Лабораторная работа №1.

ИЗУЧЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА ЗАКОНА РАДИОАКТИВНОГО РАСПАДА

Распад радиоактивных ядер (равно как и их регистрация) носит хотя и закономерный, но все же случайный характер. Установить закономерности радиоактивного распада можно лишь набрав достаточно большое число результатов наблюдений (как правило, не менее 100). При единичных наблюдениях никаких закономерностей не наблюдается. Учетом и обработкой большого числа наблюдений (так называемых статистических данных) занимается статистика. Исходя из этого и говорят о статистическом характере закона радиоактивного распада. Это значит, что закон радиоактивного распада справедлив для большого числа радиоактивных ядер. Для одного, двух или трех отдельно взятых радиоактивных ядер закономерностей радиоактивного распада не наблюдается.

Чтобы определить вероятность регистрации N_p импульсов по формуле Пуассона, или нормального распределения, следует пользоваться соответствующими таблицами, поскольку непосредственные вычисления вероятностей довольно громоздки. В таблицах распределения Пуассона значения вероятностей приводятся непосредственно для величин N_p и $\overline{N}$. Таблицы плотности вероятности нормального распределения построены для нормированного значения аргумента:

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{z}},$$

где величина z вычисляется по формуле

$$z = \frac{N_p - \overline{N}}{\sqrt{\overline{N}}}. \qquad (1)$$

Перейти к значению вероятностей для данного числа импульсов *P(Np)* можно, разделив взятое из таблиц значение на $\sqrt{\overline{N}}$:

$$P(N_p) = \frac{P(z)}{\sqrt{\overline{N}}}.$$

Для экспериментальной проверки законов распределения скоростей счета во времени удобно пользоваться интегральной формой нормального распределения, которая записывается следующим образом:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dz.$$

Функцию Φ(z) часто называют функцией Лапласа. Ее можно представить графически (рис.24). Из графика ясно, что смысл этой функции сводится к определению вероятности того, что полученный результат будет лежать в пределах от 0 до некоторого значения z. Чаще всего "истинным" результатом измерений будет являться вершина графика, где вероятность регистрации равна 1, т.е. [P(Np)=1], которая определяет истинную среднюю скорость счета. За истинную среднюю скорость счета принимается средняя арифметическая скорость счета N, определенная из ряда измерений, результаты которых различаются из-за колебаний (флуктуации), связанных со статистическим характером радиоактивного распада и процесса регистрации излучения.

Для вычисления функции Лапласа также пользуются специальной таблицей (приложение 1). В таблице даны значения функции Φ(z) для положительных значений z и для z=0. Для z<0 пользуются той же таблицей, учитывая, что функция Φ(z) нечетная, т.е. Φ(z)=–Φ(z). В таблице приведены значения интеграла лишь до z = 5, так как для всех z >5 принимают Φ(z) = 0,5.

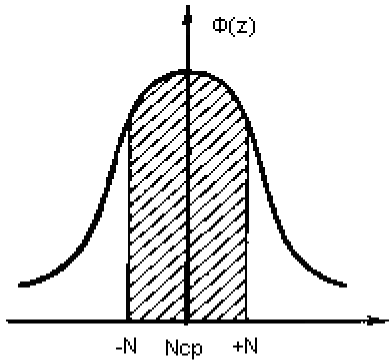

Рис.24. Функция Лапласа.

Все изложенное сводится к утверждению, что закон радиоактивного распада носит вероятностный, статистический характер и, следовательно, подчиняется распределению Пуассона (если $N_p<10$ за некоторый выбранный промежуток времени) или нормальному распределению (если $N_P>10$ за тот же промежуток времени). Нам необходимо проверить, правильно ли это утверждение.

Эмпирические и теоретические частоты. Рассмотрим дискретную случайную величину N_p, закон распределения которой неизвестен. Пусть произведено m регистрации этой величины, в которых величина N_p приняла m_1 раз значение n_1, m_2 раз значение n_2,…, $m_к$ раз значение n_k, причем

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = m.$$

Эмпирическими (опытными) частотами $f_{оп}$ называют фактически наблюдаемые частоты m_i.

Пусть имеется основание предположить, что изучаемая величина N_p распределена по некоторому определенному закону. Для того, чтобы проверить, согласуется ли это предположение с данными наблюдений, вычисляют частоты наблюдаемых значений, т.е. находят теоретически, сколько раз величина N_p должна была принять каждое из наблюдаемых значений, если она распределена по предполагаемому закону. **Теоретическими,** в отличие от фактически наблюдаемых эмпирических частот, называют частоты f, найденные теоретически (вычислением).

Теоретические частоты находят по равенству:

$$f = m \cdot P(z), \qquad (2)$$

где m – общее число наблюдений (измерений);

P(z) – вероятность наблюдаемого значения n_i, вычисленная при допущении, что N_p имеет предполагаемое распределение.

Итак, теоретическая частота f наблюдаемого значения n_i дискретного распределения равна произведению числа наблюдений на вероятность этого наблюдаемого значения.

Чтобы вычислить теоретические частоты, необходимо весь интервал наблюдаемых значений N_p делить на несколько частичных интервалов желательно одинаковой длины (обычно на 6-8 интервалов). В каждый интервал должно быть включено не менее 5-ти отсчетов. Если число отсчетов оказывается меньше, то отдельные интервалы надо объединить. Вычисляют теоретические вероятности P(z) попадания N_P в интервалы (n_i; n_i+1) по равенству

$$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i), \qquad (3)$$

где Φ(z) – функция Лапласа.

И, наконец, находят по формуле (2) искомые теоретические частоты f. Сравнительно небольшое расхождение эмпирических и теоретических частот подтверждает предположение, что рассматриваемое распределение подчиняется выбранному закону распределения. Обычно сравнение частот лучше производить с помощью гистограммы, **Гистограмма** – это ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы (на которые разбиваются все измеренные значения) а высоты равны частотам появления отсчетов в данных интервалах измеренных значений (рис. 25). При определении интервалов, расчете вероятностей для построения гистограммы вычитание фона из измеренного числа импульсов не производится.

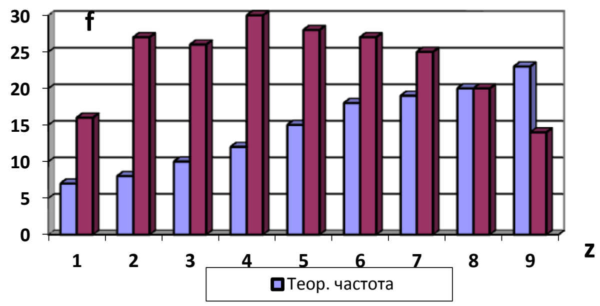

Рис.25. Гистограмма теоретических и опытных частот распределения скоростей счета.

Пример 1. Найти теоретические частоты по заданному интервальному распределению, предполагая, что речь идет о нормальном распределении (табл.1). Среднее арифметическое $\overline{N} = 12{,}6$.

Таблица 1. Результаты вычислений.

Номер интервала i	Граница интервала		Частота m_i
	n_i	n_{i+1}	
1	4	6	15
2	6	8	26
3	8	10	25
4	10	12	30
5	12	14	26
6	14	16	21
7	16	18	24
8	18	20	20
9	20	22	13

m=200

Решение. Найдем значения z_i для границ интервалов по формуле (11), $\Phi(z_i)$ по приложению 1 и P(z) по формуле (2). Все расчеты сведем в таблицу 2.

Таблица 2. Результаты вычислений.

Номер интервала i	Границы		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	P(z)	f
	z_i	z_{i+1}				
1	-2,42	-1,86	-0,4922	-0,4666	0,0256	6
2	-1,86	-1,30	-0,4666	-0,4032	0,0654	13
3	-1,30	-0,73	-0,4032	-0,2673	0,1359	27
4	-0,73	0,17	-0,2673	0,0675	0,3348	67
5	0,17	0,39	0,0675	0,1517	0,0842	17
6	0,39	0,96	0,1517	0,3315	0,1798	36
7	0,96	1,52	0,3315	0,4357	0,1042	21
8	1,52	2,08	0,4357	0,4812	0,0455	10
9	2,08	2,65	0,4812	0,4959	0,0147	4

Для сравнения построим гистограмму (рис. 26).

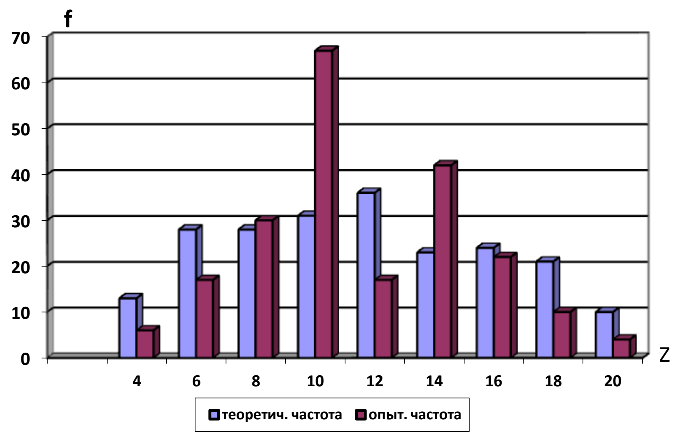

Рис.26. Гистограмма частот распределения.

Проверка гипотезы о нормальном распределении. Критерий согласия Пирсона. С помощью гистограммы можно произвести лишь качественную оценку совпадений экспериментальных и теоретических частот распределений скоростей счета. Для количественной оценки полученных результатов пользуются критерием согласия. Это критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения. Имеется несколько критериев согласия: χ^2 К.Пирсона, Колмогорова, Смирнова и др.

Ограничимся описанием применения критерия Пирсона к проверке гипотезы о нормальном распределении (критерий аналогично применяется и для других распределений, в этом состоит его достоинство). С этой целью будем сравнивать эмпирические и теоретические частоты.

Обычно эмпирические и теоретические частоты различаются. Например (см. пример 1):

Эмпирические частоты	15	26	25	30	26	21	24	20	13
Теоретические частоты	6	13	27	67	17	36	21	10	4

Случайно ли расхождение частот? Возможно, что расхождение случайно (незначимо) и объясняется малым числом наблюдений, либо способом их группировки, либо другими причинами. Возможно, что расхождение частот неслучайно (значимо) и объясняется тем, что теоретические частоты вычислены исходя из неверной гипотезы о нормальном распределении.

Критерий Пирсона отвечает на поставленный выше вопрос. Правда, как и любой другой критерий, он не доказывает справедливость гипотезы, а лишь устанавливает на принятом уровне значимости ее согласие или несогласие с данными наблюдений.

Итак, пусть по некоторому числу значений получено эмпирическое распределение:

Варианты	n_i	n_1	n_2	n_3	$\dots n_k$
Эмп.частоты	$f_{оп}$	f_1	f_2	f_3	$\dots f_k$

Допустим, что в предположении о нормальном распределении вычислены теоретические частоты f . При уровне значимости a требуется проверить гипотезу: данное распределение является нормальным распределением.

В качестве критерия проверки гипотезы примем случайную величину.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(f_{on} - f)^2}{f}, \tag{4}$$

где l – число интервалов, на которые разбиты полученные значения. Эта величина, случайная, так как в различных опытах она принимает различные, заранее неизвестные значения. Ясно, что чем меньше различаются эмпирические $f_{оп}$ и теоретические f частоты, тем меньше величина критерия (4) и, следовательно, он в известной степени характеризует близость эмпирического и теоретического распределений.

Заметим, что возведением в квадрат разностей частот устраняют возможность взаимного погашения положительных и отрицательных разностей. Делением на f достигают уменьшения каждого из слагаемых. В противном случае сумма была бы настолько велика, что приводила бы к отклонению гипотезы даже тогда, когда она справедлива. Разумеется, приведенные соображения не являются обоснованием выбранного критерия, а лишь пояснением.

Обозначим значение критерия, вычисленное по данным наблюдений, через $\chi^2_{набл}$ и сформулируем правило проверки гипотезы.

Правило. Для того, чтобы при заданном уровне значимости проверить выдвинутую гипотезу о нормальном распределении, надо сначала вычислить теоретические частоты, а затем наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2{}_{набл} = \sum_{i=1}^{l} \frac{(f_{on} - f)^2}{f},$$

и по таблице критических точек распределения $\chi^2_{кр}$ (приложение 2), по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $K = l\text{-}3$ найти критическую точку $\chi^2_{кр}$ (α, k).

Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ – нет оснований опровергнуть гипотезу.

Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ – гипотезу опровергают.

Замечание 1. Число отсчетов (измерений) должно быть достаточно большим, во всяком случае не менее 50. При разбивке на интервалы в каждый интервал включается не менее 5 отсчетов. Если число отсчетов оказывается меньше, то отдельные интервалы надо объединить.

Замечание 2. Если предполагают, что имеется распределение по закону Пуассона, то число степеней свободы $k = l - 2$.

Замечание 3. Всегда есть вероятность совершить ошибку, которая состоит в том, что будет отвергнута правильная *гипотеза.* Эту вероятность принято обозначать через α. Ее называют уровнем **значимости.** Наиболее часто уровень значимости принимают равным 0,05 или 0,01. Если, например, принят уровень значимости равный 0,05, то это означает, что в 5 случаях из 300 мы рискуем отвергнуть правильную гипотезу.

Пример 2. При 5%-ном уровне значимости проверить гипотезу о нормальном распределении вероятности регистрации по данным из примера 1.

Решение. Вычислим $\chi^2_{набл}$, для чего составим расчетную таблицу (табл. 3). Найдем число степеней свободы, учитывая, что l=9, Тогда k = 9–3 = 6.

Таблица 3. Результаты расчетов

i	$f_{оп}$	f	$f_{оп}$–f	$(f_{оп}–f)^2$	$(f_{оп}–f)^2/f$
1	15	6	9	81	13,5
2	26	13	13	169	13
3	25	27	-2	4	0,15
4	30	67	-37	1369	20,43
5	26	17	9	81	4,76
6	21	36	-14	196	5,44
7	24	21	3	9	0, 43
8	20	10	10	100	10
9	13	4	9	81	20,25

$\chi^2_{набл}$= 87,96

По таблице критических точек распределения $\chi^2_{кр}$ (приложение 2), по уровню значимости α=0,05 и числу степеней свободы k = 6 находим $\chi^2_{кр}$ (0,05: 6)= 12,6. Так как $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$, то принятая гипотеза о нормальном распределении неверна. Следовательно, данные наблюдений не подчиняются нормальному распределению.

Цель работы: необходимо проверить предположение (гипотезу), что закон радиоактивного распада носит статистический вероятностный характер и, следовательно, подчиняется нормальному распределению (если $N_р$>10 за единичный промежуток времени) или распределению Пуассона (если $N_р$<10 за единичный промежуток времени).

Приборы и материалы:

1. Радиометр ПП-8 или КРВП-ЗАБ;
2. Радиоактивные источники;
3. Калькулятор;
4. Миллиметровая бумага, линейка.

Порядок выполнения работы:

1. Подготовьте радиометр к работе;
2. Произведите проверку правильности работы пересчетного блока;
3. Создайте скорость счета порядка 100-1000 имп/мин (подберите необходимую позицию);
4. Произведите 100 отсчетов по 30 с;
5. Найдите среднее значение как среднее арифметическое по формуле

$$\overline{N} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} n_i = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} n_i$$

с точностью до 2-х знаков после запятой;

6. Разбейте полученные результаты на 6-8 интервалов. Для этого сначала запишите полученные результаты измерений в порядке возрастания (от самого меньшего зарегистрированного числа импульсов до самого большого), проставляя против каждого варианта результатов число появлений его в данных измерениях:

Вариант n_1 n_2 n_3 ... n_m

Частота f_1 f_2 f_3 ... f_m.

Учтите, что в каждом интервале должно быть не менее 5 отсчетов (частот);

7. Найдите эмпирическую (опытную) частоту отсчетов $f_{оп}$, лежащих в каждом интервале. Частота отсчетов $f_{оп}$ находится как сумма всех отсчетов (частот), лежащих в данном интервале. Необходимо учитывать, что один и тот же вариант результатов будет концом одного интервала, а также началом другого, поэтому частоту появлений в этом случае распределяют поровну между двумя интервалами. Например:

Вариант	107	108	111	112	113	115	116	320
Частота	2	3	2	6	1	2	3	4

Интервалы	Эмпирические частоты
1: 107-111	$f_{оп}$=2+3+2=6
2: 111-115	$f_{оп}$=2/2+6+1+2/2=9
3: 115-120	$f_{оп}$=2/2+3+4=8

8. Рассчитайте теоретические частоты (пример 1). Расчеты производите в следующем порядке:

а) найдите значение z_i для границ интервалов по формуле (1);

б) определите функцию Лапласа для каждого z_i, то есть $Ф(z)$ по таблице приложения 1, учитывая оговоренные в тексте свойства этой функции;

в) вычислите P_i для каждого интервала по формуле (3);

г) найдите теоретическую вероятность f по формуле (2).

Для удобства, расчеты сведите в расчетную таблицу (табл. 4);

Таблица 4. Расчет теоретической вероятности.

Интервал i	Границы интервала		$Ф(z_i)$	$Ф(z_{i+1})$	Pi	f_i
	z_i	z_{i+1}				
1						
2						
…						
i						

9. Постройте гистограмму распределений теоретических и экспериментальных частот;
10. Рассчитайте критерий согласия $\chi^2_{набл}$ по формуле (4) (пример 2). Расчеты запишите в таблицу 5;
11. Найдите число степеней свободы k для нормального распределения;
12. Зная k, определите $\chi^2_{кр}$ по приложению 2 при 5 %-ном уровне значимости;

Таблица 5. Расчет критерия $\chi^2_{набл}$.

i	$f_{оп}$	f	$f_{оп}$-f	$(f_{оп}-f)^2$	$(f_{оп}-f)^2/f$
1					
2					
…					
i					

$\chi^2_{набл}=$

13. Используя правило проверки гипотезы, сделайте вывод о правильности утверждения: регистрация распадов радиоактивных ядер (также и закон радиоактивного распада) подчиняется нормальному распределению (или распределению Пуассона).

Контрольные вопросы

1. Дайте определение случайной величины.
2. Объясните, почему закон радиоактивного распада носит статистический характер.
3. Дайте определение вероятности.
4. Какая величина называется дискретной?
5. Зависит ли вероятность распада от внешних условий? Ответ поясните.
6. Запишите закон радиоактивного распада.
7. Как определяется вероятность распада отдельного радиоактивного ядра? Вывести из закона радиоактивного распада.
8. Запишите выражение для вероятности распада и регистрации отдельного радиоактивного ядра. Буквенные обозначения, входящие в формулу, поясните.
9. Дайте определение закона распределения дискретной случайной величины.
10. Как можно задать закон распределения дискретной случайной величины?
11. Дайте определение биномиального распределения.
12. Объясните, почему биномиальное распределение применимо к закону радиоактивного распада?
13. В каком случае биномиальное распределение переходит в распределение Пуассона?
14. В каком случае применяется распределение Пуассона?
15. Когда распределение Пуассона переходит в нормальное распределение?
16. Какую функцию называют функцией Лапласа?
17. Перечислите свойства функции Лапласа,
18. Что называют истинной средней скоростью счета?
19. Поясните график функции Лапласа.
20. Дайте определение эмпирических частот.
21. Дайте определение теоретических частот.
22. Как рассчитать теоретические частоты?
23. Дайте определение гистограммы.
24. Для чего используется гистограмма частот?
25. Как учитывается фон счетчика при построении гистограммы?
26. Объясните, как определить функцию Лапласа, используя приложение 1.
27. Что называют критерием согласия?
28. Почему наряду с гистограммой используют критерий согласия?
29. Для чего используют критерий согласия Пирсона?

30. Что характеризует критерий согласия Пирсона?
31. Сформулируйте правило проверки выдвинутой гипотезы.
32. Какие замечания необходимо учитывать, используя правило проверки гипотезы?
33. Что характеризует уровень значимости?
34. Как определить критерий χ^2 по приложению 2?
35. Для чего определяется критерий χ^2 по приложению 2?
36. Как правильно рассчитать частоту отсчетов, лежащих в данном частичном интервале?
37. На основании чего делается вывод о правильности или неправильности выдвинутой гипотезы?
38. Какова цель данной лабораторной работы?