

## Статистическая обработка данных учетов и наблюдений

Необходимость вычисления статистических характеристик в агрономических исследованиях связана с постоянной изменчивостью признаков и свойств изучаемых растений и условий их выращивания. Исследования, как правило, ведутся выборочным методом, который дает приблизительные параметры изучаемых величин. Статистические методы позволяют по выборочным данным определить границы предельных значений интересующих исследователя показателей.

Распределение результатов измерений, полученных при изучении выборки, подчиняется определенным статистическим закономерностям. Наиболее распространенным среди них является закон нормального распределения, на основании которого может быть определено положение любой случайной изменчивости.

Характер изменчивости индивидуальных значений в выборочной совокупности также подчиняется закону нормального распределения. Вероятность появления изменчивой величины  $X$  в данной области может быть рассчитана по формуле

$$X = \bar{x} \pm t \cdot s,$$

где  $\bar{x}$  – средняя арифметическая;

$t$  – критерий распределения;

$s$  – среднее квадратическое отклонение.

Фактически анализ любой выборочной совокупности начинается с определения этих двух основных характеристик.

Рассмотрим вычисление основных статистических характеристик на следующем примере. Пусть требуется определить среднее число коробочек на растениях льна-долгунца изучаемого сорта, среднюю длину технической части стебля и поражение стеблей ржавчиной. Для этого на участке размножения сорта, проходя по диагонали, в 25 местах случайно, без выбора, берем по одному растению. Каждое растение анализируем по трем признакам. Данные анализа записываем в сводку наблюдений (табл. 1).

Таблица 1. Сводка наблюдений льна-долгунца

Номер растений	Признаки и свойства		
	Число коробочек, шт.	Длина стебля, см	Болезни (+, -)
1	2	3	4
1	2	78	+
2	3	92	-
3	4	96	-
4	1	83	+
5	4	95	-
6	4	98	-
7	2	88	+
8	3	96	-
9	4	95	-
10	3	92	-
11	5	105	-

1	2	3	4
12	2	86	+
13	5	103	-
14	3	90	+
15	5	102	-
16	3	89	-
17	4	100	-
18	3	88	-
19	1	83	+
20	3	91	-
21	3	94	-
22	2	90	+
23	3	91	-
24	1	75	+
25	2	82	+

Анализ сводки наблюдений показывает, что все величины варьируют, причем характер варьирования по признакам разный. Объекты счета (коробочки) имеют естественные границы и варьируют дискретно, в то время как объекты измерений (длина) таких границ не имеют и варьируют непрерывно в зависимости от точности измерения. Объекты, отличающиеся присутствием или отсутствием признака (болезни), варьируют качественно. В зависимости от характера варьирования статистическая обработка данных ведется различными способами.

При дискретном варьировании простейшее упорядочение данных можно провести ранжированием величин в порядке возрастания или убывания: 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5. Из ранжированного ряда видно, что различные варианты в выборке встречаются неодинаково часто. Такую информацию можно свернуть и показать в виде таблицы, где с одной стороны показаны варьирующие величины  $X$  в порядке возрастания или убывания через определенных интервал, а с другой стороны – их частота  $f$ . Такая таблица чисел называется вариационным рядом.

$X$	1	2	3	4	5
$f$	3	5	9	5	3

При непрерывной изменчивости построить таким образом вариационный ряд невозможно. Непрерывный ряд чисел нужно искусственно разделить на группы или классы через определенный интервал, а затем подсчитать частоты. Работу выполняют в такой последовательности:

1) определяют объем выборки:

$$n = 25;$$

2) устанавливают число групп или классов:

$$k \approx \sqrt{n} = 5;$$

3) находят максимальное значение в выборке:

$$X_{\max} = 105;$$

4) находят минимальное значение в выборке:

$$X_{\min} = 75;$$

5) вычисляют размах варьирования:

$$R = X_{\max} - X_{\min} = 105 - 75 = 30 \text{ см};$$

6) устанавливают межклассовый интервал:

$$i = \frac{R}{k} = 30 : 5 = 6 \text{ см};$$

7) составляют вариационный ряд:

Классы $X$	Частоты $f$	
75–80	//	2
81–86	////	4
87–92	////////	9
93–98	//////	6
99–105	////	4

За начало первого класса  $X_n$  обычно берут  $X_{\min} = 75$ . Начало второго и последующих классов берут через интервал  $i = 6$ . Конец класса записывают на условную единицу меньше, чем начало следующего класса. Заканчивают последний класс  $X_{\max} = 105$ .

Частоты по классам разносят в виде точек или штрихов, отмечая условным обозначением взятые варианты. После частоты суммируют и проставляют цифрами. Общая сумма частот должна быть равна объему выборки ( $\sum f = n = 25$ ).

Вариационный ряд качественной изменчивости состоит из двух показателей: числа признаков  $X$  и частоты  $f$ . В нашем примере растения подразделяются на здоровые (16 шт.) и больные (9 шт.).

$X$	Здоровые	Больные	Всего
$f$	16	9	25

Кроме цифровых показателей характер распределения частот в вариационных рядах может быть выражен в виде графиков, гистограмм, диаграмм и формул. При дискретном варьировании характер распределения лучше всего представлять в виде графика вариационной кривой (рис. 1), при непрерывной изменчивости – в виде столбиков гистограммы (рис. 2). Распределение частот при качественной изменчивости наиболее удобно показывать диаграммой в виде сектора (рис. 3).

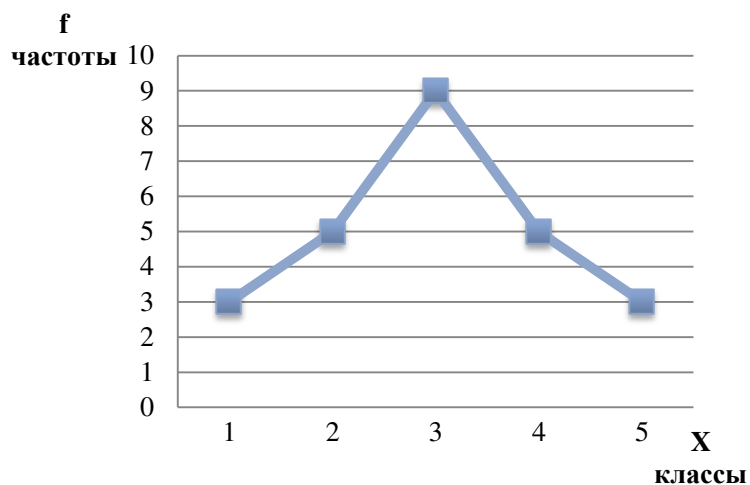


Рис. 1. Пример построения графика при дискретном варьировании

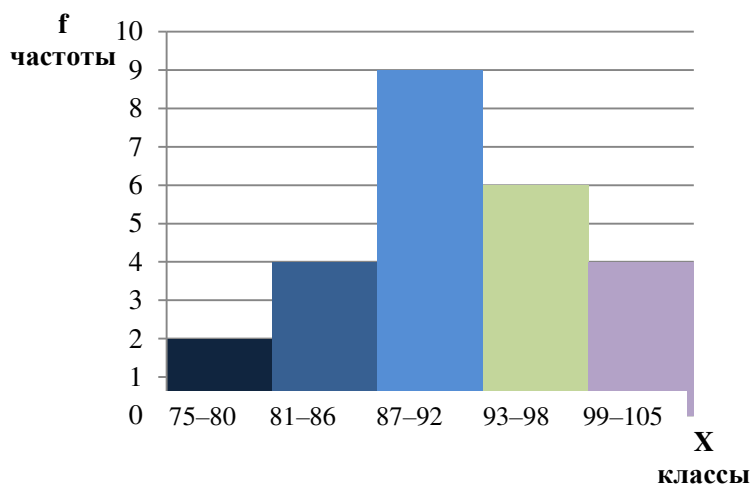


Рис. 2. Пример построения графика при непрерывной изменчивости



Рис. 3. Пример построения графика при качественной изменчивости

Вычисление статистических характеристик вариационных рядов проводят по соответствующим формулам прямым или косвенным методом.

К статистическим характеристикам количественной изменчивости относятся: средняя арифметическая  $\bar{x}$ , дисперсия  $S^2$ , среднее квадратическое отклонение  $S$ , коэффициент вариации  $V$ , ошибка средней арифметической  $S_{\bar{x}}$  и относительная ошибка  $S_{\bar{x}}\%$ .

Выборочная средняя арифметическая является абстрактной математически вычисленной величиной, характеризующей всю совокупность в целом. В простейшем виде она находится путем сложения всех изменчивых величин выборки и деления на их число:

$$\bar{x} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n} = \frac{\sum X}{n}.$$

Как обобщающая характеристика средняя арифметическая обладает рядом свойств:

1. С увеличением или уменьшением индивидуальных значений выборки средняя арифметическая изменяется пропорционально.
2. На числовой оси средняя арифметическая является центром колебания индивидуальных значений выборочной совокупности.
3. Сумма отклонений значений от средней арифметической всегда равна нулю:

$$\sum(X - \bar{x}) = 0.$$

4. Сумма квадратов отклонений от средней всегда меньше суммы отклонений индивидуальных значений от любого произвольного числа  $A$ , не равного средней:

$$\sum(X - \bar{x})^2 < \sum(X - A)^2.$$

5. Средняя арифметическая не показывает индивидуальных колебаний изучаемых признаков. Поэтому для всесторонней характеристики совокупность нуждается в дополнительных показателях. К таким показателям относятся дисперсия и среднее квадратическое отклонение. Дисперсия является мерой рассеяния индивидуальных значений совокупности около центра, которым является средняя арифметическая.

Дисперсия обладает рядом присущих ей свойств:

1. Дисперсия показывает возможную площадь рассеяния индивидуальных признаков от среднего значения.
2. Будучи показателем четной степени, она позволяет избавиться от отрицательных значений замеров отклонений от средней, приводящих результаты сложения к нулю.
3. Положительные значения замеров отклонений дают возможность найти средний показатель отклонения по совокупности в целом:

$$S^2 = \frac{\sum(X - \bar{x})^2}{n - 1}.$$

4. Результаты учетов даются в квадратной степени, что не всегда является удобным для использования.

Для перевода меры рассеяния на площади к линейным мерам используют среднее квадратическое отклонение, которое находится путем извлечения корня квадратного из дисперсии:

$$S = \sqrt{S^2}.$$

Если выборочные данные сведены в вариационный ряд, то вычисление средней арифметической и дисперсии проводят в специальных таблицах с учетом групповых значений и их частот  $f$ :

$$\bar{x} = \frac{\sum fX}{n};$$

$$S^2 = \frac{\sum (X - \bar{x})^2}{n - 1}.$$

Результаты расчетов по первой выборке (число коробочек льна на растении, шт.) приведены в табл. 2.

Таблица 2. **Вычисление статистических характеристик прямым способом**

Классы, $X$	Частоты, $f$	$fX$	$X - \bar{x}$	$f(X - \bar{x})$	$f(X - \bar{x})^2$
1	3	3	-2	-6	12
2	5	10	-1	-5	5
3	9	27	0	0	0
4	5	20	1	5	5
5	3	15	2	6	12
Суммы	$\sum f = n = 25$	$\sum fX = 75$	$\sum (X - \bar{x}) = 0$	$\sum f (X - \bar{x}) = 0$	$\sum (X - \bar{x})^2 = 34$

Расчет основных статистических характеристик проводят по следующим формулам:

– средняя арифметическая

$$\bar{x} = \frac{\sum fX}{n} = \frac{75}{25} = 3,0 \text{ (коробочки);}$$

– дисперсия

$$S^2 = \frac{\sum f (X - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{34}{24} \approx 1,4 \text{ (коробочки);}$$

– среднее квадратическое отклонение

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{1,4} \approx 1,2 \text{ (коробочки).}$$

Статистические характеристики вариационных рядов непрерывной изменчивости удобнее вычислять косвенным способом от произвольного числа  $A$ , опираясь на 4-е свойство средней арифметической (табл. 3). Для этого многочленные показатели классов  $X$  преобразуют в средние однозначные классы:

$$X_1 = \frac{X_{\text{нач}} + X_{\text{кон}}}{2}.$$

В качестве центра колебания берут не  $\bar{x}$ , а произвольное число  $A$ , близкое к середине ряда, или модальный класс. Отклонения  $X - \bar{x}$  заменяют отклонением  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{(X_1 - A)}{i};$$

$$\alpha_1 = (78 - 90) : 6 = -2;$$

$$\alpha_2 = (84 - 90) : 6 = -1 \text{ и т. д.}$$

Таблица 3. **Вычисление статистических характеристик косвенным способом (от  $A = 90$ )**

Классы, $X$	Частоты, $f$	Середина класса, $X_1$	$\alpha = \frac{(X_1 - A)}{i}$	$f \cdot \alpha$	$f \cdot \alpha^2$
75–80	2	78	-2	-4	8
81–86	4	84	-1	-4	4
87–92	9	$A = 90$	0	0	0
93–98	6	96	1	6	6
99–105	4	102	2	8	16
Суммы	$\Sigma f = 25$	-	-	$\Sigma f \cdot \alpha = 6$	$\Sigma f \cdot \alpha^2 = 34$

Среднюю арифметическую вычисляют по формуле

$$\bar{x} = A + i \frac{\Sigma f \alpha}{n}.$$

$$\bar{x} = 90 + 6 \cdot \frac{6}{25} = 90 + 1,44 = 91,44 \text{ см.}$$

Соответственно дисперсию находят по формуле

$$S^2 = i^2 \cdot \frac{\Sigma f \alpha^2 - (\Sigma f \alpha)^2 : n}{n - 1}.$$

$$S^2 = 36 \cdot \frac{34 - 6^2 : 25}{25 - 1} = 36 \cdot \frac{34 - 1,44}{24} = 36 \cdot 1,36 = 48,96.$$

Среднее квадратическое отклонение определяют по формуле

$$S = \sqrt{S^2}.$$

$$S = \sqrt{48,96} \approx 7,0.$$

Среднее квадратическое отклонение обладает приведенными ниже свойствами.

1. Если генеральная совокупность, из которой взята выборка, подчиняется закону нормального распределения, то и выборочное среднее квадратическое отклонение также подчиняется этому закону.

2. В среднем 68 % индивидуальных значений выборки находятся в пределах  $\bar{x} \pm 1S$ , 95 % – в пределах  $\bar{x} \pm 2S$  и 99 % – в пределах  $\bar{x} \pm 3S$ . Риск (значимость) выйти за эти пределы составляет соответственно 32; 5 и 1 %.

3. В селекционно-семеноводческой практике наиболее эффективными следует считать отборы растений для производства элитных семян при сортообновлениях в пределах от  $\bar{x} \pm 2S$  до  $\bar{x} \pm 3S$  как выходящие за пределы средних показателей, а для создания новых сортов методом отбора следует выделять растения, выходящие за пределы  $\bar{x} \pm 3S$  как выходящие за пределы данной совокупности.

Среднее квадратическое отклонение выражается в тех же именованных величинах, что и среднее арифметическое. Поэтому сравнить между собой две выборки при различных величинах средних и разных наименований становится невозможным. В нашем примере признак числа коробочек на растении ( $3,0 \pm 1,2$ ) коробочки нельзя сравнить с длиной технической части стеблей ( $91,44 \pm 7,0$ ) см. Такие сравнения можно сделать в процентах.

Стандартное отклонение, выраженное в процентах к средней арифметической данной совокупности, называется коэффициентом вариации ( $V$ ). Коэффициент вариации является относительным показателем изменчивости:

$$V = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100 \%$$

Изменчивость принято считать слабой, если коэффициент вариации не превышает 10 %, средней, если коэффициент выше 10 %, но меньше 20 %, и сильной, если коэффициент вариации больше 20 %. В нашем примере коэффициент изменчивости числа коробочек у растений льна-долгунца составляет 40,0 %, а технической части стебля – 7,7 %:

$$V_k = \frac{1,2}{3,0} \cdot 100 \% = 40,0 \%$$

$$V_{ст} = \frac{7,0}{91,44} \cdot 100 \% = 7,7 \%$$

Следовательно, у льна-долгунца данного сорта число коробочек на растениях варьирует сильно, а длина технической части стебля – слабо.

Характеристика, обратная коэффициенту вариации, называется коэффициентом выравненности  $B$  и определяется по равенству

$$B = 100 \% - V.$$

Для числа коробочек коэффициент выравненности составляет 60,0 %, а для технической части стебля – 92,3 %:

$$B_k = 100 - 40,0 = 60,0 \%;$$

$$B_{ст} = 100 - 7,7 = 92,3 \% .$$

Вычисление основных статистических характеристик выборочным методом всегда связано с неизбежными ошибками. Ошибка выборочной средней является мерой отклонения выборочной средней от средней генеральной совокупности. Она прямо пропорциональна стандартному отклонению и обратно пропорциональна корню квадратному из объема выборки:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Для числа коробочек ошибка средней арифметической составляет 0,24 шт., а для технической части стебля – 1,4 см:

$$S_{\bar{x}} = \frac{1,2}{\sqrt{25}} = \frac{1,2}{5} = 0,24.$$

$$S_{\bar{x}} = \frac{7,0}{\sqrt{25}} = \frac{7,0}{5} = 1,4.$$

Ошибка средней арифметической обладает рядом свойств, которые могут быть использованы в практической работе.

1. Ошибка средней арифметической подчиняется закону нормального распределения.

Это свойство дает возможность определить параметры генеральной средней  $\mu$  с заданной надежностью

$$\mu = \bar{x} \pm t \cdot S_{\bar{x}}.$$

Вероятность нахождения генеральной средней в пределах  $\bar{x} \pm 1S$  составляет 68 %, в пределах  $\bar{x} \pm 2S$  – соответственно 95 % и в пределах  $\bar{x} \pm 3S$  достигает 99 % и более.

2. Ошибка средней арифметической позволяет определить критерии существенности разности между выборочной средней и генеральной средней из формулы  $\mu = \bar{x} \pm t \cdot S_{\bar{x}}$  в общем виде

$$t = \frac{\mu \bar{x}}{S_{\bar{x}}}.$$

3. Ошибку средней арифметической можно регулировать, изменяя объем выборки. Для каждой величины ошибки объем выборки определяют по соотношению

$$n = \left( \frac{S}{S_{\bar{x}}} \right)^2.$$

4. Ошибка средней арифметической выражается в тех же единицах, что и сама средняя. Поэтому сравнить между собой ошибочность определения средних разных признаков одной и той же совокупности бывает затруднительно или даже невозможно. Такое сравнение можно провести, если ошибку выразить в процентах. Ошибка выборки, выраженная в процентах от соответствующей средней, называется относительной ошибкой выборочной средней:

$$S_{\bar{x}}\% = \frac{S_{\bar{x}}}{\bar{x}} \cdot 100\%.$$

Относительная ошибка средней прямо пропорциональна абсолютной ошибке и обратно пропорциональна средней арифметической. В нашем примере относительная ошибка по числу коробочек на растениях льна-долгунца равна 8,0 %, а по технической части стебля – 1,53 %:

$$S_{\bar{x}}\%_{\text{к}} = \frac{0,24}{3,0} \cdot 100 = 8,0\%;$$

$$S_{\bar{x}}\%_{\text{ст}} = \frac{1,4}{91,44} \cdot 100 = 1,53\%.$$

Отсюда можно сделать вывод, что исследование по признаку числа коробочек проведено с большей ошибочностью, чем по признаку технической длины стебля.

**Задание.** В соответствии с выданным заданием сгруппировать данные вариационного ряда, определить его статистические показатели, построить кривую распределения и сделать выводы по выполненному анализу.

Исходные данные приведены в табл. 4–10.

Таблица 4. Высота растений межсортовых гибридов озимой пшеницы (см)

Номера колосьев	Варианты																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	100	103	101	88	102	112	93	102	118	105	99	102	106	101	110	92	100	92	90	101
2	112	90	103	92	97	104	100	96	111	107	102	96	101	109	98	93	92	100	97	95
3	94	102	105	90	103	106	103	110	102	98	86	97	105	105	112	95	99	112	104	105
4	109	102	104	100	101	101	103	96	112	109	99	101	105	102	106	96	101	113	92	100
5	101	103	109	88	103	108	102	96	101	104	106	103	104	97	101	99	94	104	92	103
6	108	106	102	92	103	104	100	109	109	102	105	98	105	96	102	86	97	96	86	101
7	107	109	110	76	112	110	108	102	107	103	105	96	108	106	108	85	91	101	92	101
8	99	95	105	80	106	100	105	94	106	108	111	96	106	104	118	90	97	104	84	96
9	96	104	104	98	98	99	113	92	108	106	106	110	99	97	112	94	103	98	82	96
10	94	94	103	100	102	110	106	95	103	95	105	108	99	96	108	87	105	103	90	103
11	115	97	95	83	107	100	106	95	104	105	101	108	104	97	101	94	101	111	89	93
12	99	106	102	93	108	101	111	109	112	105	97	102	104	107	113	83	101	95	87	94
13	85	99	104	89	101	104	115	107	104	108	92	108	101	103	111	93	96	98	90	94
14	102	105	87	102	102	101	108	97	107	105	100	111	97	99	120	92	96	110	90	102
15	106	108	104	90	103	103	108	96	101	107	95	104	103	100	116	91	107	110	94	98
16	96	107	103	91	102	112	99	101	95	104	103	118	102	109	96	94	98	105	86	100
17	91	105	103	98	103	116	111	92	100	117	104	110	106	96	106	96	94	101	91	102
18	92	102	100	96	102	103	108	100	90	110	111	99	100	99	107	90	107	106	86	104
19	96	100	104	90	101	103	104	98	102	108	108	112	97	105	108	92	101	102	91	103
20	97	106	102	96	98	94	91	90	105	102	108	114	96	104	113	96	100	99	94	101
21	106	97	102	86	110	103	107	104	107	106	99	96	112	91	101	81	101	106	88	112
22	102	101	105	95	110	111	108	102	102	106	94	107	102	100	108	93	100	97	90	104
23	94	103	104	90	98	93	100	109	96	109	93	103	101	101	100	87	92	100	94	101
24	98	100	112	105	108	94	105	112	106	108	101	109	94	100	110	91	100	109	96	105
25	89	98	108	97	113	110	100	116	102	108	103	105	96	92	109	91	95	104	86	104

Таблица 5. Длина колосьев межсортовых гибридов озимой пшеницы (см)

Номера колосьев	Варианты																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	10,0	11,0	10,4	9,3	12,3	12,1	10,1	11,4	12,0	12,2	12,0	11,8	10,2	11,8	11,8	11,3	9,9	10,1	10,0	10,8
2	10,4	10,0	10,3	9,8	11,0	13,0	10,6	10,4	10,5	11,1	11,3	10,7	9,4	12,5	10,0	11,8	8,6	11,3	11,2	9,9
3	7,9	10,8	9,9	9,8	10,0	11,0	10,2	10,0	10,8	10,8	10,5	9,7	10,3	11,0	12,6	10,9	12,5	10,8	11,2	10,6
4	10,3	10,2	10,6	9,6	11,8	10,0	11,2	12,6	12,3	10,4	11,2	10,1	10,8	10,6	10,3	11,8	12,1	10,7	9,9	10,1
5	11,6	9,4	11,2	9,6	11,3	11,7	10,3	13,0	10,8	9,4	12,2	10,5	10,0	11,2	12,1	11,3	10,5	9,6	10,6	10,4
6	10,1	10,5	10,6	9,0	11,9	11,4	9,5	11,0	11,3	10,8	10,1	11,8	10,1	11,1	11,4	10,1	10,7	11,7	10,6	10,6
7	11,3	11,5	10,9	9,0	11,9	10,8	10,8	11,2	11,6	10,6	10,4	9,5	10,8	11,4	10,9	10,4	11,1	10,7	9,7	9,5
8	9,5	8,0	10,2	8,6	11,0	10,1	12,0	9,7	11,0	10,2	10,3	11,2	10,8	10,6	10,8	10,6	10,5	10,4	10,1	9,8
9	9,4	9,0	10,7	10,6	11,2	10,8	10,5	12,3	11,2	12,7	11,3	10,4	10,3	12,3	10,7	11,3	12,0	10,7	9,3	10,0
10	9,0	10,4	10,5	10,3	10,4	12,5	10,9	11,2	10,0	10,4	10,2	11,6	10,5	10,4	11,2	11,0	12,0	10,4	10,6	10,7
11	10,1	9,1	10,8	8,8	10,8	9,7	10,5	10,6	11,7	12,0	10,3	10,0	10,2	10,5	9,8	10,7	12,5	10,8	9,6	9,8
12	9,9	10,1	10,3	10,6	11,3	10,5	9,8	12,2	10,5	11,1	11,1	9,5	11,2	10,8	11,8	10,4	9,3	10,0	9,9	10,8
13	10,3	12,0	10,4	9,6	9,7	11,2	10,8	11,0	11,0	12,2	11,4	9,9	11,8	12,0	11,4	11,3	11,4	10,7	10,7	10,2
14	10,6	9,5	11,5	11,0	9,4	12,4	10,5	11,0	10,3	11,6	10,8	10,5	9,7	10,6	10,3	10,3	12,7	11,0	10,5	9,8
15	9,5	10,8	10,8	10,4	11,0	11,7	10,7	10,0	9,4	11,3	9,3	11,0	10,5	11,7	11,2	9,8	12,7	11,1	12,1	10,2
16	8,5	9,5	10,8	10,4	10,7	11,1	11,5	10,9	10,7	10,8	10,3	10,4	10,8	11,7	10,7	11,7	10,2	10,4	10,9	10,3
17	9,5	9,7	10,8	11,5	9,1	11,5	10,5	10,6	7,8	11,8	10,6	11,2	10,0	12,2	11,8	10,2	11,7	10,3	9,6	9,6
18	9,5	9,8	10,1	10,5	10,8	11,1	11,8	11,0	10,8	10,5	11,3	9,8	10,3	11,8	10,2	10,8	11,2	11,3	9,6	11,5
19	9,0	9,7	11,0	9,7	12,3	10,5	10,8	10,1	9,6	12,6	10,9	11,2	11,2	12,3	10,7	9,6	11,4	10,6	10,1	9,7
20	9,7	9,8	10,3	10,5	10,5	10,4	8,8	10,7	11,2	11,0	10,8	11,9	11,3	13,1	11,5	11,1	10,8	9,9	10,6	10,5
21	11,5	10,6	10,4	8,5	10,6	11,2	11,1	11,5	11,8	11,5	10,8	10,7	11,9	10,2	11,7	10,2	10,6	9,7	10,8	9,8
22	10,2	10,5	11,0	10,0	11,5	11,7	10,5	10,7	10,3	11,3	10,0	10,4	10,9	10,8	11,2	11,2	13,0	10,4	9,4	9,7
23	9,4	9,8	11,3	10,3	11,1	11,4	10,0	11,1	12,3	12,0	9,4	10,5	10,4	11,8	10,5	10,7	10,3	10,2	9,6	9,6
24	10,5	9,6	11,2	10,6	9,8	11,2	11,2	12,4	11,7	11,0	10,8	9,9	9,5	11,2	10,5	10,3	12,1	10,4	10,6	11,0
25	9,8	10,5	10,5	10,3	11,2	12,0	12,1	11,0	10,1	10,5	11,2	10,1	11,4	10,4	10,8	12,3	10,8	9,7	8,8	10,2

Таблица 6. Число колосков на главном колосе гибридов озимой пшеницы (шт.)

Номера колосьев	Варианты																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	17	20	19	18	22	22	17	20	22	20	20	20	19	21	20	19	16	21	19	19
2	17	16	19	18	20	23	19	20	20	19	20	19	19	22	19	19	19	20	19	18
3	16	18	17	19	19	20	19	18	22	20	20	19	18	21	20	19	21	20	18	19
4	18	20	18	18	20	18	19	20	21	19	21	17	20	20	12	20	21	20	18	20
5	21	17	18	17	21	20	19	20	20	16	19	19	18	21	20	19	18	19	19	20
6	19	19	19	17	20	20	20	18	21	22	17	20	20	20	18	17	19	19	19	20
7	19	19	19	17	22	19	18	20	21	19	18	16	19	21	19	17	20	19	17	18
8	17	15	19	17	20	21	21	18	21	22	17	20	20	20	18	20	20	19	19	18
9	17	17	19	20	21	21	18	19	21	22	19	19	19	21	21	20	21	19	18	20
10	19	19	20	19	17	22	20	22	19	19	20	20	19	20	20	19	19	18	19	19
11	19	17	19	18	19	20	20	20	20	20	20	19	21	19	20	19	21	19	19	19
12	19	17	19	17	19	16	20	19	21	21	19	20	19	20	22	18	18	18	18	19
13	19	19	19	17	18	21	20	21	21	22	19	19	22	21	20	19	21	19	19	18
14	18	17	19	20	18	21	20	19	20	21	20	19	18	20	21	18	21	19	20	19
15	18	18	20	17	19	21	21	17	18	22	19	21	19	22	20	19	22	20	20	18
16	17	19	19	17	20	20	19	19	19	19	19	20	20	21	19	19	19	20	19	17
17	19	18	18	20	17	20	20	19	20	22	21	21	18	22	21	18	21	19	18	17
18	17	19	18	18	19	22	21	19	19	22	21	19	19	20	18	18	21	19	18	19
19	17	19	19	18	20	18	20	18	18	21	20	20	20	20	18	18	22	19	19	17
20	18	18	20	20	18	19	17	18	20	21	20	21	19	20	20	18	19	19	18	18
21	19	20	18	16	20	20	21	20	22	22	19	20	19	18	21	17	17	20	19	20
22	16	20	19	18	19	20	20	19	20	20	19	21	18	21	20	18	20	19	20	18
23	17	18	20	19	20	21	18	20	20	22	20	21	19	20	20	18	19	20	20	19
24	19	19	20	20	19	20	21	21	20	22	19	19	17	21	21	19	21	20	19	19
25	18	19	20	18	21	19	22	20	19	21	20	21	19	20	19	20	20	19	18	18

Таблица 7. Число зерен на главном колосе гибридов озимой пшеницы (шт.)

Номера колосьев	Варианты																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	35	43	36	42	53	56	31	54	59	49	52	47	43	50	48	54	34	57	44	38
2	41	37	41	49	36	62	41	49	32	52	50	41	35	60	39	67	34	43	49	38
3	37	43	35	41	44	40	40	43	45	51	51	43	33	46	47	50	59	47	48	47
4	36	36	39	40	38	38	48	44	54	54	42	43	37	53	46	61	49	45	37	41
5	47	36	50	46	45	48	42	58	52	36	49	49	42	49	59	56	41	42	47	40
6	39	43	40	44	46	46	40	40	59	45	56	43	43	39	46	55	51	54	47	48
7	59	42	36	48	43	46	42	53	51	62	47	45	42	46	43	48	57	44	43	41
8	36	37	38	36	39	41	49	34	47	41	43	49	44	40	49	52	44	49	44	43
9	37	38	42	44	45	38	48	42	55	51	53	45	41	54	35	55	54	40	38	43
10	35	34	43	50	38	54	35	58	58	43	45	81	39	46	44	43	42	40	49	48
11	40	26	39	33	41	40	40	52	47	52	32	45	40	50	37	54	51	48	46	38
12	40	30	48	43	44	36	50	51	44	46	40	37	41	51	45	40	39	49	38	39
13	37	36	31	41	38	44	45	39	52	59	36	49	44	49	46	49	52	48	48	43
14	48	40	32	31	37	48	42	51	42	48	41	44	31	39	41	36	53	43	40	44
15	26	37	42	51	38	43	48	39	42	51	39	41	37	51	38	41	57	47	57	35
16	35	33	44	51	40	47	45	48	43	42	40	42	38	45	46	54	44	45	44	46
17	33	38	37	51	29	53	43	43	58	59	52	47	41	55	44	46	51	42	39	50
18	36	36	36	48	53	63	51	51	48	47	44	39	40	43	36	53	41	45	46	41
19	39	36	46	18	48	33	41	36	42	57	44	51	45	47	43	41	43	42	47	39
20	39	42	40	44	34	41	26	49	53	52	48	54	48	49	37	44	47	46	37	53
21	46	35	40	38	43	52	46	60	54	52	39	47	51	35	42	42	41	47	51	46
22	43	35	44	43	46	44	40	42	41	44	43	43	45	44	40	63	52	45	37	42
23	42	35	48	40	52	45	40	43	56	51	40	41	52	46	45	48	34	42	39	47
24	45	38	48	48	43	55	47	58	52	45	46	42	36	46	45	49	57	43	37	58
25	38	39	41	38	37	50	47	38	46	54	41	45	48	40	39	58	63	45	42	44

Таблица 8. Число зерен на растении гибридов озимой пшеницы (шт.)

Номера колосьев	Варианты																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	121	145	120	65	209	209	121	203	234	146	193	126	178	158	242	188	88	233	207	126
2	266	124	138	165	141	246	178	181	260	211	250	185	134	328	69	241	58	84	198	112
3	195	118	127	101	132	118	229	121	183	154	169	132	126	330	138	279	225	175	174	126
4	107	224	139	109	72	107	184	70	345	132	189	164	194	251	84	221	239	127	62	172
5	183	112	210	88	75	171	74	125	149	96	140	136	156	141	163	215	229	61	114	111
6	129	249	147	44	178	127	95	114	345	112	143	148	109	122	118	263	233	212	198	138
7	332	237	153	176	106	136	147	232	149	272	91	160	111	128	111	251	162	112	229	73
8	108	75	163	74	88	80	454	59	245	221	137	92	181	198	182	239	99	154	283	102
9	120	137	149	109	142	248	170	92	204	288	200	192	194	272	201	300	223	83	97	749
10	75	62	113	133	134	258	149	303	151	107	119	220	103	75	176	297	142	70	206	183
11	63	56	77	82	89	93	85	254	214	266	121	154	177	87	89	214	95	113	176	117
12	79	105	111	190	101	191	125	155	130	170	130	116	145	219	185	92	116	159	236	86
13	70	110	128	96	61	131	227	197	120	148	76	106	230	204	144	254	103	95	182	147
14	348	140	111	85	95	326	91	161	250	104	87	79	132	125	98	103	185	97	118	105
15	102	187	189	179	131	133	211	99	68	187	97	111	180	144	217	183	290	150	246	117
16	55	72	114	160	135	163	253	108	228	145	200	163	228	117	81	272	124	114	247	90
17	92	61	100	129	53	157	123	159	248	396	143	209	208	296	143	170	201	70	149	122
18	114	85	82	48	148	63	116	357	101	184	105	152	95	211	97	155	273	197	109	144
19	63	94	146	59	222	121	148	96	86	209	108	197	122	137	185	144	180	198	293	62
20	66	125	119	79	59	75	51	185	190	221	163	220	193	139	162	161	124	185	175	274
21	202	110	68	122	112	141	109	290	266	178	163	239	238	71	245	124	138	205	180	73
22	101	117	229	120	157	194	60	116	162	139	99	196	196	59	228	252	263	196	170	162
23	167	141	269	66	226	231	49	104	302	264	136	180	346	108	109	134	114	173	122	147
24	214	75	174	119	142	161	234	214	175	100	176	222	229	150	142	298	230	183	113	173
25	146	161	111	151	143	188	81	160	172	120	180	117	282	143	103	174	211	99	58	168

Таблица 9. Масса зерна в главном колосе гибридов озимой пшеницы (г)

Номера колосьев	Варианты																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1,90	1,91	1,72	2,02	3,15	3,25	1,50	2,94	3,19	2,56	2,87	2,58	2,48	3,40	2,88	3,03	1,64	2,75	2,19	2,17
2	1,97	1,67	1,91	2,53	1,75	3,40	2,15	2,68	2,60	2,54	2,51	1,96	1,68	3,05	1,55	2,84	1,00	1,75	2,43	1,69
3	1,78	1,91	1,70	2,25	2,33	2,15	2,00	2,39	2,18	1,70	2,69	2,90	1,89	2,30	2,59	2,49	3,72	2,35	2,44	2,27
4	2,01	1,91	2,00	2,08	1,69	1,55	2,12	2,67	2,51	2,77	2,00	2,50	2,10	2,73	2,58	3,10	2,38	2,21	2,05	1,80
5	2,20	1,78	2,58	2,25	2,39	2,60	1,78	3,00	2,51	1,82	2,89	2,56	2,25	2,57	3,25	3,41	2,71	1,67	2,68	1,93
6	2,04	2,68	2,12	2,15	2,56	2,36	1,80	2,30	3,30	2,33	2,36	2,80	1,80	2,79	2,71	2,99	2,92	2,88	2,45	2,13
7	3,23	2,46	2,21	1,70	2,45	2,22	1,98	2,79	2,50	3,13	1,69	2,39	2,05	2,52	2,56	2,38	3,16	2,21	2,10	2,06
8	1,91	1,76	1,71	0,93	1,85	2,71	2,57	1,65	2,26	1,46	2,08	2,55	2,21	2,38	2,20	2,52	2,17	2,45	2,28	1,93
9	1,65	1,70	1,98	2,61	2,56	2,02	2,33	2,08	2,80	1,93	2,81	2,22	2,15	3,23	2,22	2,86	2,71	1,91	1,76	1,99
10	1,83	1,81	2,00	3,51	2,11	3,20	1,35	3,39	3,04	1,99	2,43	3,07	1,99	2,49	2,21	3,03	2,68	2,05	2,49	2,00
11	2,00	1,39	1,38	1,66	2,45	2,18	1,70	2,60	2,35	2,84	2,61	2,63	2,08	2,40	1,70	2,81	2,71	2,47	2,00	1,69
12	1,99	1,91	1,91	2,58	2,53	1,99	2,11	2,87	2,05	2,43	2,09	1,90	2,22	2,23	2,33	1,84	2,30	2,25	1,73	1,60
13	1,76	2,02	1,50	2,21	2,02	2,32	2,51	1,38	2,35	2,78	1,63	2,51	2,12	2,88	2,77	2,46	3,15	2,05	2,78	2,14
14	2,85	2,08	1,42	1,81	1,87	2,79	2,01	2,68	1,85	2,61	1,95	2,41	1,48	2,10	1,87	2,02	3,33	2,08	2,04	1,76
15	1,50	2,00	2,26	1,05	1,96	2,00	2,12	2,21	1,93	2,68	1,89	2,25	1,88	2,99	1,80	2,30	3,51	2,38	2,51	1,80
16	1,65	1,65	2,20	2,79	2,05	2,21	2,89	2,40	2,18	2,29	1,92	2,33	2,08	2,56	2,29	2,65	2,12	2,18	2,40	2,33
17	1,55	1,65	1,79	2,96	1,40	2,67	1,61	2,16	2,95	3,86	2,39	2,59	2,02	2,77	2,39	2,09	2,31	2,00	2,02	2,35
18	1,89	1,72	1,79	2,38	2,83	2,65	2,59	2,74	2,28	2,32	2,22	1,84	2,09	3,45	1,92	2,78	2,40	2,59	1,98	2,00
19	1,79	1,79	2,37	0,85	3,00	1,77	2,15	1,59	2,15	2,90	1,49	2,95	2,45	2,68	1,75	1,81	2,53	2,32	2,81	1,83
20	1,88	2,11	2,11	2,19	1,70	1,80	1,07	2,83	2,79	2,46	2,31	2,75	2,39	3,00	2,48	2,12	2,40	2,11	1,93	2,06
21	2,35	1,86	1,92	1,72	2,06	2,30	2,31	3,42	2,98	3,00	1,91	2,15	3,08	1,80	2,55	1,74	2,70	2,21	2,62	2,27
22	2,33	1,82	2,19	2,22	2,81	2,52	2,00	2,31	1,89	2,10	1,99	2,05	2,48	2,56	1,81	3,73	2,99	2,50	1,78	2,08
23	2,08	1,74	2,31	2,09	2,65	2,60	2,02	2,35	3,50	2,92	2,72	2,30	2,90	2,57	2,52	2,15	1,65	2,22	1,77	2,50
24	2,50	1,77	2,55	2,58	2,12	3,00	2,19	3,18	2,87	2,00	2,35	2,23	2,15	2,59	2,11	2,43	3,21	2,11	1,53	3,21
25	1,77	1,89	1,96	1,96	2,04	2,85	2,01	2,18	2,55	2,80	2,02	2,18	2,97	1,92	2,51	3,30	3,55	2,30	2,22	2,11

Таблица 10. Масса зерна с растений гибридов озимой пшеницы (г)

Номера колосьев	Варианты																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	5,7	5,7	6,1	3,0	10,0	9,4	5,4	10,7	1,5	7,3	10,0	5,8	9,3	7,0	13,2	9,0	4,2	11,2	9,5	6,0
2	12,3	4,4	5,9	7,0	5,7	11,2	7,7	9,4	10,2	9,3	11,8	8,3	5,7	16,8	2,7	12,0	2,4	3,5	10,0	4,5
3	9,1	4,7	5,8	4,6	6,6	5,9	11,5	6,2	7,6	5,3	8,5	7,1	6,3	15,3	13,0	13,5	13,0	8,0	8,1	5,8
4	5,1	5,5	5,9	4,9	3,0	4,0	8,2	3,6	19,2	6,3	8,8	8,9	9,0	12,9	3,9	12,0	2,6	6,4	3,0	7,4
5	8,1	4,4	7,5	3,8	3,9	8,9	3,3	5,5	6,7	4,7	6,4	6,5	7,5	7,3	8,2	10,4	7,0	2,4	5,8	5,4
6	5,7	13,3	6,0	2,2	7,0	5,8	4,2	5,3	17,1	6,5	6,0	9,8	4,7	5,6	5,3	13,2	11,1	8,4	9,3	6,2
7	15,3	12,2	9,5	7,3	5,7	5,8	5,9	9,1	6,7	12,7	3,4	8,0	5,2	7,2	5,8	11,0	9,0	5,4	9,3	3,0
8	5,2	2,8	6,9	7,0	3,9	3,2	12,9	2,7	11,2	9,1	5,8	4,7	8,8	10,0	7,6	10,9	4,8	7,4	12,5	4,7
9	5,2	6,2	6,4	5,6	4,3	12,7	8,1	4,3	9,4	12,5	9,9	9,8	9,5	13,4	7,5	15,9	10,3	3,7	4,4	6,2
10	3,1	2,8	5,4	3,5	6,9	9,7	5,8	15,6	7,0	4,4	5,7	9,9	5,3	3,9	8,4	15,9	6,3	3,4	9,3	7,7
11	3,0	2,6	2,2	2,3	5,4	4,2	3,7	7,6	9,8	13,9	5,6	9,0	8,4	4,0	4,1	10,7	5,0	7,6	7,3	4,9
12	3,7	5,9	4,8	9,6	4,8	9,7	4,8	8,5	5,4	8,1	5,2	6,0	7,0	11,6	9,4	4,0	6,0	6,4	7,4	3,8
13	3,2	4,9	5,0	4,4	3,0	6,6	10,1	8,5	5,1	6,7	2,9	4,7	10,7	11,9	6,7	11,2	3,7	8,2	8,8	6,3
14	21,5	5,5	4,1	3,9	4,9	15,9	4,2	7,6	9,1	5,0	3,0	4,3	5,5	6,0	4,1	5,0	10,7	4,4	6,0	3,5
15	4,7	8,5	8,3	5,8	6,4	6,7	8,7	4,9	3,0	9,5	4,5	5,5	8,2	8,0	9,3	9,0	16,	7,4	11,7	5,7
16	2,4	3,4	3,9	6,1	6,0	7,5	14,4	4,6	10,9	6,8	8,6	8,3	10,7	6,3	3,7	12,2	5,4	5,2	11,4	4,6
17	4,1	2,4	4,1	6,7	2,6	6,4	5,1	6,7	12,0	19,3	5,4	10,6	9,9	14,0	6,8	7,5	9,0	3,2	6,7	5,4
18	5,6	3,9	3,8	2,4	8,4	2,6	5,4	18,4	4,5	8,6	5,0	6,7	4,4	10,9	4,7	7,0	14,4	10,5	4,5	6,6
19	2,8	3,5	7,1	2,4	9,5	6,0	7,2	4,5	4,1	9,1	4,5	9,7	5,2	6,4	9,9	6,2	9,7	10,0	13,9	2,7
20	3,1	5,7	6,0	4,3	2,5	3,2	2,2	9,3	9,0	10,3	6,7	10,3	9,3	7,8	7,2	7,4	6,0	8,6	8,7	14,0
21	8,9	5,0	3,1	5,2	5,5	6,6	4,8	14,9	3,0	8,6	7,4	11,7	13,2	3,3	12,6	5,4	8,3	8,5	8,6	3,1
22	5,1	5,4	9,5	6,3	8,1	9,4	2,7	6,0	6,9	6,1	4,3	7,1	9,9	3,0	11,4	12,0	14,0	9,8	5,7	6,9
23	8,9	4,1	12,1	3,1	9,7	9,9	2,8	5,3	15,4	12,8	5,4	8,9	18,5	5,5	4,5	6,2	5,3	8,0	5,4	6,5
24	10,7	2,8	8,6	5,7	6,2	7,7	10,5	10,6	7,8	4,4	7,6	9,5	7,0	7,3	7,3	14,5	12,0	8,6	5,1	8,5
25	6,5	6,7	4,0	6,9	7,4	9,2	3,4	7,8	8,6	6, 2	5,8	5,4	16,7	6,4	6,4	9,3	9,0	4,7	2,9	8,0

Как было отмечено ранее, под качественной изменчивостью понимается такая изменчивость, при которой различия между вариантами определены показателями качества, не имеющими числового выражения (в нашем примере больные – здоровые растения).

Качественную изменчивость характеризуют следующие статистические характеристики: доля наличия признака ( $p$ ), доля отсутствия признака ( $q$ ), показатель изменчивости качественного признака ( $S$ ), ошибка выборочной доли ( $S_p$ ), коэффициент вариации ( $V, \%$ ).

Общий объем выборки обозначают буквой  $N$ , а число объектов с данным признаком –  $n$ .

Доля наличия признака – это отношение числа объектов с данным признаком к общему числу объектов, т. е. к объему выборки:

$$p = \frac{n}{N}.$$

Она может быть выражена в частях единицы или в процентах, т. е. доля признака показывает вероятность появления данного признака в данной совокупности.

В нашем примере в выборке из 25 растений льна-долгунца 9 растений поражены ржавчиной ( $n_1 = 9$ ), а 16 растений являются здоровыми ( $n_2 = 16$ ). Таким образом, объем выборки составляет 25 растений, а доля пораженных ржавчиной растений 36 %:

$$N = n_1 + n_2 = 9 + 16 = 25.$$

$$p = \frac{n}{N} = \frac{9}{25} = 0,36, \text{ или } 36 \%.$$

Доля отсутствия признака – это разность между целым и долей наличия признака:

$$q = 1 - p.$$

$$q = 1 - 0,36 = 0,64, \text{ или } q = 100 - 36 = 64 \%.$$

Показатель изменчивости качественного признака для альтернативной изменчивости, как в нашем случае, когда изучаемый объект имеет две градации (пораженные и не пораженные ржавчиной растения льна), рассчитывают по формуле

$$S = \sqrt{p \cdot q}.$$

$$S = \sqrt{0,36 \cdot 0,64} = 0,48, \text{ или } 48 \%.$$

Максимальная изменчивость, как видно из формулы, наблюдается при  $p = q = 0,5$ . При этом показателе изменчивость  $S$  также равна 0,5:

$$S_{\max} = \sqrt{0,5 \cdot 0,5} = 0,5.$$

Если изучаемый объект имеет более двух градаций, то показатель изменчивости вычисляется по формуле

$$S = \sqrt[k]{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k},$$

где  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$  – доли признака от общего объема выборки;

$k$  – число градаций признака.

Ошибка выборочной доли – это мера отклонения от доли наличия признака, которую для альтернативной изменчивости вычисляют по формуле

$$S_p = \sqrt{\frac{p \cdot q}{N}}.$$

В нашем случае она составляет:

$$S_p = \sqrt{\frac{0,23}{25}} = 0,10.$$

Интервальную оценку доли дают по формуле  $p \pm 2S_p$  на уровне доверительной вероятности  $P_{095}$  и по формуле  $p \pm 3S_p$  на уровне доверительной вероятности  $P_{099}$ .

Интервал при  $P_{095}$  составляет  $0,36 \pm 2 \cdot 0,14 = 0,36 \pm 0,28 = 0,08 \div 0,64$ . Таким образом, нижняя граница интервала составит 0,08, а верхняя – 0,64.

Если градаций более двух, то ошибку выборочной доли вычисляют по формуле

$$S_p = \frac{S}{\sqrt{N}},$$

где  $S$  – показатель изменчивости;

$N$  – объем выборки.

Коэффициент вариации – отношение показателя изменчивости к его максимальному значению, выраженное в процентах:

$$V_p = \frac{S}{S_p}.$$

Коэффициент вариации в примере составит:

$$V_p = \frac{0,48}{0,10} \cdot 100 \% = 4,8 \ %.$$

Коэффициент вариации характеризует относительную изменчивость изучаемых признаков и широко используется для сравнительной оценки выравненности различных совокупностей.

**Задание.** В соответствии с выданным вариантом рассчитать статистические показатели качественной изменчивости, построить диаграмму и сделать выводы.

Исходные данные приведены в табл. 11–13.

Таблица 11. Пораженность паршой плодов груши (в каждой выборке по 150 шт.)

Вариант	Задание									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Белорусская поздняя	55	56	63	58	38	67	45	56	67	50
Лагодная	44	45	46	48	35	37	30	36	50	35
Мраморная	21	30	16	20	19	24	16	26	20	22
Дюшес летний	72	80	83	79	77	84	90	68	65	60

Таблица 12. Окраска плодов томата в  $F_2$

Вариант	Задание									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Красная	136	115	193	178	175	150	150	220	228	135
Оранжевая	75	135	56	114	120	97	88	115	106	112
Желтая	56	80	89	78	65	45	75	125	136	115
Бурая	14	45	57	53	60	53	58	45	41	72

Таблица 13. Окраска зерен овса, шт.

Вариант	Задание									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Белые	236	215	293	278	275	250	250	200	326	220
Желтые	96	75	106	115	112	120	136	115	196	178
Коричневые	150	100	120	112	75	96	54	47	65	75
Серые	52	56	89	68	80	75	65	89	78	35