свободы $N(n - 1) = 15(3 - 1) = 30$.

Расчетные величины дисперсий, доверительные интервалы, подсчитанные по формуле (9.14), и результаты проверки статистической значимости коэффициентов приведены в табл. 9.9.

После расчета значимости коэффициентов уравнение регрессии будет иметь окончательный вид

$$y = 10,5 + 13,4 \cdot x_1 + 9,8 \cdot x_2 + 2,4 \cdot x_3 + 16,2 \cdot x_1^2 + 10,9 \cdot x_2^2 + 2,7 \cdot x_1 \cdot x_2 + 7,6 \cdot x_1 \cdot x_3 + 6,3 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

Таблица 9.9

Расчет значимости коэффициентов регрессии

Коэффициенты	Среднеквадратическая ошибка в определении коэффициентов регрессии	Доверительные интервалы	Незначимые коэффициенты
b_0	$S_{b_0} = 2,63$	$\Delta b_0 = 5,26$	нет
b_i	$S_{b_i} = 1,2$	$\Delta b_i = 2,4$	нет
b_{ij}	$S_{b_{ij}} = 1,35$	$\Delta b_{ij} = 2,7$	нет
b_{ii}	$S_{b_{ii}} = 1,92$	$\Delta b_{ii} = 3,84$	b_{33}

6. Проверка адекватности модели по F-критерию.

Учитывая, что каждый опыт в матрице планирования повторялся 3 раза, рассчитанная по формуле (6.23), дисперсия адекватности $S_{ад.}^2 = 39,4$ с числом степеней свободы $15 - 9 = 6$.

Нечетное значение F-критерия по формуле (9.18)

$$F_{расч} = \frac{S_{ад.}^2}{S_y^2} = \frac{39,4}{16,1} = 2,45.$$

При $f_{ад} = f_z = 6$ и $f_y = f_l = 30$ табличное значение F-критерия для доверительной вероятности $\alpha = 0,95$ $F_{табл.} = 2,42$, а для доверительной вероятности $\alpha = 0,99$ $F_{табл.} = 3,47$.

Таким образом, при $\alpha = 0,99$ гипотеза об адекватности модели не отвергается, так как $F_{расч} \leq F_{табл.}$ ($2,45 < 3,47$).

7. Анализ квадратичной модели.

Для наглядного представления о геометрическом виде изучаемой функции отклика преобразуем полученное уравнение в типовую каноническую форму согласно методике, изложенной в п. 9.4.6. Построим, например, двумерное сечение для случая $X_1 = 0$:

$$y = 10,5 + 9,8 \cdot X_2 + 2,4 \cdot X_3 + 10,9 \cdot X_2^2 + 6,3 \cdot X_2 \cdot X_3.$$

Далее по формуле (9.26) определим координаты нового центра. Для этого преобразованное уравнение дифференцируется и частные производные приравниваются нулю:

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 9,8 + 21,8 \cdot x_2 + 6,3 \cdot x_3 = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = 2,4 + 6,3 \cdot x_2 = 0.$$

Решение данной системы уравнений позволяет найти координаты точки S:

$$X_{2S} = -0,38, \quad X_{3S} = -0,24.$$

Подставляя значения X_{2S} и X_{3S} в преобразованное уравнение, определим значение критерия оптимизации в новом центре:

$$y_s = 8,4.$$

Определение угла поворота осей координат осуществляется по формуле (9.27). Для нашего случая:

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{10,9}{6,3} = 1,73; \quad \alpha = 15^\circ.$$

Коэффициенты уравнения регрессии в канонической форме определяются по формуле (9.28):

$$B_{22} = 10,9 \cdot 0,93 + 6,3 \cdot 0,97 \cdot 0,26 = 11,7;$$

$$B_{33} = 10,9 \cdot 0,007 - 6,3 \cdot 0,97 \cdot 0,26 = -0,8.$$

В итоге получим каноническое уравнение

$$y - 8,4 = 11,7 \cdot \tilde{x}_2^2 - 0,8 \cdot \tilde{x}_3^2.$$

Это уравнение используется для построения линий равных значений откликов, которые имели вид гипербол.

Результаты преобразований уравнения для случаев $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ и $X_3 = 0$ представлены в табл. 9.10.

Пользуясь полученными кривыми для всех трех случаев, можно, задавая необходимые значения R_z , выбрать наиболее оптимальное сочетание элементов режима течения V , S , t , обеспечивающее реализацию заданного R_z при условии максимально возможной производительности обработки (рис. 9.5).

Таблица 9.10

Результаты преобразований уравнения

Факторы	Координаты центра (координированные)	Угол поворота α	y_s	Каноническое уравнение	Вид кривой
$X_1 = 0$	$X_{2S} = -0,38$ $X_{3S} = -0,24$	15°	8,4	$y - 8,4 = 11,7 \cdot \tilde{x}_2^2 - 0,8 \cdot \tilde{x}_3^2$	Гипербола
$X_2 = 0$	$X_{1S} = -0,32$ $X_{3S} = -0,42$	$12,5^\circ$	7,9	$y - 7,9 = 17,1 \cdot \tilde{x}_1^2 - 0,9 \cdot \tilde{x}_3^2$	Гипербола
$X_3 = 0$	$X_{1S} = -0,38$ $X_{2S} = -0,4$	$13,5^\circ$	5,9	$y - 5,9 = 15,9 \cdot \tilde{x}_1^2 + 9,8 \cdot \tilde{x}_2^2$	Эллипс

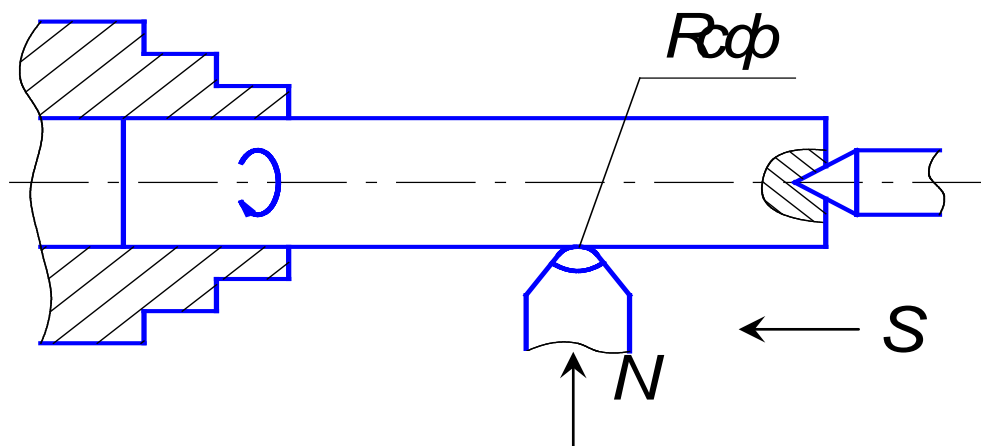


Рис. 9.5. Схема эксперимента

8. Выводы.

1. Наилучшее значение шероховатости $R_z = 5,9$ мкм было получено при следующих режимах точения:

$$V = 110 \text{ м/мин}; S = 0,21 \text{ мм/об}; t = 0,3 \text{ мм.}$$

2. Допустимыми диапазонами изменения элементов режима точения (V, S, t) для обеспечения 7-го класса шероховатости можно считать следующие:

$$\text{скорость резания } V = 100\text{--}130 \text{ м/мин};$$

$$\text{подача } S = 0,22\text{--}0,3 \text{ мм/об};$$

$$\text{глубина резания } t = 0,1\text{--}0,3 \text{ мм.}$$

10. ПРОГРАММА АНАЛИЗА ДАННЫХ STATISTICA

10.1. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ STATISTICA

STATISTICA представляет собой интегрированную систему статистического анализа и обработки данных.

STATISTICA работает с четырьмя различными типами документов, которые соответствуют основным структурным компонентам системы:

- электронная таблица *Spreadsheet*, которая предназначена для ввода исходных данных и их преобразования;
- электронная таблица *Scrollsheet* для вывода численных и текстовых результатов анализа;
- график – документ в специальном графическом формате для визуализации и графического представления численной информации;
- отчет – документ в формате RTF (*Расширенный текстовый формат*) для вывода текстовой и графической информации.

В соответствии со стандартами среды *Windows* каждый тип документа выводится в своем собственном окне в рабочей области системы *STATISTICA*. Как только это окно становится активным, изменяется панель инструментов и меню. В них появляются команды и кнопки, доступные для активного документа.

Запуск STATISTICA

Пуск ⇒ Программы ⇒ STATISTICA (рис. 10.1) ⇒

а) Basic Statistics and Tables (Основные статистики и таблицы) – запускается модуль системы Basic Statistics and Tables;

б) STATISTICA – появится переключатель модулей системы (рис. 10.2), в котором двойным щелчком левой кнопки мыши можно запустить нужный модуль, например тот же Basic Statistics and Tables.

В результате появится **Рабочее Окно** системы STATISTICA с меню соответствующего модуля (рис. 10.3), которое после щелчка мыши на свободном месте рабочего поля окна сворачивается в правый нижний угол (рис. 10.4).



Рис. 10.1. STATISTICA 5.0 в меню Пуск

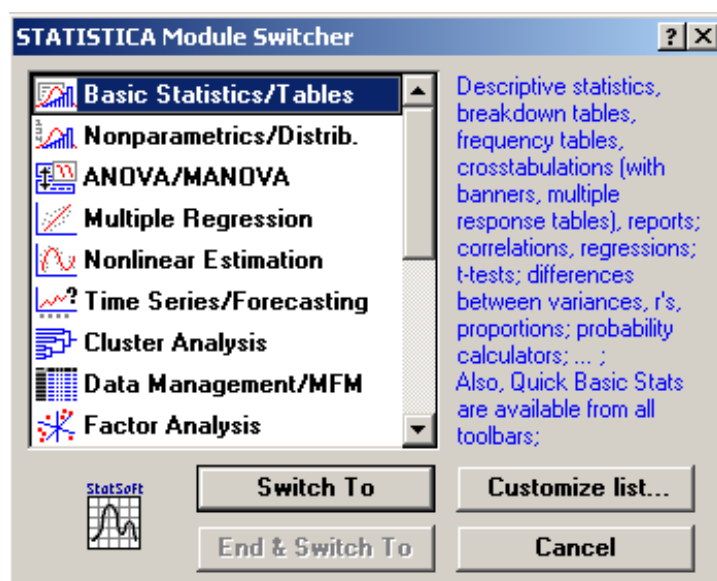


Рис. 10.2. Переключатель модулей STATISTICA 5.0

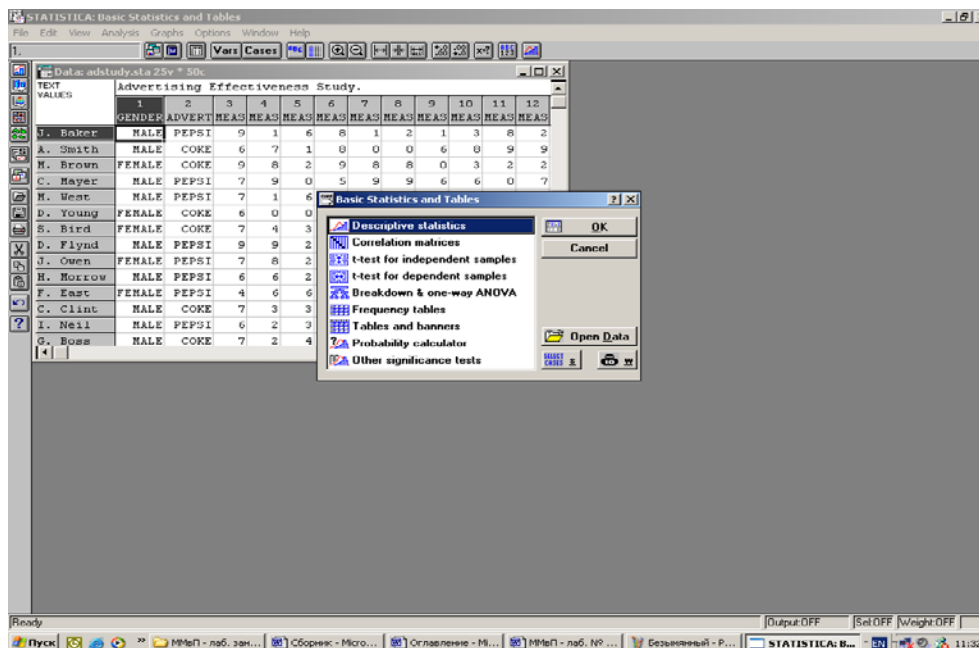


Рис. 10.3. Рабочее окно системы STATISTICA 5.0



Рис. 10.4. Свернутое окно модуля Basic Statistics and Tables

☑ При первом запуске STATISTICA (по умолчанию) автоматически открывается стандартный файл с данными *adstudy.sta*, который входит в набор примеров, поставляемых с системой (эти файлы находятся в каталоге *stat\examples*). При следующих запусках автоматически открывается последний файл, с которым вы работали в системе.

☑ В рабочей области может находиться только один файл с исходными данными и неограниченное число файлов с промежуточными результатами и графиками.

Исходные данные в системе STATISTICA организованы в виде электронной таблицы. Таблицы с исходными данными в STATISTICA носят особое название *SPREADSHEETS* и имеют расширение **.sta*.

Электронная таблица системы *SPREADSHEETS* состоит из строк и столбцов. В отличие от обычных электронных таблиц, где строки и столбцы равноправны, в *STATISTICA* они имеют разные смысловые значения.


Столбцы электронной таблицы с исходными данными называются *Variables (Переменные)*, а строки – *Cases (Наблюдения)*. В качестве переменных обычно выступают исследуемые признаки (величины), а наблюдения – это значения, которые принимают переменные в отдельных измерениях.

Система может работать как с численными, так и с текстовыми данными. Аналогично *MS Excel* они поддерживают различные типы операций с данными, такие как операции с использованием *буфера обмена Windows*; операции с выделенными блоками значений, в том числе и с использованием метода *drag-and-drop*, автозаполнение блоков и т. д.

Рабочее окно имеет следующую структуру:

- верхний заголовок **STATISTICA: Basic Statistics and Tables**
- запущен модуль Basic Statistics and Tables (Основные статистики и таблицы) (см. рис. 10.3). Если бы был запущен другой модуль, то его название указывалось бы в заголовке;
- строка меню;
- панель инструментов (под строкой меню и справа), соответствующая активному окну в рабочей области. На рис. 10.3, например, панель инструментов соответствует активному (и единственному) в данный момент окну с файлом исходных данных;
- рабочая область, занимающая большую часть окна, в которой выводятся все документы системы. На рис. 10.3, в частности, кроме меню модуля **Basic Statistics and Tables**, открыто окно с заголовком: **Data: adstudy.sta 25v*50c** – файл исходных данных (Data) с именем *adstudy.sta*, имеющий 25 столбцов (25v (*Variables*) – 25 переменных) и 50 строк (50c (*Cases*) – 50 наблюдений).

Создание файла данных

☑ Закрывать открытый файл данных, нажав кнопку  в правом верхнем углу окна (ненужного) файла данных (рис. 10.5).

В окне системы STATISTICA останется только строка меню, расположенная в верхней части окна (рис. 10.6).

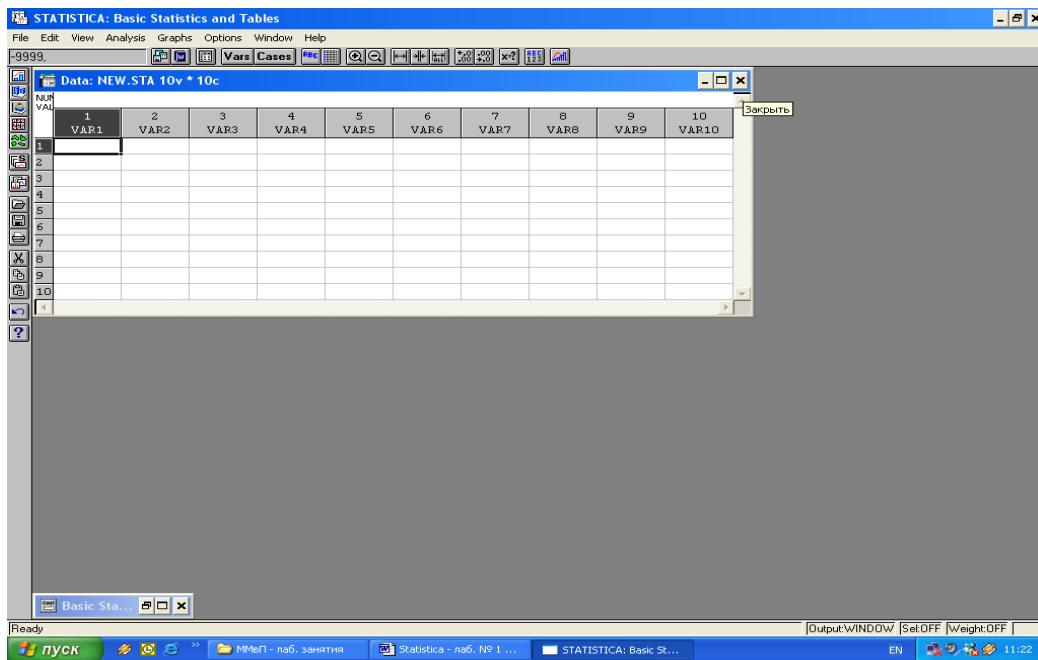


Рис. 10.5. Закрывание открытых файлов

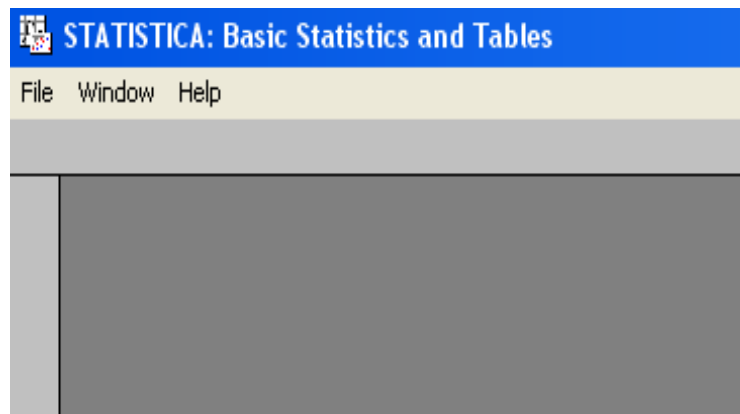


Рис. 10.6. Строка меню

Исходное положение: Вы находитесь в основном окне системы STATISTICA.

Шаг 1. Создание электронной таблицы.

В пункте меню **File (Файл)** выберите команду **New Data (Новые данные)** (рис. 10.7).

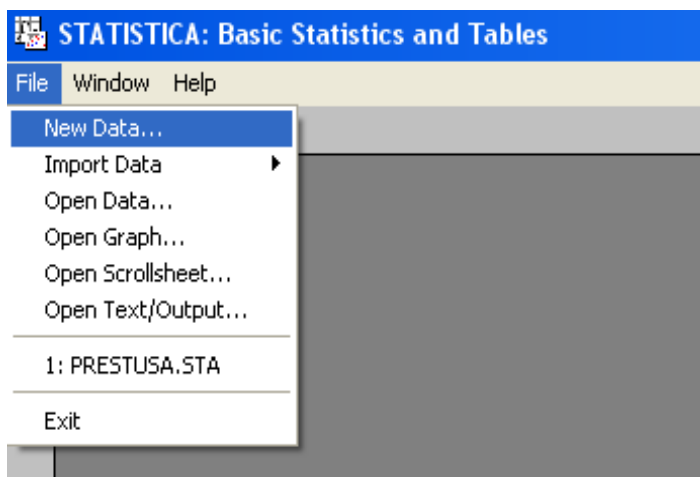


Рис. 10.7. Создание нового файла данных

В появившемся диалоговом окне **New Data: Specify File Name (Новые данные: Определить имя файла)** (рис. 10.8)

1) В поле **File Name (Имя файла)** введите имя нового файла (например, PRIMER1.STA)

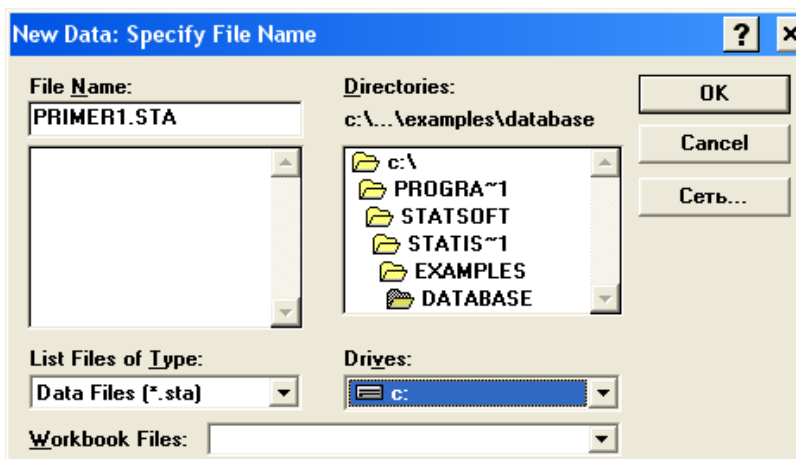


Рис. 10.8. Задание имени файла данных

В системе STATISTICA 5.0 имена файлов (и переменных) задаются латинскими буквами и цифрами не более 8 символов.

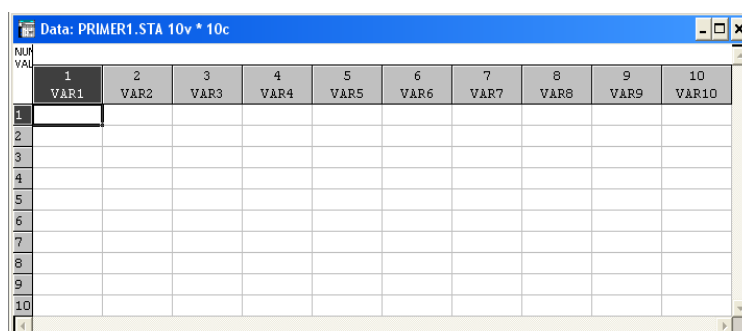
2) В поле **Drives:** (Драйвер (диск)) укажите логическое имя диска для сохранения файла данных: **Z:.**

3) В поле **Directories** (Директория) укажите папку для сохранения файла данных (например, **Z:\ММвП**).

4) Нажмите кнопку **ОК** в правом углу окна. STATISTICA автоматически откроет пустую электронную таблицу с именем PRIMER1.STA (рис. 10.9).

В заголовке окна электронной таблицы автоматически отображается имя файла и его размер (PRIMER1.STA 10v * 10 c).

Размер таблицы по умолчанию принят 10 на 10 (10 переменных с именами VAR1, VAR2, ..., VAR10 и 10 пронумерованных наблюдений).



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
VAR	VAR1	VAR2	VAR3	VAR4	VAR5	VAR6	VAR7	VAR8	VAR9	VAR10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Рис. 10.9. Пустая электронная таблица для ввода данных

Шаг 2. Настройка размеров электронной таблицы.

Создадим столько переменных и наблюдений, сколько необходимо.

Для нашего примера требуются два переменных: *Абстрактное мышление* и *Вербальное мышление* и 40 наблюдений.

1) Нажмите кнопку  **Variables** (Переменные) на панели инструментов и выберите команду **Delete** (Удалить).

В диалоговом окне **Delete Variables (Удаление переменных)** укажите диапазон удаляемых переменных (**From variable (От переменной) – To variable (До переменной)**), как показано на рис. 10.10.

Нажмите кнопку **ОК**.

Чтобы упростить эту операцию, можно предварительно выделить переменные (столбцы), которые необходимо удалить.

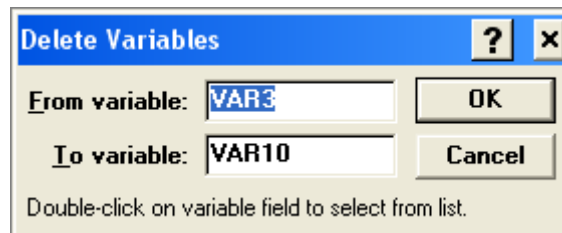


Рис. 10.10. Окно удаления лишних переменных (столбцов)

2) Нажмите кнопку **Cases** **Cases (Наблюдения)** на панели инструментов и выберите команду **Add (Добавить)**.

В появившемся диалоговом окне **Add Cases (Добавление наблюдений)** укажите:

- количество добавляемых наблюдений (строк): **Number of Cases to Add (Количество наблюдений для добавления) – 40**;
- номер наблюдения, после которого вставить: **Insert after Cases (Вставить после наблюдения) – 10**, как показано на рис. 10.11.

Нажмите кнопку **ОК**.

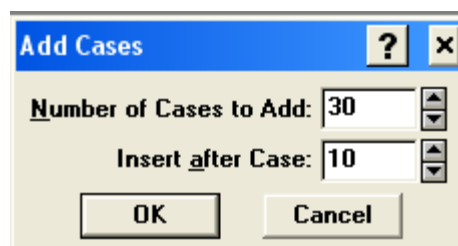


Рис. 10.11. Окно добавления наблюдений (строк) в таблицу

Шаг 3. Подготовка таблицы к вводу данных.

Заголовок таблицы.

После двойного щелчка на белом поле в таблице под словами: Data: PRIMER1.STA 2v * 40с на экране появится окно **Data File Header** (Заголовок файла данных), в котором можно задать заголовок таблицы (**One-line Data File Header**) и дополнительную информацию о данных (**Data File Information/Notes**) (рис. 10.12).

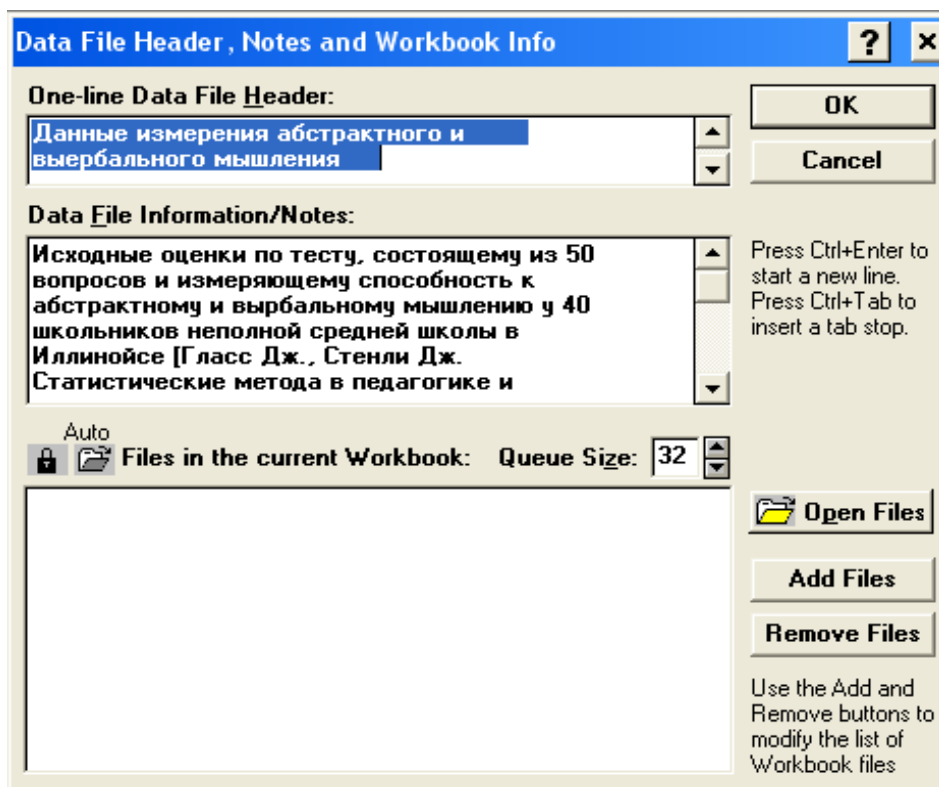


Рис. 10.12. Окно оформления заголовка таблицы

Имена переменных.

Для оформления имен и других спецификаций переменных можно:

а) дважды щелкнув на заголовке переменной:

1
VAR1

, задать спецификации переменных – каждой в отдельности (рис. 10.13):

Name (Имя): АБСТР (вместо VAR1);

Category (Тип): Number (Число);

Display Format (Формат отображения): 5 значащих цифр (**Column width**) и 0 десятичных знаков после запятой (**Decimals**) (вместо 8 и 3).

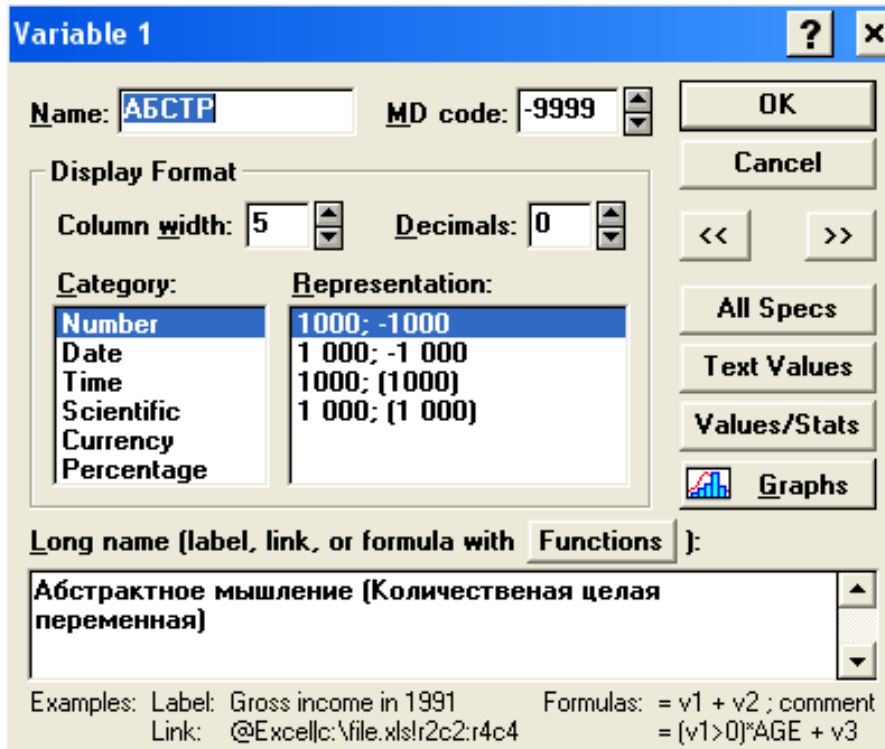



Рис. 10.13. Диалоговое окно Спецификации переменной (имя, тип, формат и т. д.)

б) нажав на панели инструментов кнопку  **Specs of All Variable (Table) (Спецификации всех переменных (таблицы))**, задать задания спецификации всех переменных таблицы одновременно (рис. 10.14).

	Name	MD Code	Format	Long Name (label, formula or link)
1	АБСТР	-9999	5.0	Абстрактное мышление (Количественная целая переменная 5.0)
2	ВЕРБЕ_	-9999	5.0	Вербальное мышление (Количественная целая переменная 5.0)


Рис. 10.14. Спецификации переменных

Имена наблюдений.

Нажмите кнопку **Cases** **Cases (Наблюдения)** на панели инструментов и выберите команду **Names (Имена)**.

При первом выборе данного пункта появится диалоговое окно **Case Name Maneger (Менеджер имен случаев)** с запросом длины имен (**No case names in this file. Create? Width: 10. (Нет имен наблюдений в этом файле. Создать? Размер: 10)**) (рис. 10.15). Введите подходящий размер поля имен наблюдений и нажмите кнопку **Yes (Да)**.

В появившемся диалоговом окне **Case Name Maneger (Добавление наблюдений)** (рис. 10.16) введите имена наблюдений (респондентов). Нажмите кнопку **ОК**.

Для того, чтобы имена наблюдений отображались в окне таблицы данных, необходимо нажать на панели инструментов кнопку  – **Display Case Names on/off (Отображение имен наблюдений (вкл./выкл.))** (рис. 10.17).

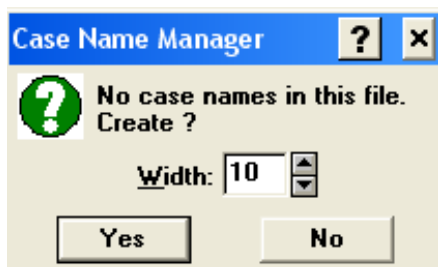


Рис. 10.15. Вид окна

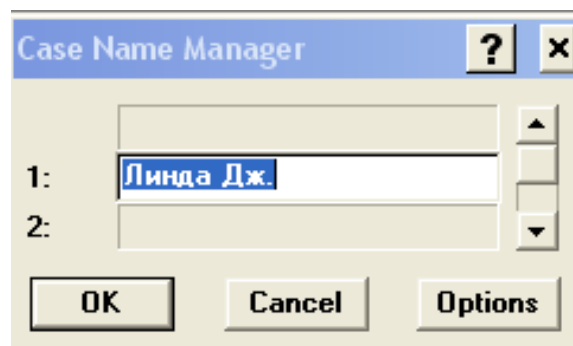


Рис. 10.16. Ввод имен наблюдений


	Данные изме...	
NUMERIC VALUES	1	2
Линда Дж.	АБСТР	ВЕРБ

Рис. 10.17. Отображение таблицы

Шаг 4. Ввод данных в электронную таблицу.

Исходные данные наблюдений вводятся в таблицу с клавиатуры.

Шаг 5. Сохранение файла данных.

Для сохранения всех изменений и данных в таблице нажмите кнопку  – **Save Data File (Сохранить файл данных)** на панели инструментов, расположенной справа окна системы STATISTICA.

10.2. ПРОВЕДЕНИЕ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА ПРИ ПОМОЩИ МОДУЛЯ MULTIPLE REGRESSIONS

В стартовом диалоговом окне этого модуля (рис. 10.18.) при помощи кнопки **Variables** указываются зависимая (dependent) и независимые (ая) (independent) переменные. В поле **Input file** указывается тип файла с данными:

Raw Date – данные в виде строчной таблицы;

Correlation Matrix – данные в виде корреляционной матрицы.

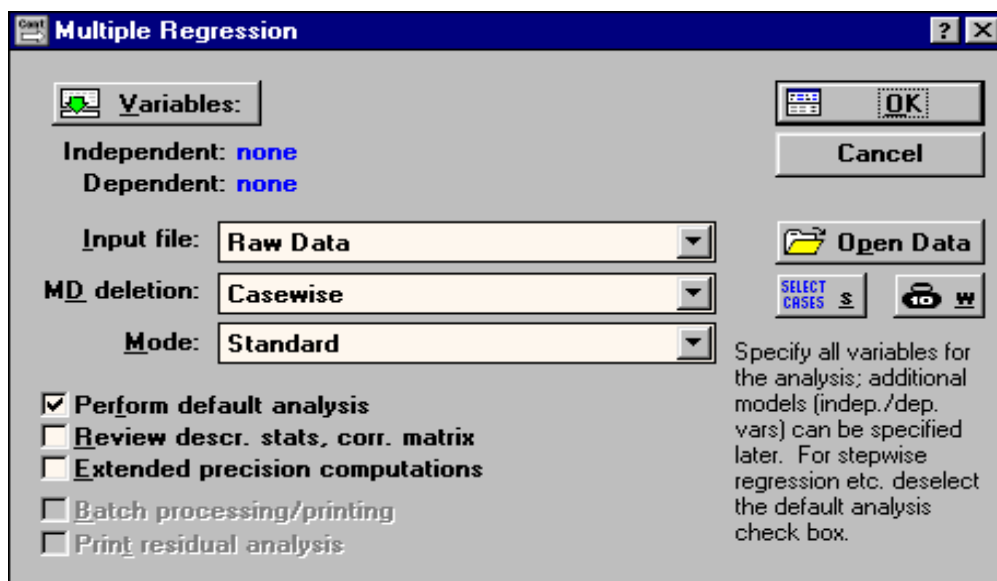


Рис. 10.18 . Стартовое диалоговое окно модуля
Multiple Regressions

В поле **MD deletion** указывается способ исключения из обработки недостающих данных:

casewise – игнорируется вся строка, в которой есть хотя бы одно пропущенное значение;

mean Substitution – взамен пропущенных данных подставляются средние значения переменных;

pairwise – попарное исключение данных с пропусками из тех переменных, корреляция которых вычисляется.

В поле **Mode** указывается тип регрессионной модели:

Standard – стандартная линейная модель вида

$$Y = a_1 + a_2X_1 + a_3X_2 + \dots + a_3X_3 + \dots + a_nX_n$$

Fixed non linear – фиксированная нелинейная, т.е. нелинейная модель, но которая может быть приведена к линейному виду путем преобразования переменных.

Рассмотрим проведение регрессионного анализа на примере. Имеются данные обмера и таксации 380 модельных деревьев различных древесных пород. В файле данных (рис. 10.19) 10 переменных:

1	POROD	Древесная порода (d – дуб, lp – липа, k – клен, o – осина)
2	A	Возраст дерева, лет
3	D	Таксационный диаметр ствола дерева в коре, см
4	H	Высота дерева, м
5	VK	Объем ствола в коре, куб. м
6	V	Объем ствола без коры, куб. м
7	Q2	Второй коэффициент формы
8	L	Длина кроны дерева, м
9	DKR	Диаметр кроны дерева, м
10	F	Старое видовое число

TEXT VALUE	1 PORODA	2 A	3 D	4 H	5 VK	6 V	7 Q2	8 L	9 DKR	10 F
196	d	21	6,8	9,8	,0170	,0141	,69	6,00	1,10	,478
197	d	37	8,5	10,0	,0272	,0203	,68	7,00	3,10	,479
198	d	35	10,2	12,8	,0556	,0506	,73	10,50	1,60	,532
199	d	36	13,3	14,0	,1018	,0710	,71	7,20	2,10	,523
200	d	42	15,3	15,0	,1375	,1122	,72	7,00	4,60	,499
201	d	46	18,0	15,0	,1748	,1402	,69	9,50	3,70	,458
202	d	44	18,9	17,0	,2148	,1807	,66	13,00	5,60	,450
203	d	41	19,7	16,5	,2375	,2007	,69	10,00	6,30	,472
204	d	45	23,5	16,5	,3216	,2636	,66	7,50	4,00	,449
205	k	30	8,5	10,4	,0287	,0243	,71	8,40	2,65	,486
206	k	53	10,6	13,7	,0696	,0680	,82	4,50	3,65	,576
207	k	9	3,7	5,9	,0033	,0029	,67	4,40	2,00	,520
208	k	38	12,6	13,0	,0746	,0630	,69	5,40	3,50	,460

Рис.10.19. Вид окна с файлом данных

Найдем параметры регрессионного уравнения линейной связи объема ствола дуба в коре (переменная VK) от диаметра (D) и высоты (H) ствола. Вид уравнения: $VK = a_1 + a_2D + a_3H$.

Выставим опции стартового окна регрессионного анализа :

Variables: зависимая (dependent) переменная – VK; независимые (independent) – D, H (рис. 10.20); **Input file – Raw Date** (данные файла в виде строчной таблицы); **MD deletion – pairwise; Mode - Standard.**

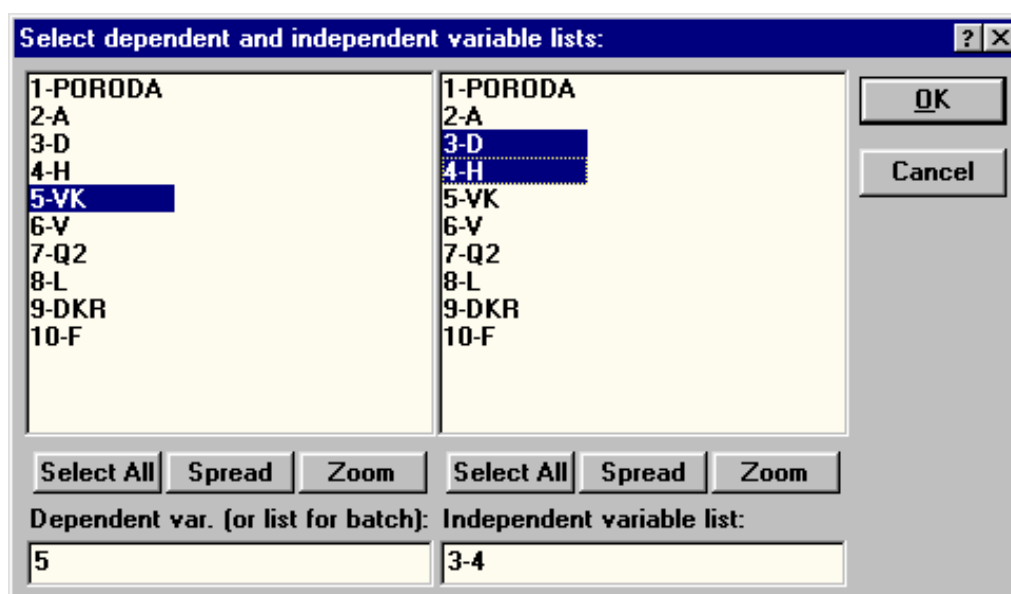


Рис. 10.20. Выбор зависимой и независимых переменных

Так как в файле данных содержится информация о модельных деревьях разных пород, а уравнение регрессии мы хотим получить для дуба, нужно воспользоваться кнопкой **Select cases** диалогового окна **Multiple Regressions**, чтобы установить условие включения случаев (строк файла данных) в статистическую обработку. В обработку должны включаться только те строки файла данных, для которых значение первой переменной $V1 = 'd'$ (т. е. дуб) (рис. 10.21).

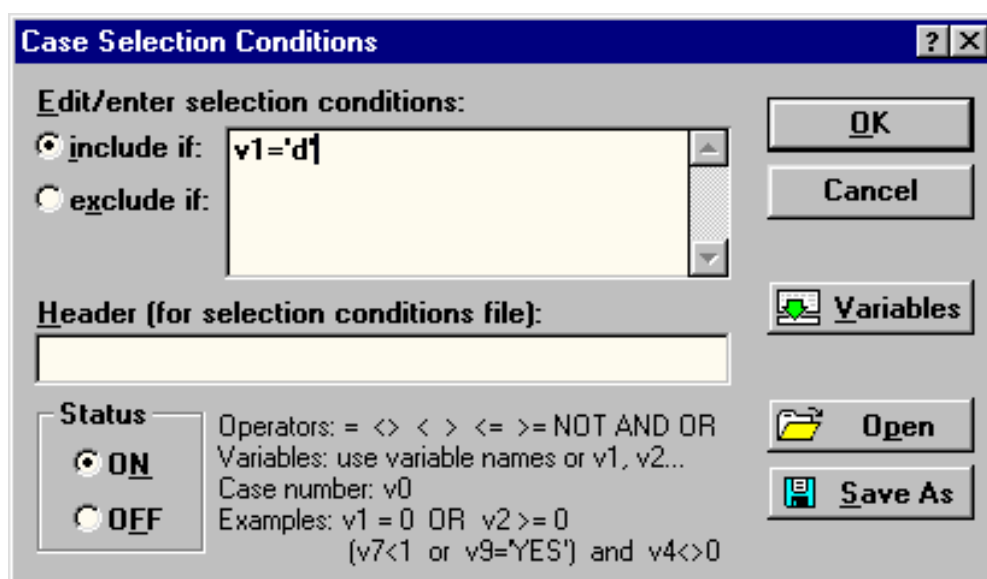


Рис. 10.21. Задание условия включения в обработку случаев со значением переменной V1 - дуб

После того, как все опции стартового диалогового окна регрессионного анализа выставлены, нажатие на кнопку **OK** приведет к появлению окна **Multiple Regressions Results** (результаты регрессионного анализа) (рис. 10.22), с помощью которого можно просмотреть результаты анализа в деталях.

В верхней части окна приводятся наиболее важные параметры полученной регрессионной модели:

Multiple R – коэффициент множественной корреляции (характеризует тесноту линейной связи между зависимой и всеми независимыми переменными. Может принимать значения от 0 до 1);

R^2 или **RI** – коэффициент детерминации (численно выражает долю вариации зависимой переменной, объясненную с помощью регрессионного уравнения. Чем больше R^2 , тем большую долю вариации объясняют переменные, включенные в модель);

adjusted R – скорректированный коэффициент множественной корреляции (этот коэффициент лишен недостатков коэффициента множественной корреляции. Включение новой переменной в регрессионное уравнение увеличивает RI не всегда, а только в том случае, когда частный F-критерий при проверке гипотезы о значимости включаемой переменной больше или равен 1. В противном случае включение новой переменной уменьшает значение RI и adjusted R^2);

adjusted R^2 или **adjusted RI** – скорректированный коэффициент детерминации (скорректированный R^2 можно с большим успехом (по сравнению с R^2) применять для выбора наилучшего подмножества независимых переменных в регрессионном уравнении);

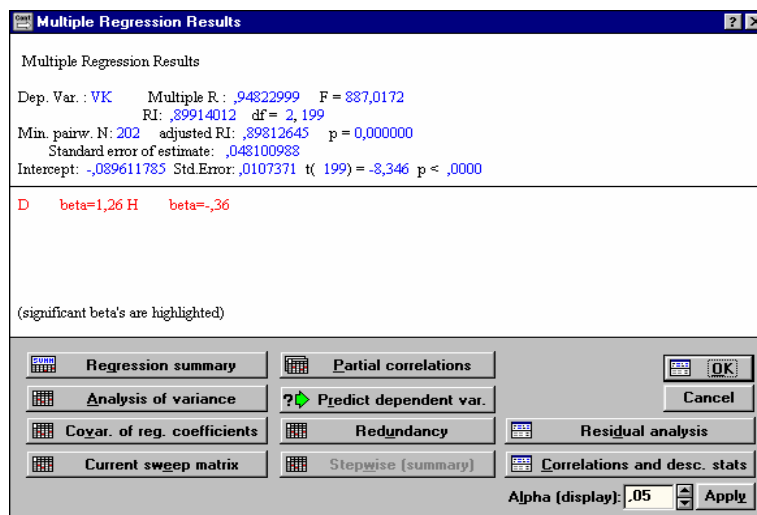


Рис. 10.22. Окно просмотра результатов регрессионного анализа

F – F-критерий;

df – число степеней свободы для F-критерия;

p – вероятность нулевой гипотезы для F-критерия;

Standard error of estimate – стандартная ошибка оценки (уравнения);

Intercept – свободный член уравнения;

Std.Error – стандартная ошибка свободного члена уравнения;

t – t-критерий для свободного члена уравнения;

p – вероятность нулевой гипотезы для свободного члена уравнения.

Beta – β -коэффициенты уравнения.

Это стандартизированные регрессионные коэффициенты, рассчитанные по стандартизированным значениям переменных. По их величине можно сравнить и оценить значимость зависимых переменных, так как β -коэффициент показывает на сколько единиц стандартного отклонения изменится зависимая переменная при изменении на одно стандартное отклонение независимой переменной при условии постоянства остальных независимых переменных. Свободный член в таком уравнении равен 0.

При помощи кнопок диалогового окна **Multiple Regressions Results** (рис. 10.22) результаты регрессионного анализа можно просмотреть более детально.

Кнопка **Regression summary** позволяет просмотреть основные результаты регрессионного анализа (рис. 10.23): **BETA** – β -коэффициенты уравнения; **St. Err. of BETA** – стандартные ошибки β -коэффициентов; **B** – коэффициенты уравнения регрессии; **St. Err. of B** – стандартные ошибки коэффициентов уравнения регрессии; **t (95)** – t-критерии для коэффициентов уравнения регрессии; **p-level** – вероятность нулевой гипотезы для коэффициентов уравнения регрессии.

N=202	BETA	St. Err of BETA	B	St. Err of B	t(199)	p-level	Valid N
Intercept			-,090	,011	-8,35	,000	
D	1,257	,052	,027	,001	23,95	0,000	202,0
H	-,355	,052	-,012	,002	-6,77	,000	202,0

Рис. 10.23. Основные результаты регрессионного анализа

Таким образом, в результате проведенного регрессионного анализа получено следующее уравнение взаимосвязи между объемом ствола дуба в коре VK и диаметром D и высотой H ствола: $VK = -0,090 + 0,027D - 0,012H$. Все коэффициенты уравнения значимы на 5-процентном уровне ($p\text{-level} < 0,05$). Это уравнение объясняет 89,9 % ($R^2 = 0,899$) вариации зависимой переменной. Ограничения модели: $2 \leq D \leq 31$; $1,6 \leq H \leq 19,5$.

Кнопка **Analysis of variance** позволяет ознакомиться с результатами дисперсионного анализа уравнения регрессии (рис. 10.24). В строках таблицы дисперсионного анализа уравнения регрессии – источники вариации: *Regress.* – обусловленная регрессией, *Residual* – остаточная, *Total* – общая. В столбцах таблицы: *Sums of Squares* – сумма квадратов, *df* – число степеней свободы, *Mean Squares* – средний квадрат, *F* – значение F-критерия, *p-level* – вероятность нулевой гипотезы для F-критерия.

F-критерий полученного уравнения регрессии значим на 5-процентном уровне. Вероятность нулевой гипотезы (*p-level*) значительно меньше 0,05, что говорит об общей значимости уравнения регрессии.

Continue...	Sums of Squares	df	Mean Squares	F	p-level
Regress.	4,104592	2	2,052296	887,0172	0,00
Residual	,460427	199	,002314		
Total	4,565019				

Рис. 10.24 .Результаты дисперсионного анализа уравнения регрессии

Кнопка **Partial correlations** позволяет просмотреть частные коэффициенты корреляции (*Partial Cor.*) между переменными (рис. 10.25). Частная корреляция – это корреляция между двумя переменными, когда

одна или больше из оставшихся переменных удерживаются на постоянном уровне (т. е. имеют постоянное значение). Частные коэффициенты корреляции, как и парные, могут принимать значения от -1 до $+1$.

Continue...	Beta in	Partial Cor.	Semipart Cor.	Tolerance	R-square	t(199)	p-level
D	1,2570	,8616	,5391	,1840	,8160	23,948	0,0000
H	-,3554	-,4328	-,1525	,1840	,8160	-6,772	,0000

Рис. 10.25. Результаты расчета частных коэффициентов корреляции

Сильная взаимная коррелированность независимых переменных в нашем уравнении затрудняет анализ влияния отдельных факторов на зависимую переменную. Отрицательный знак коэффициента уравнения перед высотой H , отрицательный знак частного коэффициента корреляции VK с H противоречат реальному положению дел. Положительный знак парного коэффициента корреляции между высотой и объемом ствола говорит о прямой взаимосвязи между ними.

В идеальной регрессионной модели независимые переменные вообще не коррелируют друг с другом. Однако в моделях, разрабатываемых для природных объектов, сильная коррелированность переменных является довольно частым явлением. Это приводит к увеличению ошибок уравнения, уменьшению точности оценивания, снижению эффективности использования регрессионной модели. Поэтому выбор независимых переменных, включаемых в регрессионную модель, должен быть очень тщательным.

Кнопка **Predict dependent var.** позволяет рассчитать по полученному регрессионному уравнению значение зависимой переменной по значениям независимых переменных. На рис. 10.26 приводится пример расчета объема ствола дуба в коре при диаметре ствола 14 см и высоте 11 м. Предсказанный (Predictd) объем составил 0,1614 куб. м.

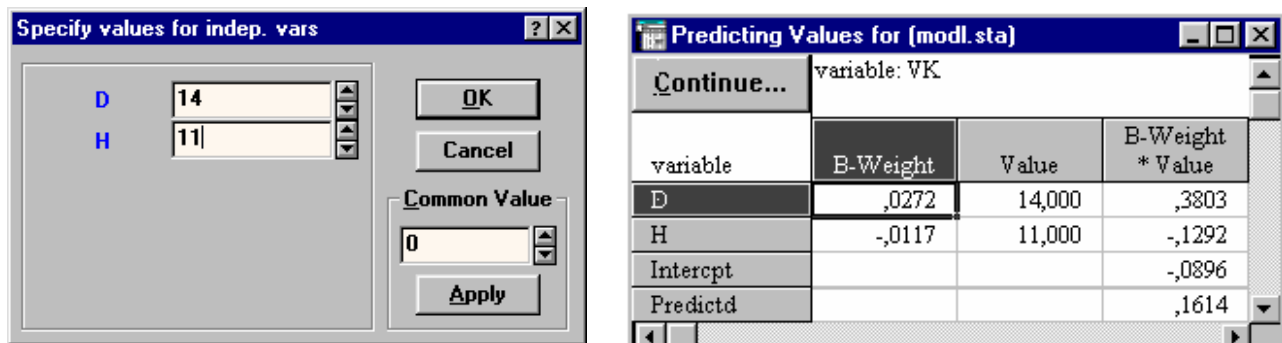


Рис. 10.26. Окно задания значений независимых переменных и результаты расчета по регрессионному уравнению зависимой переменной

Кнопка **Correlations and desc. stats** позволяет просмотреть описательные статистики и корреляционную матрицу с парными коэффициентами корреляции переменных, участвующих в регрессионной модели (рис. 10.27).

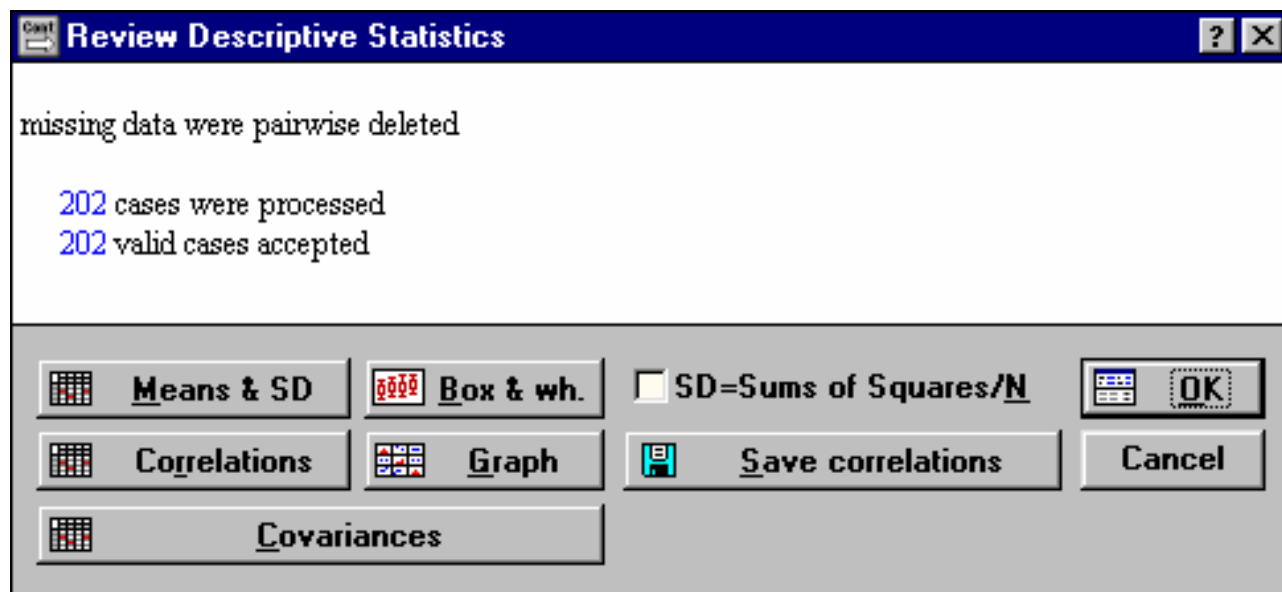


Рис. 10.27. Диалоговое окно Review Descriptive Statistics

Кнопка **Residual analysis** запускает процедуру всестороннего анализа остатков регрессионного уравнения (рис. 10.28). Остатки – это разности между опытными и предсказанными значениями зависимой переменной в построенной регрессионной модели.

Кнопка **Redundancy** предназначена для поиска выбросов. Выбросы – это остатки, которые значительно превосходят по абсолютной величине остальные. Выбросы показывают опытные данные, которые являются не типичными по отношению к остальным данным, и требуют выяснения причин их возникновения. Выбросы должны исключаться из обработки, если они вызваны ошибками регистрации, измерения. Для выделения имеющихся в регрессионных остатках выбросов предложен ряд показателей.

Показатель Кука (**Cook's Distance**) принимает только положительное значение и показывает расстояние между коэффициентами уравнения регрессии после исключения из обработки *i*-й точки данных. Большое значение показателя Кука указывает на сильно влияющий случай.

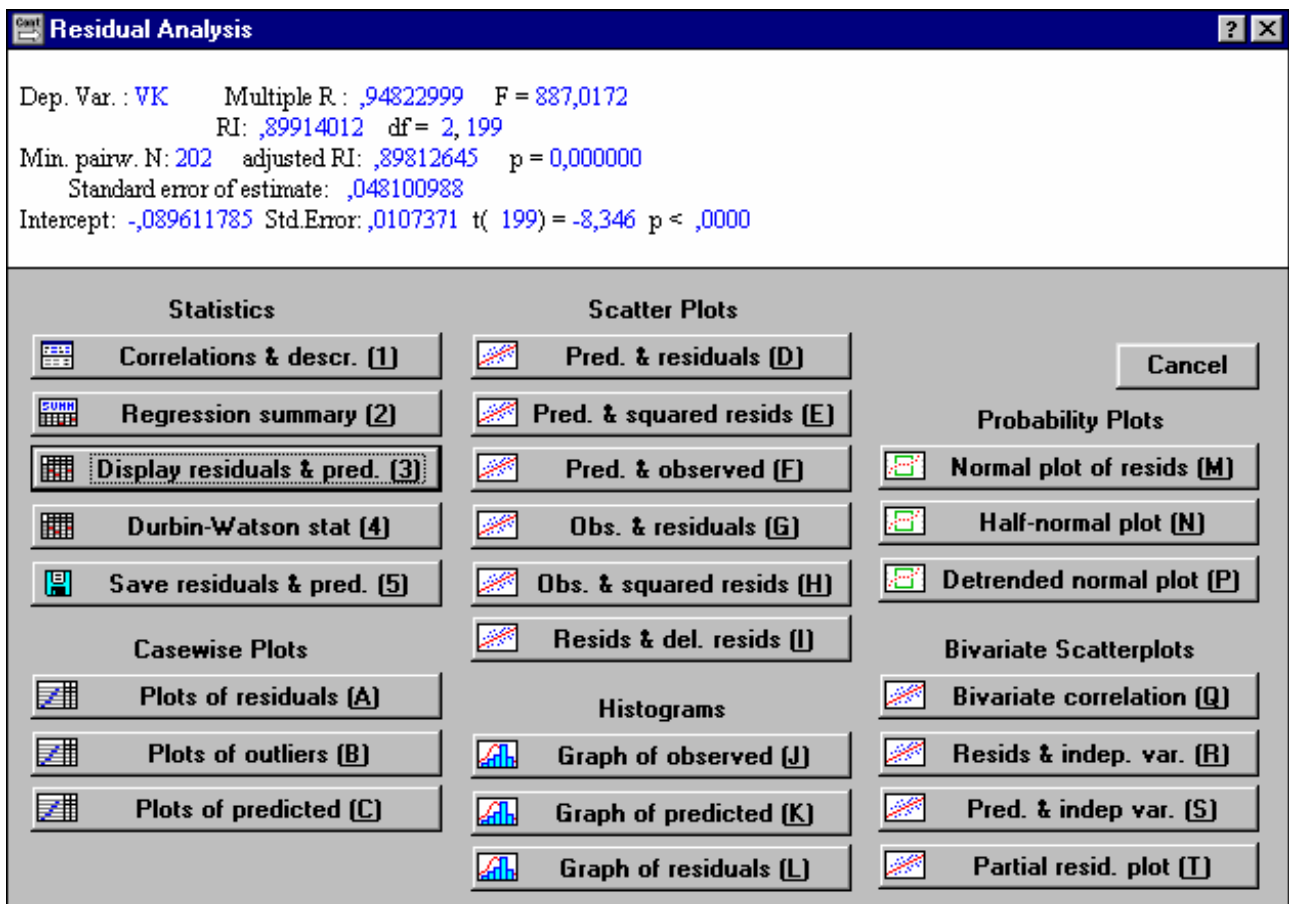


Рис. 10.28. Диалоговое окно Residual analysis (Анализ остатков)

Расстояние Махаланобиса (**Mahalns. Distance**) – показывает насколько каждый случай или точка в р-мерном пространстве независимых переменных отклоняется от центра статистической совокупности.

Внимательный анализ остатков позволяет оценить адекватность модели.

Остатки должны быть нормально распределены, со средним значением, равным нулю, и постоянной, независимы от величин зависимой и независимой переменных, дисперсий. Модель должна быть адекватна на всех отрезках интервала изменения зависимой переменной.

Просмотр величин остатков и специальных критериев, их оценивающих, осуществляется при помощи кнопки **Display residuals & pred.** окна Residual analysis. Для нашего примера фрагмент окна с этими данные представлен на рис. 10.29.

Case No.	Observed Value	Predictd Value	Residual	Standard Pred. v.	Standard Residual	Std.Err. Pred.Val	Mahalns. Distance	Deleted Residual	Cook's Distanc
202	,2148	,2241	-,0093	,348	-,193	,0050	1,147	-,0094	,000
203	,2375	,2517	-,0142	,541	-,294	,0043	,584	-,0143	,000
204	,3216	,3549	-,0333	1,263	-,692	,0057	1,850	-,0338	,000
Minimum	,0003	-,0753	-,1133	-1,747	-2,355	,0034	,003	-,1168	,000
Maximum	,6775	,5424	,2439	2,575	5,072	,0119	11,255	,2501	,220
Mean	,1744	,1744	-,0000	-,000	-,000	,0056	1,990	,0002	,000

Рис. 10.29. Окно со значениями остатков (Residuals), показателями Кука (Cook's Distance), расстоянием Махаланобиса (Mahalns. Distance), опытными (Observed Value) и предсказанными по уравнению (Predictd Value) значениями зависимой переменной

Вполне достаточно бывает одного графического анализа остатков. О нормальности остатков можно судить по графику остатков на нормальной вероятностной бумаге. Чем ближе распределение к нормальному виду, тем лучше значения остатков ложатся на прямую линию. График строится при помощи кнопки **Normal plot of resid.** окна Residual analysis (рис. 10.30).

Важно просмотреть графики зависимости остаток от каждой из независимых переменных. Их легко просмотреть при помощи кнопки **Resids & indep. Var.** окна Residual analysis. Остатки должны быть нормально распределены, т. е. на графике они должны представлять приблизительно горизонтальную полосу одинаковой ширины на всем ее протяжении. Коэффициент корреляции r между регрессионными остатками и переменными должен равняться нулю.

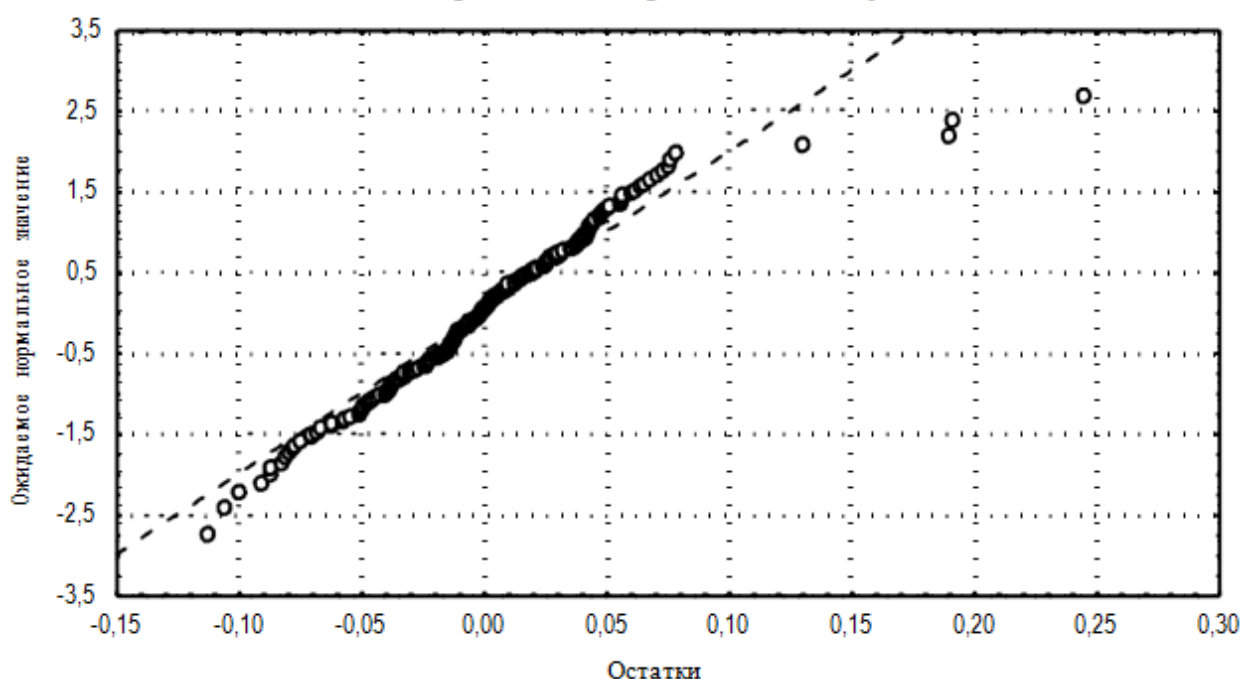


Рис. 10.30. График остатков на нормальной вероятностной бумаге

В нашем случае на графиках остатков (рис. 10.31) хорошо просматривается нелинейный тренд, что вызывает сомнение в адекватности модели. Присутствие нелинейного тренда в регрессионных остатках говорит о необходимости пересмотра модели (преобразования или ввода новых переменных, перехода от линейной модели к нелинейной).

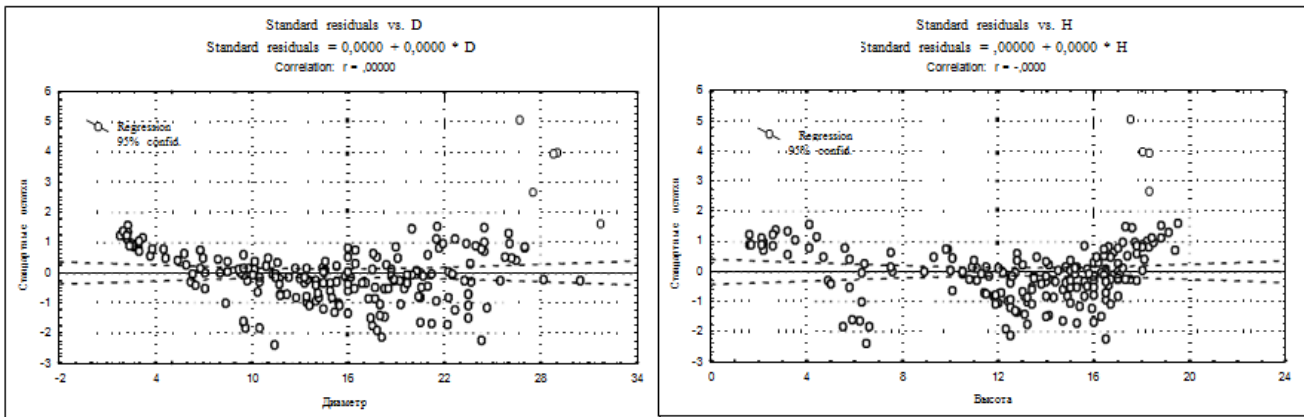


Рис. 10.31. Зависимость остатков от независимых переменных:
диаметра и высоты

Для выявления нестабильности дисперсии ошибки уравнения при помощи кнопки **Pred. & residuals** окна Residual analysis можно создать график зависимости регрессионных остатков от предсказанного значения зависимой переменной. Рис. 10.32 позволяет сделать заключение о непостоянстве дисперсии ошибки уравнения (с увеличением значений зависимой переменной дисперсия увеличивается). Это еще одно подтверждение неадекватности анализируемой модели.

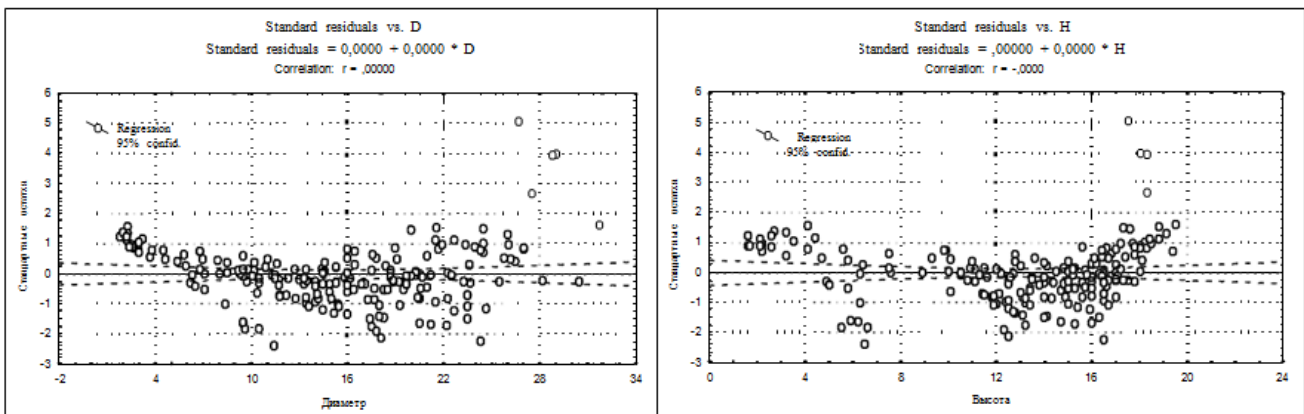


Рис. 10.32. Зависимость регрессионных остатков от предсказанных значений
зависимой переменной

Очень удобным визуальным способом оценки адекватности регрессионной модели является анализ графического изображения опыт-

ных и полученных по регрессионному уравнению значений зависимой переменной. Изображение строится нажатием кнопки **Pred. & observed** окна Residual analysis.

Из рис. 10.33 хорошо видно, что линейный вид нашей модели плохо описывает взаимосвязь объема ствола дуба в коре от его диаметра и высоты (модель при малых и больших значениях отклика занижает величину зависимой переменной). Эта связь носит нелинейный характер.

Рассмотрим порядок нахождения коэффициентов уравнений регрессии нелинейного вида, которые через преобразования переменных могут быть приведены к линейной модели. Найдем параметры регрессионного уравнения связи объема ствола дуба в коре (переменная VK) от диаметра D ствола. Вид уравнения: $VK = a_1 + a_2D + a_3D^2$.

Опцию **Mode** стартового окна регрессионного анализа (см. рис. 10.18) выставим в положение **Fixed non linear**.

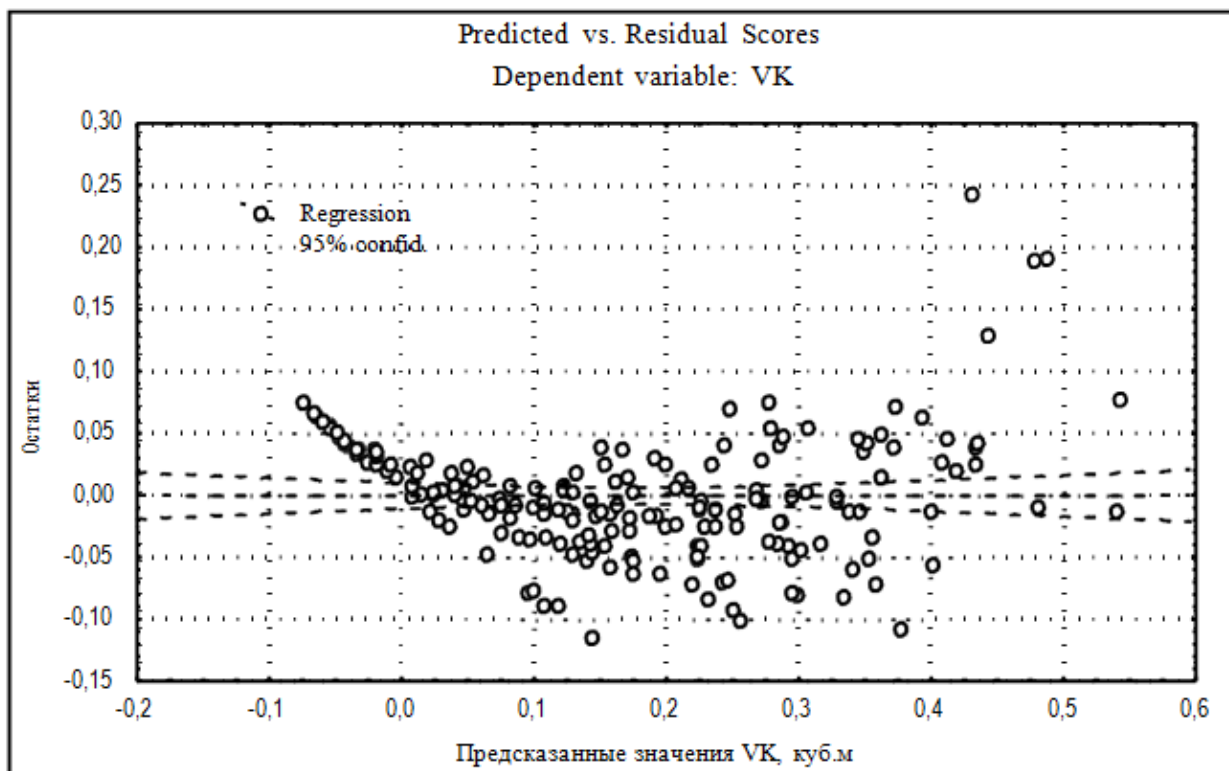


Рис. 10.33. Линия регрессии, опытные и полученные по регрессионному уравнению значений зависимой переменной

Если выбран фиксированный нелинейный тип регрессионной модели, то после нажатия на кнопку ОК в диалоговом окне **Multiple Regressions** (рис. 10.34) появляется окно **Non-linear Components Regression**, в котором можно выбрать следующие типы преобразования переменных: X^2 , X^3 , X^4 , X^5 , \sqrt{X} ($X \geq 0$), $\ln X$ ($X > 0$), $\lg_{10} X$ ($X > 0$), e^X ($-40 < X < +40$), 10^X , $1/X$ ($X \neq 0$). Если потребуются какие либо иные преобразования переменных, то тогда в файле данных следует создать мнимые вычисляемые переменные и включить их в качестве зависимых переменных в регрессионную модель.

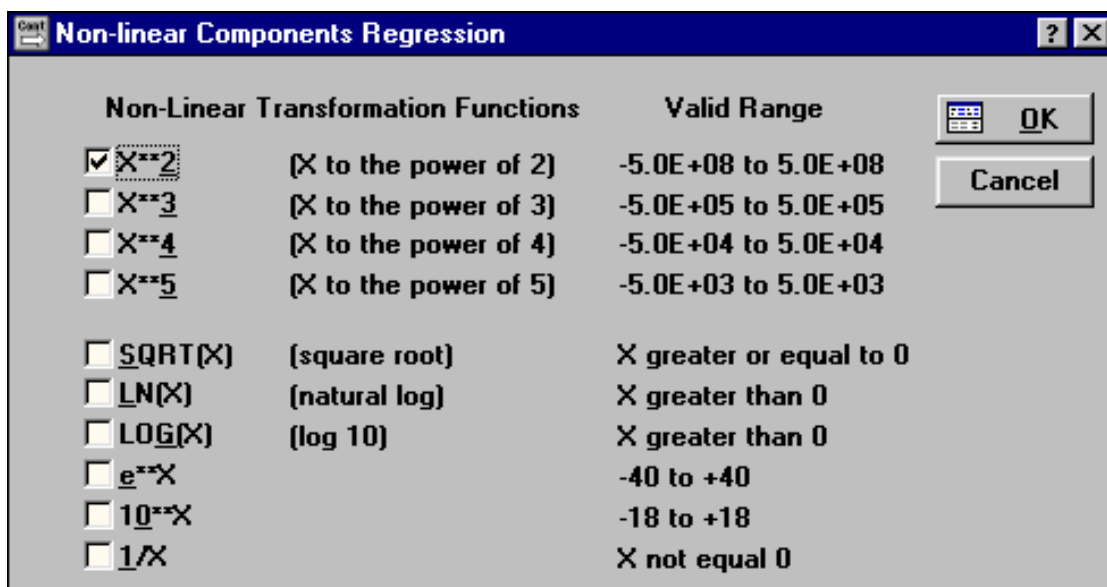


Рис. 10.34. Окно выбора типов преобразования переменных

После того, как тип преобразования переменных определен (в нашем примере это возведение в квадрат), необходимо уточнение зависимой и независимых переменных фиксированной нелинейной регрессионной модели. Оно проводится на следующем шаге при помощи кнопки **Variables** диалогового окна **Model Definition** (Уточнение модели) (рис. 10.35).

Зависимой (**dependent**) переменной в нашем случае будет VK ; независимыми (**independent**) – D и D^2 (рис. 10.36). Переменная D^2 значит-

ся в списке переменных как $V3^{**2}$, так как переменная D является третьей в списке переменных.

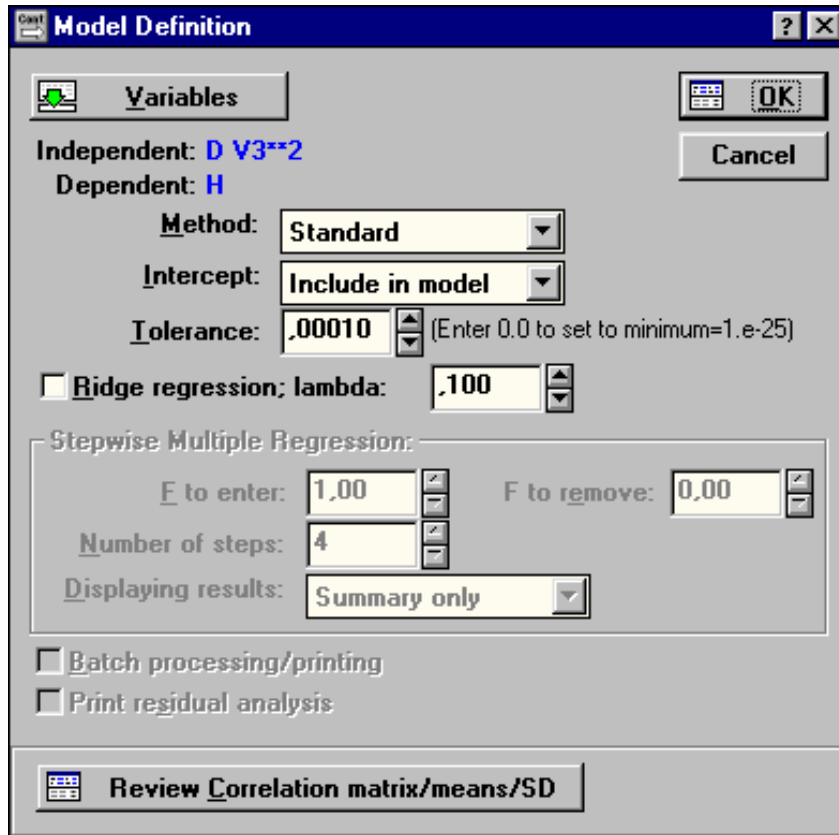


Рис. 10.35. Диалоговое окно Model Definition (Уточнение модели)

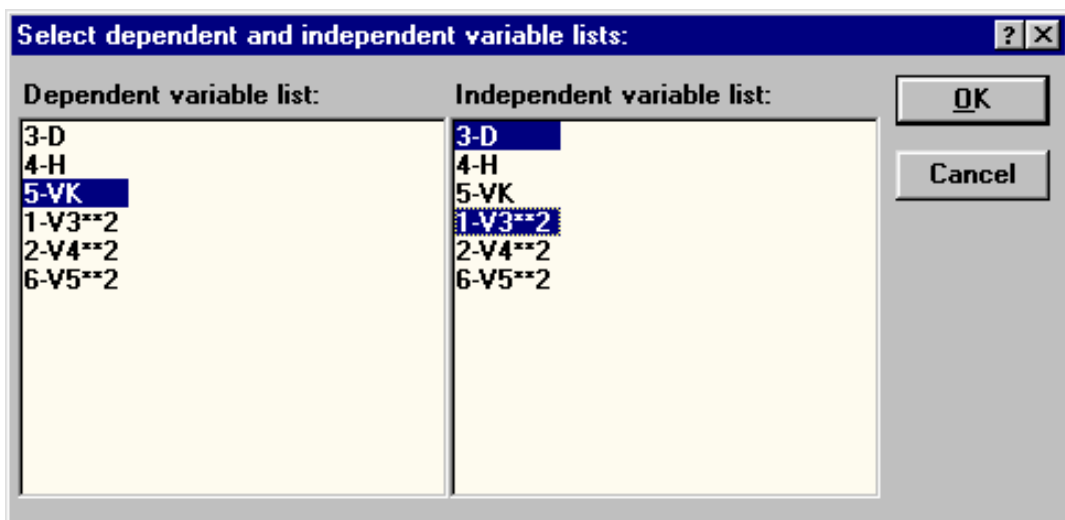


Рис. 10.36. Выбор переменных для расчета уравнения

$$VK = a_1 + a_2D + a_3D^2$$

Уравнение взаимосвязи между объемом ствола дуба в коре (VK) от его диаметром (D) оказалось следующее: $VK = 0,00023 - 0,0034D + 0,0008D^2$. Все коэффициенты уравнения (за исключением свободно-го члена) значимы на 5-процентном уровне ($p\text{-level} < 0,05$). Это уравнение объясняет 95,8 % ($R^2 = 0,958$) вариации зависимой переменной (рис. 10.37).

Regression Summary for Dependent Variable: VK (modl.sta)						
R= ,97900982 RI= ,95846023 Adjusted RI= ,95804274 F(2,199)=2295,8 p<0,0000 Std.Error of estimate: ,03087						
N=202	BETA	St. Err. of BETA	B	St. Err. of B	t(199)	p-level
Intercpt			,0023	,0087	,268	,7891
D	-,1561	,0568	-,0034	,0012	-2,750	,0065
V3**2	1,1292	,0568	,0008	,0000	19,888	0,0000

Рис. 10.37. Результаты регрессионного анализа модели

$$VK = a_1 + a_2D + a_3D^2$$

По всем стандартным параметрам второе уравнение регрессии значительно лучше первого. Это наглядно подтверждает и график на рис. 10.38.

Найдем параметры еще одного регрессионного уравнения: $VK = a_1D^{a_2}H^{a_3}$. Это степенное уравнение может быть приведено к линейному виду через логарифмирование: $\ln VK = \ln a_1 + a_2 \ln D + a_3 \ln H$.

При помощи кнопки **Variables** укажем зависимую VK и независимые переменные – D, H. Опцию Mode стартового окна регрессионного анализа выставим в положение **Fixed non linear**. В качестве типа преобразования переменных выберем натуральный логарифм ($\ln(X)$). В диалоговом окне **Model Definition** при помощи кнопки **Variables**

уточним модель, переопределив зависимую и независимые переменные так, как это показано на рис. 10.39.

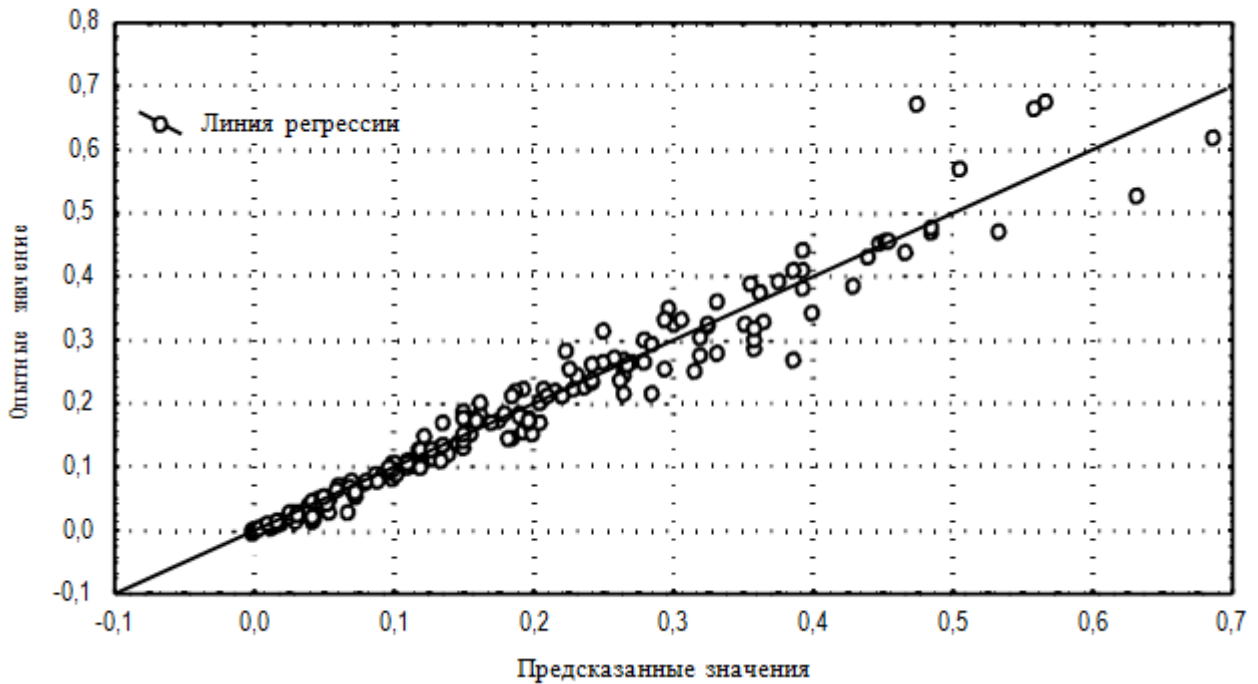


Рис. 10.38. Линия регрессии, опытные и полученные по регрессионному уравнению значений зависимой переменной

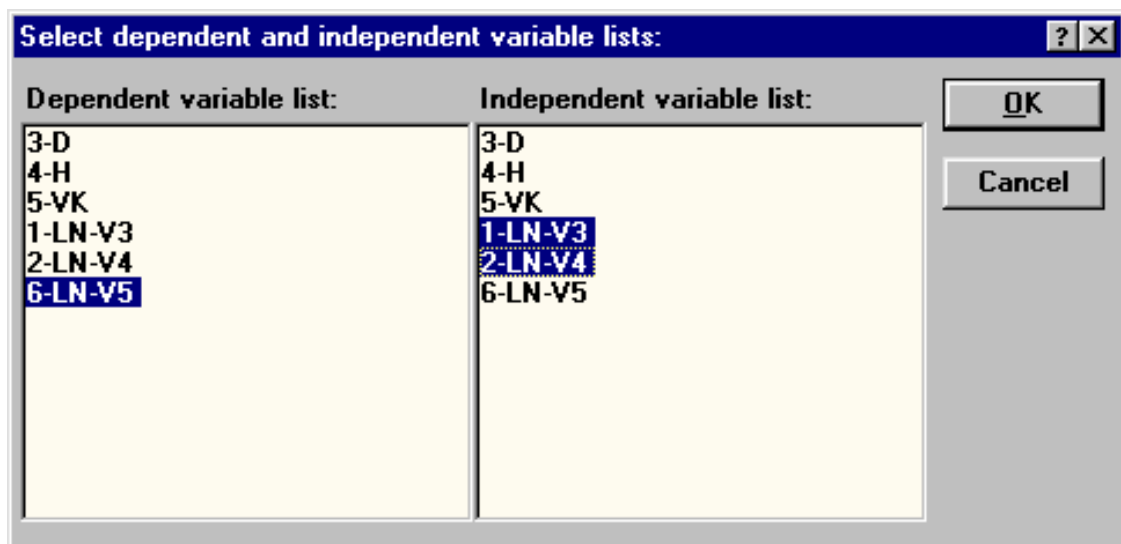


Рис. 10.39. Выбор переменных для расчета уравнения

$$\ln VK = \ln a_1 + a_2 \ln D + a_3 \ln H$$

Основные результаты регрессионного анализа представлены на рис. 10.40.

Regression Summary for Dependent Variable: LN-V5 (modl.sta)						
Continue... R= ,99788945 RI= ,99578335 Adjusted RI= ,99574098 F(2,199)=23497, p<0,0000 Std.Error of estimate: ,11405						
N=202	BETA	St. Err. of BETA	B	St. Err. of B	t(199)	p-level
Intercpt			-9,87890	,036829	-268,233	0,00
LN-V3	,682935	,013811	1,87395	,037898	49,447	0,00
LN-V4	,327696	,013811	1,03462	,043606	23,726	0,00

Рис. 10.40. Результаты регрессионного анализа модели

$$\ln VK = \ln a_1 + a_2 \ln D + a_3 \ln H$$

Уравнение выглядит следующим образом: $\ln VK = -9,8789 + 1,8739 \ln D + 1,0346 \ln H$ или в степенном виде: $VK = 0,00005 D^{1,8739} \times H^{1,0346}$. Все коэффициенты уравнения значимы на 5-процентном уровне ($p\text{-level} < 0,05$). Это уравнение объясняет 99,6 % ($R^2 = 0,996$) вариации зависимой переменной. Ошибка уравнения 0,11405. Чтобы выразить ее в процентах, сравним абсолютную величину ошибки со средним значением зависимой переменной ($\ln VK$): $0,11405 / 2,46166 \cdot 100\% = 4,6\%$.

Проверим адекватность полученной модели через анализ остатков. В целом он даст положительное заключение. В качестве иллюстрации приведем лишь несколько графиков (рис. 10.41, 10.42), подтверждающих такой вывод.

Поиск наилучшей регрессионной модели представляет собой довольно громоздкий процесс. При помощи опции **Method** пользователь может отказаться от стандартного проведения регрессионного анализа (**Standard**) и воспользоваться методами пошагового включения переменных в регрессионную модель (**Forward stepwise**) или пошагового исключения переменных (**Backward stepwise**) из регресси-

онной модели. Опция **Displaying results** позволяет просматривать только итоговые результаты регрессионного анализа (Summary only) или после каждого шага включения или исключения переменных (At each step). Если необходимо получить регрессионную модель без свободного члена уравнения, тогда в списке поля **Intercept** нужно выбрать **Set to zero**.

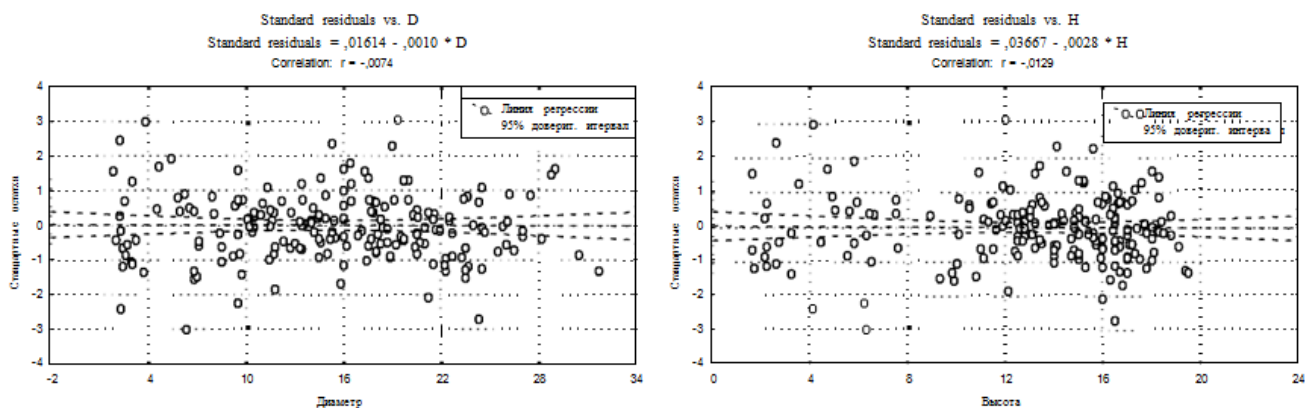


Рис. 10.41. Зависимость остатков степенного уравнения от независимых переменных: диаметра и высоты

Воспользуемся методом пошагового включения переменных для нахождения наилучшего регрессионного уравнения, описывающего объем ствола дуба в коре (VK). В качестве независимых переменных, которые потенциально могут быть включены в модель, примем: диаметр ствола D, квадрат диаметра D^2 , высота ствола H, квадрат высоты ствола H^2 , произведение диаметра ствола на его высоту DH, квадрат произведения диаметра ствола на его высоту DH^2 .

Вначале создадим новую переменную DH. В файле данных она будет одиннадцатой по счету. Для расчета значений этой переменной вызовем окно с экспликацией этой переменной (рис. 10.43) и в поле **Long name** введем формулу, в соответствии с которой значения переменной должны быть рассчитаны, т. е. $=V3 \cdot V4$.

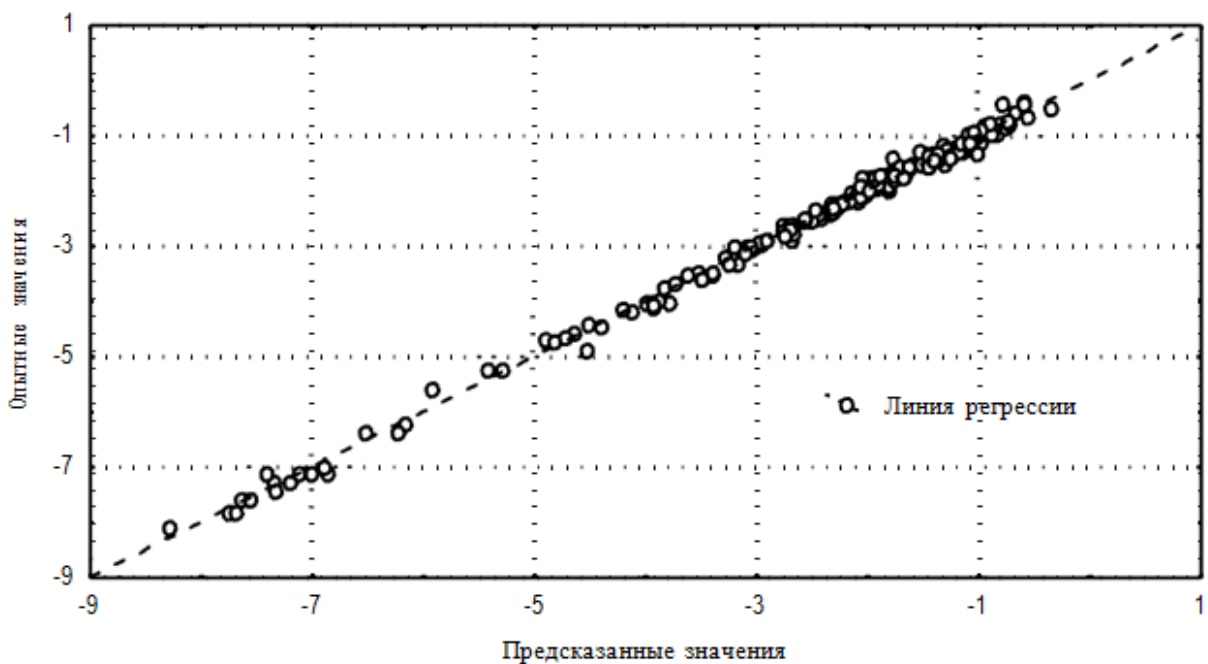


Рис. 10.42. Линия регрессии, опытные и полученные по степенному регрессионному уравнению значения зависимой переменной

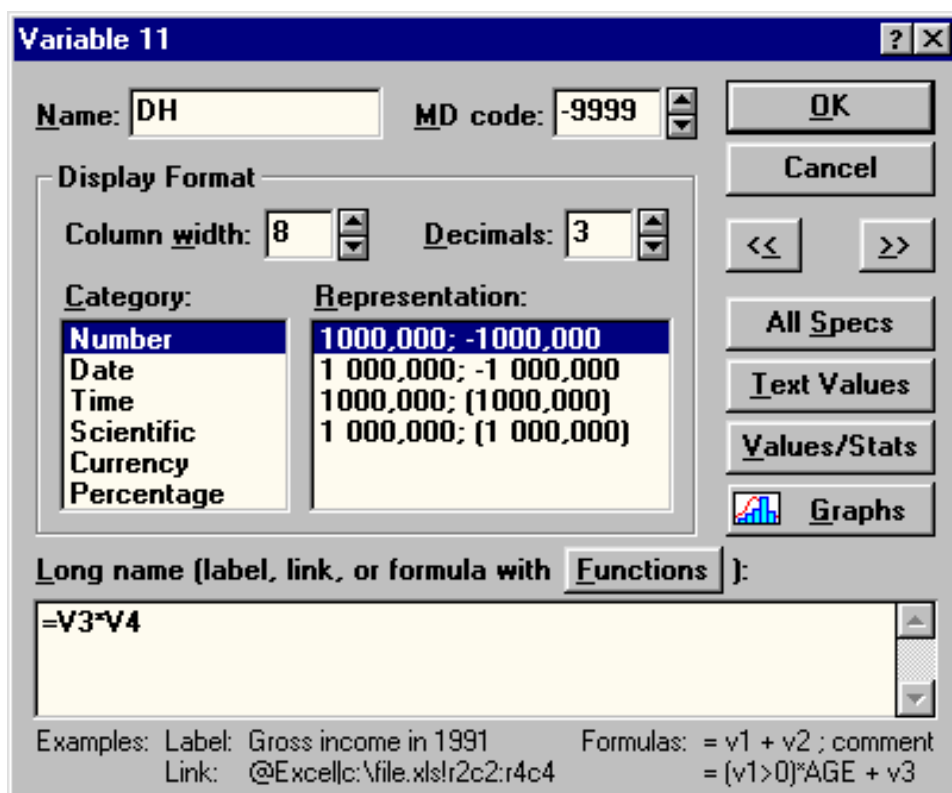


Рис. 10.43. Окно экспликации 11-й переменной

Опцию **Mode** стартового окна регрессионного анализа выставим в положение **Fixed non linear**.

Определим тип преобразования переменных – возведение в квадрат (см. рис. 10.34) и уточним зависимую и независимые переменные модели (рис. 10.44).

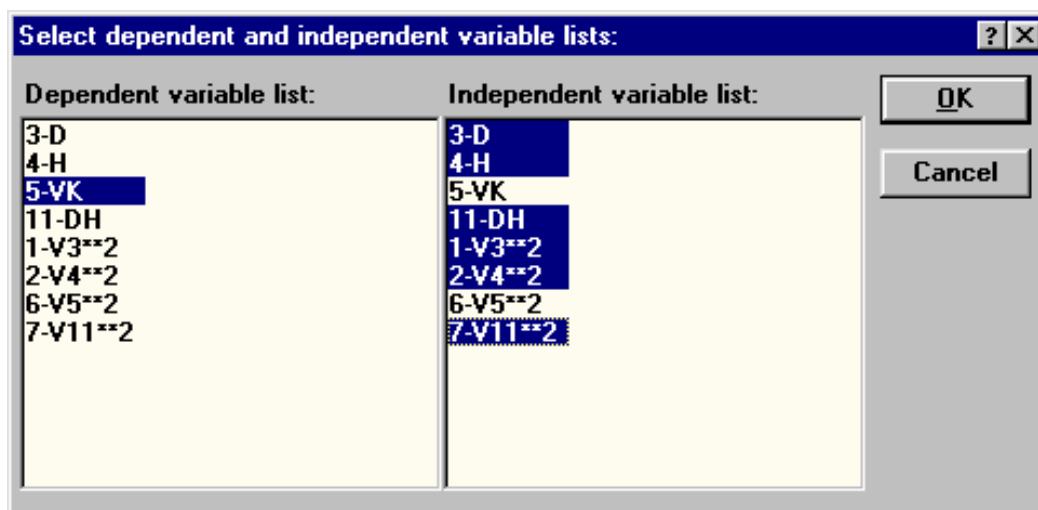


Рис. 10.44. Уточнение зависимой и независимых переменных регрессионного анализа

Для пошаговых методов регрессионного анализа важно установить величину **Tolerance** (толерантность) и величины частного F-критерия для включения в модель (**F to enter**) и исключения из нее (**F to remove**). Установив величину толерантности, мы создаем барьер для включения в модель переменных, толерантность которых меньше установленной. Если величина толерантности переменной мала, то переменная несет малую дополнительную информацию и включение ее в модель не целесообразно. Какая-либо новая независимая переменная, включаемая в модель, может сильно влиять на зависимую переменную, но если она включается в модель после других переменных, она может уже мало влиять на переменную отклика (например, из-за сильной коррелированности с переменными, уже включенными в мо-

дель). По умолчанию в пакете **Statistica** переменная включается в модель, если частный F-критерий больше или равен 1. Численное значение F-критерия для включения никогда не выбирается меньшим, чем численное значение F-критерия для исключения.

Выставим опции окна **Model Definition** так, как показано на рис. 10.45. В результате процедуры пошагового включения переменных в регрессионную модель получено следующее уравнение: $VK = 0,0214 + 0,0009D^2 - 0,0104D + 0,0003(DH)^2$. Все коэффициенты уравнения значимы на 5-процентном уровне ($p\text{-level} < 0,05$). Это уравнение объясняет 96,4 % ($R^2 = 0,964$) вариации зависимой переменной (рис. 10.46). Средняя ошибка уравнения составляет $0,02862 \text{ м}^3$.

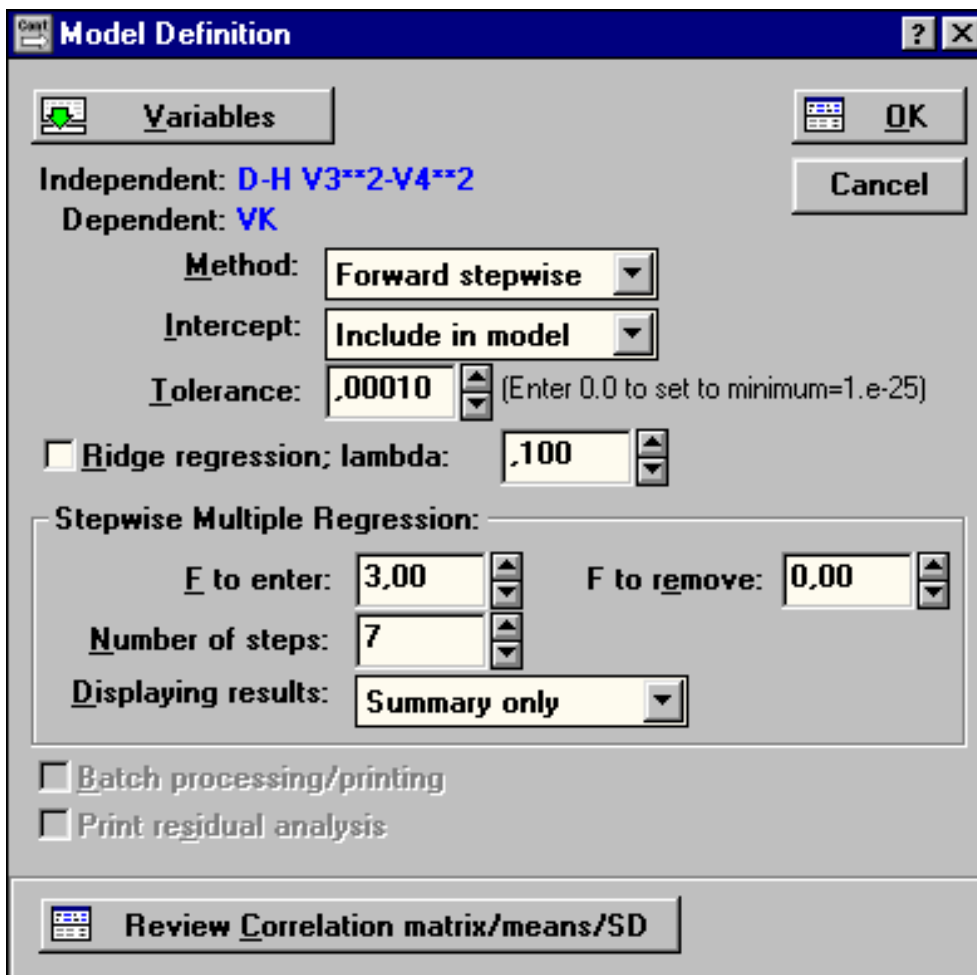


Рис. 10.45. Диалоговое окно Model Definition при использовании метода пошагового включения переменных в модель

Regression Summary for Dependent Variable: VK (mod. sta)						
R= ,98207345 RI= ,96446826 Adjusted RI= ,96392990 F(3,198)=1791,5 p<0,0000 Std.Error of estimate: ,02862						
N=202	BETA	St. Err. of BETA	B	St. Err. of B	t(198)	p-level
Intercpt			,021446	,008755	2,44964	,015169
V3**2	1,252215	,056776	,000872	,000040	22,05543	0,000000
D	-,479257	,076746	-,010356	,001658	-6,24471	,000000
V4**2	,220606	,038126	,000333	,000058	5,78616	,000000

Рис. 10.46. Характеристика уравнения, полученного методом Forward stepwise

При поиске лучшей регрессионной модели необходимо руководствоваться следующими наиболее общими требованиями (Дрейпер, Смит, 1981).

1. Регрессионная модель должна объяснять не менее 80 % вариации зависимой переменной, т. е. $R^2 \geq 0,8$.

2. Стандартная ошибка оценки зависимой переменной по уравнению должна составлять не более 5% среднего значения зависимой переменной.

3. Коэффициенты уравнения регрессии и его свободный член должны быть значимы на 5-процентном уровне.

4. Остатки от регрессии должны быть без заметной автокорреляции ($r < 0,30$), нормально распределены и без систематической составляющей.

Чем меньше сумма квадратов остатков, чем меньше стандартная ошибка оценки и чем больше R^2 , тем лучше уравнение регрессии.

Одним из недостатков классического регрессионного анализа, в основе которого лежит метод наименьших квадратов, является недостаточная устойчивость к изменениям входной информации. Сейчас довольно широко стали применяться альтернативные регрессионные модели, одной из которых является **гребневая регрессия**, которая отличается устойчивостью для случаев сильной коррелированности зависимых переменных друг с другом. В отличие от метода наи-

меньших квадратов, дающего несмещенные оценки коэффициентов уравнения, в методе гребневой регрессии оценки смещенные, но при этом они имеют меньшую дисперсию. Поэтому такие оценки могут давать более точные и приемлемые для практического использования модели (Забелин, 1983).

Для расчета гребневой регрессии следует установить флажок в опции **Ridge regression** диалогового окна Model Definition.

При практическом использовании метода гребневой регрессии одним из основных вопросов является выбор параметра λ (**lambda**). Существует несколько численных методов расчета параметра, но чаще используют простой эмпирический подход: выбирают такой параметр λ , при котором коэффициенты стабилизируются и при дальнейшем увеличении параметра изменяются мало. Значение принятого параметра λ является мерой смещения оценок от истинного значения, поэтому стараются не придавать λ слишком больших значений.

Обычно λ выбирают меньше 0,5, а шаг при подбore выбирают небольшим, например 0,02 (Уланова, Забелин, 1990). При $\lambda = 0$ уравнение имеет коэффициенты классического метода наименьших квадратов.

10.3. ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ В СИСТЕМЕ STATISTICA

Рассмотрим основные этапы проведения кластерного анализа в системе STATISTICA на следующем примере.

Исходными показателями послужили:

X1 – численность населения (тыс.),

X2 – количество человек, приходящихся на одного врача,

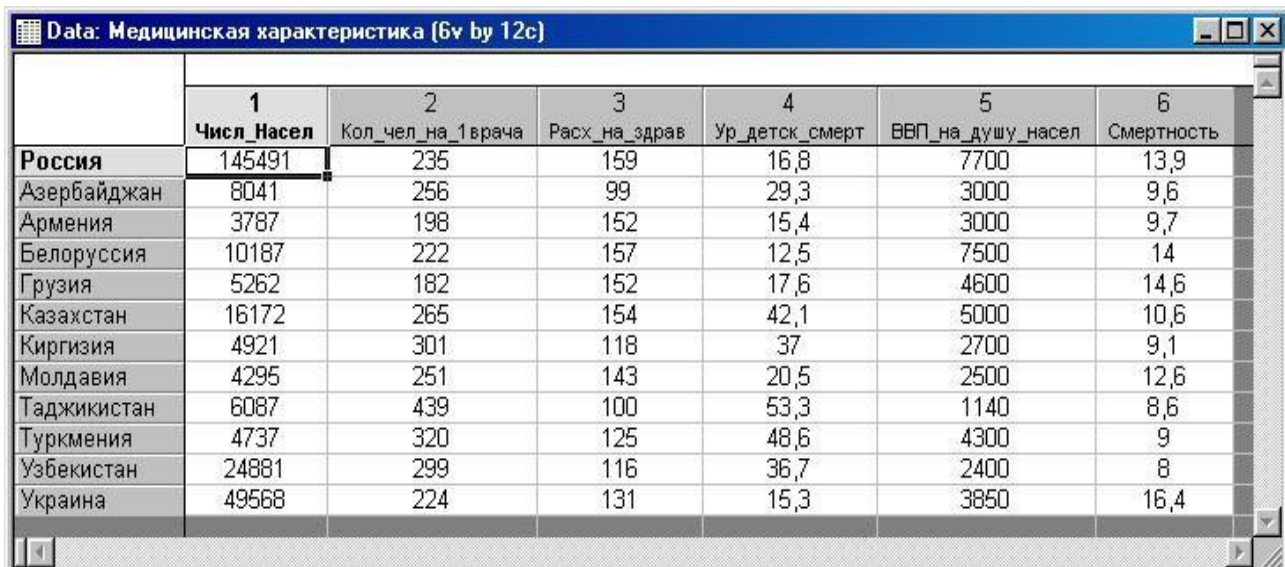
X3 – Расходы на здравоохранение на душу населения (\$),

X4 – Уровень детской смертности,

X5 – ВВП, рассчитанный по паритету покупательной способности на душу населения (млн \$),

X6 – Смертность на 1000 человек.

В файле (рис. 10.47) содержатся данные по 12 странам (по медицинской характеристике).



	1	2	3	4	5	6
	Числ_Насел	Кол_чел_на_1_врача	Расх_на_здрав	Ур_детск_смерт	ВВП_на_душу_насел	Смертность
Россия	145491	235	159	16,8	7700	13,9
Азербайджан	8041	256	99	29,3	3000	9,6
Армения	3787	198	152	15,4	3000	9,7
Белоруссия	10187	222	157	12,5	7500	14
Грузия	5262	182	152	17,6	4600	14,6
Казахстан	16172	265	154	42,1	5000	10,6
Киргизия	4921	301	118	37	2700	9,1
Молдавия	4295	251	143	20,5	2500	12,6
Таджикистан	6087	439	100	53,3	1140	8,6
Туркмения	4737	320	125	48,6	4300	9
Узбекистан	24881	299	116	36,7	2400	8
Украина	49568	224	131	15,3	3850	16,4

Рис. 10.47. Исходные данные

Задачей факторного анализа является объединение большого количества показателей, признаков, которыми характеризуется экономический процесс или объект, в меньшее количество искусственно построенных на их основе факторов, чтобы полученная в итоге система факторов (столь же хорошо описывающая выборочные данные, что и исходная) была наиболее удобна с точки зрения содержательной интерпретации.

Алгоритм выполнения

Модуль **Factor Analysis** (факторный анализ) содержит широкий набор методов, снабжающих пользователя исчерпывающими средствами выделения факторов и представления результатов. Для вызова данного модуля можно использовать **STATISTICA Module Switcher**

(Переключатель модулей), который содержит список всех доступных модулей (рис. 10.48), или через меню **Статистика \ Многомерные исследовательские методы \ Анализ фактора** (в зависимости от версии программы STATISTICA).

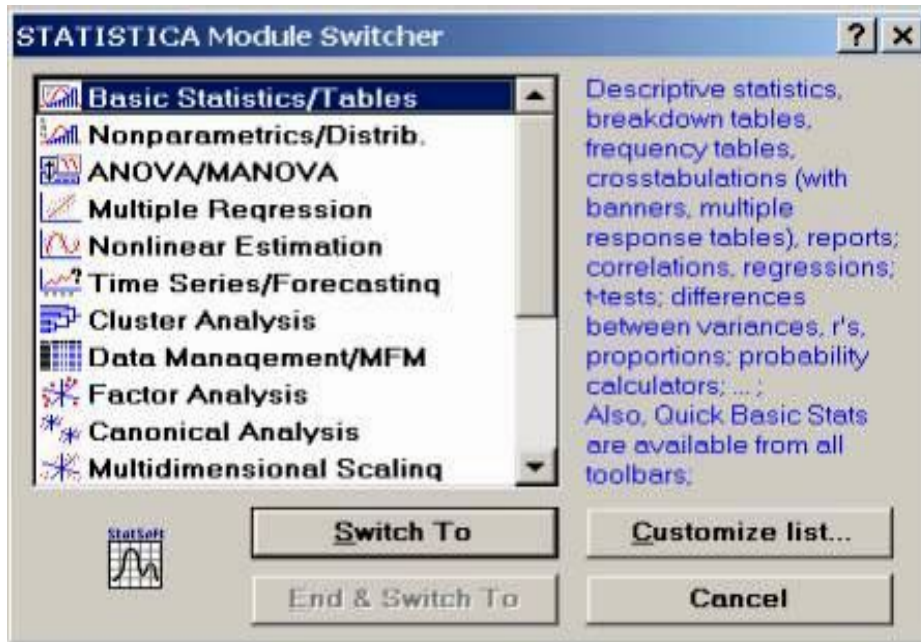


Рис. 10.48. Вид окна **STATISTICA Module Switcher**

На экране появится диалоговое окно (рис. 10.49) **Factor Analysis**:

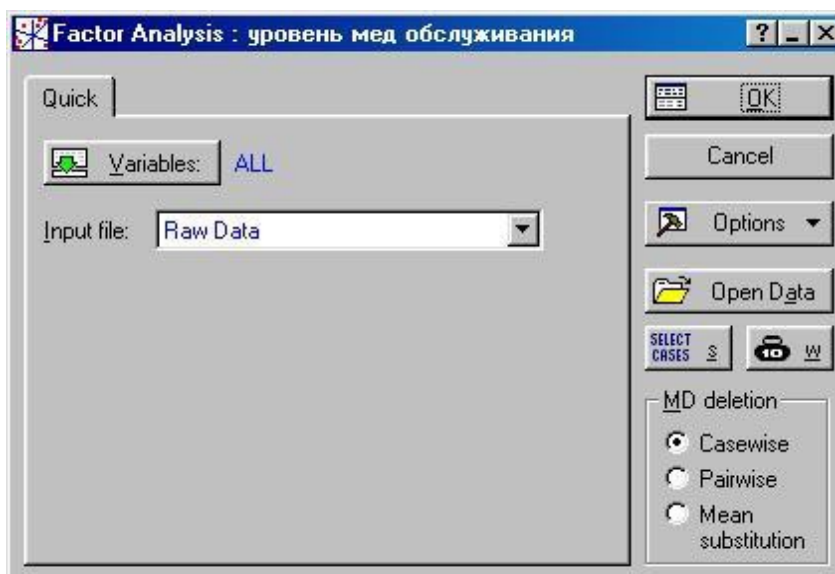


Рис. 10.49. Вид окна **Factor Analysis**

Кнопка **Variables** (Переменные) позволяет отобразить все переменные из файла данных, которые должны быть включены в факторный анализ (рис. 10.50). Если при анализе будут использованы все переменные, то можно воспользоваться кнопкой **Select All** (Выбрать все).

Input File (Входной файл) должен содержать или необработанные данные, или матрицу корреляций и быть предварительно созданным в модуле **Factor Analysis** (Факторный анализ) или другом статистическом модуле.

В модуле возможны следующие типы исходных данных:

- **Correlation Matrix** (Корреляционная матрица);
- **Raw Data** (Исходные данные).

Выберите, например, **Raw Data**. Это обычный файл данных, где по строкам записаны значения переменных.

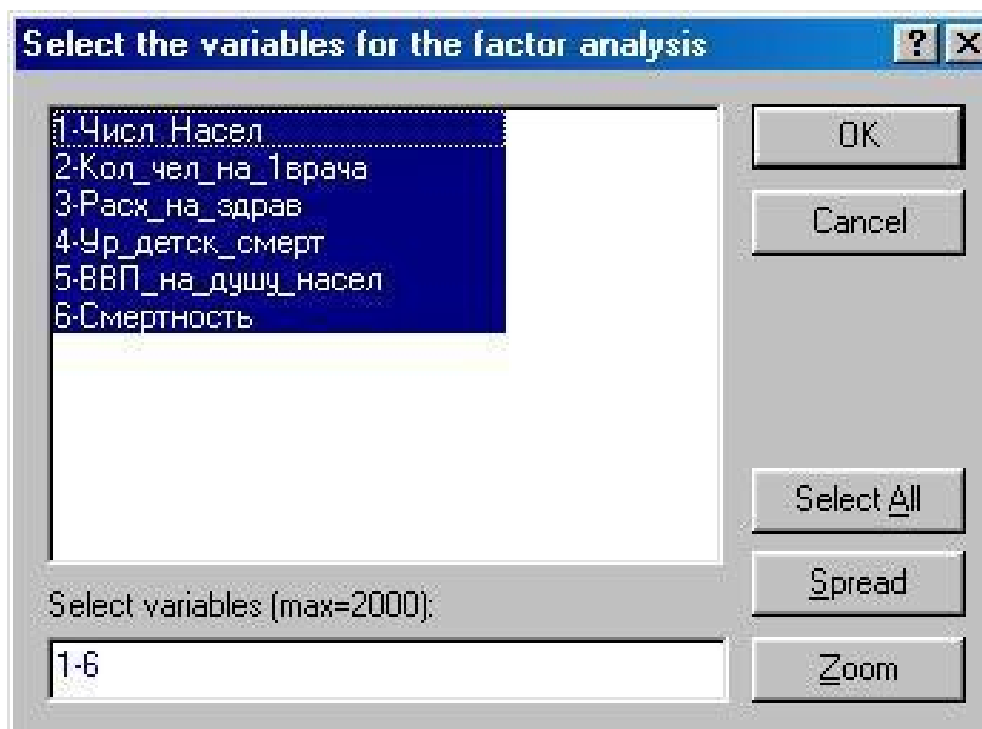


Рис. 10.50. Данные для факторного анализа

MD deletion (замена пропущенных переменных) (рис. 10.49).

Способ обработки пропущенных значений:

- **Casewise** (способ исключения пропущенных случаев) – состоит в том, что в электронной таблице, содержащей данные, игнорируются все строки (случаи), в которых имеется хотя бы одно пропущенное значение. Это относится ко всем переменным. В таблице остаются только случаи, в которых нет ни одного пропуска;

- **Pairwise** (парный способ исключения пропущенных значений) – игнорируются пропущенные случаи не для всех переменных, а лишь для выбранной пары. Все случаи, в которых нет пропусков, используются в обработке, например, при поэлементном вычислении корреляционной матрицы, когда последовательно рассматриваются все пары переменных. Очевидно, в способе Pairwise остается больше наблюдений для обработки, чем в способе Casewise. Тонкость, однако, состоит в том, что в способе Pairwise оценки различных коэффициентов корреляции строятся по разному числу наблюдений;

- **Mean Substitution** (подстановка среднего вместо пропущенных значений).

Щелкнув в стартовом окне модуля на кнопку **ОК**, вы начнете анализ выбранных переменных.

STATISTICA обработает пропущенные значения тем способом, какой вы ей указали, вычислит корреляционную матрицу и предложит на выбор несколько методов факторного анализа.

Вычисление корреляционной матрицы (если она не задается сразу) – первый этап факторного анализа.

После щелчка по **ОК** можно перейти к следующему диалоговому окну.

Define Method of Factor Extraction (определить метод выделения факторов) (рис. 10.51).

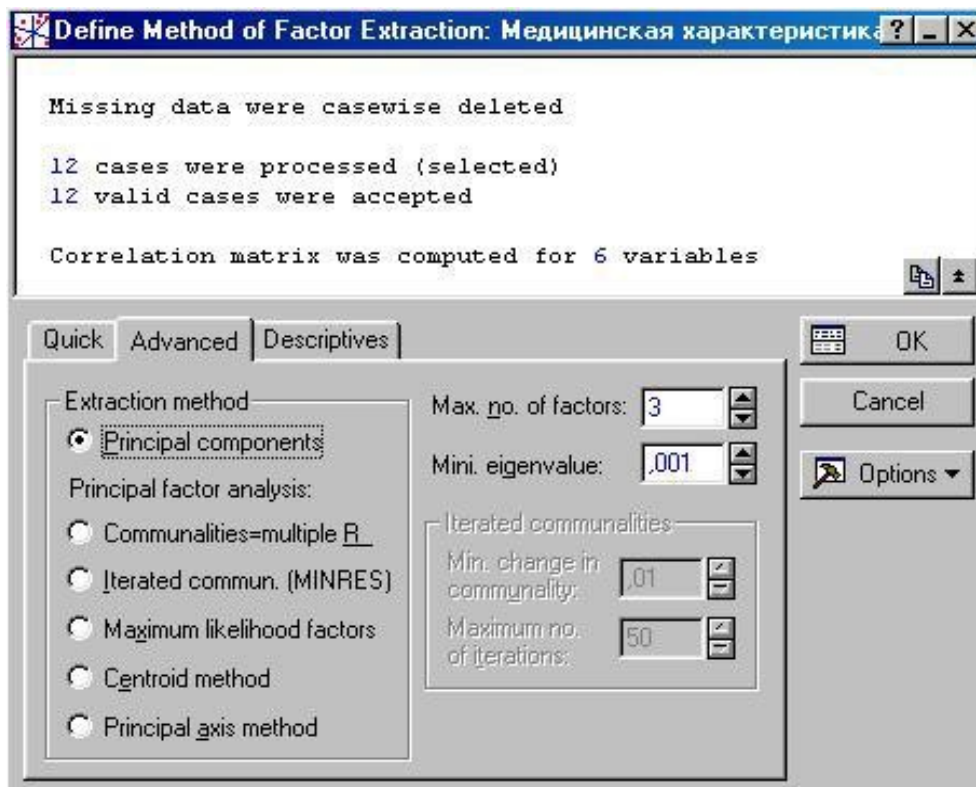


Рис. 10.51. Вид окна **Define Method of Factor Extraction**

Данное окно имеет следующую структуру.

Верхняя часть окна является информационной: здесь сообщается, что пропущенные значения обработаны методом Casewise. Обработано 12 случаев и 12 случаев приняты для дальнейших вычислений. Корреляционная матрица вычислена для 6 переменных.

Группа опций, объединенных под заголовком **Extraction method** (методы выделения факторов) позволяет выбрать метод обработки:

- **Principal components** (метод главных компонент) – позволяет выделить компоненты, работая с первоначальной матрицей корреляций;

- **Communalities=multiple R** (общности как множественный R-квадрат) – на диагонали матрицы корреляций будут находиться оценки квадрата коэффициента множественной корреляции R^2 (соответствующей переменной со всеми другими переменными);

– **Iterated communalities (MINRES)** (метод минимальных остатков) – выполняется в два этапа. Сначала оценки квадрата коэффициента множественной корреляции R^2 используются для определения общностей, как в предыдущем методе. После первоначального выделения факторов метод корректирует их нагрузки с помощью метода наименьших квадратов с целью минимизировать остаточные суммы квадратов;

– **Maximum likelihood factors** (метод максимального правдоподобия) – в этом методе считается заранее известным число факторов (оно устанавливается в поле ввода максимального числа факторов, см. ниже). STATISTICA оценит нагрузки и общности, которые максимизируют вероятность наблюдаемой в таком случае матрицы корреляций. В диалоговом окне результатов анализа доступен χ -квадрат тест для проверки справедливости принятой гипотезы о числе общих факторов;

– **Centroid method** (центроидный метод) – основан на геометрическом подходе;

– **Principal axis method** (метод главных осей) – основан на итеративной процедуре вычисления общностей по текущим собственным значениям и собственным векторам. Итерации продолжаются до тех пор, пока не превышено максимальное число итераций или минимальное изменение в общностях больше, чем это определено в соответствующем поле (см. ниже);

– **Max. no. of factors** (максимальное число факторов). Заданное в этом поле число определяет, сколько факторов может быть выделено при работе рассмотренных выше методов. Это поле работает вместе с полем **Min. eigenvalue** (минимальное собственное значение). Часто при заполнении этого поля руководствуются критерием Кайзера, который рекомендует использовать лишь те факторы, для которых собственные значения не меньше 1.

Остальные поля доступны только при выбранном методе **Centroid method** (центроидный метод) или **Principal axis method** (метод главных осей) и определяют необходимые для успешного выполнения последовательных итераций параметры минимального изменения в общностях и максимального числа итераций.

В окне **Define Method of Factor Extraction** (Определить метод выделения факторов) (рис. 10.52) щелкните на кнопке **Review correlations, means, standart deviations** (Просмотреть корреляции /средние/стандартные отклонения).

Перед вами появилось окно просмотра описательных статистик для анализируемых данных (рис. 10.53), где можно посмотреть средние, стандартные отклонения, корреляции, ковариации, построить различные графики. Здесь можно провести дополнительный анализ текущих данных, проверить соответствие выборочных переменных нормальному закону распределения и существование линейной корреляции между переменными.

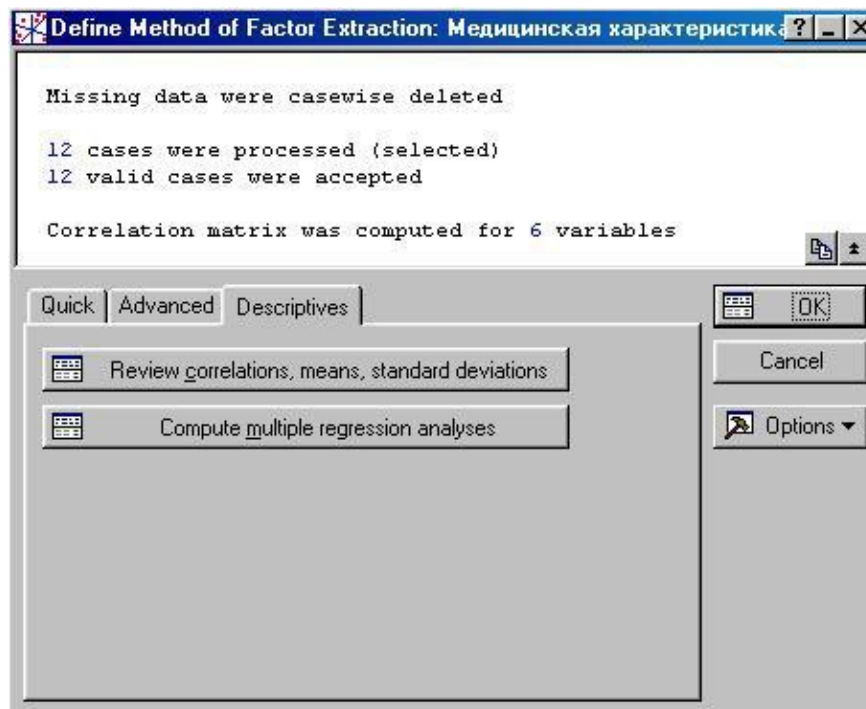


Рис. 10.52. Вид кнопки **Review correlations, means, standart deviations**

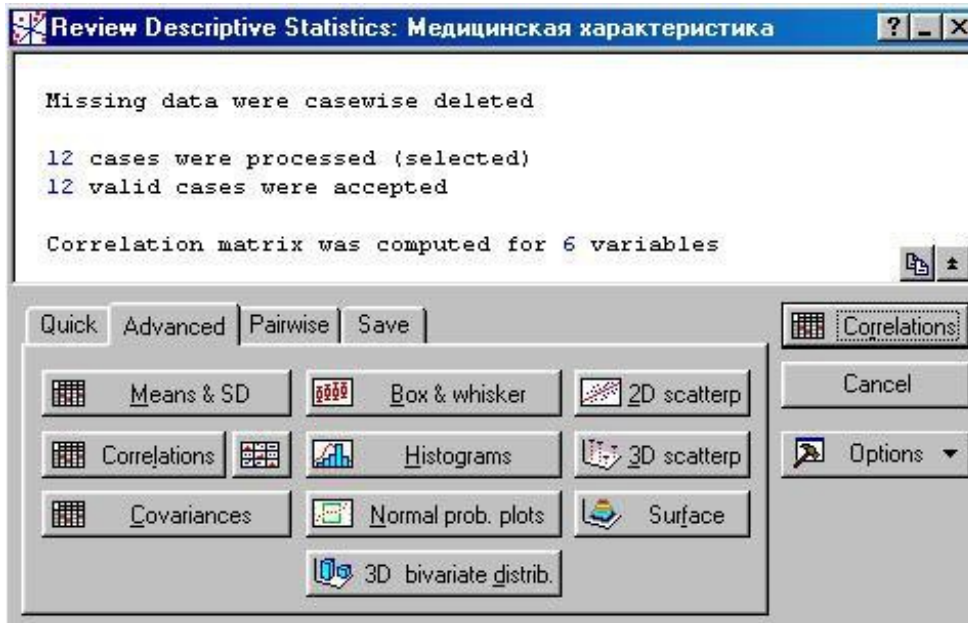


Рис. 10.53. Вид окна просмотра описательных статистик для анализируемых данных

Щелкните на кнопке **Correlations (Корреляции)** (рис. 10.54). Вы увидите на экране корреляционную матрицу выбранных ранее переменных.

Variable	Числ_Насел	Кол_чел_на_1_врача	Расх_на_здрав	Ур_детск_смерт	ВВП_на_душу_насел	Смертность
Числ_Насел	1,00	-0,18	0,33	-0,31	0,57	0,41
Кол_чел_на_1_врача	-0,18	1,00	-0,71	0,87	-0,52	-0,64
Расх_на_здрав	0,33	-0,71	1,00	-0,63	0,73	0,60
Ур_детск_смерт	-0,31	0,87	-0,63	1,00	-0,49	-0,76
ВВП_на_душу_насел	0,57	-0,52	0,73	-0,49	1,00	0,58
Смертность	0,41	-0,64	0,60	-0,76	0,58	1,00

Рис. 10.54. Вид корреляционной матрицы

Выберите опцию **Principal components (Главные компоненты)** и щелкните по кнопке **ОК**.

Система быстро произведет вычисления, и на экране появится окно **Factor Analysis Results (Результаты факторного анализа)** (рис.10.55).

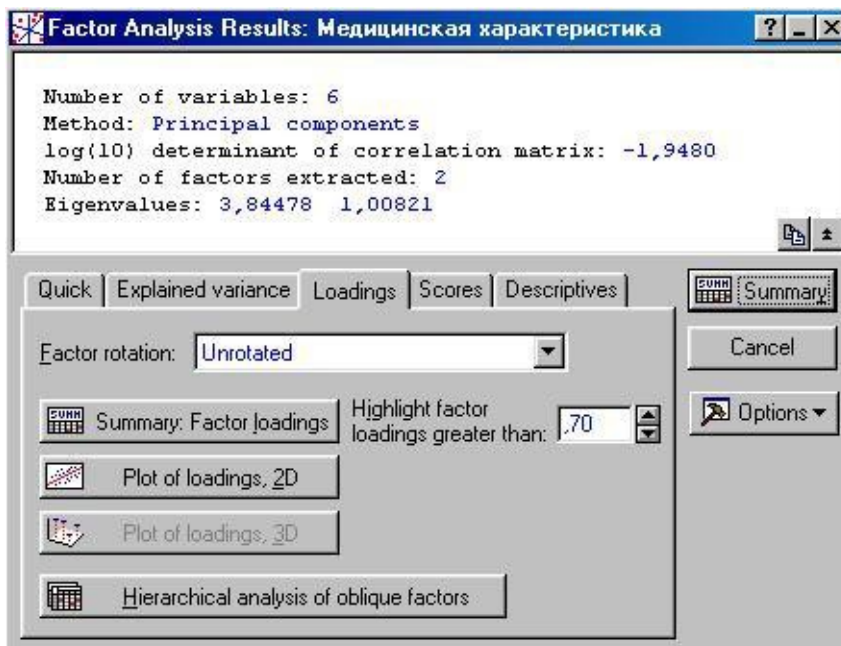


Рис. 10.55. Вид окна **Factor Analysis Results**

В верхней части окна **Результаты факторного анализа** дается информационное сообщение:

Number of variables (число анализируемых переменных) – 6;

Method (метод анализа) – главные компоненты;

log(10) determination of correlation matrix (десятичный логарифм детерминанта корреляционной матрицы) – -1,9480;

Number of Factor extraction (число выделенных факторов) – 3;

Eigenvalues (собственные значения) – 3,84478; 1,00821.

В нижней части окна находятся подразделы, позволяющие все-сторонне просмотреть результаты анализа численно и графически:

Plot of loadings, 2D и **Plot of loadings, 3D** (Графики нагрузок) – эти опции построят графики факторных нагрузок в проекции на плоскость любых двух выбранных факторов (рис. 10.56) и в проекции в пространство трех выбранных факторов (для чего необходимо наличие как минимум трех выделенных факторов);

Summary. Factor loadings (Факторные нагрузки). Эта опция вызывает таблицу с текущими факторными нагрузками (рис. 10.57), т. е. вычисленными для данного метода вращения факторов, который указан справа от соответствующей кнопки. В этой таблице факторам со-

ответствуют столбцы, а переменным – строки и для каждого фактора указывается нагрузка каждой исходной переменной, показывающая относительную величину проекции переменной на факторную координатную ось.

Факторные нагрузки могут интерпретироваться как корреляции между соответствующими переменными и факторами: чем выше нагрузка по модулю, тем больше близость фактора к исходной переменной. Таким образом, они представляют наиболее важную информацию для интерпретации полученных факторов. В сгенерированной таблице для облегчения трактовки будут выделены факторные нагрузки по абсолютной величине больше 0,7.

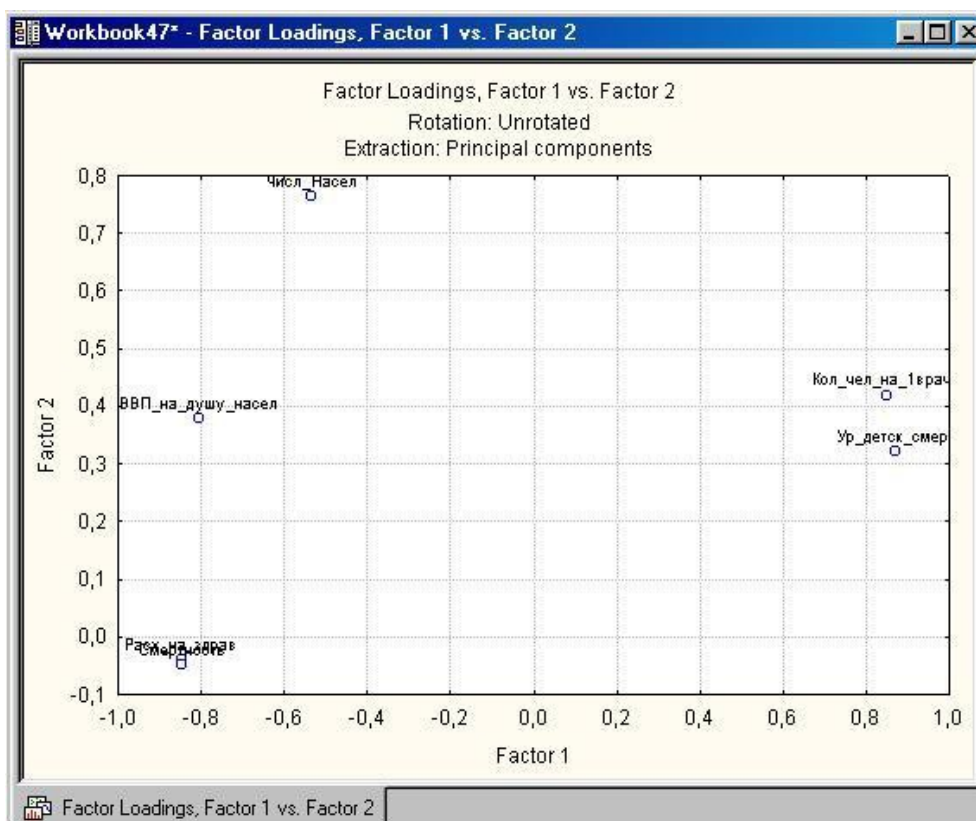


Рис. 10.56. Графики нагрузок

По-видимому, первый фактор более коррелирует с переменными, чем второй. Их трудно проинтерпретировать, возникает вопрос, какой смысл придать второму фактору. В этом случае целесообразно прибегнуть к повороту осей, надеясь получить решение, которое можно интерпретировать в предметной области.

Щелкните по меню **Factor rotation** (Вращение факторов) (рис. 10.58).

Variable	Factor 1	Factor 2
Числ_Насел	-0,533777	0,762876
Кол_чел_на_1_врача	0,850247	0,418680
Расх_на_здрав	-0,847750	-0,041021
Ур_детск_смерт	0,871452	0,321421
ВВП_на_душу_насел	-0,803570	0,378952
Смертность	-0,844457	-0,048387
Expl.Var	3,844777	1,008213
Prp.Totl	0,640796	0,168036

Рис. 10.57. Таблица с текущими факторными нагрузками

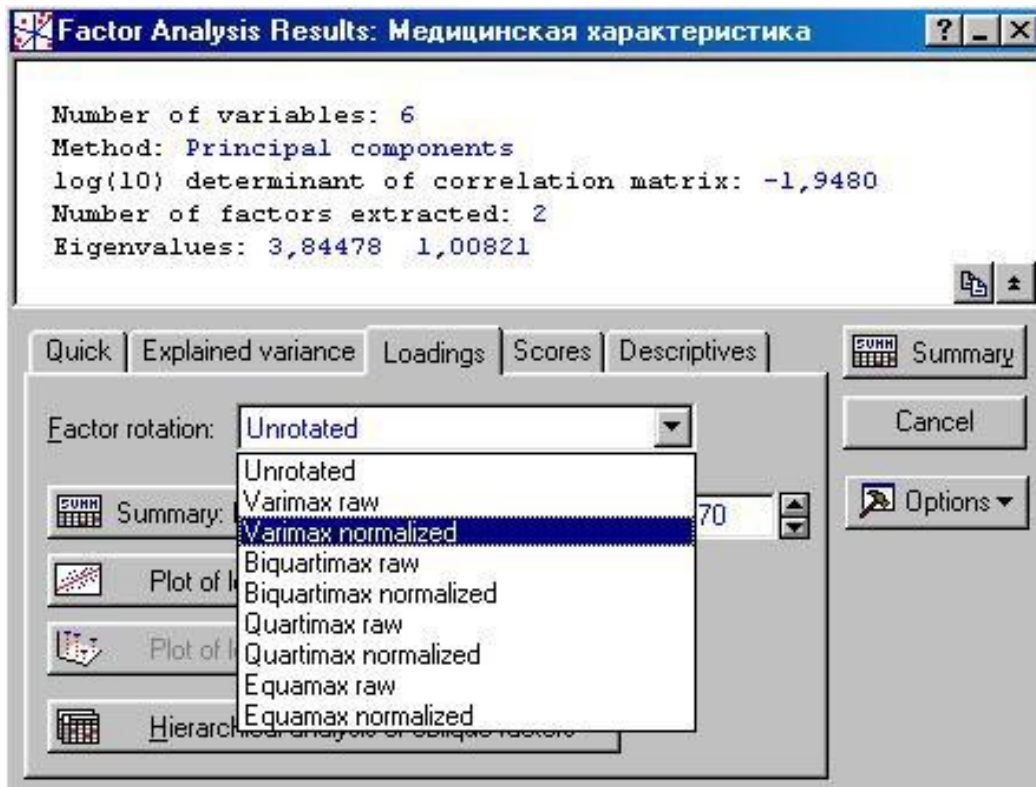


Рис. 10.58. Вращение факторов

Цель вращения – получение простой структуры, при которой большинство наблюдений находится вблизи осей координат. При случайной конфигурации наблюдений невозможно получить простую структуру.

В данном раскрывающемся меню вы можете выбрать различные повороты оси. Окно предлагает несколько возможностей оценить и найти нужный поворот следующими методами:

Varimax – Варимакс;

Biquartimax – Биквартимакс;

Quartimax – Квартимакс;

Equamax – Эквимакс.

Дополнительный термин в названии методов – **normalized** (нормализованные) – указывает на то, что факторные нагрузки в процедуре нормализуются, т. е. делятся на корень квадратный из соответствующей дисперсии. Термин **raw** (исходные) показывает, что вращаемые нагрузки не нормализованы.

Иницилируйте кнопку **Varimax normalized** (Варимакс нормализованный).

Система произведет вращение факторов методом нормализованного Варимакса, и окно **Factor Analysis Results** (Результаты факторного анализа) снова появится на мониторе. Вновь иницилируйте в этом окне кнопку **Plot of Loadings 2D** (Двумерный график нагрузок). Вы опять увидите график нагрузок (рис. 10.59).

Конечно, этот график немного отличается от предыдущего. Посмотрим еще нагрузки численно, инициировав кнопку **Факторные нагрузки** (Factor loadings). Щелкните на кнопке **Summary. Factor loadings** и откроется окно (рис. 10.60).

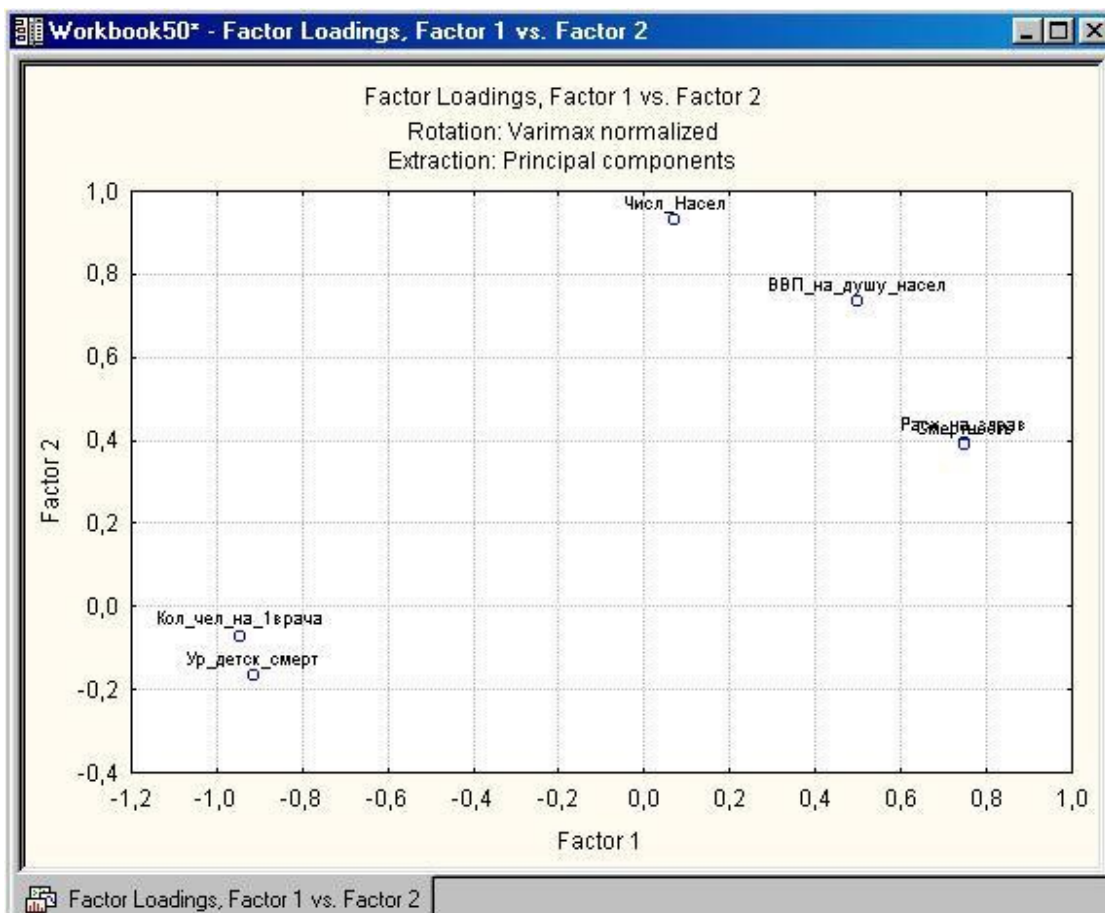


Рис. 10.59. Двумерный график нагрузок

Workbook49* - Factor Loadings (Vari... Extraction: Principal cor (Marked loadings are >

Variable	Factor 1	Factor 2
Числ_Насел	0,072180	0,928272
Кол_чел_на_1_врача	-0,945052	-0,071344
Расх_на_здрав	0,751033	0,395365
Ур_детск_смерт	-0,913904	-0,165890
ВВП_на_душу_насел	0,499612	0,734654
Смертность	0,751938	0,387347
Expl.Var	3,112625	1,740365
Prp.Totl	0,518771	0,290061

Factor Loadings (Varimax normalized) (Медицинская хар

Рис. 10.60. Окно таблиц

Теперь найденное решение уже можно интерпретировать. Факторы чаще интерпретируют по нагрузкам. Первый фактор теснее всего связан с X2, X3, X4, X6. Второй фактор – X1 и X5. Таким образом, произвели классификацию переменных на две группы. Возникает вопрос: сколькими же факторами следует ограничиваться на практике? Для этого в программном пакете STATISTICA существует критерий **Scree plot** (Критерий каменной осыпи). В окне **Factor Analysis Results** нажмите кнопку **Scree plot**, получите следующий график собственных значений (рис.10.61).

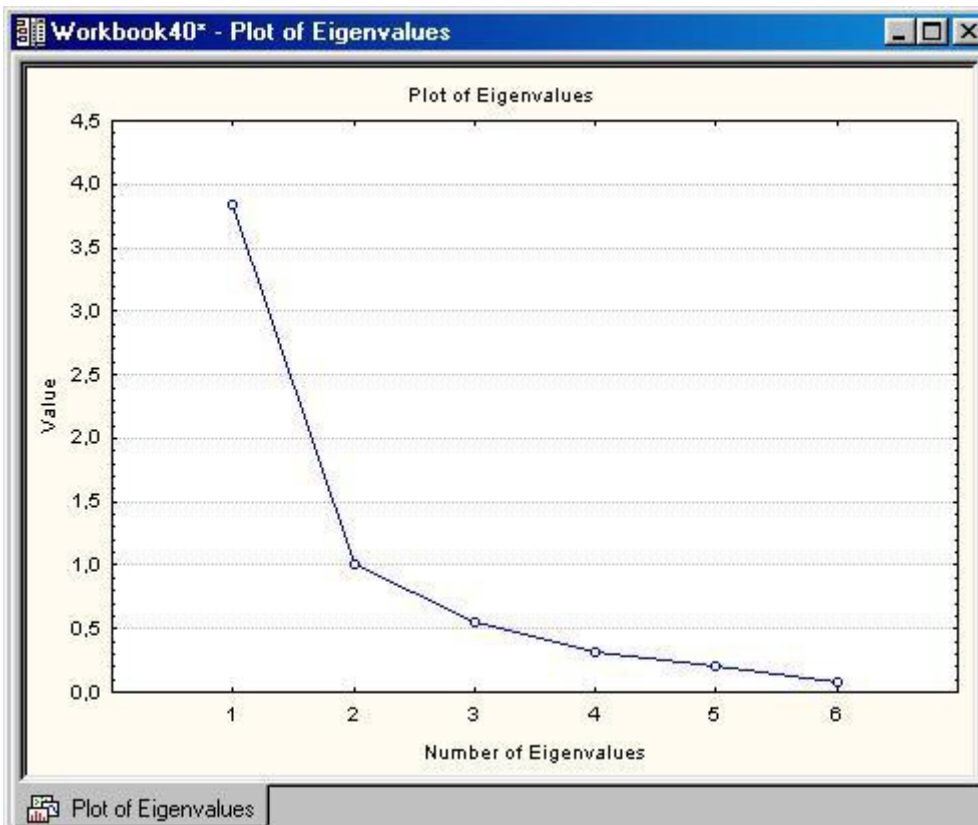


Рис. 10.61. График собственных значений

В точках с координатами 1, 2 осыпание замедляется наиболее существенно, следовательно, теоретически можно ограничиваться двумя факторами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Планирование эксперимента возникло в 50-х годах XX в. В связи с потребностью устранить или хотя бы уменьшить систематические ошибки в сельскохозяйственных исследованиях путем рандомизации условий проведения эксперимента. Процедура планирования оказалась направленной не только на уменьшение дисперсии оцениваемых параметров, но также и на рандомизацию относительно сопутствующих, спонтанно изменяющихся и неконтролируемых переменных.

Первое глубокое математическое исследование блок-схемы было выполнено Р. Боузом в 1939 г. Исследования Р. Фишера знаменуют начало первого этапа развития методов планирования эксперимента. Фишер разработал метод факторного планирования. В 1945 г. Д. Финни ввел дробные реплики от факторного эксперимента. В 1957 г. Дж Бокс применил метод «эволюционного планирования» в промышленности. В 1958 г. Г. Шеффе предложил новый метод планирования эксперимента для изучения физико-химических диаграмм состав — свойство под названием «симплексной решетки».

Развитие теории планирования эксперимента в СССР отражено в работах В. В. Налимова, Ю. П. Адлера, Ю. В. Грановского, Е. В. Марковой, В. Б. Тихомирова.

Проходило время, появлялись новые математические методы, новые области применения теоретических знаний. Теория планирования эксперимента развивалась этапами, направленными на решения конкретных задач.

С развитием вычислительной техники и появлением таких пакетов прикладных программ, как Statistica, Excel и т. д., выполнение расчетов значительно упростилось, расширились возможности экспериментатора.

В учебном пособии рассмотрены все этапы планирования и обработка результатов эксперимента. Показаны возможности обработки данных в программе Statistica.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Адлер Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.Г. Адлер. – М. : Наука, 1976. – 268 с.
2. Асатурян В.И. Теория планирования эксперимента / В.И. Асатурян. – М. : Радио и связь, 1983. – 248 с.
3. Барабашук В.И. Планирование эксперимента в технике / В.И. Барабашук, Б.П. Креденцер, В.И. Мирошниченко. – Киев : Техніка, 1984. – 200 с.
4. Боровиков В.П. Популярное введение в программу Statistica / В.П. Боровиков. – М. : КомпьютерПресс, 1998. – 267с.
5. Боровиков В.П. Statistica. Статистический анализ и обработка данных в среде Windows / В.П. Боровиков, И.П. Боровиков. – М. : Информационно-издательский дом "Филинь", 1997. – 608с.
6. Бродский В.З. Введение в факторное планирование эксперимента / В.З. Бродский. – М. : Наука, 1976. – 224 с.
7. Вознесенский В.А. Статистические методы планирования эксперимента в технико-экономических исследованиях / В.А. Вознесенский – М. : Статистика, 1974. – 250 с.
8. Володарский Е.Т. Планирование и организация измерительного эксперимента / Е.Т. Володарский, Б.Н. Малиновский, Ю.М. Туз. – Киев : Вища школа, 1987. – 280 с.
9. Горский В.Г. Планирование промышленных экспериментов / В.Г. Горский, Ю.П. Адлер, А.М. Талалай. – М. : Metallургия, 1978. – 112 с.
10. Добровольский В.И. Математическое планирование экспериментов : метод. указания / В.И. Добровольский, Н.Н. Патраков, И.А. Милюков. – М. : МАТИ, 1988. – 22 с.
11. Джонсон Н. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке / Н. Джонсон, Ф. Лион. – М. : Мир, 1980. – Т. 1. – 606 с.

12. Джонсон Н. Статистика и планирование эксперимента в технике и науки / Н. Джонсон, Ф. Лион. – М. : Мир, 1980. – Т. 2. – 516с.
13. Дэниел К. Применение статистики в промышленном эксперименте / К. Дэниел. – М. : Мир, 1979. – 540 с.
14. Дуброва Т.А. Факторный анализ с использованием пакета “STATISTICA” : учеб. пособие / Т.А. Дуброва, Д.Э. Павлов, Н.П. Осипова. – М., 2002
15. Евдокимов Ю.А. Планирование и анализ экспериментов при решении задач трения и износа / Ю.А. Евдокимов, В.И. Колесников, А.И. Тетерин. – М. : Наука, 1980. – 228 с.
16. Зажигаев Л.С. Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента / Л.С. Зажигаев, А.А. Кашьян, Ю.И. Романиков. – М. : Атомиздат, 1978. – 232 с.
17. Лель Р.В. Статистическая обработка и планирование экспериментов в технологии машиностроения / Р.В. Лель. – Горький : Горьковский гос. ун-т, 1979. – 68 с.
18. Математическая теория планирования эксперимента / под ред. С.М. Ермакова. – М. : Наука, 1983. – 392 с.
19. Монтгомери Д.К. Планирование эксперимента и анализ данных : пер. с англ. / Д.К. Монтгомери. – М. : Мир, 1981. – 520 с.
20. Налимов В.В. Теория эксперимента / В.В. Налимов – М. : Наука, 1971. – 288с.
21. Основы планирования эксперимента : метод. пособие / сост. К.М. Хамханов. – Улан-Удэ, 2001. – 20 с.
22. Новик Ф. С. Оптимизация процессов технологии металлов методами планирования экспериментов / Ф.С. Новик, Я.Б. Арсов – М. : Машиностроение; София: Техника, 1980. – 304 с.
23. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов : пер. с нем. / под ред. Э.К. Лецкого. – М. : Мир, 1977. – 552с.

24. Румшицкий Л.З. Организация эксперимента / Л.З. Румшицкий. – М. : МИСиС, 1984. – 140 с.
25. Спиридонов А.А. Планирование эксперимента при исследовании технологических процессов / А.А. Спиридонов. – М. : Машиностроение, 1981. – 184 с.
26. Тихомиров В.Б. Планирование и анализ эксперимента / В.Б. Тихомиров. – М. : Легкая индустрия, 1974. – 260 с.
27. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента / В.В. Федоров. – М. : Наука, 1971. – 312 с.
28. Финни Д. Введение в теорию планирования эксперимента : пер. с англ. / Д. Финни; под ред. Ю.В. Линника. – М. : Наука, 1970. – 287 с.
29. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента / Х. Шенк – М. : Мир, 1972. – 382 с.
30. Ящерицын П.И. Планирование эксперимента в машиностроении / П.И. Ящерицын, Е.И. Махаринский. – Минск : Высшэйшая школа, 1985. – 286 с.
31. www.statsoft.ru

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Значения критерия Пирсона (χ^2 -критерия)

Число степеней свободы f	Вероятность						
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50
1	0,00016	0,0006	0,0039	0,016	0,064	0,148	0,455
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65	2,19	3,36
5	0,55	0,75	1,14	1,61	2,34	3,00	4,35
6	1,87	1,13	1,63	2,20	3,07	3,83	5,35
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,34
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,35
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34
11	3,1	3,6	4,6	5,6	7,0	8,1	10,3
12	3,6	4,2	5,2	6,3	7,8	9,0	11,3
13	4,1	4,8	5,9	7,0	8,6	9,9	12,3
14	4,7	5,4	6,6	7,8	9,5	10,8	13,3
15	5,2	6,0	7,3	8,5	10,3	11,7	14,3

Значение критерия Стьюдента (*t*-критерий)

Число степеней свободы <i>f</i>	Уровни значимости				
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	6,31	12,71	31,82	63,66	63,62
2	2,92	4,30	6,97	9,93	31,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94
4	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
5	2,02	2,57	3,37	4,08	6,85
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
7	1,90	2,37	3,00	3,50	5,41
8	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,06	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	4,22
14	1,76	2,15	2,62	2,98	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	4,02
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,97
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,36	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,75
25	1,71	2,06	2,48	2,79	3,73
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,71
27	1,70	2,05	2,47	2,77	3,69
28	1,70	2,05	2,47	2,76	3,67
29	1,70	2,04	2,46	2,76	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,37

**Значения критерия Фишера (F -критерия) при уровне значимости 0,05
(доверительной вероятности 0,95)**

$f_1 \backslash f_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76
4	7,71	6,94	6,59	6,396,26	6,16	6,09	6,04	6,04	6,00	5,96	5,93
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70
6	5,99	5,14	4,79	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03
7	5,90	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35	2,31
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30	2,26	2,22
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21	2,16	2,12
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,07	2,04
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,02	1,98
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,01	1,97	1,93
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,10	2,03	1,97	1,92	1,88
200	3,89	3,04	2,65	2,41	2,26	2,14	2,05	1,98	1,92	1,87	1,83
400	3,86	3,02	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79

Примечание: f_1 – число степеней свободы большей дисперсии ($ад$), f_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии ($восп$).

**Значения критерия Кохрена (G-критерия) при уровне значимости 0,05
(доверительной вероятности 0,95)**

$f \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332	0,8159	0,8010	0,7880
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7771	0,6771	0,6530	0,6333	0,6167	0,6025
4	0,9065	0,7679	0,7841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365	0,5175	0,5017	0,4884
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5441	0,5665	0,4783	0,4564	0,4387	0,4241	0,4118
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980	0,3817	0,3682	0,3568
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3974	0,3726	0,3535	0,3384	0,3259	0,3154
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185	0,3040	0,2926	0,2829
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067	0,2901	0,2768	0,2659	0,2568
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2666	0,2541	0,2439	0,2353
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299	0,2187	0,2098	0,2020

Фрагмент таблицы случайных чисел

56	66	25	32	38	64	70	26	27	67	77	40	04	34	63	98	99	89	31	16	12	90	50	28	96
88	40	52	02	29	82	69	34	50	21	74	00	91	27	52	98	72	03	45	65	30	89	71	45	91
87	63	88	23	62	51	07	69	59	02	89	49	14	98	53	41	92	36	07	76	85	37	84	37	47
32	25	21	15	08	82	34	57	57	35	22	03	33	48	84	37	37	29	38	37	89	76	25	09	69
44	61	88	23	13	01	59	47	64	04	99	59	96	20	30	87	31	33	69	45	58	48	00	83	48
94	44	08	67	79	41	61	41	15	60	11	88	83	24	82	24	07	78	61	89	42	58	88	22	16
13	24	40	09	00	65	46	38	61	12	90	62	41	11	59	85	18	42	61	29	88	76	04	21	80
78	27	84	05	99	85	75	67	80	05	57	05	71	70	31	31	99	99	06	96	53	99	25	13	63
42	39	30	02	34	99	46	68	45	15	19	74	15	50	17	44	80	13	86	38	40	45	82	13	44
04	52	43	96	38	13	83	80	72	34	20	84	56	19	49	59	14	85	42	99	71	16	34	33	79
82	85	77	30	16	69	32	46	46	30	84	20	68	72	98	94	62	63	59	44	00	89	06	15	87
38	48	84	88	24	58	46	48	60	06	90	08	83	83	98	40	90	88	25	26	85	74	55	80	85
91	19	05	68	22	58	04	63	21	16	23	38	25	43	32	98	94	65	35	35	16	91	07	12	43
54	81	87	21	31	40	46	17	62	63	99	71	14	12	64	51	68	50	60	78	22	69	51	98	37
65	43	75	12	91	20	36	25	57	92	33	65	95	48	75	00	06	65	25	90	16	29	34	14	43
49	98	71	31	80	59	57	32	43	07	85	06	64	75	27	29	17	06	11	30	78	70	97	87	21
03	98	68	89	39	71	87	32	14	99	42	10	25	37	30	08	27	75	43	97	54	20	69	93	50
56	04	21	34	92	89	81	52	15	12	84	11	12	66	87	48	21	06	86	08	35	39	52	28	09
48	09	36	95	20	82	95	36	53	89	92	68	50	88	17	37	92	02	23	43	63	24	69	80	90
23	97	10	96	57	74	07	95	26	44	93	08	43	30	41	86	45	74	33	78	84	33	38	76	73
43	97	55	45	98	35	68	45	96	80	46	36	99	96	33	60	20	73	30	79	17	19	03	47	28
40	05	08	50	79	89	58	19	86	48	27	98	99	24	08	94	19	15	81	29	82	14	35	88	03
66	97	10	69	02	25	36	43	71	76	00	67	56	12	69	07	89	55	63	31	50	72	20	33	36
15	62	38	72	92	03	76	09	30	75	77	80	04	24	54	67	60	10	79	26	21	60	03	48	14
77	21	15	14	47	55	24	22	20	55	36	93	67	69	37	72	22	43	46	32	56	15	75	25	12
18	87	05	09	96	46	14	72	41	46	12	67	46	72	08	59	06	17	49	12	73	28	23	59	48
08	58	53	63	13	07	04	48	71	39	07	46	96	40	20	86	79	11	81	74	11	15	23	17	45
16	07	79	57	61	42	19	68	15	12	60	21	59	12	07	04	99	88	22	39	75	16	69	13	84

Значение критерия τ

m	P		m	P	
	0,95	0,99		0,95	0,99
4	0,390	0,256	19	0,642	0,510
5	0,410	0,269	20	0,650	0,520
6	0,445	0,281	25	0,676	0,542
7	0,468	0,307	30	0,704	0,508
8	0,491	0,331	35	0,725	0,611
9	0,514	0,354	40	0,742	0,636
10	0,531	0,376	45	0,757	0,658
11	0,548	0,397	50	0,769	0,674
12	0,564	0,414	66	0,789	0,702
13	0,578	0,431	70	0,804	0,724
14	0,591	0,447	80	0,817	0,741
15	0,603	0,461	90	0,827	0,756
16	0,614	0,475	100	0,836	0,767
17	0,624	0,487	110	0,843	0,778
18	0,633	0,499	120	0,850	0,788