
9. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ ПЛАНОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

9.1. ПОСТРОЕНИЕ ПЛАНОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Очень часто невозможно описать процесс математической моделью первого порядка ввиду ее неадекватности. В частности, методы планирования эксперимента, основанные на локально-линейном приближении поверхности отклика с помощью планов первого порядка, не дают возможности детально изучить область оптимизации. Значительная кривизна поверхности отклика, как правило, не позволяет описать ее линейным уравнением даже в весьма узкой области факторного пространства.

В таких случаях необходимо описать исследуемый процесс с помощью полиномов более высоких порядков, например второго, имеющего следующий вид:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i \neq j}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_i x_i^2 \dots \quad (9.1)$$

Для трех факторов уравнение имеет вид

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2. \quad (9.2)$$

Для математического описания процессов с помощью уравнения второго порядка необходимо применять такие планы эксперимента, в которых каждый фактор можно варьировать не менее чем на трех уровнях и выполнять условия получения отдельных оценок всех ко-

коэффициентов уравнения по результатам запланированного эксперимента. Следовательно, число опытов должно быть не менее чем число коэффициентов, равное числу сочетаний из $k + 2$ по два, так как

$$N \geq C_{k+2}^2 = \frac{(k+2)(k+1)}{2}. \quad (9.3)$$

Простейшим решением данной задачи является использование ПФЭ типа 3^k . Но это решение будет далеко не лучшим, особенно при $k > 3$, так как для реализации такого экспериментального плана требуется большое число опытов.

Для сокращения числа опытов для планов второго порядка предложено использовать в качестве ядра ортогональные планы первого порядка (ПФЭ 2^k илиДФЭ 2^{k-p}), а затем достраивать их до планов второго порядка. Такие планы получили название **композиционных**. Они соответствуют идее шагового поиска при нахождении оптимума функции. (Действительно, попав в область экстремума, экспериментатор реализует план первого порядка, проверяя гипотезу линейной аппроксимации. Убедившись в несостоятельности этой гипотезы, он делает следующий шаг – достраивает план первого порядка до плана второго порядка, реализует его и проверяет гипотезу об адекватности уравнения второго порядка.)

Рассмотрим принцип построения композиционного плана второго порядка.

В зависимости от того, какие точки добавляют к плану первого порядка, различают **центральные и нецентральные композиционные планы второго порядка**.

Центральное композиционное планирование используют, когда точки оптимума находятся внутри гиперкуба, образованного планом первого порядка. План такого вида получается добавлением к ядру плана точки в центре плана (центральная точка) с координатами $(0, 0..0)$

и так называемых «звездных» точек, расположенных на всех k осях – факторах по обе стороны от центра плана (базовой точки) на расстоянии α . Расстояние от центра плана до «звездной» точки (α) называют «звездным плечом» (рис. 9.1).

Общее число экспериментальных точек (опытов) определяется по формуле

$$N = N_{\text{я}} + N_{\alpha} + N_0, \quad (9.4)$$

где $N_{\text{я}}$ – число точек ядра (факторного планирования $N_{\text{я}} = 2^k$ или $N_{\text{я}} = 2^{k-p}$); N_{α} – число «звездных точек» ($N_{\alpha} = 2k$, k – число факторов); N_0 – число точек (опытов) в центре плана.

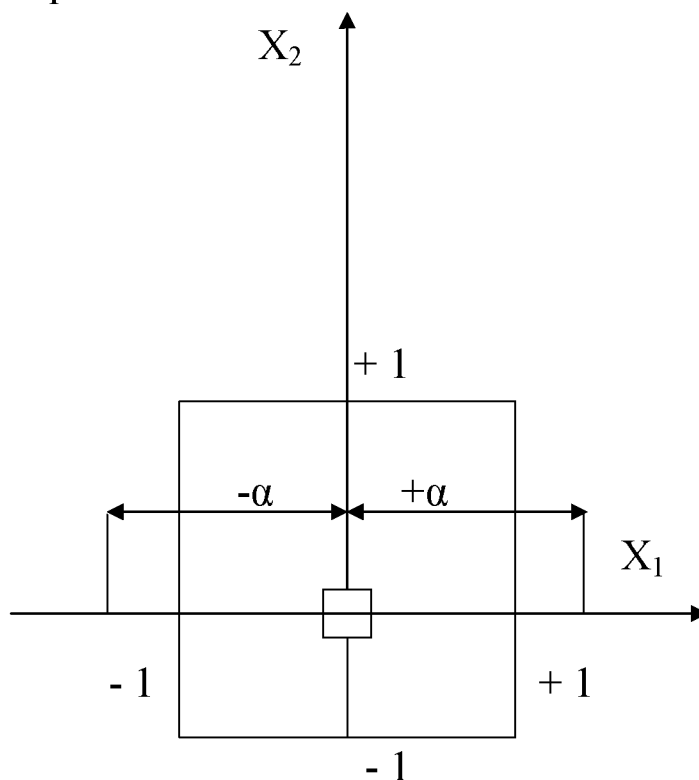


Рис. 9.1. Геометрическая интерпретация композиционных планов второго порядка

Такое планирование требует значительно меньшего числа опытов, чем ПФЭ. Так, например, при $k = 4$ число опытов при ПФЭ $N = 81$, тогда как для композиционного планирования $N = 25$.

В центральном композиционном плане варьирование независимых переменных осуществляется на пяти уровнях: $-\alpha$; -1 ; 0 ; $+1$; $+\alpha$.

Значение «звездного плеча» α выбирается из условия выполнения критерия оптимальности плана. Из этих же соображений выбирают число центральных точек N_0 .

Центральные композиционные планы в зависимости от критерия оптимальности бывают двух видов:

1) **ортогональные**, для которых критерием оптимальности является ортогональность всех вектор – столбцов матрицы планирования, что обеспечивает независимость оценок коэффициентов уравнения регрессии (в том числе и при квадратичных членах);

2) **ротатабельные**, для которых критерием оптимальности служит одинаковая точность прогнозирования функции отклика по уравнению регрессии в любом направлении исследуемой области факторного пространства на равном расстоянии от центра плана, обеспечивающие равномерное распределение информации по гиперсфере, центр которой совпадает с центром плана (базовой точкой).

Нецентральные композиционные планы находят применение в том случае, если область оптимизации находится вне гиперкуба, построенного ядром плана первого порядка.

Некомпозиционные планы второго порядка используют при наличии достаточной информации о кривизне поверхности отклика, позволяющей реализовать план второго порядка непосредственно на первом этапе исследования.

В настоящее время предложено большое число планов эксперимента для описания процессов с помощью уравнений второго порядка. Выбор плана второго порядка целесообразно обосновывать для каждой конкретной задачи, учитывая цель, условия проведения эксперимента, критерии оптимальности.

9.2. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ КОМПОЗИЦИОННЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ (ЦКОП) ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ортогональные планы являются наиболее простыми из планов второго порядка, так как позволяют упростить расчеты при оценке коэффициентов уравнения и оценке их ошибок. Один из существенных их недостатков состоит в том, что они не являются ротатабельными. Ортогональное планирование связано с преобразованием модели (9.1) к виду

$$y = b'_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i \neq j} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} (x'_i)^2, \quad (9.5)$$

$$b'_0 = b_0 + \lambda_2 \sum_{i=1}^k b_{ii}, \quad (9.6)$$

$$(x'_i)^2 = x_i^2 - \lambda_2, \quad (9.7)$$

где λ_2 – момент второго порядка, выражаемый формулой

$$\lambda_2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_{iu}^2}{N}, \quad (9.8)$$

где N – общее число опытов.

Наиболее распространены симметричные ЦКОП, содержащие всего один опыт в центре ($N_0 = 1$). Характеристики таких планов приведены в табл. 9.1.

Характеристики некоторых симметричных ЦКОП

Параметры	Число факторов k			
	2	3	4	5
Ядро плана	2^2	2^3	2^4	Полуреплика 2^{5-1} $1 \equiv x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$
Число опытов в ядре ($N_{я}$)	4	8	16	16
Звездное плечо (α)	1,000	1,215	1,414	1,547
Число звездных точек ($2 \cdot k$)	4	6	8	10
Число опытов в центре (N_0)	1	1	1	1
Общее число опытов (N)	9	15	25	27
a_1	0,11111	0,06667	0,04	0,03704
a_2	0,16667	0,9141	0,05	0,04811
a_3	0,25	0,125	0,0625	0,0625
a_4	0,5	0,23041	0,125	0,0722
a_5	0,33333	0,25820	0,2	0,19245
a_6	0,40825	0,30234	0,22361	0,21934
a_7	0,5	0,35355	0,25	0,25
a_8	0,70711	0,48001	0,35355	0,2687

Примечание: общее число опытов N принято без учета числа повторных опытов для расчета дисперсии опыта (воспроизводимости) $S_{(y)}^2$, $S_{восп}^2$ (см. п. 6.3).

Коэффициенты модели (9.5), их дисперсии и среднеквадратические отклонения рассчитываются по следующим формулам (коэффициенты $a_1 \dots a_8$ – см. табл. 9.1).

$$\left. \begin{aligned}
 b'_0 &= a_1 \sum_{u=1}^N y_u; & b_i &= a_2 \sum_{u=1}^N x_{iu} y_u \\
 b_{ij} &= a_3 \sum_{u=1}^N (x_i x_j)_u y_u; & b_{ii} &= a_4 \sum_{u=1}^N (x'_i)_u^2 y_u \\
 S_{b'_0}^2 &= a_1 \cdot S_y^2; & S_{b'_i} &= a_5 \cdot S_y; & S_{b_i}^2 &= a_2 \cdot S_y^2 \\
 S_{b_i} &= a_6 \cdot S_y; & S_{b_{ij}}^2 &= a_3 \cdot S_y^2; & S_{b_{ij}} &= a_7 \cdot S_y \\
 S_{b_{ii}}^2 &= a_4 \cdot S_y^2; & S_{b_{ii}} &= a_8 \cdot S_y
 \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

Коэффициент b_0 определяется по формуле

$$b_0 = b'_0 - \frac{a_1}{a_2} \sum_{i=1}^k b_{ii}, \quad (9.10)$$

а его дисперсия – по формуле

$$S_{b_0}^2 = S_{b'_0}^2 + \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 k S_{b_{ii}}^2. \quad (9.11)$$

Для ЦКОП выполняется условие ортогональности, т. е. независимости получения оценок управления регрессии и их дисперсий, что позволяет сократить объем вычислительной работы. Кроме то-

го, в случае статистической незначимости коэффициента регрессии он может быть исключен без пересчета остальных коэффициентов.

9.3. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ КОМПОЗИЦИОННЫЕ РОТАТАБЕЛЬНЫЕ УНИФОРМ-ПЛАНЫ (ЦКРУП) ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ротатабельные планы позволяют получить более точную, чем ортогональные планы, модель, но при этом они более трудоемки, чем первые. В зависимости от числа опытов в центре план эксперимента можно сделать почти ортогональным или равномерным. **Униформность плана** – это независимость дисперсии параметра оптимизации от расстояния, измеряемого до центра области планирования эксперимента.

Ротатабельный план строится аналогично ортогональному. Параметры ЦКРУП приведены в табл. 9.2.

Таблица 9.2

Параметры ЦКРУП

Число факторов k	Число опытов в ядре 2^k	Число «звездных точек» $2k$	Число опытов в центре плана N_0	Звездное плечо α	Общее число опытов N
2	4	4	5	1,414	13
3	8	6	6	1,682	20
4	16	8	7	2,0	31
5*	16	10	6	2,0	32

Примечание: * – для получения полуреплики 2^{5-1} .

Коэффициенты модели (9.1) рассчитываются по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= C_1 \sum_{u=1}^N y_u - C_2 \sum_{i=1}^K \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 y_u \\ b_i &= C_3 \sum_{u=1}^N x_{iu} y_u; \quad b_{ij} = C_4 \sum_{u=1}^N (x_i x_j)_u y_u \\ b_{ii} &= C_5 \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 y_u + C_6 \sum_{i=1}^K \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 y_u - C_2 \sum_{u=1}^N y_u \end{aligned} \right\}, \quad (9.12)$$

где значения коэффициентов $C_1 \dots C_6$ приведены в табл. 9.3.

Таблица 9.3

Вспомогательные константы для ротатбельных планов

C_i	Число факторов k			
	2	3	4	5
C_1	0,2	0,16635	0,14287	0,15909
C_2	0,1	0,0568	0,03571	0,03409
C_3	0,125	0,07322	0,04167	0,04167
C_4	0,25	0,125	0,0625	0,0625
C_5	0,125	0,0625	0,03125	0,03125
C_6	0,01875	0,00689	0,00372	0,00281
C_7	0,44721	0,40786	0,37798	0,39886
C_8	0,35355	0,27059	0,20413	0,20413
C_9	0,5	0,35355	0,25	0,25
C_{10}	0,37914	0,26342	0,18702	0,18456

Дисперсии в определении соответствующих коэффициентов регрессии рассчитываются по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} S_{b_0}^2 &= C_1 S_y^2; & S_{b_0} &= C_7 S_y; & S_{b_i}^2 &= C_3 S_y^2 \\ S_{b_i} &= C_8 S_y; & S_{b_{ij}}^2 &= C_4 S_y^2; & S_{b_{ij}} &= C_9 S_y \\ S_{b_{ii}}^2 &= (C_5 + C_6) S_y^2; & S_{b_{ii}} &= C_{10} S_y \end{aligned} \right\}, \quad (9.13)$$

где значения коэффициентов $C_1 \dots C_{10}$ приведены в табл. 9.3.

При использовании ротатабельных планов доверительные интервалы коэффициентов регрессии рассчитываются по формуле

$$\Delta b_i = t_{\alpha; f_1} S_{b_i}, \quad (9.14)$$

где t – критерий Стьюдента для выбранного уровня значимости α и числа степеней свободы f_1 при определении дисперсии опыта S_y^2 ; S_{b_i} – среднеквадратическая ошибка в определении коэффициента регрессии.

9.4. ЭТАПЫ ПРОВЕДЕНИЯ ПЛАНИРУЕМОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим основные этапы проведения планируемого эксперимента второго порядка на примере проведения ЦКРУП второго порядка для трех влияющих факторов.

9.4.1. Выбор параметра оптимизации, наиболее существенных факторов, интервалов и уровней варьирования

Данный этап выполняется в соответствии с рекомендациями, изложенными ранее (см. гл. 6).

Обозначим исследуемый параметр оптимизации y , три влияющих фактора $A(X_1)$, $B(X_2)$, $C(X_3)$. В соответствии с рекомендациями, изложенными в п. 9.2 для ЦКРУП второго порядка, звездное плечо $\alpha = 1,682$. Для принятых основного уровня и интервалов варьирования факторов A , B , C составляется таблица условий эксперимента (табл. 9.4).

Таблица 9.4

Условия эксперимента

Уровни факторов	Натурные значения		
	A	B	C
Основной уровень (0)	A0	B0	C0
Интервал варьирования	A1	B1	C1
Верхний уровень (+1)	A2	B2	C2
Нижний уровень (-1)	A3	B3	C3
Звездные точки:			
(+1, 682)	A4	B4	C4
(-1, 682)	A5	B5	C5

Уровни варьирования факторов из табл. 9.4 рассчитываются по формулам

$$A2 = A0 + A1; \quad (9.15)$$

$$A3 = A0 - A1; \quad (9.16)$$

$$A4 = A0 + 1,682 \cdot A1; \quad A5 = A0 - 1,682 \cdot A1 \quad (9.17)$$

(аналогично для факторов B , C).

Графическая интерпретация уровней варьирования на плоскости может быть представлена для двух факторов А и В (рис. 9.2).

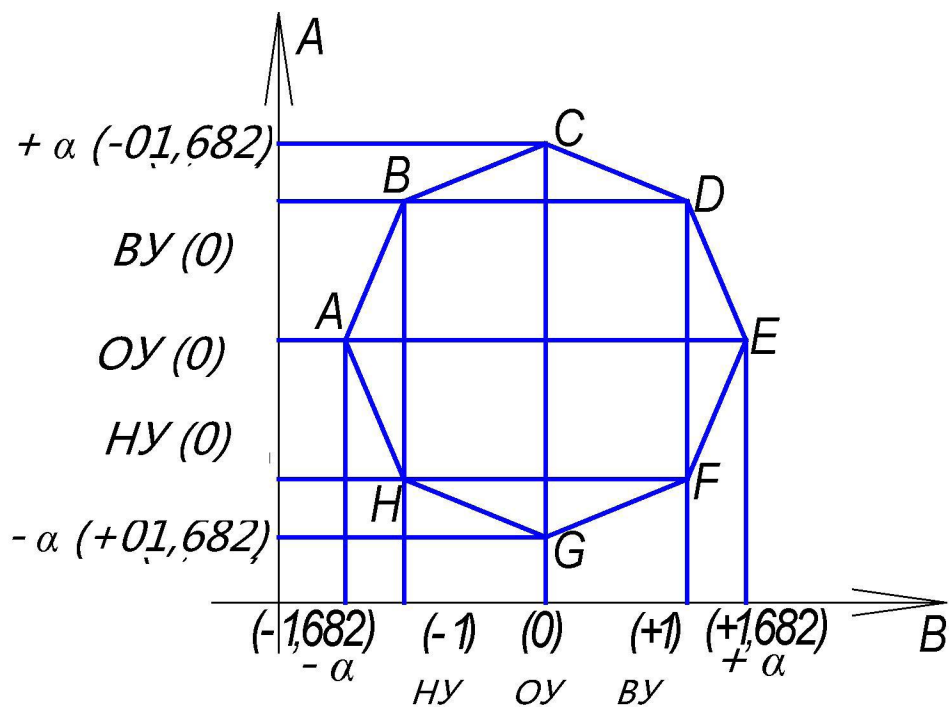


Рис. 9.2. Графическая интерпретация исходных условий эксперимента по факторам А и В: т.т. В, Д, F, Н — «ядро» плана; т.т. А, С, Е, G — «звездные точки»

9.4.2. Составление плана эксперимента

Построение матрицы ЦКРУП второго порядка производится в соответствии с рекомендациями, изложенными в п. 9.2. Матрица планирования представлена в табл. 9.5.

Матрица включает 8 опытов полного факторного эксперимента (опыты 1–8), 6 опытов в «звездных точках» (опыты 9–14) и 6 опытов в центре плана (опыты 15–20). Переход от натуральных значений факторов к кодовым и наоборот производится по формуле (1.11).

Таблица 9.5

Матрица ЦУРУП второго порядка

№ опыта	Уровни факторов															Примечание			
	В кодвом масштабе															В натуральном масштабе		У _{эсп}	У _{расч}
	X ₀	X ₁	X ₂	X ₃	X ₁ X ₂	X ₁ X ₃	X ₂ X ₃	X ₁ ²	X ₂ ²	X ₃ ²	A	B	C						
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15				
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	A2	B2	C2			Полный факторный эксперимент 2 ³			
2	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+	+	+	A3	B2	C2						
3	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+	+	+	A2	B3	C2						
4	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+	+	+	A3	B3	C2						
5	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+	+	+	A2	B2	C3						
6	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+	+	+	A3	B2	C3						
7	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+	+	+	A2	B3	C3						
8	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+	+	+	A3	B3	C3						
9	+1	+1,682	0	0	0	0	0	+2,83	0	0	A4	B0	C0			«Звездные точки»			
10	+1	-1,682	0	0	0	0	0	+2,83	0	0	A5	B0	C0						
11	+1	0	+1,682	0	0	0	0	0	+2,83	0	A0	B4	C0						
12	+1	0	-1,682	0	0	0	0	0	+2,83	0	A0	B5	C0						
13	+1	0	0	+1,682	0	0	0	0	0	+2,83	A0	B0	C4						
14	+1	0	0	-1,682	0	0	0	0	0	+2,83	A0	B0	C5						
15	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	A0	B0	C0			Опыты в центре плана			
16	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	A0	B0	C0						
17	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	A0	B0	C0						
18	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	A0	B0	C0						
19	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	A0	B0	C0						
20	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	A0	B0	C0						

9.4.3. Реализация плана эксперимента

Эксперименты проводятся в соответствии с условиями опытов, представленными в столбцах 11, 12, 13 матрицы (табл. 9.5), с помощью рандомизации опытов во времени (см. п. 6.3.3).

Каждый опыт проводится три раза в случайной последовательности. Средние значения параметров оптимизации по каждому опыту записываются в столбец 14 матрицы (табл. 9.5).

9.4.4. Расчет коэффициентов регрессии и оценка их статистической значимости

Расчет коэффициентов регрессии модели (9.1) производится по формулам (9.12).

Определение дисперсии опыта (воспроизводимости опытов) производится по результатам шести опытов (опыты 15–20 в табл. 9.5) на основном уровне (см. п. 6.3).

Расчет доверительных интервалов для коэффициентов регрессии производится по формуле (9.14).

Проверка статистической значимости коэффициентов проводится сравнением абсолютной величины коэффициентов регрессии $b_0, b_1, b_2, b_3, b_{12}, b_{13}, b_{23}, b_{11}, b_{22}, b_{33}$ с соответствующими доверительными интервалами $\Delta b_i, \Delta b_{ij}, \Delta b_{ii}$. Коэффициенты признаются статистически значимыми в случае превышения абсолютной величины коэффициента значения соответствующего доверительного интервала. Статистически незначимые коэффициенты в модель не включаются.

9.4.5. Проверка адекватности модели по F-критерию

Модель (9.1), полученная с учетом статистически значимых коэффициентов, проверяется на адекватность по F-критерию по формуле

$$F_{f_2, f_1}^{расч} = \frac{S_{ад}^2}{S_y^2}, \quad (9.18)$$

где S_y^2 – дисперсия опыта, найденная ранее (п. 9.4.4); $S_{ад}^2$ – дисперсия адекватности, определяемая по формуле

$$S_{ад}^2 = \frac{SS_{ост.} - SS_{\bar{y}}}{f_2}, \quad (9.19)$$

где $SS_{ост.}$ – остаточная сумма квадратов дисперсии неадекватности; $SS_{\bar{y}}$ – сумма квадратов дисперсии опытов (см. п. 9.4.4); f_2 – число степеней свободы при определении $S_{неад}^2$.

$$f_2 = N - k' - f_1, \quad (9.20)$$

где $N = 20$ – общее число опытов; k' – число статистически значимых коэффициентов полученной модели; $f_1 = 5$ – число степеней свободы, использованное при оценке дисперсии опыта (п. 9.4.4).

Значение $SS_{ост.}$ определяется из табл. 9.6.

Таблица 9.6

№ опыта	Y_u эксп.	Y_u расч.	$\Delta y = y_{u\dots\text{эксп}} - y_{u\dots\text{расч.}} $	Δy^2
1				
2				
.				
20				
				$SS_{ост}$

В табл. 9.6 $y_{\text{эксп.}}$ – экспериментально полученные значения параметра оптимизации (табл. 9.5, столбец 14); $y_{\text{расч.}}$ – расчетные значения параметра оптимизации, полученные с помощью найденной модели.

Таким образом, $SS_{ост}$ определяется по формуле

$$SS_{ост.} = \sum_{u=1}^N \left(y_{u \text{ эксп}} - y_{u \text{ расч.}} \right)^2. \quad (9.21)$$

Рассчитанное по формуле (9.18) значение F-критерия сравнивается с табличным значением F-критерия, выбираемым для определенного уровня значимости α при числе степеней свободы в числителе f_2 и в знаменателе f_1 . Гипотеза об адекватности найденной модели не отвергается при уровне значимости α , если выполняется условие

$$F_{расч} \leq F_{табл}.$$

9.4.6. Анализ квадратичной модели

Планирование второго порядка заканчивается отысканием адекватного квадратичного уравнения типа (9.1). Часть членов, признанных статистически незначимыми, может в этом уравнении отсутство-

вать. На следующем этапе производится анализ полученной модели с целью изучения характера изменения отклика в изученной области, а при решении экстремальной задачи следует попытаться выяснить, существует ли экстремум, и если он есть, найти его координаты.

Одним из наиболее простых способов анализа модели (9.1) является графический. При этом предварительно расчетные значения параметра оптимизации $y_{расч.}$ из табл. 9.6 переносятся в столбец 15 исходной матрицы ЦКРУП 2 порядка (табл. 9.5). Затем, используя $y_{расч.}$, производят следующие построения (для рассмотренного в п. 9.4 ЦКРУП второго порядка для трех факторов):

1) по точкам строятся графики зависимостей параметра оптимизации последовательно от каждого исследуемого фактора, т. е. $y_{расч.} = f(A)$, $y_{расч.} = f(B)$, $y_{расч.} = f(C)$ при постоянных значениях других факторов, взятых на основных уровнях; например, при построении зависимости $y_{расч.} = f(A)$ используются значения $y_{расч.}$, взятые в опытах 9, 10 и 15 (значения $y_{расч.}$ для 15-20 опытов одинаковы);

2) по точкам строятся три поверхности отклика для параметра оптимизации в трехкоординатном пространстве, принимая за две оси координат на горизонтальной плоскости, например, значения факторов А и В (согласно исходных условий по рис. 9.1), а за вертикальную ось – параметр оптимизации y ; при этом указанные выше поверхности отклика строятся для следующих случаев:

а) при постоянном значении фактора $C = C_3$ (нижний уровень фактора С); учитываются значения $y_{расч.}$ для опытов 5–8;

б) при постоянном значении фактора $C=C_0$ (основной уровень фактора С) учитываются значения $y_{расч.}$ для опытов 9, 12, 15;

в) при постоянном значении фактора $C=C_2$ (верхний уровень фактора С); учитываются значения $y_{расч.}$ для опытов 1–4.

Другим способом анализа полученной модели (9.1) является преобразование ее к так называемому каноническому (стандартному) виду. Каноническое преобразование заключается в выборе новой системы координат, в которой облегчается геометрический анализ уравнения (9.1). Такого рода преобразование сводится к определению центра поверхности второго порядка (если он существует), переносу начала координат в новый центр (при этом в уравнении (9.1) исчезают линейные члены $\sum b_i x_i$) и к повороту координатных осей (при этом в уравнении (9.1) исчезают члены $\sum b_{ij} x_i x_j$).

Квадратичное уравнение в канонической форме имеет вид

$$y - y_s = B_{11} \tilde{x}_1^2 + B_{22} \tilde{x}_2^2 + \dots + B_{kk} \tilde{x}_k^2, \quad (9.22)$$

где y_s – значение отклика в новом начале координат (свободный член канонического уравнения); \tilde{x}_i – новые оси координат, повернутые в векторном пространстве на некоторый угол относительно старых осей (x_i) и линейно связанные с ними; B_{ii} – коэффициенты уравнения в канонической форме.

Удобство формы (9.22) для анализа и оптимизации определяется тем, что все x_i входят в нее в квадратах. Следовательно, изменение значений отклика зависит только от знака коэффициента и не зависит от направления движения по оси \tilde{x}_i от центра S . В частности, y будет возрастать всегда, когда изменяется \tilde{x}_i , имеющий при себе коэффициент $B_{ii} > 0$, и уменьшаться в случае, когда у \tilde{x}_i стоит коэффициент $B_{ii} < 0$.

Геометрический образ квадратичного уравнения в канонической форме можно представить себе в виде изолиний поверхности отклика при числе факторов $k = 2$ (рис. 9.3).

В случае $k = 2$ изолинии для уравнения $y - y_s = B_{11}\tilde{x}_1^2 + B_{22}\tilde{x}_2^2$ могут представлять собой следующие фигуры.

1. Эллипсы (рис. 9.3, а). Оба коэффициента B_{11} и B_{22} имеют одинаковые знаки. Центр эллипсов является максимумом, если B_{11} и B_{22} отрицательны, и минимумом, если B_{11} и B_{22} положительны. Если $|B_{22}| < |B_{11}|$, то эллипсы вытянуты по оси \tilde{x}_2 , и наоборот. Поверхность отклика является эллиптическим параболоидом.

2. Гиперболы (рис. 9.3, б). Коэффициенты B_{11} и B_{22} имеют разные знаки. Гиперболы вытянуты по той оси, которой соответствует меньшее по абсолютной величине значение коэффициента в каноническом уравнении. В этом случае значение отклика увеличивается при движении из центра фигуры по одной оси и уменьшается при движении по другой. Если, например, $B_{11} > 0$, а $B_{22} < 0$ ($y - y_s = B_{11}\tilde{x}_1^2 - B_{22}\tilde{x}_2^2$), то отклик будет увеличиваться при движении из центра S в направлении $+\tilde{x}_1$ и уменьшаться при движении в направлении $+\tilde{x}_2$ и $-\tilde{x}_2$. Центр S фигуры называется седлом или минимаксом. Поверхность отклика является гиперболическим параболоидом.

3. Параллельные прямые (рис. 9.3, в). Один из коэффициентов канонического уравнения равен нулю, при этом нет одного центра с экстремальным значением отклика. Поверхность отклика является стационарным возвышением.

4. Параболы (рис. 9.3, г). Один из коэффициентов канонического уравнения равен нулю, при этом центр фигуры находится в бесконечности. Поверхность отклика является возрастающим возвышением (гребнем). В практических задачах центр фигуры S удален за пределы той области, где проводился эксперимент, и тогда один из коэффициентов (B_{11} или B_{22}) близок к нулю.

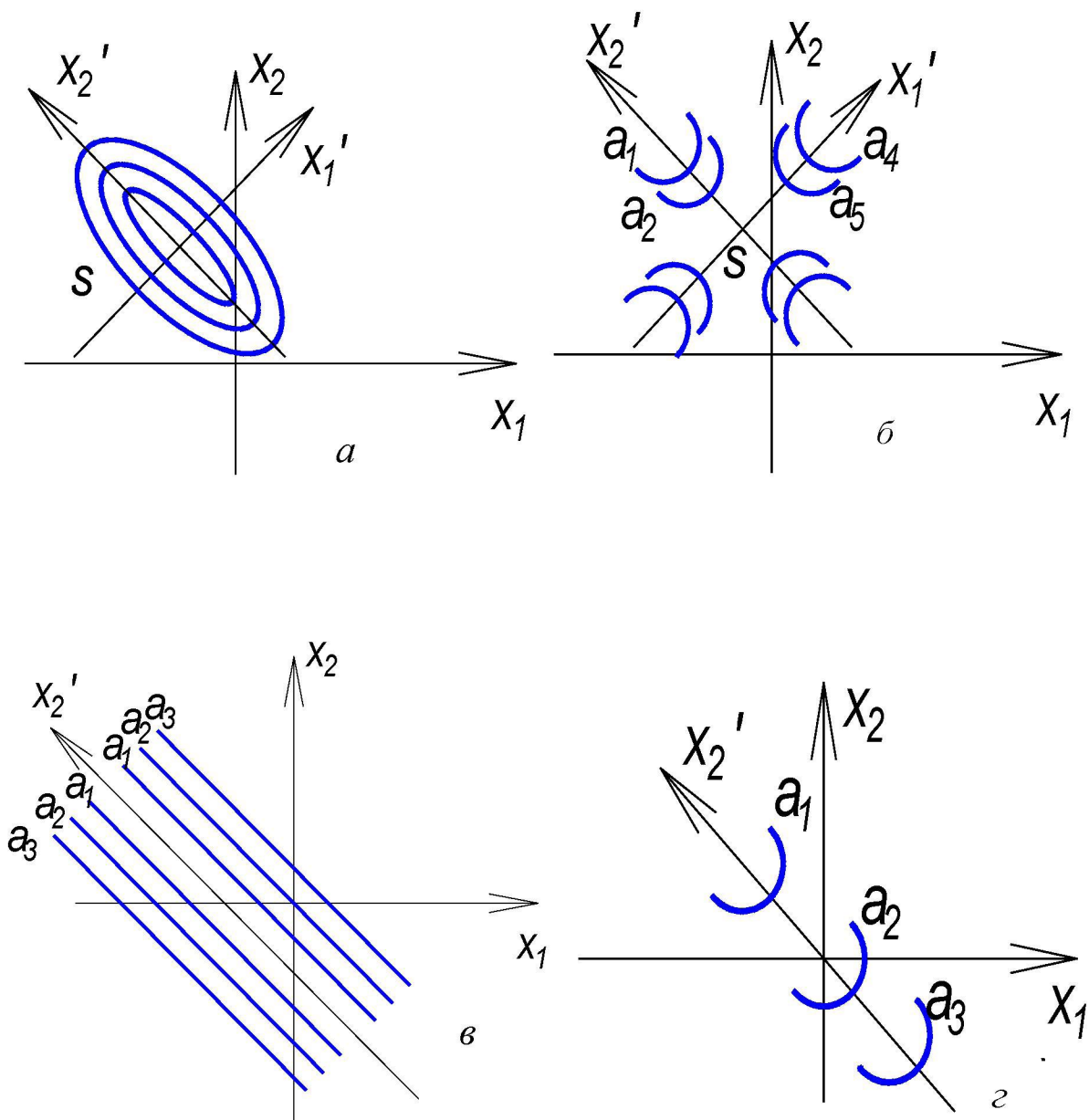


Рис. 9.3. Поверхности отклика,
описываемые квадратичной моделью для $k = 2$

Аналогично можно проводить анализ канонических уравнений
типа

$$y - y_s = B_{11}\tilde{x}_1^2 + B_{22}\tilde{x}_2^2 + B_{33}\tilde{x}_3^2 \quad (9.23)$$

при числе факторов $k = 3$ (рис. 9.4).

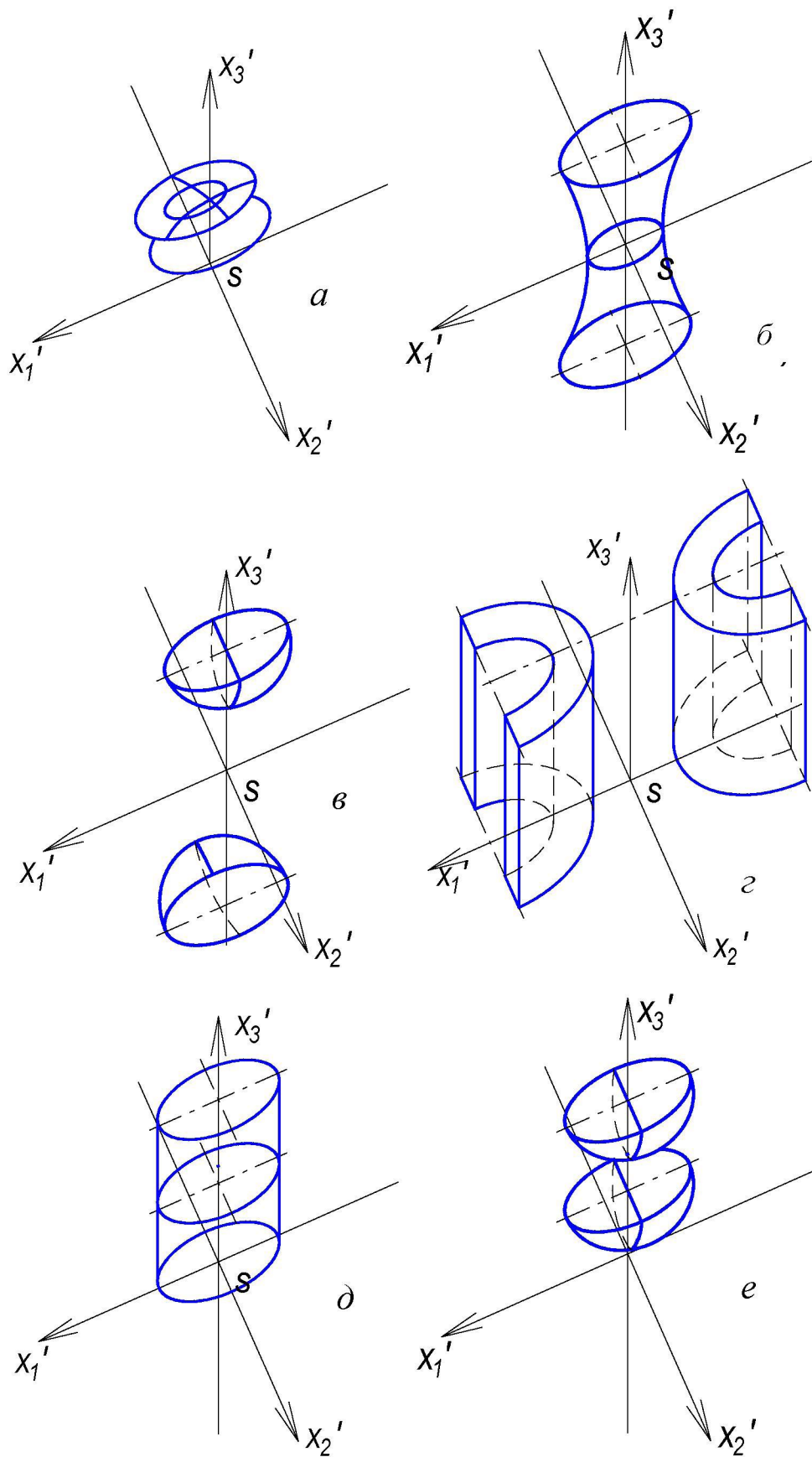


Рис. 9.4. Поверхности отклика, описываемые квадратичной моделью для $k = 3$ (окончание см. на стр. 272)

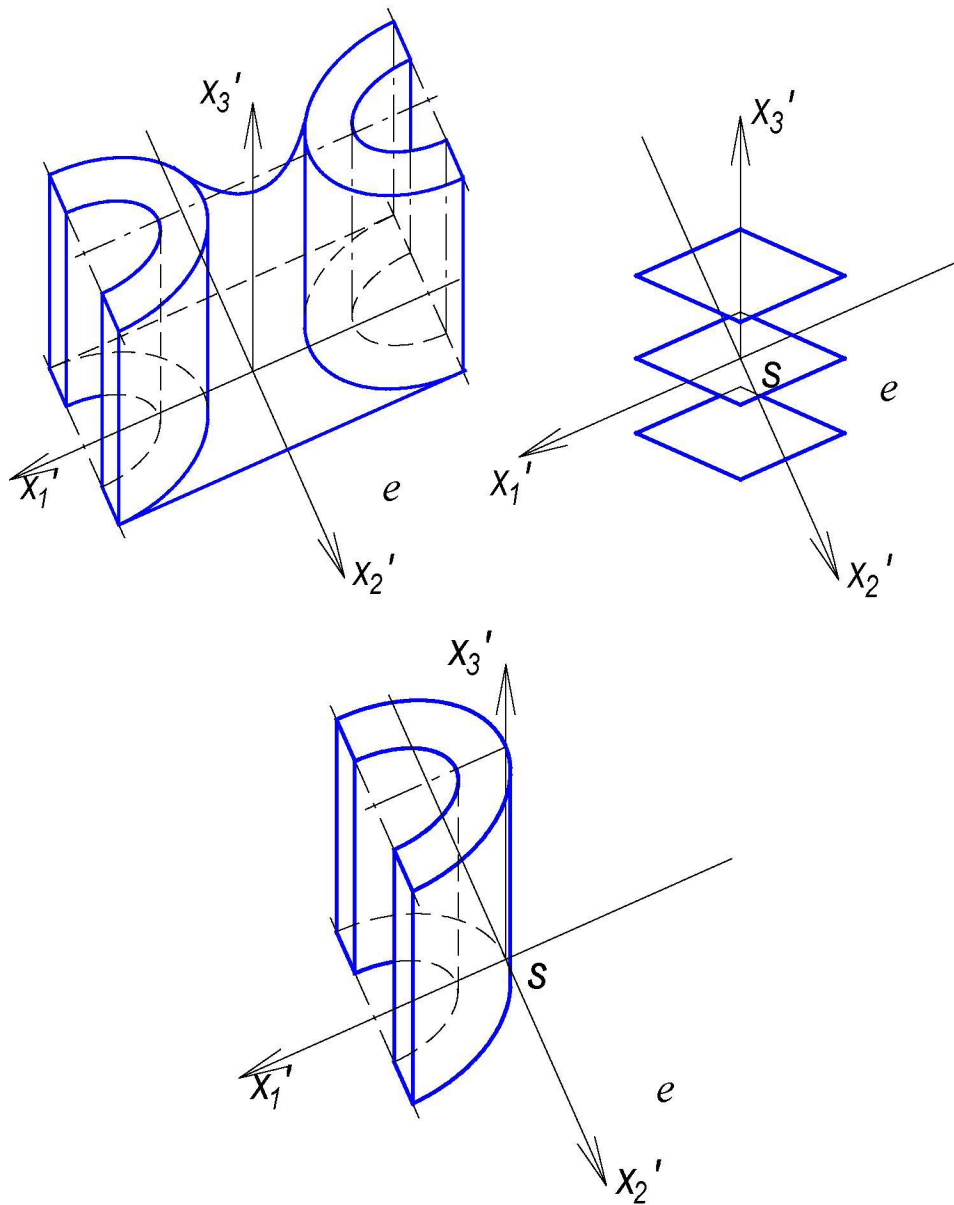


Рис. 9.4. Окончание (начало см. на стр. 271)

Если все коэффициенты имеют одинаковые знаки, поверхность отклика представляет собой эллипсоид вращения (рис. 9.4, а) и имеет экстремум в центре эллипсоида. Если знак одного из коэффициентов противоположен знаку двух других, имеет место одно- или двухполостной гиперboloид (соответственно рис. 9.4, б и в).

При близости одного из коэффициентов канонического уравнения к нулю, поверхность отклика может быть либо эллиптическим цилиндром (рис. 9.4, *з*), если остальные два коэффициента имеют одинаковые знаки, либо гиперболическим цилиндром (рис. 9.4, *д*), если знаки оставшихся коэффициентов разные.

В случае эллиптического цилиндра ось, соответствующая незначимому коэффициенту, является линией максимума, удаление от которой в любом направлении связано с уменьшением параметра оптимизации (стандартное возвышение). В этом же случае близости нулю одного из коэффициентов канонического уравнения поверхность отклика может также являться эллиптическим или гиперболическим параболоидом (соответственно рис. 9.4, *е* и *ж*).

Если два коэффициента канонического уравнения равны нулю, то поверхность отклика либо представляет собой серию параллельных плоскостей (рис. 9.4, *з*), либо имеет вид параболического цилиндра (рис. 9.4, *и*).

Наиболее целесообразно изучать геометрические поверхности с помощью двухфакторных моделей, что позволяет получить геометрическую интерпретацию зависимостей вида

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2. \quad (9.24)$$

Для получения таких моделей рекомендуется в найденное уравнение регрессии подставить значения всех факторов (желательно на оптимальных уровнях), кроме любых двух.

Каноническое преобразование для модели (9.24) заключается в переходе к стандартному уравнению вида

$$y - y_s = B_{11}\tilde{x}_1^2 - B_{22}\tilde{x}_2^2, \quad (9.25)$$

где y_s – значение параметра оптимизации в новом начале координат; \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 – новые оси координат, повернутые в факторном простран-

стве на некоторый угол относительно старых осей x_1, x_2 ; B_{11}, B_{22} – коэффициенты уравнения регрессии в канонической форме.

Для переноса начала координат в новую точку S необходимо продифференцировать полученное уравнение регрессии в частных производных по каждой из независимых переменных и приравнять их нулю:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0. \quad (9.26)$$

Решая систему уравнений (9.26), вычисляют координаты точки $S (x_{1S}, x_{2S})$. Подставляя значения координат в уравнение (9.25), определяют значения критерия оптимизации в новом центре y_S .

Угол поворота α осей координат в новом центре рассчитывается по формуле

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{b_{11} - b_{22}}{b_{12}}. \quad (9.27)$$

Положительный знак угла α показывает, что при повороте осей координат от оси x_1 необходимо их перемещать вверх и наоборот.

Коэффициенты регрессии в канонической форме определяются с помощью следующих уравнений:

$$\begin{aligned} B_{11} &= b_{11} \cos^2 \alpha + b_{12} \sin \alpha \cos \alpha + b_{22} \sin^2 \alpha, \\ B_{22} &= b_{11} \sin^2 \alpha - b_{12} \sin \alpha \cos \alpha + b_{22} \cos^2 \alpha. \end{aligned} \quad (9.28)$$

По значениям коэффициентов канонического уравнения можно определить характер и вид поверхности отклика (см. выше).

9.5. ПРИМЕРЫ ПРОВЕДЕНИЯ ПЛАНИРУЕМЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Задание на исследование.

Цель – исследовать влияние режимов резания на шероховатость поверхности при точении трубчатых образцов, изготовленных из органопластика методом намотки, найти оптимальные режимы точения.

Схема эксперимента.

Исследование проводится по обычной схеме точения на токарно-винторезном станке 1К62. Для точения выбираются трубчатые образцы, изготовленные из одной партии исходных материалов, по одной схеме намотки. Исследуемые режимы резания: скорость резания V , м/мин; подача S , мм/об; глубина резания t , мм. Обработка ведется режущим инструментом марки ВК60М при постоянной геометрии ($\gamma = 20^\circ$, $\alpha = 20^\circ$, $\varphi = 45^\circ$, $r = 2$ мм). Измерение шероховатости проводится в соответствии с ГОСТ 2789-73.

Исследуемый параметр оптимизации – R_z , мкм.

2. Составление таблицы условий эксперимента.

Используем ЦКОП второго порядка. Выбираем условия эксперимента после ознакомления с результатами исследований, имеющихся в технической литературе (табл. 9.7).

Таблица 9.7

Условия эксперимента

Уровни факторов	Натуральные значения		
	$A = V$, м/мин	$B = S$, мм/об	$C = t$, мм
Основной уровень (0)	150	0,3	0,3
Интервал варьирования	160	0,2	0,2
Верхний уровень (+1)	250	0,5	0,5
Нижний уровень (-1)	50	0,1	0,1
Звездные точки:			
+1,215	271,5	0,54	0,54
-1,215	28,5	0,06	0,06

3. Составление плана эксперимента.

Для получения модели второго порядка используем ЦКОП, параметры которого представлены в табл. 9.1, а матрица планирования – в табл. 9.8.

4. Реализация плана эксперимента.

Осуществляется рандомизацией опытов по времени, причем каждый опыт проводится 3 раза в случайной последовательности. Всего было обработано 45 трубчатых образцов. Результаты экспериментов представлены в табл. 9.8.

5. Расчет коэффициентов регрессии и оценка их статистической значимости.

В результате расчетов коэффициентов регрессии, выполненных по формулам (9.9), (9.10) с использованием данных табл. 9.1, получены следующие результаты:

$$\begin{array}{lll} b_0 = 10,5; & b_1 = 13,4; & b_2 = 9,6; \\ b_3 = 2,4; & b_{11} = 16,2; & b_{22} = 10,9; \\ b_{33} = 2,1; & b_{12} = 2,7; & b_{13} = 7,6. \\ b_{23} = 6,3. \end{array}$$

Пример расчета коэффициентов:

$$b_2 = 0,09141 (-26,9 - 28,5 + 30,8 + 43,3 - 9,9 - 39,8 + 30,5 + 76,0 - 22,4 + + 51) = 9,8.$$

Расчет доверительных интервалов для коэффициентов регрессии производился по формулам (9.9), (9.11) с использованием данных табл. 9.1.

Дисперсия воспроизводимости подсчитывалась с учетом того, что каждый опыт в матрице планирования повторялся 3 раза. В этом случае дисперсия подсчитывалась по обобщенной формуле

$$S_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^N (y_{ju} - \bar{y}_j)^2}{N(n-1)}. \quad (9.29)$$

Матрица ЦУРУП второго порядка

№ опыта	Уровни факторов													Параметр оптимизации \bar{R}_z , мкм
	В кодовом масштабе										В натуральном масштабе			
	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1' = X_1^2 - 0,73$	$X_2' = X_2^2 - 0,73$	$X_3' = X_3^2 - 0,73$	V , м/мин	S , мм./об	t , мм	
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	0,27	0,27	0,27	50	0,1	0,1	26,9
2	+1	+1	-1	-1	-1	+1	0,27	0,27	0,27	250	0,1	0,1	28,5	
3	+1	-1	+1	-1	+1	-1	0,27	0,27	0,27	50	0,5	0,1	30,8	
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	0,27	0,27	0,27	250	0,5	0,1	43,4	
5	+1	-1	+1	+1	+1	-1	0,27	0,27	0,27	50	0,1	0,5	9,9	
6	+1	+1	-1	+1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	250	0,1	0,5	39,8	
7	+1	-1	+1	+1	-1	+1	0,27	0,27	0,27	50	0,5	0,5	30,3	
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	0,27	0,27	0,27	250	0,5	0,5	76,0	
9	+1	-1,215	0	0	0	0	0,75	-0,73	-0,73	28,5	0,3	0,3	21,0	
10	+1	+1,215	0	0	0	0	0,75	-0,73	-0,73	271,5	0,3	0,3	51,5	
11	+1	0	-1,215	0	0	0	-0,73	0,75	-0,73	150	0,06	0,3	18,4	
12	+1	0	+1,215	0	0	0	-0,73	0,75	-0,73	150	0,54	0,3	42,0	
13	+1	0	0	-1,215	0	0	-0,73	-0,73	0,75	150	0,3	0,06	11,5	
14	+1	0	0	+1,215	0	0	-0,73	-0,73	0,75	150	0,3	0,54	11,5	
15	+1	0	0	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73	150	0,3	0,3	12,3	

В итоге расчета $S_y^2 = 16,1$ при числе степеней свободы $N(n - 1) = 15(3 - 1) = 30$.

Расчетные величины дисперсий, доверительные интервалы, подсчитанные по формуле (9.14), и результаты проверки статистической значимости коэффициентов приведены в табл. 9.9.

После расчета значимости коэффициентов уравнение регрессии будет иметь окончательный вид

$$y = 10,5 + 13,4 \cdot x_1 + 9,8 \cdot x_2 + 2,4 \cdot x_3 + 16,2 \cdot x_1^2 + 10,9 \cdot x_2^2 + 2,7 \cdot x_1 \cdot x_2 + 7,6 \cdot x_1 \cdot x_3 + 6,3 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

Таблица 9.9

Расчет значимости коэффициентов регрессии

Коэффициенты	Среднеквадратическая ошибка в определении коэффициентов регрессии	Доверительные интервалы	Незначимые коэффициенты
b_0	$S_{b_0} = 2,63$	$\Delta b_0 = 5,26$	нет
b_i	$S_{b_i} = 1,2$	$\Delta b_i = 2,4$	нет
b_{ij}	$S_{b_{ij}} = 1,35$	$\Delta b_{ij} = 2,7$	нет
b_{ii}	$S_{b_{ii}} = 1,92$	$\Delta b_{ii} = 3,84$	b_{33}

6. Проверка адекватности модели по F-критерию.

Учитывая, что каждый опыт в матрице планирования повторялся 3 раза, рассчитанная по формуле (6.23), дисперсия адекватности $S_{ад.}^2 = 39,4$ с числом степеней свободы $15 - 9 = 6$.

Нечетное значение F-критерия по формуле (9.18)

$$F_{расч} = \frac{S_{ад.}^2}{S_y^2} = \frac{39,4}{16,1} = 2,45.$$

При $f_{ад} = f_z = 6$ и $f_y = f_l = 30$ табличное значение F-критерия для доверительной вероятности $\alpha = 0,95$ $F_{табл.} = 2,42$, а для доверительной вероятности $\alpha = 0,99$ $F_{табл.} = 3,47$.

Таким образом, при $\alpha = 0,99$ гипотеза об адекватности модели не отвергается, так как $F_{расч} \leq F_{табл.}$ ($2,45 < 3,47$).

7. Анализ квадратичной модели.

Для наглядного представления о геометрическом виде изучаемой функции отклика преобразуем полученное уравнение в типовую каноническую форму согласно методике, изложенной в п. 9.4.6. Построим, например, двумерное сечение для случая $X_1 = 0$:

$$y = 10,5 + 9,8 \cdot X_2 + 2,4 \cdot X_3 + 10,9 \cdot X_2^2 + 6,3 \cdot X_2 \cdot X_3.$$

Далее по формуле (9.26) определим координаты нового центра. Для этого преобразованное уравнение дифференцируется и частные производные приравниваются нулю:

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 9,8 + 21,8 \cdot x_2 + 6,3 \cdot x_3 = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = 2,4 + 6,3 \cdot x_2 = 0.$$

Решение данной системы уравнений позволяет найти координаты точки S:

$$X_{2S} = -0,38, \quad X_{3S} = -0,24.$$

Подставляя значения X_{2S} и X_{3S} в преобразованное уравнение, определим значение критерия оптимизации в новом центре:

$$y_s = 8,4.$$

Определение угла поворота осей координат осуществляется по формуле (9.27). Для нашего случая:

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{10,9}{6,3} = 1,73; \quad \alpha = 15^\circ.$$

Коэффициенты уравнения регрессии в канонической форме определяются по формуле (9.28):

$$B_{22} = 10,9 \cdot 0,93 + 6,3 \cdot 0,97 \cdot 0,26 = 11,7;$$

$$B_{33} = 10,9 \cdot 0,007 - 6,3 \cdot 0,97 \cdot 0,26 = -0,8.$$

В итоге получим каноническое уравнение

$$y - 8,4 = 11,7 \cdot \bar{x}_2^2 - 0,8 \cdot \bar{x}_3^2.$$

Это уравнение используется для построения линий равных значений откликов, которые имели вид гипербол.

Результаты преобразований уравнения для случаев $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ и $X_3 = 0$ представлены в табл. 9.10.

Пользуясь полученными кривыми для всех трех случаев, можно, задавая необходимые значения R_z , выбрать наиболее оптимальное сочетание элементов режима точения V , S , t , обеспечивающее реализацию заданного R_z при условии максимально возможной производительности обработки (рис. 9.5).

Таблица 9.10

Результаты преобразований уравнения

Факторы	Координаты центра (координированные)	Угол поворота α	y_s	Каноническое уравнение	Вид кривой
$X_1 = 0$	$X_{2S} = -0,38$ $X_{3S} = -0,24$	15°	8,4	$y - 8,4 = 11,7 \cdot \bar{x}_2^2 - 0,8 \cdot \bar{x}_3^2$	Гипербола
$X_2 = 0$	$X_{1S} = -0,32$ $X_{3S} = -0,42$	$12,5^\circ$	7,9	$y - 7,9 = 17,1 \cdot \bar{x}_1^2 - 0,9 \cdot \bar{x}_3^2$	Гипербола
$X_3 = 0$	$X_{1S} = -0,38$ $X_{2S} = -0,4$	$13,5^\circ$	5,9	$y - 5,9 = 15,9 \cdot \bar{x}_1^2 + 9,8 \cdot \bar{x}_2^2$	Эллипс

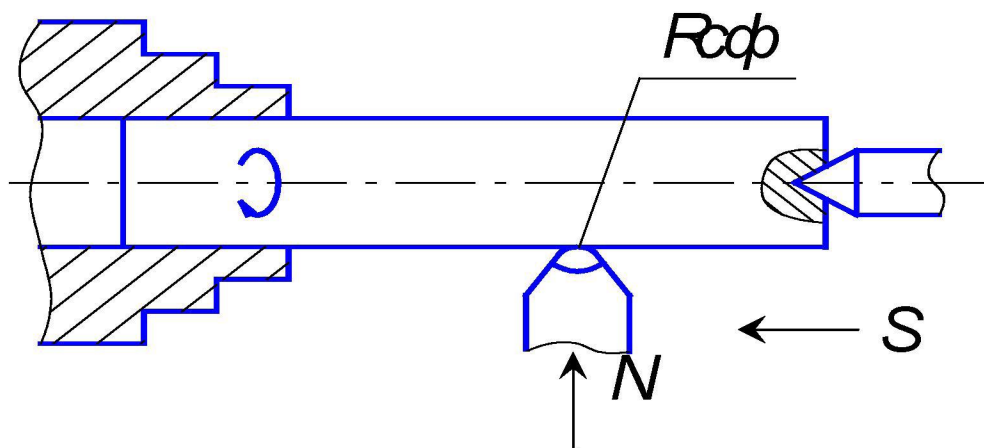


Рис. 9.5. Схема эксперимента

8. Выводы.

1. Наилучшее значение шероховатости $R_z = 5,9$ мкм было получено при следующих режимах точения:

$$V = 110 \text{ м/мин}; S = 0,21 \text{ мм/об}; t = 0,3 \text{ мм}.$$

2. Допустимыми диапазонами изменения элементов режима точения (V, S, t) для обеспечения 7-го класса шероховатости можно считать следующие:

$$\text{скорость резания } V = 100\text{--}130 \text{ м/мин};$$

$$\text{подача } S = 0,22\text{--}0,3 \text{ мм/об};$$

$$\text{глубина резания } t = 0,1\text{--}0,3 \text{ мм}.$$