

## ВВЕДЕНИЕ

Проектирование сложных объектов техники и технологических процессов в настоящее время не может быть успешным без проведения различного рода экспериментов. Причиной этого является то, что технологические процессы представляют собой комплекс взаимосвязанных и протекающих в сложной взаимозависимости явлений, описание которых затрудняется необходимостью установления закономерностей протекания элементарных процессов и их взаимодействия и взаимовлияния друг на друга.

Эти процессы относят к классу стохастических, в которых изменение определяющих величин происходит беспорядочно и часто дискретно. При этом значение выходной величины не находится в однозначном соответствии с входной.

Одним из методов, хорошо зарекомендовавшим себя в решении такого рода задач, является метод многофакторного эксперимента, в основе которого лежит способ построения зависимости влияния определяющих факторов на параметр оптимизации.

Статистические модели, формируемые в результате обработки экспериментальных данных, полученных, например, на конкретном технологическом оборудовании, являются наиболее экономичными. Кроме того, что более важно, они вполне достоверно отражают реальный технологический процесс в производственных условиях.

Важнейшей задачей методов обработки полученной в ходе эксперимента информации является задача построения математической модели изучаемого явления, процесса, объекта. Ее можно использовать при анализе процессов и при проектировании объектов. Другой задачей обработки полученной в ходе эксперимента информации является задача оптимизации, т. е. нахождение такой комбинации влияющих независимых переменных, при которой выбранный показатель оптимальности принимает экстремальное (минимальное или максимальное) значение.

Многофакторный эксперимент включает в себя последовательные этапы математического моделирования [1].

1. Выбор параметра (или параметров) оптимизации и влияющих факторов.

2. Выбор основного уровня и интервала варьирования по каждому фактору.

3. Проверка воспроизводимости результатов эксперимента.
4. Собственно построение математической модели с вычислением коэффициентов уравнения регрессии.
5. Проверка адекватности уравнения регрессии.
6. Инженерная интерпретация уравнения регрессии.

**Цель работы.** Получить практические навыки в проведении исследования по модели многофакторного эксперимента с использованием математической теории планирования эксперимента, а также статистической обработки и анализа полученных данных.

**Оборудование, приборы и приспособления.** Исходные данные для составления матрицы эксперимента, калькулятор, компьютер.

## 1. ПОНЯТИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Важной задачей исследований является формализация их результатов с целью сокращения сроков исследования и создание математического описания изучаемого процесса путем построения математической модели объекта.

**Математическая модель** – это совокупность математических зависимостей, описывающих функционирование системы [2].

Математическая модель строится по результатам теоретических и экспериментальных исследований. Многие процессы крайне сложны для теоретического описания, поэтому для построения математической модели проводится специально спланированный эксперимент.

**Эксперимент** – это совокупность опытов, позволяющих установить влияние воздействующих факторов  $x_i$  на выходные параметры объекта исследования  $y_i$  (рис. 1).

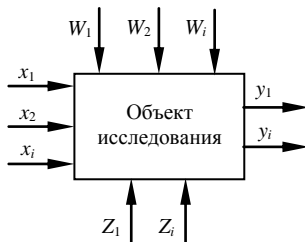


Рис. 1. Схема эксперимента

**Фактор** – это измеряемая переменная величина, принимающая в некоторый момент времени определенное значение (температура, давление, частота вращения, амплитуда колебаний и т. п.).

Факторы могут быть постоянными и переменными. Постоянными называются факторы, не меняющие своего значения в пределах всего эксперимента ( $W_i, Z_i$ ).

Переменным (варьируемым) называется фактор ( $x_i$ ), значение которого меняется от опыта к опыту. Каждое значение, принимаемое фактором в опыте, называется уровнем переменного фактора. Диапазон изменения (варьирования) переменных факторов ограничен верхним и нижним уровнями.

**Выходным параметром** называется результат эксперимента ( $y_i$ ), который является случайной величиной, так как всегда в большей или меньшей степени содержит ошибки, обусловленные погрешностью приборов, измерений, расчетов и т. п.

Эксперимент состоит из **опытов** – части эксперимента, выполненной при определенных значениях одного или нескольких факторов. С целью снижения вероятности ошибки при анализе результатов эксперимента необходимо дублирование каждого опыта.

Любое экспериментальное исследование условно можно разделить на три этапа: подготовка эксперимента, планирование и постановка опытов, обработка результатов измерений и их анализ.

Особенность многофакторного эксперимента состоит в том, что при переходе от опыта к опыту изменяют уровни не одного, а всех или почти всех факторов одновременно по определенному плану.

Достоинством многофакторных экспериментов является их более высокая эффективность. При одинаковом количестве поставленных опытов они обеспечивают более достоверное математическое описание объекта или лучшее приближение к точке оптимума.

Под математической моделью исследуемого объекта понимается функция выходной величины вида

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_i), \quad (1)$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_i$  – варьируемые факторы.

Выбор математической модели – это значит выбрать вид этой функции, записать ее уравнение и отыскать численные значения его коэффициентов на основании экспериментальных данных.

Зависимость выходной величины (отклика)  $y$  от варьируемых факторов  $x_1, x_2, \dots, x_i$ , полученная с помощью регрессионного анализа, называется регрессионной.

Учитывая, что вокруг любой точки  $x_i$  на любом графике зависимости  $y = f(x_i)$  всегда существует такая область, которая описывается ли-

нейным уравнением, на первой стадии экспериментов при недостатке данных целесообразно остановить свой выбор на линейной модели (1-го порядка)

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_ix_i. \quad (2)$$

Если в результате проверки адекватности линейного уравнения регрессии экспериментальным данным получен отрицательный результат, следует применять модели 2-го порядка:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3. \quad (3)$$

Для получения линейного уравнения регрессии применяются ортогональные планы проведения эксперимента (полный факторный, дробный факторный).

Полный факторный план (ПФП) – это один из методов планирования многофакторных экспериментов, когда каждый из переменных факторов изменяется только на двух уровнях (верхнем и нижнем). Таким образом, диапазон варьирования каждого входного фактора будет следующим:

$$x_{i \min} \leq x_i \leq x_{i \max}, \quad (4)$$

где  $x_{i \min}$  – нижний уровень варьирования  $i$ -го переменного фактора, который в кодированном виде обозначается как  $(-)$  или  $(-1)$ ;

$x_{i \max}$  – верхний уровень варьирования  $i$ -го переменного фактора, который в кодированном виде обозначается как  $(+)$  или  $(+1)$ .

Следовательно, уровень фактора – это физическое значение фактора, т. е. пределы, в которых он изменяется. Закодировать фактор – значит присвоить ему значение  $(+1)$  или  $(-1)$  в зависимости от его уровня, верхний уровень  $(+1)$ , нижний соответственно  $(-1)$ .

В процессе проведения эксперимента согласно ПФП реализуются все возможные сочетания уровней варьирования переменных факторов. Следовательно, число опытов, необходимых для ПФП, составит

$$N = p \cdot k, \quad (5)$$

где  $p$  – число уровней каждого фактора;

$k$  – число переменных факторов.

При планировании составляется матрица эксперимента – таблица, в которой представлены кодированные значения уровней факторов, записанные в соответствии с принципами построения матрицы эксперимента. При построении матрицы эксперимента следует придерживаться следующих принципов:

- каждый опыт не должен быть похож на предыдущий;
- сумма (+1) и (-1) по столбцам должна быть равной нулю.

## 2. ПЛАНИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТА

Планирование эксперимента и анализ его результатов следует осуществлять в приведенном ниже порядке.

1. Установить факторы, влияющие на исследуемый объект.
2. Обосновать уровни варьирования переменных факторов.
3. Выбрать выходной(ые) параметр(ы) процесса.
4. Построить методическую сетку проведения эксперимента (табл. 1).

Таблица 1. Пример методической сетки эксперимента

Наименование фактора и его обозначение	Уровни факторов	
	Верхний (+)	Нижний (-)
$x_1$ – напряжение сварочной цепи, В	20	16
$x_2$ – скорость подачи проволоки, м/мин	4,5	1,5
$x_3$ – скорость наплавки, м/ч	24,5	13,8

5. Построить матрицу планируемого эксперимента и провести кодирование факторов (табл. 2).

Таблица 2. Пример матрицы планирования эксперимента

№ опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$
1	-1 ( $x_{1-1}$ )	-1 ( $x_{2-1}$ )	-1 ( $x_{3-1}$ )
2	+1 ( $x_{1-2}$ )	-1 ( $x_{2-2}$ )	-1 ( $x_{3-2}$ )
3	-1	+1	-1
4	+1	+1	-1
5	-1	-1	+1
6	+1	-1	+1
7	-1	+1	+1
8	+1	+1	+1

Примечание.  $x_{1-1}, x_{2-1}, x_{3-1} \dots x_{3-3}$  – буквенные обозначения ячейки матрицы.

6. Провести эксперимент и свести первичные результаты опытов во вспомогательную таблицу (табл. 3).

Таблица 3. Вспомогательная таблица

№ опыта	$y'$	$y''$	$y'''$	$\bar{y}$	$y' - \bar{y}$	$y'' - \bar{y}$	$y''' - \bar{y}$	$(y' - \bar{y})^2$	$(y'' - \bar{y})^2$	$(y''' - \bar{y})^2$	$y$	$y - \bar{y}$	$(y - \bar{y})^2$
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													

Примечания:  $y', y'', y'''$  – значения параметров замеров при проведении опытов;  
 $\bar{y}$  – среднее значение замеров каждого опыта.

7. Статистически обработать полученные экспериментальные данные.

8. Вывести уравнение регрессии и проверить его адекватность.

9. Проанализировать результаты эксперимента:

- выявить степень влияния выбранных переменных факторов на выходную(ые) величину(ы);

- получить уравнение регрессии в натуральном обозначении факторов (виде);

- построить графики зависимостей выходного(ых) фактора(ов) от переменных величин.

### 3. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

В основе обработки результатов экспериментов с количественными факторами лежит регрессионный анализ, который включает в себя метод отыскания параметров математической модели и статистическую обработку экспериментальных данных.

Математическая статистика – это наука о математических методах обработки, систематизации и использовании результатов наблюдений для научных и практических выводов.

Множество значений результатов экспериментов (случайных величин), полученных в продублированных опытах, представляет собой статистическую совокупность.

Статистическая совокупность, содержащая всевозможные значения случайной величины, называется генеральной совокупностью.

Выборочной статистической совокупностью (или выборкой) называется совокупность, в которой содержится только некоторая часть элементов генеральной совокупности. По результатам экспериментов практически всегда сталкиваются с выборочной, а не с генеральной совокупностью.

При обработке результатов эксперимента (выборки) необходимо выполнить следующие операции.

1. Произвести расчет коэффициентов регрессии по следующим формулам:

$$b_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8}{N}, \quad (6)$$

$$b_1 = \frac{x_{1-1} \cdot \bar{y}_1 + x_{1-2} \cdot \bar{y}_2 + x_{1-3} \cdot \bar{y}_3 + \dots + x_{1-7} \cdot \bar{y}_7 + x_{1-8} \cdot \bar{y}_8}{N}, \quad (7)$$

$$b_2 = \frac{x_{2-1} \cdot \bar{y}_1 + x_{2-2} \cdot \bar{y}_2 + x_{2-3} \cdot \bar{y}_3 + \dots + x_{2-7} \cdot \bar{y}_7 + x_{2-8} \cdot \bar{y}_8}{N}, \quad (8)$$

$$b_3 = \frac{x_{3-1} \cdot \bar{y}_1 + x_{3-2} \cdot \bar{y}_2 + x_{3-3} \cdot \bar{y}_3 + \dots + x_{3-7} \cdot \bar{y}_7 + x_{3-8} \cdot \bar{y}_8}{N}, \quad (9)$$

где  $x_{1-1}; x_{1-2}; x_{1-n}$  – кодированное значение (+1; -1) фактора  $x_1$  по номеру опыта;

$x_{2-1}; x_{2-2}; x_{2-n}$  – кодированное значение (+1; -1) фактора  $x_2$  по номеру опыта;

$x_{3-1}; x_{3-2}; x_{3-n}$  – кодированное значение (+1; -1) фактора  $x_3$  по номеру опыта;

$N$  – число опытов в матрице.

2. С целью упрощения уравнения регрессии проверить значимость коэффициентов. Для этого абсолютное значение коэффициентов регрессии необходимо сравнить с абсолютным значением доверительного интервала, вычисляемого по формуле

$$\Delta b = t \cdot SB, \quad (10)$$

где  $t$  – табличное значение критерия Стьюдента при доверительном интервале  $0,95t = 2,12$ ;

$SB$  – квадратичная ошибка коэффициента.

Если  $|b_0, b_1, b_2, b_3| > \Delta b$ , коэффициент значимый.  
 Если  $|b_0, b_1, b_2, b_3| < \Delta b$ , коэффициент незначимый.

Квадратичная ошибка коэффициента рассчитывается по формуле

$$SB = \frac{S_y}{\sqrt{N}}, \quad (11)$$

где  $S_y$  – дисперсия ошибки опыта.

Дисперсия ошибки опыта определяется по формуле

$$S_y = \frac{(y' \cdot \bar{y}_1)^2 + (y'' \cdot \bar{y}_2)^2 + (y''' \cdot \bar{y}_3)^2 + \dots + (y' \cdot \bar{y}_n)^2 + (y'' \cdot \bar{y}_n)^2 + (y''' \cdot \bar{y}_n)^2}{N(k-1)}, \quad (12)$$

где  $k$  – число замеров в каждом опыте.

Незначимые коэффициенты регрессии из уравнения исключаются.

3. Произвести расчет уравнения регрессии первого порядка для каждого опыта, полученные данные внести во вспомогательную таблицу.

Значения факторов  $x_1, x_2, x_3$  подставить в уравнения регрессии первого порядка в кодированном виде в соответствии с матрицей планирования эксперимента (табл. 2):

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3. \quad (13)$$

4. Произвести проверку соответствия результатов эксперимента полученному уравнению регрессии по критерию Фишера:

$$F = \frac{S_{ад}^2}{S_y^2}, \quad (14)$$

где  $S_{ад}$  – дисперсия адекватности.

Дисперсия адекватности определяется по формуле

$$S_{ад} = \sqrt{\frac{(y_1 \cdot \bar{y}_1)^2 + (y_2 \cdot \bar{y}_2)^2 + (y_3 \cdot \bar{y}_3)^2 + \dots + (y_n \cdot \bar{y}_n)^2}{N - n - 1}}, \quad (15)$$

где  $n$  – уточненное количество значимых коэффициентов уравнения регрессии.

Критическое значение критерия Фишера для уровня значимости  $p = 0,05$  должно быть больше 3. В ином случае в уравнении регрессии учтены не все значимые факторы.

#### **4. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА**

1. По заданию преподавателя кратко изложить основные понятия и сущность проведения многофакторного эксперимента.

2. Выполнить планирование эксперимента и отобразить в отчете табл. 1, 2, 3.

3. Заполнить табл. 1 согласно выданному варианту.

4. Выполнить обработку результатов эксперимента, вывести уравнение регрессии первого порядка и проверить его на степень адекватности по критерию Фишера.

5. Построить график зависимости выходного параметра от переменных величин (факторов).

6. Проанализировать полученные данные и сделать заключение о степени влияния выбранных факторов на конечный результат исследования.

#### **КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Что такое эксперимент и фактор?

2. В чем заключаются сущность и достоинства многофакторного эксперимента?

3. Что такое математическая модель исследуемого объекта?

4. Как определить количество опытов, необходимых для проведения многофакторного эксперимента?

5. Что такое уровень фактора и матрица эксперимента?

6. По каким принципам составляется матрица эксперимента?

7. Как производится кодировка переменных факторов?

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Рогов, В. А. Методика и практика технических экспериментов: учеб. пособие / В. А. Рогов, Г. Г. Позняк. – М.: Академия, 2005. – 283 с.
2. Хайлис, Г. А. Исследования сельскохозяйственной техники и обработка опытных данных / Г. А. Хайлис, М. М. Ковалев. – М.: Колос, 1994. – 164 с.
3. Листопад, И. А. Планирование эксперимента в исследованиях по механизации сельскохозяйственного производства / И. А. Листопад. – М.: Агропромиздат, 1988. – 88 с.
4. Спиридонов, А. А. Планирование эксперимента при исследовании технологических процессов / А. А. Спиридонов. – М.: Машиностроение, 1981. – 184 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Предлагаемые варианты методической сетки эксперимента

Вариант	Наименование фактора	Обозначение фактора	Верхний уровень фактора	Нижний уровень фактора
1	Напряжение сварочной цепи, В	$x_1$	20	16
	Скорость подачи проволоки, м/мин	$x_2$	4,5	1,5
	Скорость наплавки, м/ч	$x_3$	24,5	13,8
2	Напряжение сварочной цепи, В	$x_1$	18	13
	Скорость подачи проволоки, м/мин	$x_2$	3	0,5
	Скорость наплавки, м/ч	$x_3$	20,6	9,6
3	Напряжение сварочной цепи, В	$x_1$	15	9
	Скорость подачи проволоки, м/мин	$x_2$	5,8	1,3
	Скорость наплавки, м/ч	$x_3$	27,1	15,4
4	Напряжение сварочной цепи, В	$x_1$	17	12
	Скорость подачи проволоки, м/мин	$x_2$	3,7	0,8
	Скорость наплавки, м/ч	$x_3$	22,9	12,5
5	Напряжение сварочной цепи, В	$x_1$	19	16
	Скорость подачи проволоки, м/мин	$x_2$	4,8	1,4
	Скорость наплавки, м/ч	$x_3$	25,6	16,3
6	Напряжение сварочной цепи, В	$x_1$	16	11
	Скорость подачи проволоки, м/мин	$x_2$	4,2	1,2
	Скорость наплавки, м/ч	$x_3$	19,8	9,7
7	Напряжение сварочной цепи, В	$x_1$	21	17
	Скорость подачи проволоки, м/мин	$x_2$	5,3	1,9
	Скорость наплавки, м/ч	$x_3$	26,8	16,8
8	Напряжение сварочной цепи, В	$x_1$	23	18
	Скорость подачи проволоки, м/мин	$x_2$	5	2
	Скорость наплавки, м/ч	$x_3$	25,4	16,4
9	Напряжение сварочной цепи, В	$x_1$	22	17
	Скорость подачи проволоки, м/мин	$x_2$	4,9	1,8
	Скорость наплавки, м/ч	$x_3$	29,5	18,3

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Понятие эксперимента.....	4
2. Планирование и анализ эксперимента .....	7
3. Обработка результатов эксперимента .....	8
4. Содержание отчета .....	11
Контрольные вопросы .....	11
Библиографический список .....	12
Приложение.....	13