1.2. Статистическая обработка результатов радиометрических измерений

1.2.1. Статистический характер радиоактивного распада

Любую физическую величину (массу, длину, скорость, число распадающихся радионуклидов и т. д.) можно определить в эксперименте лишь приближенно, указав некоторый интервал ее возможных значений. Чем тщательнее интервал возможных значений искомой величины, тем ближе эта величина к ее истинному значению. Неопределенность в значении измеряемой величины обусловлена многими причинами.

Рассмотрим радиоактивный распад ядер. Как известно, каждое нестабильное ядро имеет определенную возможность распасться за некоторый промежуток времени или в единицу времени. Эту возможность принято называть вероятностью.

Вероятность – количественная характеристика возможности наступления (или появления) некоторого события А при определенных (неограниченно воспроизводимых) условиях С. Ответить конкретно на вопрос: когда распадется данное ядро, абсолютно точно невозможно, но всегда существует вероятность, что данное ядро распадется за некоторый промежуток времени t от нуля до бесконечности. Исходя из этого, очень часто говорят, что радиоактивный распад носит вероятностный характер, т. е. распад произойдет, но когда конкретно, ответить трудно.

Количество радиоактивных ядер, распавшихся в некотором образце, и частиц, зарегистрированных в детекторе за определенный промежуток времени (например 1 с), – величина случайная.

Случайной называют величину, которая в результате наблюдений (измерений) примет одно и только одно возможное значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин, которые наперед не могут быть учтены. Это значит, что если за один и тот же промежуток времени, значительно меньший периода полураспада радионуклида, многократно определять количество распадов, то для каждого равного промежутка времени оно будет разным и случайным. Например: 30, 20, 35, 27 распадов и т. д. Следовательно, распад радиоактивных ядер носит не только вероятностный, но и случайный характер. Если мы начнем выяснять закономерности или какие-то функциональные зависимости между отдельными актами распадов радиоактивных ядер, то никакой периодичности не сможем установить в виду случайности этого события. Однако при наблюдении большого числа (как правило не менее 100) распадов можно установить определенный закон распределения этих распадов во времени, который носит название закона радиоактивного распада. Установлением закономерностей большого числа случайных событий, а также учетом и обработкой полученных при этом данных занимается статистика. Поэтому радиоактивный распад называют статистическим процессом или же отмечают, что радиоактивный распад имеет **статистический характер**. Это значит, что закон радиоактивного распада справедлив для большого числа радиоактивных ядер, а также результаты экспериментов (наблюдений) за радиоактивным распадом подвергаются статистической обработке для правильного определения средних значений, указания интервалов, в которых можно с определенной вероятностью обнаружить данное значение при последующих измерениях, для проверки соответствия выбранных гипотез результатам измерений и т. д.

1.2.2. Статистические законы распределения

Прежде чем рассматривать статистические законы распределения случайных величин, приведем некоторые основные понятия статистики и теории вероятности. Определение случайного события было дано выше. В свою очередь случайные величины разделяются на **дискретные и непрерывные**. **Дискретная случайная величина** принимает лишь определенные точные значения, отличающиеся друг от друга на конечную величину (например, число зарегистрированных распадов за единицу времени). **Непрерывная случайная величина** может принимать любые значения во всей области, где она может существовать (например, энергия бета-частиц при распаде ядра). Для каждой случайной величины существует свой закон распределения вероятностей появления случайной величины. Отметим, что процесс радиоактивного распада и равно регистрация его носит характер случайного дискретного распределения.

Законом распределения дискретной случайной величины (просто распределением случайной величины) называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями: его можно задать таблично, аналогически (формулой) и графически.

Рассмотрим ряд статистических распределений, с которыми наиболее часто приходится сталкиваться при работе в области ядерных излучений. Сначала рассмотрим дискретные распределения: биноминальное и Пуассона, а затем непрерывное распределение Гаусса, или нормальное распределение.

Биноминальное распределение описывает случайные явления, в которых вероятность появления события (например, вероятность регистрации распада радиоактивного ядра) не зависит от номера наблюдения и каждое наблюдение состоит из двух несовместимых между собой результатов: или событие наступает, или оно не наступает. Рассмотрим вероятность регистрации N_p распадов радиоактивных ядер из имеющегося числа N_0. При этом вероятность регистрации равна P, тогда вероятность нерегистрации равна Q. По теории вероятностей сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т. е. $P + Q = 1$, откуда $Q = 1 – P$.

При регистрации $N_р$ распадов радиоактивных ядер из имеющегося числа N_0 может распасться и быть зарегистрировано все число радиоактивных ядер N_0, имеющихся в начальный момент времени, с одной и той же вероятностью P и может быть не зарегистрировано с вероятностью Q. Вероятность того, что будет зарегистрировано $N_р$ распадов ядер описывается формулой

$$P_{N_p} = \frac{N_0!}{(N_0 - N_p)!N_p!} \cdot P^{N_p} Q^{N_0 - N_p}.$$

Эта формула носит название формулы Бернулли, поэтому биноминальным распределением называют распределение, определяемое формулой Бернулли. Распишем эту формулу более подробно. У нас имеется N_0 число радиоактивных ядер в начальный момент времени, тогда число распавшихся ядер за некоторый промежуток времени

$$N_p = N_0 – N = N_0 – N_0^{-\lambda t} = N_0(1 – e^{-\lambda t}).$$

Вероятность распада одного отдельного ядра $p = 1 – e^{-\lambda t}$, так как просто невозможно зарегистрировать все распавшиеся ядра, то вероятность того, что ядро распадется и будет зарегистрировано, определится как

$$P = k \cdot p,\ k\,(1 – e^{-\lambda t}),$$

где k – коэффициент эффективности регистрации.

Вероятность нерегистрации

$$Q = 1 – P = 1 – k\,(1 – e^{-\lambda t}).$$

Подставим полученные выражения в формулу Бернулли и получим

$$P_{N_p} = \frac{N_0!}{(N_0 - N_p)!N_p!} \cdot \left[K(1 - e^{-\lambda t})\right]^{N_p} \left[1 - K(1 - e^{-\lambda t})\right]^{N_0 - N_p}.$$

По данной формуле можно определить число ядер N_p из общего числа N_0, распавшихся за время t. Однако данную формулу хорошо применять, если N_0 невелико, в противном случае практическое неудобство заключается в сложности расчетов. Упрощается эта формула и при $N_0 >> N_p$ (при регистрации актов распада долгоживущих радионуклидов).

Распределению Пуассона подчиняются случайные величины, вероятность появления которых в отдельном наблюдении мала и постоянна. Распределение Пуассона для вероятности регистрации распадов ядер имеет вид

$$P(N_p) = \frac{(\overline{N})^{Np}}{N_p!} e^{-\overline{N}},$$

где $\overline{N}$ – среднее число распадов радионуклидных ядер;

N_p – число зарегистрированных распадов радиоактивных ядер.

Эта формула дает возможность определить вероятность не наблюдать какое-то событие, что часто используется в ядерной физике.

Представим распределение Пуассона графически (рис. 3). Эта кривая указывает на то, что нельзя знать истинное значение результата данной счетной операции. Зато можно определить наиболее вероятное или среднее значение $\overline{N}$, которое будет являться лучшей «оценкой» истинного значения. Это среднее значение обычно считают «истинным» значением при условии, что число наблюдений больше либо равно 10.

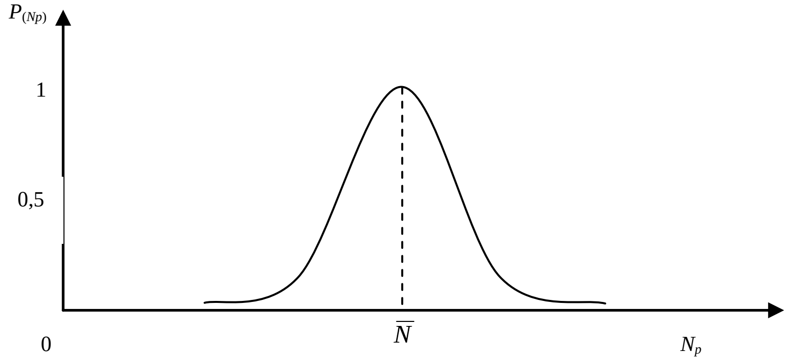

Рис. 3. Кривая распределения Пуассона: N_p – число импульсов, регистрируемых детектором; $\overline{N}$ – среднее число регистрируемых импульсов

Распределение Пуассона – регистрация газоразрядным счетчиком фонового излучения, создаваемого продуктами радиоактивного распада, содержащимися в окружающей среде, и космическим излучением. В этом случае регистрация частицы счетчиком – случайное событие, среднее число отсчетов можно считать не зависящим от времени, вероятность попадания в счетчик двух ионизирующих частиц в интервал времени, равный «мертвому времени» счетчика, пренебрежимо мала, а следовательно, отсчеты независимы.

Отметим, что на практике всегда имеют дело с дискретными случайными величинами, так как любую непрерывную случайную величину можно соизмерить лишь приближенно с точностью до некоторого числа знаков, что позволяет использовать более простые математические методы. Данное приближение оправдано, когда шаг дискретности мал и переход к непрерывной случайной величине не ведет к заметным погрешностям, и применительно к радиоактивному распаду. Поэтому наиболее важным распределением, встречающимся в статистике, является **непрерывное распределение Гаусса,** или **нормальное распределение** (рис. 4). Если представить это распределение графически, то оно будет иметь вид симметричной колоколообразной кривой, распространяющейся до бесконечности в положительном и отрицательном направлениях.

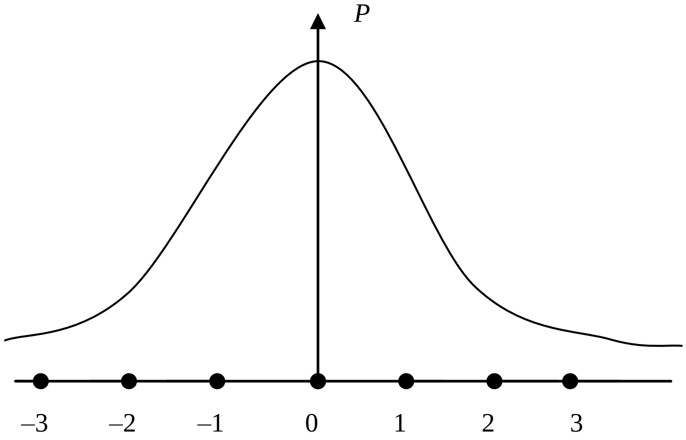

Рис. 4. Нормальное распределение Гаусса

Описывается это распределение следующей формулой:

$$P(N_p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{N}}}\cdot e^{-\frac{(N_p-\overline{N})^2}{2\overline{N}}},$$

где $\overline{N}$ – среднее число распадов радиоактивных ядер, регистрируемых за время t;

N_p – число зарегистрированных распадов радиоактивных ядер.

Применяется это распределение, когда среднее число регистрируемых импульсов за выбранный промежуток времени больше 10. Распределением Гаусса широко пользуются при анализе погрешностей эксперимента. Например, кривая распределения Гаусса указывает на то, что, вероятнее всего, «истинным» значением регистрируемого числа радиоактивных частиц будет значение, лежащее по оси ординат (т. е. посередине колокола). Также довольно часто могут встречаться значения, лежащие в интервале [1; –1]; реже – в интервалах [–2; 2], и еще реже – в интервалах [–3; –2] и [2; 3]. А значения, лежащие далее от –3 и 3, можно практически и не учитывать. Отметим, что данное распределение может описывать распределение углов упругого рассеяния при прохождении заряженной частицы через вещество, распределение пробегов тяжелых заряженных частиц в веществе, распределение импульсов по амплитудам при регистрации заряженных частиц полупроводниковым детектором и т. д.

1.2.3. Статистические характеристики экспериментальных данных

При измерении любой физической величины невозможно определить истинное значение этой величины. Разность между показаниями средств измерений (X) и истинным (действительным) значением измеряемой величины (Q) **называют погрешностью, или ошибкой измерения:**

$$\Delta = X - Q.$$

Погрешность указывает границы неопределенности значения измеряемой физической величины. Термином **«неопределенность результата измерений»** определяется область (участок) шкалы измерений, в которой предположительно находится истинная оценка свойства или истинное значение измеряемой физической величины.

Различают **абсолютную** погрешность, выраженную в единицах измеряемой величины, и **относительную,** выраженную отношением абсолютной погрешности к значению измеряемой величины.

Точность измерений СИ – качество измерений, отражающее близость их результатов к действительному (истинному) значению измеряемой величины. Точность определяется показателями абсолютной и относительной погрешности.

Величина – свойство, общее в качественном отношении для многих объектов (состояний, систем, процессов), но в количественном отношении индивидуальное для каждого из них.

Значение величины – это выражение размера величины в виде некоторого числа принятых для нее единиц.

Единица физической величины представляет собой значение, которое по определению считается равным единице и применяется для количественного выражения однородных величин, например:

А – 24 Бк,

где А – величина (активность);

24 – числовое значение;

Бк – единица этой величины (активности).

Таким образом, результат измерения в общем виде записывают в форме, называемой основным уравнением измерения:

$$X = N\cdot[x],$$

где X – измеряемая величина;

N – числовое значение величины;

$[x]$ – единица физической величины.

Физическую величину характеризует ее **истинное значение,** которое идеальным образом отражает свойство объекта в качественном и количественном отношении.

Действительным значением называют значение физической величины, найденное экспериментальным путем и настолько близкое к истинному значению, что для данной цели может быть использовано вместо него.

Следует отметить, что без оценки ошибок результат измерения становится недостоверным, а в ряде случаев может оказаться, что он вообще не содержит информации об измеряемой величине.

В общем случае различают три типа погрешностей: грубые, систематические и статистические.

Грубые погрешности (промахи) связаны с неисправностью измерительной аппаратуры, либо с ошибками самого экспериментатора, либо с изменившимися условиями эксперимента. Грубые погрешности учету не подлежат, такие данные отбрасываются и проводятся новые измерения.

Систематические погрешности – это такие погрешности, которые при многократном измерении одной и той же величины остаются постоянными или изменяются по определенному закону. Обнаружить систематические погрешности очень трудно. В свою очередь, различают методические и инструментальные (приборные) погрешности измерений.

Методические погрешности включают в себя недостатки применяемых методов измерений; несовершенство теории физического явления, к которому относится измеряемая величина; неточность расчетной формулы.

Эти погрешности можно уменьшить путем совершенствования метода измерения, а также при введении уточнений и поправок в расчетную формулу.

Инструментальные погрешности вызываются несовершенством конструкции и неточностью изготовления измерительных приборов (например, разные плечи у рычажных весов, спешащие часы и т. д.). Уменьшение этой погрешности достигается применением более точных и совершенных приборов, но полностью устранить приборную погрешность невозможно.

Статистические погрешности (случайные ошибки) – это такие погрешности, абсолютная величина и знак которых изменяются при многократных измерениях одной и той же физической величины. Статистические погрешности характеризуют воспроизводимость результатов наблюдений (измерений) после устранения систематических погрешностей. Эти погрешности нельзя исключать из каждого результата измерений.

Статистические погрешности измерения радиоактивных образцов (препаратов) вызваны двумя причинами:

– статистический характер радиоактивного распада;

– случайные погрешности, которые вызваны неконтролируемыми изменениями факторов, влияющих на результаты измерений (пыль, смещение, колебание и пр.).

Каковы бы ни были случайные погрешности, искажающие результат отдельного измерения, в каждый результат вносится погрешность, связанная со статистическим характером радиоактивного распада. Ликвидировать колебания (флуктуации), связанные с колебаниями числа распадающихся атомов, просто невозможно.

Существует несколько способов определения погрешности измерения.

1. Определение средней квадратичной ошибки результата измерений по способу наименьших квадратов.
2. Определение стандартного отклонения на основании закона распределения Пуассона.
3. Определение относительной ошибки измерения, выраженной в процентах.
4. Определение вероятной погрешности результата измерения.
5. Определение вероятной погрешности результата измерения при использовании уравнения Пуассона.

Каждый из способов определения погрешностей имеет свои преимущества и недостатки, которые легко познаются при практическом их использовании. Рассмотрим указанные способы определения погрешностей измерений.

Вспомним, что число импульсов $N_р$, регистрируемых детектором за время t, подчиняется закону распределения Пуассона. Это говорит о том, что если несколько раз подряд измерять активности долгоживущего изотопа, то результаты получатся неодинаковыми, т. е. будут отклоняться в ту или другую сторону, группируясь вокруг некоторого значения. По полученным данным можно построить график кривой распределения Пуассона, исходя из которого, нельзя точно указать истинное значение числа зарегистрированных импульсов. Можно лишь указать, что среднее значение $\overline{N}$ графика будет лучшей оценкой «истинного» значения активности.

За **наиболее достоверное значение непосредственно измеряемой величины** принимают **среднее арифметическое** из всех полученных n значений:

$$\overline{N} = \frac{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i+1}^{n} N_{ni},$$

где n – число независимых измерений.

Среднее арифметическое часто называют **выборочным средним значением.** Каждое измеренное значение N_i отклоняется от среднего значения $\overline{N}$. За **абсолютную погрешность отдельного измерения** принимают разность между значением среднего арифметического $\overline{N}$ измеряемой величины и значением N_i, полученным при отдельном измерении в общем случае. За абсолютную погрешность отдельного измерения принимают разность между значением среднего арифметического $\overline{N}$ измеряемой величины и значением N_i, полученным при отдельном измерении:

$$\Delta N_1 = N_1 - \overline{N},\ \Delta N_2 = N_2 - \overline{N} \text{ и т. д.}$$

В общем случае $\Delta N_i = N_i - \overline{N}$.

Абсолютные погрешности могут быть положительными и отрицательными, но их сумма всегда равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta N_i = 0.$$

Среднее значение $\overline{N}$ принято характеризовать двумя величинами: среднеарифметической погрешностью ΔN, или Δ, и среднеквадратичной погрешностью m.

Средней абсолютной погрешностью результата $\overline{N}$ (среднеарифметической) называется среднеарифметическое абсолютных значений ошибок всех измерений независимо от их знака:

$$\Delta N = \sum_{i=1}^{n} \left|\Delta N_i\right| / n = \frac{\left|\Delta N_1\right| + \left|\Delta N_2\right| + \ldots + \left|\Delta N_i\right|}{n}.$$

Кратко можно записать так: $N = \overline{N} \pm \Delta N$.

Часто используют **среднюю относительную ошибку** ε результата измерения. Это отношение средней абсолютной ошибки результата ΔN к его среднему значению $\overline{N}$:

$$\varepsilon = \frac{\Delta N}{\overline{N}}.$$

Относительные ошибки принято выражать в процентах:

$$\varepsilon = \frac{\Delta N}{\overline{N}} \times 100\ \%.$$

Отношение абсолютных ошибок отдельных измерений к соответствующим значениям, полученным в результате измерения, называют **относительными ошибками отдельных измерений**:

$$\frac{\Delta N_1}{N_1};\ \frac{\Delta N_2}{N_2};\ \frac{\Delta N_3}{N_3};\ldots\ \frac{\Delta N_i}{N_i}.$$

Случайные погрешности подчиняются законам теории вероятности. По этой теории среднее значение более точно характеризуется **среднеквадратичной погрешностью:**

$$m = \sqrt{\frac{\sum \Delta N^2}{n}} \text{ для } n \geq 30 \text{, а при } n \leq 30\ \ m = \sqrt{\frac{\sum \Delta N^2}{n(n-1)}}.$$

Наиболее вероятно обнаружить истинное значение N_p на интервале от $\overline{N} - m$ до $\overline{N} + m$. В этом случае результат измерения $N = \overline{N} \pm m$.

Чтобы характеризовать отклонение значений, введено понятие дисперсии.

Дисперсией σ^2 (сигма квадрат) называется среднее арифметическое квадратов абсолютных погрешностей отдельных измерений:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (N_i - \overline{N})^2}{n}.$$

Значение $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ называют **стандартным отклонением,** или квадратичной ошибкой отдельного измерения. Распределение Гаусса описывает распределение величины около среднего значения $\overline{N}$. Каждое значение отличается от $\overline{N}$ на $\pm\sigma$; $\pm 2\sigma$; $\pm 3\sigma$ и т. д. (рис. 5).

Из графика видно, что значения, расположенные близко к среднему арифметическому $\overline{N}$, встречаются наиболее часто: на участке от $+\sigma$ до $-\sigma$ располагается 68,3 % всех значений; от $+2\sigma$ до -2σ – 95, 5 % и, наконец, на участке от $+3\sigma$ до -3σ располагается уже 99,7 % значений.

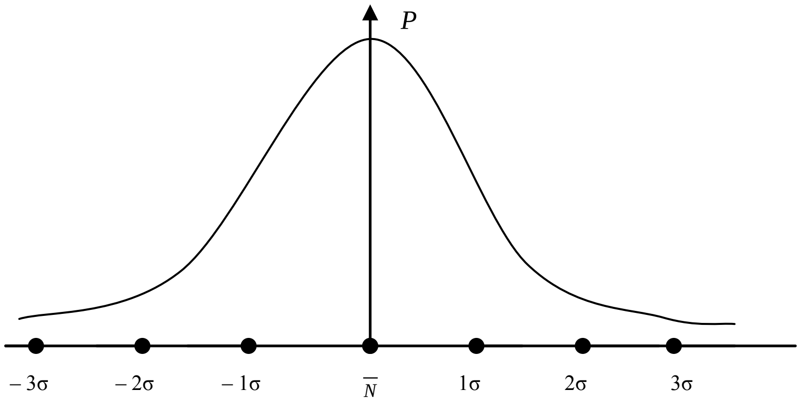

Рис. 5. Распределение стандартного отклонения от средней величины
на кривой Гаусса

На практике если величина абсолютной ошибки данного измерения лежит в пределах 3σ, то ее значение принимается в расчете, другие выбраковываются. Таким образом, если $\Delta N_i \leq 3\sigma$, то данное значение берут для расчета, а если $\Delta N_i > 3\sigma$ – не берут для расчета.

Иногда при статистической обработке результатов измерений используют **вероятную ошибку наблюдений и вероятную ошибку результата**.

Все ошибки наблюдения (измерения) заключаются между наибольшими по абсолютной величине положительными и отрицательными значениями абсолютных ошибок ΔN_i, причем большие случайные ошибки в ту или другую сторону реже встречаются и менее вероятны, чем малые. Поэтому есть основание сузить пределы погрешностей, определяемых по формулам для квадратичной ошибки отдельного измерения *N* и средней квадратичной ошибки результата *m*

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{\sum \Delta N_i^2}{n-1}};$$

$$m = \pm\sqrt{\frac{\sum \Delta N_i^2}{n-1}}.$$

Для этого вводят некоторый коэффициент, меньший 1 и равный по теории вероятностей 0,67 (точнее, 0,6745). Таким образом, вероятная ошибка отдельного наблюдения *f* (от французского *faufe* – ошибка) будет равна:

$$f = \pm 0{,}67\sigma = \pm 0{,}67\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta N_i^2}{n-1}}\text{, если } n<30,$$

и

$$f = \pm 0{,}67\sigma = \pm 0{,}67\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta N_i^2}{n}}\text{, если } n \geq 30.$$

Вероятная ошибка *F* будет иметь вид

$$F = \pm 0{,}67 \cdot m = \pm 0{,}67\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta N_i^2}{n(n-1)}}\text{, если } n<30,$$

и

$$F = \pm 0{,}67 \cdot m = \pm 0{,}67\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta N_i^2}{\text{n}}}\text{, если } n \geq 30.$$

Таким образом, для окончательного значения измеряемой величины *N*

$$N = \overline{N} \pm 0{,}67 \cdot m\text{, или } N = \overline{N} \pm 0{,}67 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $\overline{N}$ – среднее арифметическое, которое определяет собой наиболее вероятное значение измеряемой величины;

$\pm 0{,}67 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ – величина вероятной ошибки результата измерений.

С использованием закона распределения Пуассона вероятная ошибка вычисляется следующим образом:

$$F = \pm\, 0{,}67 \cdot \sqrt{N}\ ,$$

где N – общее число сосчитанных импульсов за единицу времени.

Тогда общая скорость счета образца

$$N_0 = N \pm 0{,}67 \cdot \sqrt{N}\ ,$$

относительная ошибка в процентах

$$E = \frac{0{,}67 \cdot \sqrt{N}}{N} \cdot 100\,\%.$$

Обычно вероятной ошибкой пользуются в тех случаях, когда желательно сузить пределы ошибок измерения, например, если образец обладает сравнительно малой активностью излучения, которая незначительно отличается от активности фона.

При использовании вероятной ошибки можно легко определить число импульсов, которые необходимо сосчитать для того, чтобы работать с заданной заранее степенью точности.

Среднее арифметическое всегда определяет собой основную и наиболее вероятную величину измеряемой скорости счета. Степень достоверности полученных данных определяется значением ошибок измерения.