

## Дисперсионный анализ

Наряду с относительно простыми способами сравнения одной выборки с другой (например, с помощью  $t$ -критерия) встречаются и более сложные задачи, когда необходимо сравнить несколько выборок, объединяемых в статистический комплекс. Попарное сравнение в таких случаях оказывается обременительным и требует большой вычислительной работы. С учетом этого Р. Фишером был предложен метод комплексной оценки сравниваемых средних, получивший название дисперсионный анализ.

Метод дисперсионного анализа основан на разложении общей дисперсии статистического комплекса на составляющие ее компоненты, сравнивая которые друг с другом посредством  $F$ -критерия, можно определить, какую долю общей вариации учитываемого (результативного) признака обуславливает действие на него как регулируемых, так и не регулируемых в опыте факторов.

Регулируемые факторы, т. е. те, которые могут регулироваться в опыте экспериментатором (дозы удобрений, различные агротехнические приемы, сорта и т. д.), выступают в опыте в качестве вариантов. В зависимости от того, сколько факторов регулируется, опыты могут быть одно- и многофакторные.

В полевом опыте общая изменчивость результативного (изучаемого) признака образуется под влиянием пестроты почвенного плодородия, изучаемых вариантов и случайных ошибок.

Пестрота почвенного плодородия бывает внутри повторений и между повторениями. Изменчивость плодородия почвы внутри повторений менее значительна, чем между повторениями, поэтому она дисперсионным анализом не выделяется и относится к случайным ошибкам.

В общем виде изменчивость полевого опыта представляют следующим выражением:

$$C_y = C_p + C_v + C_z,$$

где  $C_y$  – общая изменчивость;

$C_p$  – изменчивость по повторениям;

$C_v$  – изменчивость по вариантам;

$C_z$  – изменчивость, обусловленная случайными ошибками.

В агрономических опытах возникает необходимость отдельно учитывать влияние такого нерегулируемого фактора, как почвенное плодородие. Для этого опыты проводятся в нескольких повторениях.

В настоящее время дисперсионный анализ является наиболее распространенным из статистических методов, используемых в сельскохозяйственном опытном деле. Это обусловлено в первую очередь тем, что с разработкой метода дисперсионного анализа стало возможно статистическое планирование опыта в соответствии с требованиями анализа, а соответственно и более эффективная интерпретация полученных экспериментальных данных.

### Дисперсионный анализ однофакторного полевого опыта

Техника дисперсионного анализа однофакторных полевых опытов сводится главным образом к расчету показателей варьирования, которыми в области дисперсионного анализа служат средний квадрат отклонений, или дисперсия.

Отношение дисперсии межгрупповой, или факториальной ( $S_v^2$ ), к дисперсии внутригрупповой ( $S_z^2$ ), или остаточной (неучтенного варьирования условной среды и самих растений), служит критерием оценки влияния на признак (фактор), изучаемый в опыте.

$$\frac{S_v^2}{S_z^2} = F.$$

В честь автора дисперсионного анализа критерий обозначили первой буквой его фамилии  $F$  (критерий Фишера). Критерий Фишера  $F$  устанавливает только факт наличия существенных различий между средними, если  $F_{\text{факт}} > F_{\text{теор}}$ , но не указывает, между какими средними имеются эти различия. Если же  $F_{\text{факт}} \leq F_{\text{теор}}$ , то между всеми выборочными средними нет существенных различий.

**Пример.** С помощью дисперсионного анализа необходимо установить достоверность различий урожайности семян желтого люпина в зависимости от норм высева семян и выяснить степень влияния изучаемого фактора (норма высева семян) на общую изменчивость урожайности.

Данные, полученные от наблюдений, представлены в табл. 1.

**Таблица 1. Сводка наблюдений урожайности семян желтого люпина в зависимости от норм высева семян, ц/га**

Вариант	Повторения			
	1	2	3	4
0,8 млн.	24,8	23,7	24,4	23,5
1,0 млн.	25,7	26,3	25,1	24,9
1,2 млн.	28,5	29,0	30,4	29,3
1,4 млн.	20,1	21,0	19,2	21,7

Дисперсионный анализ начинается с вычисления показателей, представленных в табл. 2.

**Таблица 2. Урожайность семян желтого люпина в зависимости от норм высева семян, ц/га**

Вариант	Повторения $x$				Сумма по вариантам $V$	Среднее по вариантам $\bar{x}$
	1	2	3	4		
0,8 млн.	24,8	23,7	24,4	23,5	96,4	24,1
1,0 млн.	25,7	26,3	25,1	24,9	102,0	25,5
1,2 млн.	28,5	29,0	30,4	29,3	117,2	29,3
1,4 млн.	20,1	21,0	19,2	21,7	82,0	20,5
Сумма по повторениям $P$	99,1	100,0	99,1	99,4	$x = 397,6$	$x_0 = 24,85$

Суммы по вариантам  $V$  находят сложением урожайных данных всех четырех повторений каждого варианта (каждой строки):

$$24,8 + 23,7 + 24,4 + 23,5 = 96,4 \text{ и т. д.}$$

Суммы по повторениям  $P$  находят сложением урожайных данных каждой повторности по всем вариантам (по каждой колонке):

$$24,8 + 25,7 + 28,5 + 20,1 = 99,1 \text{ и т. д.}$$

Среднее арифметическое  $\bar{x}$  по каждому варианту находят делением сумм по вариантам на число повторений:

$$\bar{x} = \sum V : n;$$

$$\bar{x}_1 = 96,4 : 4 = 24,1.$$

Правильность расчетов устанавливают по равенству

$$\sum P = \sum V = \sum X.$$

Для нахождения средней урожайности по всему полевому опыту  $\bar{x}_0$  делят сумму всех урожайностей  $\sum X$  на общее число делянок в опыте  $N$  (число наблюдений):

$$\bar{x}_0 = \frac{\sum X}{N} = \frac{397,6}{16} = 24,85.$$

Для облегчения дальнейших расчетов исходные данные целесообразно преобразовать по соотношению

$$X_1 = X - A,$$

приняв за  $A$  число 25, близкое к  $\bar{x}_0$ . Преобразованные данные записываются в табл. 3.

Таблица 3. Таблица преобразованных данных

Вариант	$X_1 = X - 25$				Сумма по вариантам $V_1$
	1	2	3	4	
0,8 млн.	-0,2	-1,3	-0,6	-1,5	-3,6
1,0 млн.	0,7	1,3	0,1	-0,1	2,0
1,2 млн.	3,5	4,0	5,4	4,3	17,2
1,4 млн.	-4,9	-4,0	-5,8	-3,3	-18,0
Сумма по повторениям $P_1$	-0,9	0	-0,9	-0,6	$\sum X_1 = -2,4$

Правильность расчетов проверяют по равенству

$$\sum P_1 = \sum V_1 = \sum X_1.$$

Данные табл. 3 возводят в квадрат и заполняют табл. 4.

Таблица 4. Таблица квадратов

Вариант	$X_1^2$				$V_1^2$
	1	2	3	4	
0,8 млн.	0,04	1,69	0,36	2,25	12,96
1,0 млн.	0,49	1,69	0,01	0,01	4,00
1,2 млн.	12,25	16,00	29,16	18,49	295,84
1,4 млн.	24,01	16,00	33,64	10,89	324,00
$P_1^2$	0,81	0,0	0,81	0,36	$(\sum X_1)^2 = 5,76$

Для дальнейших расчетов путем сложения находятся соответствующие суммы:

$$\sum X_1^2 = 0,04 + 1,69 + \dots + 10,89 = 166,98.$$

$$\sum V_1^2 = 12,96 + 4,00 + 295,84 + 324,00 = 636,8.$$

$$\sum P_1^2 = 0,81 + 0,81 + 0,36 = 1,98.$$

Общее число наблюдений  $N$  (общее число делянок) в полевом опыте определяется умножением числа вариантов  $l$  на число повторений  $n$ :

$$l = 4;$$

$$n = 4;$$

$$N = l \cdot n = 4 \cdot 4 = 16.$$

Затем определяется корректирующий фактор  $C$ :

$$C = (\sum X_1)^2 : N = 5,76 : 16 = 0,36.$$

Сумму квадратов отклонений рассчитываем по следующим формулам:

– для общего варьирования

$$C_Y = \sum X_1^2 - C = 166,98 - 0,36 = 166,62;$$

– для варьирования повторений

$$C_p = \sum P_1^2 : l - C = 1,98 : 4 - 0,36 = 0,14;$$

– для варьирования вариантов

$$C_V = \sum V_1^2 : n - C = 636,8 : 4 - 0,36 = 158,84;$$

– для варьирования ошибки (остатка)

$$C_Z = C_Y - C_P - C_V = 166,62 - 0,14 - 158,84 = 7,64.$$

Для выяснения достоверностей различий между вариантами данные сводим в табл. 5.

Таблица 5. Результаты дисперсионного анализа

Варьирование	Сумма квадратов	Степени свободы	Дисперсия $S^2$	Критерий Фишера	
				$F_{\phi}$	$F_{05}$
Общее $C_Y$	166,62	15	–	–	–
Повторений $C_P$	0,14	3	–	–	–
Вариантов $C_V$	158,84	3	52,95	62,29	3,86
Ошибки (остатка) $C_Z$	7,64	9	0,85	–	–

Число степеней свободы для общего варьирования определяется общим числом наблюдений за минусом единицы:

$$N - 1 = 16 - 1 = 15.$$

Также определяют степени свободы для повторений и вариантов:

$$n - 1 = 4 - 1 = 3;$$

$$l - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Число степеней свободы для остаточного варьирования определяется умножением чисел степеней свободы вариантов и повторений:

$$(n - 1) \cdot (l - 1) = 3 \cdot 3 = 9.$$

Дисперсия для различных видов варьирования находится делением суммы квадратов вида варьирования на число степеней свободы:

– для вариантов

$$S_V^2 = 158,84 : 3 = 52,95,$$

– для ошибки (остатка)

$$S_Z^2 = 7,64 : 9 = 0,85.$$

Критерий Фишера  $F_{\text{факт}}$  находят делением дисперсии вариантов на дисперсию ошибок:

$$F_{\text{факт}} = \frac{S_V^2}{S_Z^2} = \frac{52,95}{0,85} = 62,29.$$

Значение критерия  $F_{05}$  определяют по прил. 3. Данный критерий находят для доверительной вероятности 95 % (соответственно уровень значимости 5 %). По горизонтали находят колонку с числом, соответствующим числу степеней свободы вариантов (числитель), а по вертикали – строку, соответствующую числу степеней свободы дисперсии ошибки (знаменатель). На пересечении находят число, показывающее табличное отношение дисперсий. В нашем случае  $F_{05} = 3,86$ .

Сравнивая теоретическое и фактическое значения критерия  $F$ , подтверждают или отвергают нулевую гипотезу  $H_0 : d = 0$ . В случае если  $F_{\text{факт}} \geq F_{\text{теор}}$ , нулевая гипотеза  $H_0 : d = 0$  отвергается. Следовательно, между изучаемыми вариантами есть существенные различия. Если  $F_{\text{факт}} < F_{\text{теор}}$ , нулевая гипотеза  $H_0 : d = 0$  подтверждается и между вариантами существенных различий нет. Различия находятся в пределах ошибки опыта. В последнем случае дисперсионный анализ заканчивается и вычисляется только ошибка опыта  $S_{\bar{x}}$ .

В нашем примере  $F_{\text{факт}} = 62,29 > F_{05} = 3,86$ , значит, нулевая гипотеза отвергается, между изучаемыми нормами высева есть существенные различия по урожайности.

Таким образом, результат дисперсионного анализа показал, что есть существенные различия между вариантами опыта, однако неизвестно, какие именно варианты различаются. Поэтому проводят попарные сравнения средних значений. Простейшим из них является оценка значимости разности между средними по наименьшей существенной разности (НСР).

Для того чтобы оценить существенность частных различий, вычисляют:

– ошибку опыта:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{S_Z^2}{n}} = \sqrt{\frac{0,85}{4}} = 0,46 \text{ ц/га};$$

– ошибку разности средних:

$$S_d = \sqrt{\frac{2 \cdot S_Z^2}{n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,85}{4}} = 0,65 \text{ ц/га},$$

– наименьшую существенную разность (НСР) для 5%-ного (или 1%-ного) уровня значимости в абсолютных или относительных показателях:

$$\text{НСР}_{05} = t_{05} \cdot S_d = 2,26 \cdot 0,65 = 1,47 \text{ ц};$$

$$\text{НСР}_{05} = \frac{t_{05} \cdot S_d}{x_0} \cdot 100 = \frac{1,47}{24,85} \cdot 100 = 5,92 \text{ \%}.$$

Значение критерия  $t_{05}$  берут из прил. 1 для степеней свободы дисперсии остатка (ошибки). В нашем примере она равняется 9,  $t_{05} = 2,26$ . Итоги результатов опыта и статистической обработки данных записывают в табл. 6.

В колонку «Урожайность» переносят среднее значение по вариантам из табл. 2. Отклонения от контроля находят, отнимая от средней урожайности по вариантам среднюю урожайность контроля. Если в опыте отсутствует стандарт (контроль), то среднюю урожайность

опытных вариантов сравнивают со средней урожайностью в опыте. Затем сравнивают полученные значения с величиной НСР. В том случае если величина отклонения от контроля имеет положительный знак и больше величины НСР, делают вывод о том, что данный вариант существенно превышает контроль, и его относят к группе I.

Таблица 6. Результаты анализа

Норма высева (млн. шт.)	Урожайность, ц/га	Отклонение от контроля		Группа
		ц/га	%	
0,8 <i>St</i>	24,1	–	–	II
1,0	25,5	1,40	5,81	II
1,2	29,3	5,20	21,58	I
1,4	20,5	–3,60	–14,94	III
НСР <sub>05</sub>		1,47	5,92	

Если отклонение от контроля является величиной отрицательной и больше НСР, значит, данный вариант существенно хуже контроля, и его относят к группе III.

Варианты, у которых отклонения с положительным или отрицательным знаком не выходят за пределы НСР, несущественно отличаются от контроля, и они относятся к группе II.

По результатам анализа делается вывод.

**Вывод.** При возделывании люпина наивысшая урожайность семян получена в варианте с нормой высева 1,2 млн. всхожих зерен. Этот вариант существенно превышает другие изучаемые варианты опыта. Увеличение нормы высева до 1,4 млн. всхожих зерен существенно снизило урожайность люпина. Различия в урожайности между контролем и вариантом с нормой высева 1 млн. всхожих зерен несущественны.

Дисперсионный анализ дает возможность получить представление о степени или доле выяснения того или иного фактора в общей дисперсии (изменчивости) признака. Это можно определить по следующим формулам:

– влияние варианта (норм высева)

$$\eta_V^2 = \frac{C_V}{C_Y};$$

– влияние повторений

$$\eta_P^2 = \frac{C_P}{C_Y};$$

– влияние случайных факторов

$$\eta_Z^2 = \frac{C_Z}{C_Y};$$

– влияние всех факторов

$$\eta_Y^2 = \eta_V^2 + \eta_P^2 + \eta_Z^2 = 1,0 \text{ (или 100 \%)}.$$

В нашем примере получим:

– влияние норм высева

$$\eta_V^2 = \frac{C_V}{C_Y} = \frac{158,84}{166,62} = 0,953 \text{ (95,3 \%)};$$

– влияние повторений (пестрота почвенного участка по уровню плодородия)

$$\eta_P^2 = \frac{C_P}{C_Y} = \frac{0,14}{166,62} = 0,001 \text{ (0,1 \%)};$$

– влияние случайных факторов

$$\eta_Z^2 = \frac{C_Z}{C_Y} = \frac{7,64}{166,62} = 0,046 \text{ (4,6 \%)}.$$

– влияние всех факторов

$$\eta_Y^2 = \eta_V^2 + \eta_P^2 + \eta_Z^2 = 0,953 + 0,001 + 0,046 = 1,0 \text{ (или 100 \%)}.$$

**Задание.** Провести дисперсионный анализ однофакторного полевого опыта в соответствии с заданиями, приведенными в табл. 7, сделать заключение о достоверности различий между вариантами, найти НСР.

Исходные данные приведены в табл. 8–10.

Таблица 7. **Варианты заданий для обработки экспериментальных данных методом дисперсионного анализа**

Номер варианта	Порядковый номер сорта
1	2, 4, 16, 18
2	1, 6, 11, 16, 17
3	13, 16, 19
4	2, 8, 10, 13, 17
5	1, 3, 17, 19
6	3, 5, 8, 12, 20
7	9, 11, 13, 15
8	4, 11, 12, 13, 14
9	5, 6, 7, 8, 10
10	1, 4, 7, 10

Номер варианта	Порядковый номер сорта
11	2, 5, 8, 11, 19
12	2, 4, 7, 11, 13
13	4, 9, 14, 19
14	14, 17, 20
15	1, 15, 16, 17, 18
16	3, 9, 10, 14, 19
17	6, 12, 13, 17
18	2, 6, 10, 14
19	1, 3, 5, 7, 11, 18
20	2, 17, 18, 19, 20

Таблица 8. Урожайность сортов ячменя

№ п. п.	Сорт	Урожайность зерна по повторениям, ц/га			
		I	II	III	IV
1	Стратус	49,4	47,6	51,0	49,2
2	Сильфид	48,6	48,9	46,5	47,4
3	Бровар	41,3	38,4	39,3	42,2
4	Серваль	54,3	56,6	52,2	55,1
5	Зубр	52,2	51,4	50,2	52,4
6	Батька	60,8	59,1	61,2	60,1
7	Ксанаду	58,5	57,4	56,9	58,2
8	Ладны	51,1	50,3	51,4	49,0
9	Водар	50,4	47,6	49,5	50,5
10	Толар	56,7	57,3	56,1	55,1
11	Магутны	39,1	37,9	40,0	40,2
12	Кангу	57,2	55,3	58,0	57,3
13	Марта	36,6	34,4	34,2	35,0
14	Корморан	35,9	33,1	34,8	33,2
15	Фэст	44,0	41,0	42,4	43,4
16	Скарб	42,7	41,7	40,5	41,1
17	Дача	38,3	39,3	37,1	38,1
18	Жана	51,4	50,5	52,0	53,1
19	Суверен	41,2	40,3	39,5	39,2
20	Добры	35,3	36,4	33,1	34,0

Таблица 9. Урожайность сортов картофеля

№ п. п.	Сорт	Урожайность клубней по повторениям, ц/га			
		I	II	III	IV
1	Скарб	211	205	198	202
2	Лазурит	246	237	251	232
3	Архидея	187	174	182	197
4	Одиссей	295	271	285	291
5	Каприз	306	320	313	303
6	Журавинка	216	205	218	211
7	Блакит	283	295	274	280
8	Снегирь	391	403	398	400
9	Бриз	307	295	304	310
10	Чародей	204	214	192	182
11	Лилея	280	273	270	291
12	Ред Скарлет	257	232	248	243
13	Бард	194	182	201	191
14	Уладар	187	180	164	171
15	Фальварак	240	231	260	243
16	Беллароза	364	402	386	370
17	Зорачка	308	310	291	283
18	Вега	333	303	315	321
19	Таисия	170	164	186	172
20	Манифест	233	251	240	230

Таблица 10. Урожайность сортов озимого рапса

№ п. п.	Сорт	Урожайность маслосемян по повторениям, ц/га			
		I	II	III	IV
1	Лидер	34,8	31,2	33,6	32,0
2	Элла	36,3	37,9	35,0	35,4
3	Добродей	38,6	37,0	40,1	37,9
4	Прогресс	36,1	34,2	33,6	36,3
5	Зорный	29,8	27,4	26,8	26,0
6	Вектар	39,5	40,4	39,7	39,0
7	Арсенал	28,1	27,6	29,4	28,1
8	Капитал	24,4	22,1	21,3	24,8
9	Мартын	21,8	18,6	19,4	18,2
10	Маяк	25,8	26,3	24,9	25,0
11	Боян	24,7	24,0	25,0	23,1
12	Нельсон	28,9	27,6	29,2	30,3
13	Геркулес	40,2	39,6	39,8	38,0
14	Днепр	43,9	44,5	44,3	42,3
15	Финесса	48,7	47,6	50,1	48,2
16	Прометей	37,5	36,4	37,2	38,5
17	Абакус	44,7	44,0	43,9	42,0
18	Румба	27,2	28,0	26,9	27,2
19	Сакс	23,5	22,1	23,8	22,2
20	Марафон	33,8	33,2	31,8	35,6

## Дисперсионный анализ многофакторного полевого опыта

Дисперсионный анализ многофакторного полевого опыта позволяет статистически оценить действие и взаимодействие изучаемых факторов на изменчивость результативного признака.

В полевом опыте эффект от совместного применения изучаемых факторов может быть больше (синергизм) или меньше (антогонизм) суммы эффектов от отдельного применения каждого из них. В первом случае такое взаимодействие является положительным, во втором – отрицательным. Когда факторы не взаимодействуют, то прибавка от совместного применения равна сумме прибавок от отдельного воздействия (аддитивизм).

Поэтому задачей многофакторного полевого опыта является изучение влияния факторов в отдельности и их взаимодействия на результативный признак.

Таким образом, общую изменчивость в многофакторном опыте можно представить в следующем виде:

$$C_y = (C_A + C_B + C_{AB}) + C_p + C_Z \text{ – для двухфакторного опыта;}$$

$$C_y = (C_A + C_B + C_C + C_{AB} + C_{AC} + C_{BC} + C_{ABC}) + C_p + C_Z \text{ – для трехфакторного опыта.}$$

Рассмотрим пример статистической обработки урожайных данных полевого двухфакторного опыта, поставленного в четырехкратной повторности ( $n = 4$ ), где фактор  $A$  – сорта ( $l_A = 3$ ), фактор  $B$  – дозы удобрений ( $l_B = 4$ ).

Исходные данные занесем в табл. 11 и определим суммы и средние. Проверим правильность вычислений по соотношению

$$\sum P = \sum V = \sum X.$$

**Таблица 11. Влияние различных доз азотных удобрений на урожайность сортов озимой пшеницы**

A	B	Повторение				Суммы V	Средние
		I	II	III	IV		
Капшлянка (контроль)	Без удобрений (Фон P <sub>60</sub> K <sub>90</sub> )	32	29	25	21	107	26,8
	Фон + N <sub>60</sub>	48	46	41	42	177	44,3
	Фон + N <sub>90</sub>	58	54	52	50	214	53,5
	Фон + N <sub>120</sub>	61	55	58	52	226	56,5
Актер	Без удобрений	30	31	27	21	109	27,3
	Фон + N <sub>60</sub>	46	50	47	36	179	44,8
	Фон + N <sub>90</sub>	60	62	55	49	226	56,5
	Фон + N <sub>120</sub>	68	70	64	50	252	63,0
Августина	Без удобрений	36	30	28	22	116	29,0
	Фон + N <sub>60</sub>	50	46	45	34	175	43,8
	Фон + N <sub>90</sub>	52	50	47	42	191	47,8
	Фон + N <sub>120</sub>	64	60	57	50	231	57,8
Суммы P		605	583	546	469	$\sum X = 2203$	$\bar{x}_0 = 45,9$

Определим суммы квадратов отклонений, для чего вначале все цифры табл. 11 за исключением средних возведем в квадрат и занесем в соответствующие графы табл. 12.

Таблица 12. Таблица квадратов

<i>A</i>	<i>B</i>	Повторность				<i>V</i> <sup>2</sup>
		I	II	III	IV	
Капьянка (контроль)	(Фон P <sub>60</sub> K <sub>90</sub> )	1024	841	625	441	11 449
	Фон + N <sub>60</sub>	2304	2116	1681	1764	31 329
	Фон + N <sub>90</sub>	3364	2916	2704	2500	45 796
	Фон + N <sub>120</sub>	3721	3025	3364	2704	51 076
Актер	(Фон P <sub>60</sub> K <sub>90</sub> )	900	961	729	441	11 881
	Фон + N <sub>60</sub>	2116	2500	2209	1296	32 041
	Фон + N <sub>90</sub>	3600	3844	3025	2401	51 076
	Фон + N <sub>120</sub>	4624	4900	4096	2500	63 504
Августина	(Фон P <sub>60</sub> K <sub>90</sub> )	1296	900	784	484	13 456
	Фон + N <sub>60</sub>	2500	2116	2025	1156	30 625
	Фон + N <sub>90</sub>	2704	2500	2209	1764	36 481
	Фон + N <sub>120</sub>	4096	3600	3249	2500	53 361
<i>P</i> <sup>2</sup>		366 025	339 889	298 116	219 961	( $\sum X$ ) <sup>2</sup> = = 4 853 209

Число наблюдений составит:

$$N = l_A \cdot l_B \cdot n = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48.$$

Корректирующий фактор

$$C = (\sum X)^2 : N = (2203)^2 : 48 = 101\,108,5.$$

Определяем виды варьирования:

$$C_y = \sum X^2 - C = (1024 + 841 + \dots + 2500) - 101\,108 = \\ = 109\,119 - 101\,108,5 = 8010,5.$$

$$C_p = \sum P^2 : l_A \cdot l_B - C = (366\,025 + 339\,889 + 298\,116 + 219\,961) : (3 \cdot 4) - \\ - 101\,108,5 = 1\,223\,991,0 : 12 - 101\,108,5 = 890,8.$$

$$C_v = \sum V^2 : n - C = (11\,449 + 31\,329 + \dots + 53\,361) : 4 - 101\,108,5 = \\ = 432\,075 : 4 - 101\,108,5 = 6910,3.$$

$$C_z = C_y - C_p - C_v = 8010,5 - 890,8 - 6910,3 = 209,4.$$

Следующим этапом дисперсионного анализа многофакторного опыта является определение сумм квадратов для факторов *A*, *B* и их взаимодействия *AB*. Для этого составляем вспомогательную таблицу 3×4, в которую заносим результаты суммы урожаев по вариантам из табл. 2.4.26 и находим необходимые для расчета главных эффектов суммы *A* и *B* (табл. 13).

Таблица 13. **Определение главных эффектов и взаимодействия**

Сорт (фактор $A$ )	Удобрения (фактор $B$ )				Суммы $A$
	Фон (P <sub>60</sub> K <sub>90</sub> )	Фон + N <sub>60</sub>	Фон + N <sub>90</sub>	Фон + N <sub>120</sub>	
Капьянка (контроль)	107	177	214	226	724
Актер	109	179	226	252	766
Августина	116	175	191	231	713
Сумма $B$	332	531	631	709	$\sum X = 2203$

$$C_A = \sum A^2: (l_b \cdot n) - C = (724^2 + 766^2 + 713^2) : (4 \cdot 4) - 101\,108,5 =$$

$$= 1\,619\,301 : 16 - 101\,108,5 = 97,8$$

при  $(l_A - 1) = (3 - 1) = 2$  степенях свободы;

$$C_B = \sum B^2: (l_A \cdot n) - C = (332^2 + 531^2 + 631^2 + 709^2) : (3 \cdot 4) - 101\,108,5 =$$

$$1\,293\,027 : 12 - 101\,108,5 = 6643,8$$

при  $(l_B - 1) = (4 - 1) = 3$  степенях свободы;

$$C_{AB} = C_V - C_A - C_B = 6910,3 - 97,8 - 6643,8 = 168,7$$

при  $(l_A - 1)(l_B - 1) = (3 - 1)(4 - 1) = 6$  степенях свободы.

Затем составляем таблицу дисперсионного анализа и определяем значимость действия и взаимодействия изучаемых факторов по критерию Фишера (табл. 14).

Таблица 14. **Результаты дисперсионного анализа двухфакторного опыта (3×4)**

Дисперсия	Суммы квадратов	Доля вариации, %	Степени свободы	Средний квадрат ( $S^2$ )	Критерий $F$	
					факт.	теор.
Общая $C_y$	8010,5	100	$N - 1 = 47$	–	–	–
Повторений $C_p$	890,8	11,1	$n - 1 = 3$	–	–	–
Фактор $C_A$	97,8	1,2	$l_A - 1 = 2$	49,35	7,77	4,17
Фактор $C_B$	6643,8	82,9	$l_B - 1 = 3$	2214,6	348,76	3,32
Взаимодействия $C_{AB}$	168,7	2,1	$(l_A - 1)(l_B - 1) = 6$	28,1	4,43	2,53
Остаток (ошибка) $C_z$	209,4	2,7	33	6,35	–	–

Таким образом, разложение межгрупповой дисперсии на составляющие позволяет определить доли влияния на результативный показатель каждого из факторов и их взаимодействия в отдельности.

Значение  $F_{05}$  находим по прил. 3, исходя из степеней свободы для дисперсии главных эффектов  $A$ ,  $B$  и взаимодействия  $AB$  (числитель) и 33 степеней свободы дисперсии остатка (знаменатель). Так как  $F_{ф} > F_{05}$ , эффект и их взаимодействия значимы на 5%-ном уровне.

Для оценки существенности частных различий определяем:

$$S_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{S_Z^2}{n}} = \sqrt{\frac{6,35}{4}} = 1,26 \text{ ц/га};$$

$$S_d = \sqrt{\frac{2 \cdot S_Z^2}{n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,35}{4}} = 1,78 \text{ ц/га};$$

$$НСР_{05} = t_{05} \cdot S_d = 2,04 \cdot 1,78 = 3,63 \text{ ц/га.}$$

Определяем оценку существенности главных эффектов и взаимодействия по  $НСР_{05}$ , при этом частные средние опираются на  $n = 4$ , а средние для главного эффекта  $A$  – на  $n \cdot l_B = 4 \cdot 4 = 16$  и средние для главного эффекта  $B$  – на  $n \cdot l_A = 4 \cdot 3 = 12$  наблюдений. Вычисляем  $S_d$  и  $НСР_{05}$  для главных эффектов:

$$S_d = \sqrt{\frac{2S_Z^2}{n \cdot l_B}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,35}{4 \cdot 4}} = 0,89 \text{ ц/га};$$

$$НСР_{05(A)} = t_{05} \cdot S_d = 2,04 \cdot 0,89 = 1,82 \text{ ц/га.}$$

Для фактора  $B$  и взаимодействия  $AB$

$$S_d = \sqrt{\frac{2S_Z^2}{n \cdot l_A}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,35}{4 \cdot 3}} = 1,03 \text{ ц/га};$$

$$НСР_{05(B)} = t_{05} \cdot S_d = 2,04 \cdot 1,03 = 2,1 \text{ ц/га.}$$

Таблица 15. Итоговая таблица дисперсионного анализа

Фактор $A$ (сорт)	Фактор $B$ (удобрения)	Средняя урожайность, ц/га	Разность по факторам		НСР <sub>05</sub>
			$A$	$B$	
Капьянка (контроль)	(Фон P <sub>60</sub> K <sub>90</sub> )	26,8	–	–	3,63
	Фон + N <sub>60</sub>	44,3	–	17,5	
	Фон + N <sub>90</sub>	53,5	–	26,7	
	Фон + N <sub>120</sub>	56,5	–	29,7	
Актер	(Фон P <sub>60</sub> K <sub>90</sub> )	27,3	0,5	–	
	Фон + N <sub>60</sub>	44,8	0,5	17,5	
	Фон + N <sub>90</sub>	56,5	3,0	29,2	
	Фон + N <sub>120</sub>	63,0	6,5	35,7	
Августина	(Фон P <sub>60</sub> K <sub>90</sub> )	29	2,2	–	
	Фон + N <sub>60</sub>	43,8	0,5	14,8	
	Фон + N <sub>90</sub>	47,8	–5,7	18,8	
	Фон + N <sub>120</sub>	57,8	1,3	28,8	
НСР <sub>05</sub>			1,82	2,1	

Затем составляем итоговую таблицу (см. табл. 15), в которой показываем три значения  $НСР_{05}$ : одно для оценки существенности частных различий между средними ( $НСР_{05} = 3,63$  ц/га), а два других для оценки существенности разности средних по фактору  $A$  ( $НСР_{05} = 1,82$  ц/га) и фактору  $B$  ( $НСР_{05} = 2,1$  ц/га).

Итоговые данные можно представить графически (рис. 2).

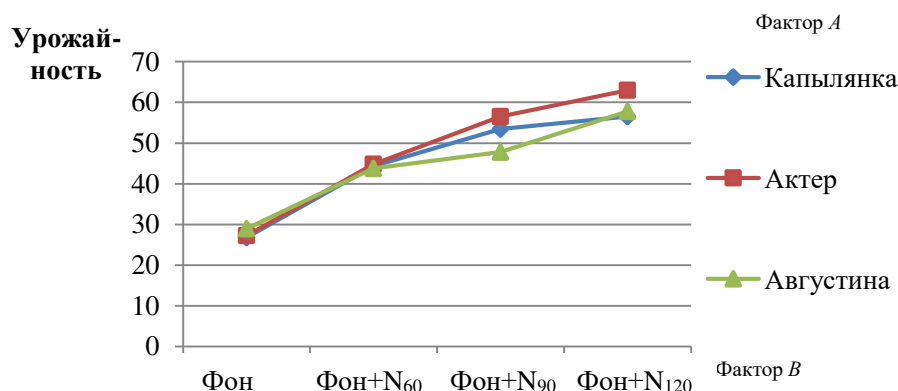


Рис. 2. Урожайность сортов озимой пшеницы в зависимости от доз азотных удобрений

**Вывод.** Поскольку фактические критерии Фишера  $F_A$  и  $F_B$  составляют соответственно 7,77 и 348,76, что значительно больше теоретических критериев (4,17 и 3,32), то влияние сорта и удобрений достоверно. Критерий Фишера для взаимодействия факторов  $F_{AB}$  составляет 4,43, что также больше теоретического значения (2,53), следовательно, взаимодействие сорта и удобрений существенно.

Достоверная прибавка от применения удобрений  $B$  получена по всем дозам. Сорт Актер (фактор  $A$ ) достоверно увеличивал урожайность при дозах  $N_{90}$  и  $N_{120}$  по сравнению с другими сортами, где эти различия были недостоверны или существенно уступали.

**Задание.** Выполнить дисперсионный анализ двухфакторного полевого опыта. Исходные данные приведены в табл. 16, 17.

Таблица 16. Влияние известкования и доз фосфорных удобрений на урожайность сена злаково-бобовых трав, ц/га (2×4)

Известкование (фактор <i>A</i> )	Дозы фосфорных удобрений (фактор <i>B</i> )	Повторение <i>x</i>			
		I	II	III	IV
0	<i>B</i> <sub>0</sub>	23	21	25	27
	<i>B</i> <sub>1</sub>	27	24	27	30
	<i>B</i> <sub>2</sub>	30	29	32	32
	<i>B</i> <sub>3</sub>	32	36	31	32
1	<i>B</i> <sub>0</sub>	27	24	30	26
	<i>B</i> <sub>1</sub>	30	31	34	30
	<i>B</i> <sub>2</sub>	31	33	36	38
	<i>B</i> <sub>3</sub>	36	38	39	34

Таблица 17. Влияние густоты посадки и удобрений на выход семенной фракции картофеля, т/га

Густота посадки, фактор <i>A</i>	Система удобрений	Повторение <i>x</i>			
		I	II	III	IV
70 тыс. кл./га	Минеральные удобрения $B_1$	18,4	20,0	21,2	17,9
	Органические удобрения $B_2$	16,9	19,6	20,2	20,7
	Минеральные + органические $B_3$	22,5	21,4	20,7	22,1
60 тыс. кл./га	$B_1$	19,6	20,2	22,1	19,2
	$B_2$	15,2	14,3	14,0	14,2
	$B_3$	20,2	18,9	20,4	16,5