7. ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКИВНОСТИ И ЭКОНОМИЧНОСТИ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Перед проведением эксперимента необходимо установить, какие из факторов включить в круг рассматриваемых, влияющих на выходную величину исследуемого объекта, а какие нет. Отсутствие в модели хотя бы одного из существенных факторов может привести к ошибочным результатам, к неверным выводам. Однако при числе факторов $k \geq 7$ возникает необходимость в их сокращении, т. е. отсеивание из-за необходимости выполнения большого числа опытов. Для этой цели разработаны методы отсеивающего эксперимента:

– метод ранжирования априорной информации, основанный на опросе специалистов-экспертов, обработке литературных данных и объективной статистической обработке результатов;

– метод случайного баланса, позволяющий использовать сверхнасыщенные планы эксперимента, в которых число опытов меньше числа исследуемых эффектов.

7.1. Априорное ранжирование факторов

На стадии предварительного изучения объекта исследования в ряде случаев полезно проводить психологический эксперимент (априорное ранжирование факторов), заключающийся в объективной обработке данных, полученных в результате опроса специалистов или по результатам исследований, опубликованных в литературе. Цель такого эксперимента заключается в сравнительной оценке влияния различных факторов на параметры оптимизации. Тем самым становится возможным правильный отбор факторов для последующего эксперимента, обоснованное исключение тех факторов, влияние которых незначительно.

Особенность метода априорного ранжирования факторов заключается в том, что факторы ранжируют (устанавливают) в порядке убывания вносимого ими вклада. Вклад каждого фактора оценивается по величине ранга (места), который отведен исследователем (специалистом при опросе, экспертом) данному фактору в степени его влияния на параметры оптимизации.

Процедура эксперимента заключается в том, что каждый специалист, участвующий в опросе, заполняет анкету, в которой перечислены факторы, их размерность и предполагаемые интервалы варьирования. Заполняя анкету, специалист определяет место факторов в ранжированном ряду. Одновременно он может включить дополнительные факторы или высказать мнение об изменении интервала варьирования.

Пример. Определим основные факторы, влияющие на абразивный износ. Используем мнения четырех экспертов.

На основании предварительного анализа было установлено, что основными факторами, определяющими данный процесс, являются следующие:

1) X_1 – удельная нагрузка P, кгс/см^2;
2) X_2 – скорость скольжения v, м/с;
3) X_3 – путь трения $S_{ТР}$, м;
4) X_4 – твердость трущегося материала $H_М$, кгс/см^2;
5) X_5 – твердость абразивных частиц $H_А$, кгс/см^2;
6) X_6 – геометрический размер абразивных частиц $r_А$, мкм;
7) X_7 – количество абразива и его расход $Q_А$, см^3/ч;
8) X_8 – наличие влаги в зоне контакта;
9) X_9 – температура в зоне трения t, °С;
10) X_{10} – коэффициент трения f.

В табл. 7.1 представлено ранжирование факторов, влияющих на процесс абразивного износа. Оценка осуществлялась по 10-балльной шкале.

Таблица 7.1

Таблица результатов опроса специалистов

Эксперты	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
1	3	7	5	1	2	6	4	9	8	10
2	3	9	6	2	1	5	7	8	4	10
3	6	10	9	1	2	4	5	7	3	8
4	4	9	6	2	3	1	5	8	7	10

Безусловно, этот метод оценки влияния факторов на параметр оптимизации, в данном случае износ, с частичным использованием литературных данных будет приближенным, так как эту задачу частично решает один исследователь и ранжирование факторов не происходит независимо, а связано отчасти с его мнением.

По результатам опроса вычисляется коэффициент **конкордации** ***W*****,** определяющий степень согласованности мнения специалистов:

$$W = \frac{12S}{m^2(k^3 - k) - m\sum_{j=1}^{m} T_j}, \tag{7.1}$$

где m – число опрошенных специалистов; k – число факторов; S – сумма квадратов отклонений; T_j – поправочный коэффициент.

$$T_j = \sum (t_j^3 - t_j), \tag{7.2}$$

где t_j – число одинаковых рангов в j-ранжировинии;

$$S = \sum_{i=1}^{k} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} - L)^2 , \qquad (7.3)$$

где a_{ij} – ранг (порядковый номер при опросе) i-го фактора у j-го специалиста; L – среднее значение сумм рангов по каждому фактору:

$$L = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_{ij} . \qquad (7.4)$$

Значения коэффициента конкордации изменяются в интервале от 0 до 1, и чем больше его значение, тем больше согласованность мнений специалистов.

После вычисления коэффициента конкордации определяют его значимость по χ^2-критерию, так как величина $m(k–1)$ имеет χ^2-распределение с числом степеней свободы $f = k–1$. Расчетное значение χ^2 определяется по формуле

$$\chi^2 = \frac{12S}{mk(k+1) - \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{m} T_i} . \qquad (7.5)$$

Если расчетное значение χ^2 больше табличного при соответствующем числе степеней свободы, то коэффициент конкордации значительно отличается от нуля и можно утверждать, что согласованность мнений специалистов не является случайной.

Оценив согласованность мнений всех специалистов, строят среднюю диаграмму рангов (рис. 7.1), откладывая по одной оси факторы, а по другой – соответствующие суммы рангов. Чем меньше сумма рангов данного фактора, тем выше его место в диаграмме. С помощью последней оценивается значимость факторов.

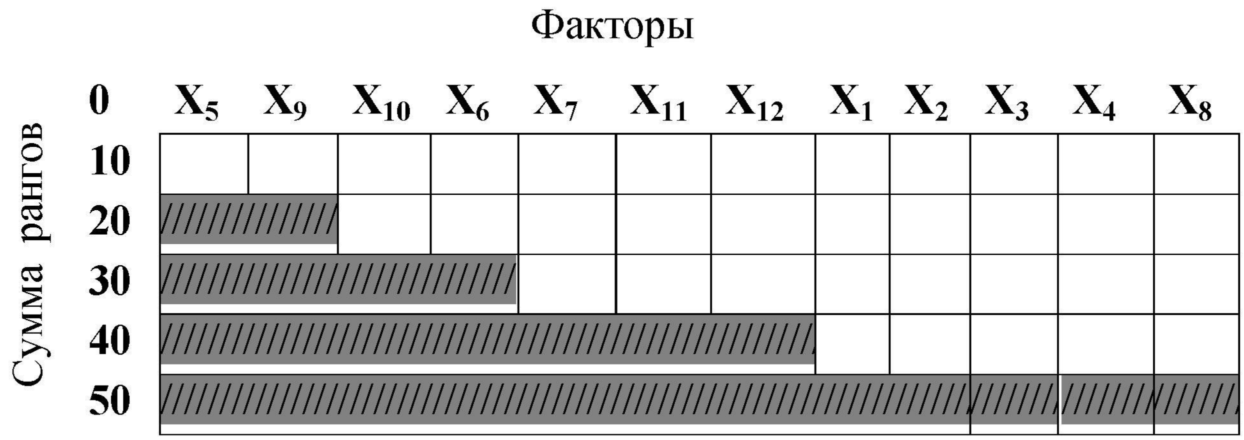

Рис. 7.1. Диаграмма рангов

Пример. Был проведен опрос четырех специалистов (m = 4) с помощью анкеты, содержащей 12 факторов (k = 12), которые нужно проранжировать с учетом степени их влияния на результаты опроса. Специалисты определили значимость 12 факторов следующим образом (табл. 7.2).

Таблица 7.2

Таблица результатов опроса специалистов

Специалисты m	Факторы (k)											
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}
1	8	10,5	10,5	10,5	1	2,5	2,5	10,5	5	4	7	6
2	8	9	10	11	1	6,5	6,5	12	2	3	4	5
3	6	7,5	7,5	11	2	4,5	4,5	12	1	3	9,5	9,5
4	7	4	8	10,5	2	10,5	10,5	10,5	1	3	5,5	5,5

Обработка результатов опроса осуществляется в следующей последовательности (результаты заносят в табл. 7.3).

1. Сначала определяем сумму рангов для каждого фактора:

$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$ = 8 + 8 + 6 + 7=29 (напримере X_1. Для других факторов проводят аналогичные расчеты).

2. Вычисляем среднее значение суммы рангов:

$$L=\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}a_{ij}}{k}=\frac{29+31+36+43+6+24+24+45+9+13+26+26}{12}=26\,.$$

3. Находим разность между суммой рангов каждого из факторов и средним значением суммы рангов:

$\sum_{j=1}^{m}a_{ij}-L=29-26=3$ (для X_1); $\sum_{j=1}^{m}a_{ij}-L=31-26=5$ (для X_2).

4. Вычисляем квадрат разности: $3^2=9$ (для X_1); $5^2=25$ (для X_2).

5. Вычисляем сумму квадратов отклонений:

$$S=\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}-L)^2=9+25+100+289+400+4+4+361+289+169+0+0=1650.$$

6. $T_j=\sum(t_j^3-t_j)$, t_j – число одинаковых рангов в j-м ранжировании.

Первый специалист оценку 10,5 поставил 4 раза, а оценку 2,5 – 2 раза, тогда $T_j=(4^3-4)+(2^3-2)=60+6=66$.

Для второго специалиста: 6,5 – 2 раза, тогда $T_j=(2^3-2)=6$.

Для третьего специалиста: 7,5 – 2 раза, 4,5 – 2 раза, 9,5 – 2 раза, тогда $T_j=(2^3-2)+(2^3-2)+(2^3-2)=18$.

Для четвертого специалиста: 10,5 – 4 раза, 5,5 – 2 раза, тогда $T_j=(4^3-4)++(2^3-2)=60+6=66$.

7. Находим $\sum T_j=66+6+18+66=156$.

8. Вычисляем коэффициент конкордации:

$$W = \frac{12S}{m^2(k^3 - k) - m\sum_{j=1}^{m} T_j} = \frac{12 \cdot 1650}{4^2(12^3 - 12) - 4 \cdot 156} = 0{,}738 .$$

9. Проверяем значимость коэффициента по χ^2-критерию:

$$\chi^2_{\text{расч}} = \frac{12S}{mk(k+1) - \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{m} T_i} = \frac{12 \cdot 1650}{4 \cdot 12 \cdot (12+1) - \frac{1}{(12+1)} \cdot 156} = 32{,}3 ;$$

$$f = k - 1 = 12 - 1 = 11 .$$

По таблице χ^2 -распределения при уровне значимости 0,05 (5 %) и числе степеней свободы 11 $\chi^2_{\text{табл}}$ = 19,68; 19,68 < 32,3 → $\chi^2_{\text{табл}} < \chi^2_{\text{расч}}$ → можно с 95-процентной достоверностью утверждать о согласованности мнений специалистов.

Это позволяет построить гистограмму результатов (рис. 7.2).

Таблица 7.3

Таблица результатов опроса специалистов

Специа-листы m	Факторы (k)												T_j
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	
1	8	10,5	10,5	10,5	1	2,5	2,5	10,5	5	4	7	6	66
2	8	9	10	11	1	6,5	6,5	12	2	3	4	5	6
3	6	7,5	7,5	11	2	4,5	4,5	12	1	3	9,5	9,5	18
4	7	4	8	10,5	2	10,5	10,5	10,5	1	3	5,5	5,5	66
$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$	**29**	**31**	**36**	**43**	**6**	**24**	**24**	**45**	**9**	**13**	**26**	**26**	**156**
$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} - L$	**3**	**5**	**10**	**17**	**-20**	**-2**	**-2**	**19**	**-17**	**-13**	**0**	**0**	
$(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} - L)^2$	**9**	**25**	**100**	**289**	**400**	**4**	**4**	**361**	**289**	**169**	**0**	**0**	S = **1650**

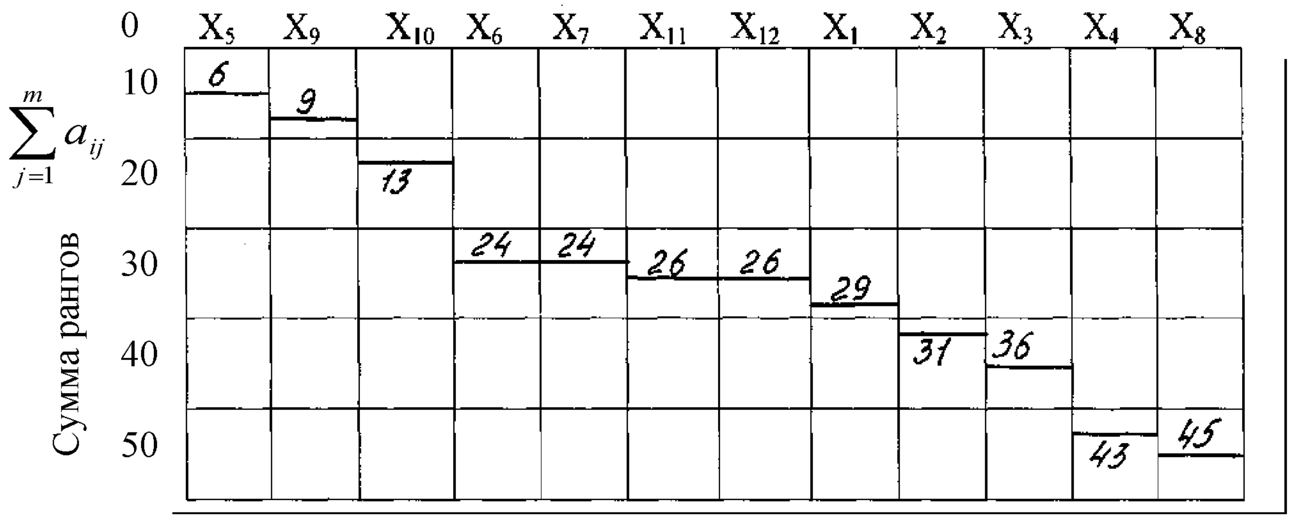

Рис. 7.2. Гистограмма результатов

Факторы, имеющие наименьшую сумму рангов, отсеиваются, а для дальнейших исследований отбираются наиболее сильно влияющие факторы.

7.2. Метод случайного баланса

После ранжирования эффектов для исключения малозначащих факторов проводятся отсеивающие эксперименты. Наиболее распространенным методом постановки экспериментов является метод случайного баланса, предложенный в 1956 году Саттерзвайтом. Метод базируется на сверхнасыщенном ПФЭ. **Сверхнасыщенными** называются планы, имеющие отрицательное число степеней свободы, то есть число коэффициентов модели превышает число опытов N. Метод случайного баланса эффективен в тех случаях, когда из всей совокупности независимых величин только 15…20 % являются существенными. При этом должны выполняться предпосылки множественного регрессионного анализа.

Первоначально все линейные независимые переменные разбиваются на группы, содержащие по три-четыре фактора. При этом необходимо учитывать, исходя из физики процесса, взаимодействие факторов. Если таковое существует, то данные факторы необходимо включать в одну группу. Затем для каждой группы известными методами составляется матрица планирования ПФЭ. Пусть имеются

10 факторов, разбитых на три группы: I – $X_1 \dots X_4$; II – $X_5 \dots X_8$; III – $X_9 \dots X_{10}$.

Для каждой группы составим матрицу планирования. Так как группа III содержит только 2 фактора, то матрица плана 2^2 повторяется четыре раза (как будто взяты два столбца из матрицы ПФЭ 2^4). Данные матрицы представлены в табл. 7.4

Для формирования общей матрицы отсеивающего эксперимента строкам матриц групп присваиваются случайные номера в соответствии с таблицей случайных чисел (k_I, k_{II}, k_{III}).

Затем строится матрица отсеивающего эксперимента (табл. 7.5): в первую строку матрицы записывается 8 строка из матрицы ПФЭ I группы, 14 строка из II группы и 15 строка из III группы; во вторую строку: 12, 15 и 3 строки из соответствующих групп и т. д. (табл. 7.4).

Таблица 7.4

Матрица планирования ПФЭ

	I					II					III		
№ опыта	X_1	X_2	X_3	X_4	k_I	X_5	X_6	X_7	X_8	k_{II}	X_9	X_{10}	k_{III}
1	–	–	–	–	7	–	–	–	-	11	–	–	10
2	+	-	–	–	5	+	–	–	–	16	+	–	15
3	-	+	–	–	8	–	+	–	–	3	–	+	2
4	+	+	–	–	10	+	+	–	–	7	+	+	6
5	–	–	+	–	11	–	–	+	–	9	-	–	8
6	+	–	+	–	15	+	–	+	–	8	+	–	7
7	–	+	+	–	14	–	+	+	–	4	–	+	3
8	+	+	+	–	1	+	+	+	-	12	+	+	11
9	–	–	–	+	13	–	–	–	+	5	–	–	4
10	+	–	–	+	6	+	–	–	+	13	+	–	12
11	–	+	–	+	9	–	+	–	+	14	–	+	13
12	+	+	–	+	2	+	+	–	+	10	+	+	9
13	–	–	+	+	4	–	–	+	+	15	–	–	14
14	+	–	+	+	3	+	–	+	+	1	+	–	16
15	–	+	+	+	12	–	+	+	+	2	–	+	1
16	+	+	+	+	16	+	+	+	+	6	+	+	5

В соответствии с полученной матрицей (табл. 7.5) проводится эксперимент. Порядок проведения опытов выбирают в соответствии с законом случайных чисел, то есть проводят рандомизацию.

Для оценки воспроизводимости опытов для каждой строки проводят опыт несколько раз. В табл. 7.5 приведены y_{i1} и y_{i2} и среднее значение $\bar{y}_i$. На основе полученных результатов строится диаграмма рассеяния (рис. 7.3). Для этого по оси абсцисс наносят все факторы (X_i). Слева от нее отмечаются точками те значения выходной величины $\bar{y}_i$, которые были получены, когда данный фактор находился на верхнем уровне (+1), а справа – когда (–1). Затем находят частные медианы для групп точек слева и справа X_i (по обе стороны от медианы число точек одинаково).

Таблица 7.5

Матрица планирования эксперимента

№ опыта	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	y_{i1}	y_{i2}	$\bar{y}_i$	y_I
1	+	+	+	–	+	–	+	+	–	+	58,5	56,6	57,5	26,1
2	+	+	–	+	–	+	+	+	–	+	78,6	79,8	79,2	79,2
3	+	–	+	+	–	+	–	–	–	+	54,2	55,8	55,0	55,0
4	+	–	+	+	–	+	+	–	–	–	20,2	18,6	19,4	19,4
5	+	–	–	–	–	–	–	+	+	+	8,2	8,6	8,4	8,4
6	+	–	–	+	+	+	+	+	+	+	80,2	82,4	81,3	49,9
7	–	–	–	–	+	+	–	–	+	–	30,6	32,4	31,5	0,1
8	–	+	–	–	+	–	+	–	–	–	42,2	44,8	43,5	12,1
9	–	+	–	+	–	–	+	–	+	+	6,8	7,6	7,2	7,2
10	+	+	–	–	+	+	–	+	–	–	38,6	40,2	39,4	8,0
11	–	–	+	–	–	–	–	–	+	+	15,2	16,0	15,6	15,6
12	–	+	+	+	+	+	+	–	+	–	62,2	64,4	63,3	31,9
13	–	–	–	+	+	–	–	+	–	+	68,6	66,4	67,5	36,1
14	–	+	+	–	–	+	–	+	–	–	18,2	19,2	18,7	18,7
15	+	–	+	–	–	–	+	+	+	–	24,6	26,0	25,3	25,3
16	+	+	+	+	+	–	–	–	+	–	42,2	43,8	43,0	11,6

Разность между медианами качественно характеризует роль фактора в процессе. Чем больше разность между медианами, тем больший вклад X_i фактора в изменение входной величины.

Для рассматриваемого случая наибольший вклад вносит фактор X_5. Поле рассеяния для фактора X_5 представлено на рис.7.4 («**выделяющиеся**» точки – это точки выходной величины $\bar{y}_i$, которые при $X_i = +1$ расположены выше «наибольшей» точки, а при $X_i = -1$ – ниже наименьшей). Таким образом, вклад факторов оценивается по медиане и выделяющимся точкам.

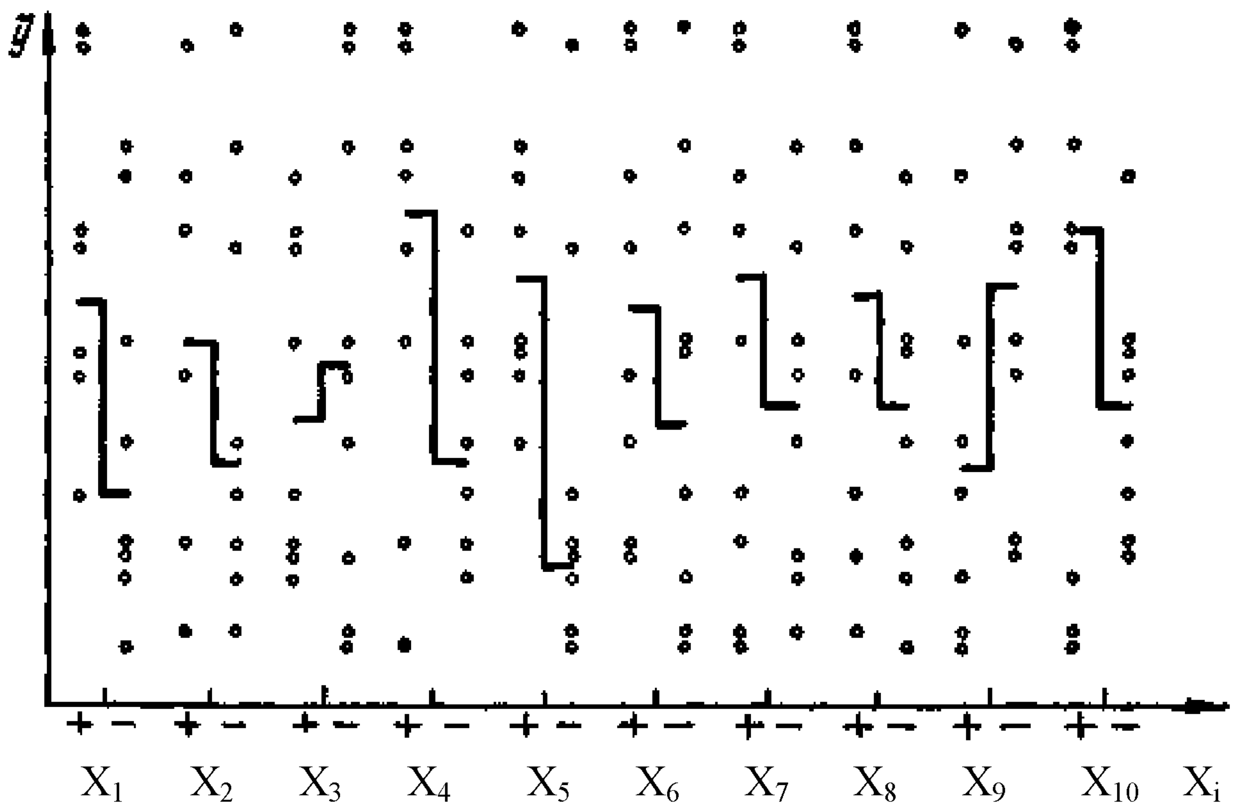

Рис. 7.3. Диаграмма рассеяния, построенная на основе матрицы планирования эксперимента

Для определения оценки вклада данного фактора необходимо найти B_j – разность между медианами слева и справа. Из рис. 7.4 и табл. 7.5 $B_5 = (57{,}5 + 43{,}5)/2 - (19{,}4 + 18{,}7)/2 = 31{,}4$.

Исходя из значения B_j можно найти «грубую» (приближенную) оценку коэффициента $b_i = B_j/2$ (b_5 = 15,7). Для выделения других существенных факторов необходимо исключить влияние уже выделенного существенного фактора на $\bar{y}$. Для этого из столбца $\bar{y}$ вычитаем B_5 в точках, где X_5 = +1, и получаем вектор-столбец y_I, в котором не учитывается влияние X_5. Для данного вектор-столбца опять строим диаграмму рассеивания, из которой опять находим наиболее существенный фактор (X_5 исключаем).

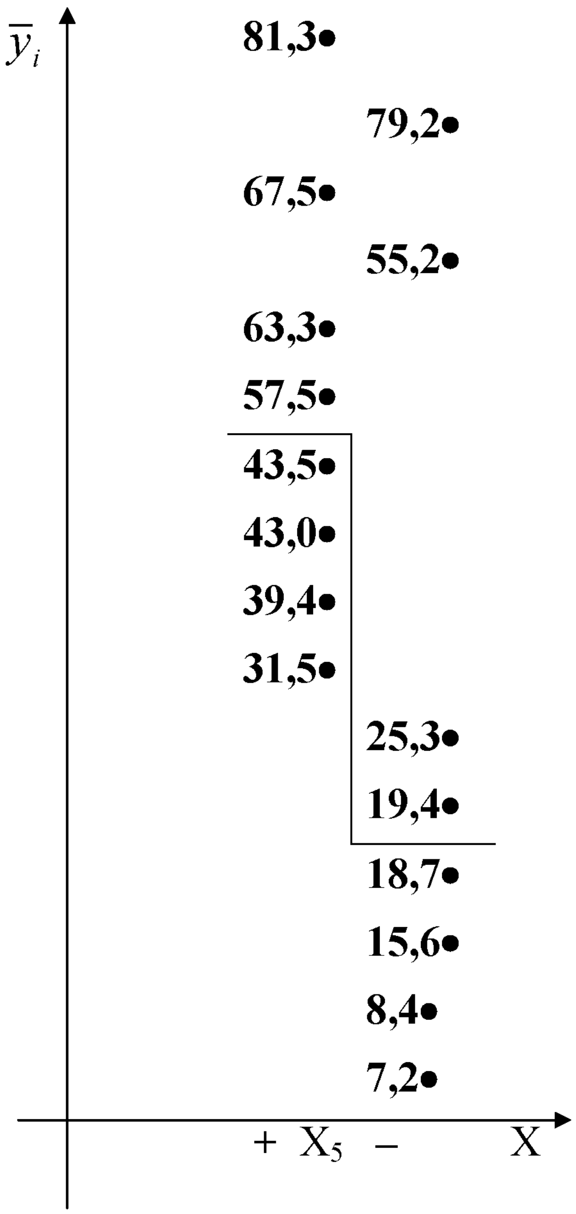

Рис. 7.4. Поле рассеяния для фактора X_5

Если в результате сопоставления разных медиан окажутся равноценно значимы сразу несколько факторов: X_r; X_m; X_k , то поступают следующим образом: строят таблицу (табл. 7.6), в соответствующие графы которой заняты значения y'_l, полученные при соответствующих сочетаниях факторов, и находят среднее значение выходной величины для каждой графы. Например, y'_1 равно сумме значений, полученных, когда X_r, X_m, X_k принимают значение +1, деленной на число этих значений.

Например: $X_m = X_6$; $X_r = X_7$; $X_k = X_8$.

Таблица 7.6

$+X_r$ (X_7)			$-X_r$	
	$+X_k$ (X_8)	$-X_k$	$+X_k$	$-X_k$
$+X_m$ (X_6)	y'_1	y'_2	y'_3	y'_4
$-X_m$	y'_5	y'_6	y'_7	y'_8

Из табл. 7.5 следует: $y'_1 = (y_2 + y_6)/2$ = (79,2 + 49,9)/2 = 64,55.

Оценки вкладов факторов определяются разностью между суммами средних значений для уровней «плюс» и «минус»:

$$B_r = \frac{y'_1 + y'_2 + y'_5 + y'_6}{4} - \frac{y'_3 + y'_4 + y'_7 + y'_8}{4},$$

аналогично для $B_m; B_k$.

Определив B_j, можно найти приближенную оценку коэффициента b_i. Полученные оценки коэффициентов проверяют на значимость по t-критерию Стьюдента.

Условие значимости имеет вид $/b_i/ \geq t_{kp} S_{b_i}$. Для определения $S^2_{(b_i)}$ необходимо вычислить дисперсию каждой *i*-й графы таблицы:

$$S_i^2 = \sum_{u=1}^{l} (y_{iu} - y_i)^2 / f_i \, ,$$

где $f_i = l_i - 1$ – число степеней свободы; l_i – число значений выходной величины, «попавшее» в *i*-ю графу таблицы; $i = 1 \ldots n -$текущий номер графы таблицы.

Затем определяют усредненное значение дисперсии всех граф таблицы (аналогично усреднению построчных дисперсий для получения дисперсии воспроизводимости):

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} S_i^2 f_i / \sum_{i=1}^{n} f_i \, .$$

Если число степеней свободы f_i для каждой из граф одиноково, то последнее выражение можно переписать в виде $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} S_i^2}{n}$, где *n* – число граф таблицы.

В результате получаем оценку дисперсии коэффициента регрессий

$$S_{b_i}^2 = \frac{S^2}{\sum_{i=1}^{n} l_i}$$

с числом степеней свободы $f = \sum_{i=1}^{n} l_i - n$.

Такую проверку значимости можно проводить в том случае, когда каждая графа таблицы содержит по меньшей мере два значения входной величины.

Если в результате проверки статистической значимости коэффициентов окажется, что коэффициент при одном из факторов, например X_r, незначим, то для дальнейшего выявления существенных факторов необходимо из вектор-столбца выходных величин вычитать значения B_m или (и) B_k для тех строчек матрицы отсеивающего эксперимента, когда фактор X_m=+1 или (и) X_k =+1.

После расстановки и ранжировки существенных факторов необходимо установить парные значимые взаимодействия. Построение диаграммы рассеяния для большого числа взаимодействий – трудная, да и ненужная задача. Значимые парные взаимодействия можно определить на основе визуального изучения диаграммы рассеяния для независимых переменных. Для того чтобы парное взаимодействие факторов X_j и X_k отнести к числу существенных, необходимо, чтобы на уровнях $X_jX_k = +1$ и $X_kX_j = -1$ были «выделяющиеся» точки. Из этого следует, что наибольшее число «выделяющихся» точек, а следовательно, наибольший вклад вносит то взаимодействие X_kX_j, у которого факторы X_k и X_j будут иметь большее число «выделяющихся» точек как на одинаковых, так и на разных уровнях; у таких факторов нижняя часть диаграммы должна быть похожа на зеркальное отображение верхней.

Процесс выделения существенных факторов заканчивается на основании F-критерия Фишера. После очередного этапа выделения значимых факторов и исключения их влияния на выходную величину определяют дисперсию преобразованного вектор-столбца y^m выходной величины по отношению к ее среднему:

$$S_{cp}^2 = S_m^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i^m - y^m)^2,$$

где m – номер шага выделения существенных переменных; N – число строк в общей матрице отсеивающего эксперимента; $y^m = \sum_{i=1}^{N} y_i^m / N$ – среднее значение вектор-столбца преобразованных выходных величин на m-м шаге выделения существенных факторов.

Эту дисперсию сравнивают с оценкой дисперсии погрешности измерения $S^2(S^2_{(y)})$, которую вычисляют на основании серии дополнительных опытов. Для этого рассчитывают значение коэффициента Фишера:

$$F_{расч} = S^2{}_{cp} / S^2$$

и сравнивают с табличным при числе свободы числителя $(N–1)$ и знаменателя (u – 1), где u – число параллельных опытов.

Процесс уменьшения дисперсии $S^2{}_{cp}$ является быстросходящимся. Когда $F_{расч}$ будет больше $F_{табл}$, то дисперсия измерения будет соизмерима с дисперсией выходной величины, обусловленной изменением оставшихся невыделенных факторов. На этом процесс выделения существенных факторов заканчивается, а невыделенные факторы относятся к «шуму» – к несущественным входным переменным, мало влияющим на входную величину.

Пример. Применение метода случайного баланса рассмотрим на примере оценки влияния факторов на величину коэффициента трения скольжения. В качестве трущейся пары использовали: пластмасса (капрон Б) – металл (сталь марки 45 в нормализованном состоянии); смазка – масло индустриальное 20; изучалось граничное трение. Наименование независимых переменных и уровни их варьирования даны в табл. 7.7.

Таблица 7.7

№ п/п	Факторы	Обозначение		Уровни варьирования		
				кодовые		
		натуральное	кодовое	0	+1	–1
				натуральные		
1	Среднее удельное давление, кгс/см^2	*p*	X_1	6,84	10,8	2,8
2	Скорость скольжения, м/с	*v*	X_2	0,59	0,90	0,28
3	Расход смазки, см^3/ч	*q*	X_3	8,5	12	5
4	Начальная шероховатость поверхности вала, мкм	*Ra*	X_4	1,575	0,65	2,5
5	Диаметр вала, мм	*D*	X_5	75	110	40

Для построения матрицы случайного баланса применяли полуматрицу полного факторного эксперимента типа 2^3. Первые три столбца (факторы X_1, X_2; X_3) были построены по обычному плану. Они составили полуреплику типа 2^{3-1}.

Факторы X_4 и X_5 образовали вторую полуреплику при генерирующих соотношениях: $X_4 = (–X_1 X_2)$ и $X_5 = (–X_2 X_3)$.

В качестве параметра оптимизации примем коэффициент трения *f*.

Матрица планирования и результаты эксперимента представлены в табл. 7.8.

Таблица 7.8

№ опыта	Уровни факторов, их значения					Параметр оптимизации. Коэффициент трения			
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Значение текущих опытов			Среднее значение
	p	*v*	*q*	*Ra*	*D*	y_1	y_2	y_3	$\bar{y}$
1	+ 10,80	+ 0,90	+ 12	– 2,5	– 40	0,065	0,075	0,080	0,0755
2	+ 10,80	+ 0,90	– 5	– 2,5	+ 110	0,12	0,13	0,15	0,1330
3	+ 10,80	– 0,28	+ 12	+ 0,65	+ 110	0,065	0,060	0,060	0,0617
4	+ 10,80	– 0,28	– 5	+ 0,65	– 40	0,069	0,070	0,060	0,0660
5	– 2,88	+ 0,90	+ 12	– 0,65	– 40	0,030	0,040	0,030	0,0334
6	– 2,88	+ 0,90	– 5	+ 0,65	+ 110	0,052	0,050	0,055	0,0529
7	- 2,88	- 0,28	+ 12	- 2,5	+ 110	0,040	0,045	0,035	0,0400
8	– 2,88	– 0,28	– 5	– 2,5	– 40	0,041	0,040	0,050	0,0430

Для предварительного анализа значимости влияния отдельных факторов на параметр оптимизации – коэффициент трения – построены диаграммы рассеивания средних значений результатов наблюдений по уровням факторов (по исходным данным табл. 7.8, рис. 7.5). Для этого по оси абсцисс отложены все факторы с их уровнями (+ или –), а по оси ординат – значения критерия оптимизации, полученные в результате испытаний (табл. 7.8). Причем каждый фактор рассматривали независимо от других.

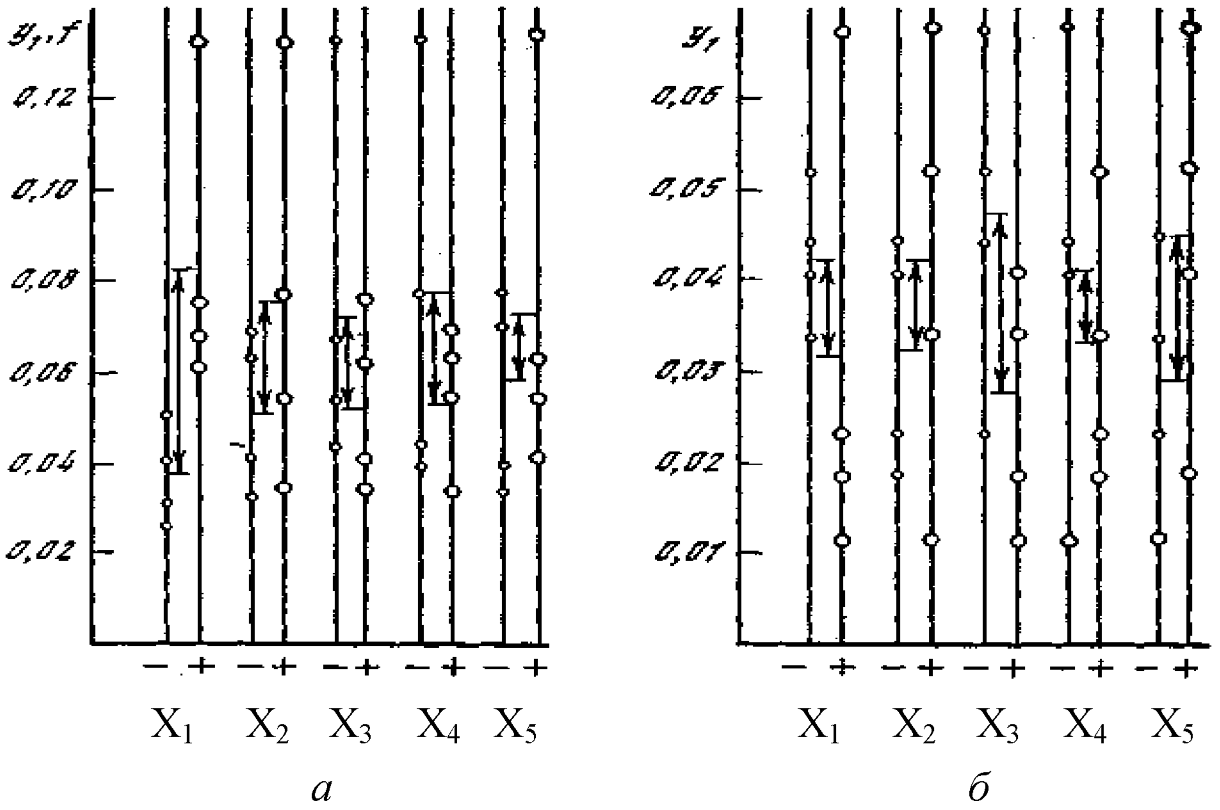

Рис. 7.5. Диаграмма рассеяния для y_1 (f):
а – по исходным данным; *б* – по корректированным данным

Численные значения медиан параметра оптимизации (коэффициента трения) даны в табл. 7.9.

По диаграммам (рис. 7.5) визуально выделены значимые линейные эффекты. Для этого сравнивали между собой медианы при верхнем (+) и нижнем (–) уровнях. Считалось, что чем больше расстояние между медианами, тем выше статистическая значимость фактора. Также можно принимать во внимание количество точек, выделяющихся в верхней и нижней частях диаграммы рассеивания. Чем больше выделяющихся точек, тем сильнее влияние данного фактора на параметр оптимизации.

Таблица 7.9

Факторы и их значения		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
		кгс/см^2	м/с	см^3/ч	мкм	мм
Значения медиан параметра оптимизации *f* для различных уровней факторов	Верхн.+	0,0844	0,0737	0,0526	0,0537	0,0718
	Нижн. –	0,0391	0,0485	0,0740	0,0730	0,0547
Разность значений медиан		+ 0,0453	+ 0,0252	– 0,0214	– 0,0193	+ 0,0171

Например, при анализе диаграмм рассеяния (рис. 7.5, *а*) для параметра оптимизации *y* (коэффициента трения *f*) существенное влияние оказывает фактор X_1 (удельная нагрузка на подшипник), так как расстояние между медианами для уровней наибольшее (по сравнению с другими факторами и их эффектами). Для фактора X_1 на уровне (+) имеются четыре точки, для которых значения выхода *y* больше, чем самое большое значение выхода на нижнем уровне (–). Из двух факторов X_3 (расход смазки *q*) и X_4 (первоначальная шероховатость поверхности вала *Ra*) – надо было выбрать наиболее значимый. По разности медиан некоторое предпочтение имел фактор X_3. Суммарное значение выделяющихся точек для X_3 равно трем, для фактора X_4 – также трем. При их равнозначности все же некоторое предпочтение следует отдать фактору X_3 – расходу смазки *q*. По аналогичной методике были проанализированы и остальные факторы.

Предварительная последовательность факторов по значимости их влияния на параметр оптимизации оказалась следующей: X_1 (удельная нагрузка *p*), X_2 (скорость скольжения *v*), X_3 (расход смазки *q*), X_4 (шероховатость поверхности *Ra*), X_5 (диаметр вала *D*) (рис. 7.5, *а*). Однако факторы X_1, X_2 и X_2 имеют почти одинаковую значимость, поэтому следует произвести дополнительно ранжировку факторов и их взаимодействий по количественной оценке. Значимость факторов X_1, X_2 оценивали с помощью табл. 7.10 с двумя входами.

Отсюда получали эффекты факторов:

$$B_1 = (\bar{y}_1' + \bar{y}_3')/2 - (\bar{y}_2' + \bar{y}_4')/2 = (0{,}1042+0{,}0638)/2 - (0{,}0431+0{,}0415)/2 = = 0{,}0417;$$

$$B_2 = (\bar{y}_1' + \bar{y}_2')/2 - (\bar{y}_3' + \bar{y}_4')/2 = (0{,}1042+0{,}0430)/2 - (0{,}0638+0{,}0415)/2 = = 0{,}02105.$$

Для оценки значений эффектов факторов определяли их значимость по t-критерию, который рассчитывали по формуле

$$t = [(y_1+y_3 + ... +y_n) - (y_2+ y_4 + ... +y_{n+1})]/S\sqrt{\sum \frac{1}{l_1}},$$

где t – средняя квадратическая ошибка, характеризующая рассеяние относительно средних значений $\bar{y}$ (в клетках табл. 7.10), в данном случае с двумя входами (статистическое рассеяние); $S = \sqrt{\frac{\sum \bar{y}_i^2}{l_i - 1} - \frac{(\sum y_i)^2}{l_i(l_i - 1)}}$;

l_i – число опытов в клетке табл. 7.10 с двумя входами.

Для вычисления t-критерия использовали табл. 7.11. Далее рассчитывали t-критерии для факторов X_1 и X_2:

$$t_{x1} = \left(\frac{(\bar{y}_1' + \bar{y}_3') - (\bar{y}_2' + \bar{y}_4')}{\sqrt{\sum s^2 / l_i}}\right) = \left(\frac{(0{,}1042 + 0{,}0638) - (0{,}0431 + 0{,}0415)}{0{,}00092}\right) = 2{,}75;$$

$$t_{x2} = \left(\frac{0{,}1473 - 0{,}1053}{0{,}03033}\right) = \frac{0{,}0420}{0{,}03033} = 1{,}396 = 1{,}40.$$

Таблица 7.10

Факторы	$+X_1$	$-X_1$
$+X_2$	0,0755 + 0,1330 $\sum y'_1 = 0{,}2085$ $\bar{y}'_1 = 0{,}1042$	0,0334 + 0,0529 $\sum y'_2 = 0{,}0863$ $\bar{y}'_2 = 0{,}0431$
$-X_2$	0,0617 + 0,0660 $\sum y'_3 = 0{,}1277$ $\bar{y}'_3 = 0{,}0638$	0,0400 + 0,0430 $\sum y'_4 = 0{,}0830$ $\bar{y}'_4 = 0{,}0415$

Таблица 7.11

№ клетки табл.	l_i	$\sum y'_i$	$(\sum y'_i)^2$	$\sum \bar{y}'^2_i$	S^2	S^2/l_i
1	2	0,2085	0,043472	0,023389	0,001653	0,000826
2	2	0,0863	0,007482	0,003915	0,000172	0,000086
3	2	0,1277	0.016307	0,008163	0,000010	0,000005
4	2	0,0830	0,006889	0,003449	0,000005	0,000003
						$\sum$ 0,000920

При 5-процентном уровне значимости и числе степеней свободы $f = \sum l_i - k = 8 - 4 = 4$ (где k – число клеток, табл. 7.11) табличное значение t-критерия равно 2,78. Так как $t_{расч} > t_{табл}$, можно считать эффект фактора X_1 статистически значимым.

Для фактора X_2 табличное значение критерия равно 1,20 при уровне значимости 30 % и числе степени свободы $f = 4$. Последнее говорит о том, что X_2 влияет менее значимо, чем X_1, или для него взят узкий интервал варьирования.

После оценки эффектов факторов X_1 и X_2 было произведено корректирование результатов опытов для более четкого выделения менее сильнодействующих факторов и их парных взаимодействий. Для «снятия» действия выделенных эффектов факторов X_1 и X_2 по всем результатам на уровне $+X_1$ прибавляли -0,0417, а на уровне $+X_2$ прибавляли –0,0210.

Результаты пересчета значений параметра оптимизации $\bar{y}$ даны в табл. 7.12.

Таблица 7.12

№ опыта	Уровни факторов, их значения					Пересчетный критерий оптимизации
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
	p	*v*	*q*	*Ra*	*D*	$\bar{y}$
1	+ 10,80	+ 0,90	+ 12	– 2,5	– 40	0,0128
2	+ 10,80	+ 0,90	– 5	– 2,5	+ 110	0,0703
3	+ 10,80	– 0,28	+ 12	+ 0,65	+ 110	0,0200
4	+ 10,80	– 0,28	– 5	+ 0,65	– 40	0,0246
5	– 2,88	+ 0,90	+ 12	– 0,65	– 40	0,0124
6	– 2,88	+ 0,90	– 5	+ 0,65	+ 110	0,0319
7	– 2,88	– 0,28	+ 12	– 2,5	+ 110	0,0400
8	– 2,88	– 0,28	– 5	– 2,5	– 40	0,0430

Для скорректированных результатов эксперимента были построены новые диаграммы рассеивания, включая оставшиеся линейные эффекты и некоторые парные эффекты взаимодействия (рис. 7.5, *б*).

Численные значения медиан факторов для параметра оптимизации $\bar{y}(f)$ даны в табл. 7.13. Для оценки выделенных эффектов строим вспомогательную табл. 7.14.

Отсюда

$B_1 = (\bar{y}'_1 + \bar{y}'_3)/2 - (\bar{y}'_2 + \bar{y}'_4)/2 = (0{,}0416+0{,}0221)/2 - (0{,}0221+0{,}0415)/2 =$
$= -0{,}00005;$

$B_2 = (\bar{y}'_1 + \bar{y}'_2)/2 - (\bar{y}'_3 + \bar{y}'_4)/2 = (0{,}0416+0{,}0221)/2 - (0{,}0221+0{,}0415)/2 =$
$= -0{,}00005.$

Таблица 7.13

Факторы	Кодовые	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
	Натуральные	*p*	*v*	*q*	*Ra*	*D*
Медианы для оптимизации	–	0,0424	0,0310	0,0466	0,406	0,0276
	+	0,0300	0,0414	0,0526	0,0320	0,0448

Таблица 7.14

Оцениваемые эффекты	$+X_1$	$-X_1$
$+X_2$	0,0128 + 0,0703 $\Sigma y'_1 = 0{,}0831$ $\bar{y}'_1 = 0{,}0416$	0,0124 + 0,0319 $\Sigma y'_2 = 0{,}0443$ $\bar{y}'_2 = 0{,}0221$
$-X_2$	0,0200 + 0,0243 $\Sigma y'_3 = 0{,}0443$ $\bar{y}'_3 = 0{,}0221$	0,0400 + 0,0430 $\Sigma y'_4 = 0{,}0830$ $\bar{y}'_4 = 0{,}0415$

После оценки эффектов факторов X_1 и X_2 по t-критерию они оказываются статистически незначимыми. По аналогичной методике выделялись эффекты от факторов X_3 , X_4 , X_5 и парных взаимодействий:

$$X_1X_2,\ X_1X_3,\ X_1X_4,\ X_1X_5,\ X_2X_3,\ X_2X_4,\ X_2X_5,\ X_3X_4,\ X_3X_5,\ X_4X_5.$$

Окончательная диаграмма выделенных эффектов отдельных факторов и их взаимодействий представлена на рис. 7.6.

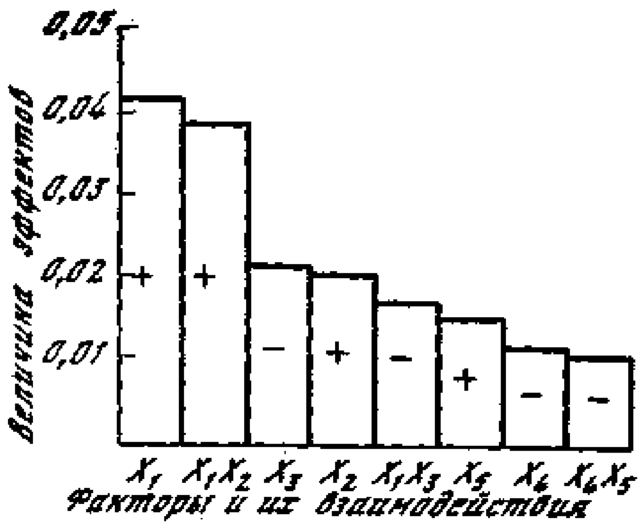

Рис. 7.6. Диаграмма выделенных эффектов отдельных факторов

В табл. 7.15 даны статистически значимые величины эффектов факторов и их двойных взаимодействий с учетом знаков и их ранжировки по значимости и t-критерию.

Момент прекращения отсеивания эффектов оценивали с помощью F-критерия:

$$F_p = S^2_{cp} / S^2,$$

где S^2_{cp} – дисперсия результатов опытов относительно среднего арифметического этих результатов; $S^2(S^2_{(y)})$ – дисперсия, подсчитанная по результатам нескольких параллельных опытов в центре экспериментального пространства.

Таблица 7.15

№ факторов	Обозначение факторов	Критерий		Уровень значимости	Величина эффекта	Знаки эффекта
		табличный	расчетный			
1	$X_1 - p$, кгс/см^2	2,78	2,80	0,05	0,0417	+
2	$X_1X_2 - pv$, кгс/см$^2 \cdot$ м/с	2,17	2,48	0,10	0,386	+
3	$X_3 - q$, см^3/ч	1,50	1,68	0,20	0,0211	–
4	$X_2 - v$, м/с	1,20	1,40	0,30	0,0210	+
5	$X_2X_3 - vq$, м/с$\cdot$ см^3/ч	2,13	2,46	0,10	0,0173	–
6	$X_5 - D$, мм	0,74	0,82	0,50	0,0148	+
7	$X_4 - Ra$, мкм	0,74	0,25	0,50	0,0112	–
8	$X_4X_5 - RaD$, мкм$\cdot$ мм	1,50	1,98	0,20	0,0099	–

Примечание. Величины значений выделенных эффектов для остальных двойных взаимодействий оказались статистически незначимы и были опущены.

Для определения значения $S^2_{ср}$ проводили несколько параллельных опытов на нулевом уровне (табл. 7.16).

Таблица 7.16

№ опыта	Значение факторов					Параметр оптимизации
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
1	7,0	0,5	9,0	1,5	80	0,0592
2	7,0	0,6	8,0	1,5	74	0,0715
3	6,5	0,5	8,0	1,5	74	0,0645
4	6,0	0,6	8,5	1,5	80	0,0650

Затем находилось среднее значение параметра оптимизации:

$$\bar{y} = (\sum y)/4 = 0{,}2602/4 = 0{,}065.$$

В табл. 7.17 представлен расчет дисперсии параллельных опытов в центре эксперимента.

$$S^2 = (\sum S^2)/l - 1 = (73{,}45 \cdot 10^{-6})/4 - 1 = 24{,}5 \cdot 10^{-6}.$$

Таблица 7.17

№ опыта	y_i	$y_i - \bar{y}$	S^2
1	0,0592	+0,0058	$33{,}70 \cdot 10^{-6}$
2	0,0715	–0,0065	$39{,}50 \cdot 10^{-6}$
3	0,0645	+0,0005	$0{,}25 \cdot 10^{-6}$
4	0,0650	0	0
			$\sum S^2 = 73{,}45 \cdot 10^{-6}$

Дисперсии опытов при выделении X_1 , X_2: $S^2_{1ср} = 9{,}0 \cdot 10^{-4}$;

при выделении X_1 , X_2 и X_3: $S^2_{2ср} = 6{,}13 \cdot 10^{-4}$;

при выделении X_4 , X_5: $S^2_{2ср} = 2{,}02 \cdot 10^{-4}$ и т. д. На основании табл. 7.16 и приведенных значений $S^2_{iср}$ получены F-критерии:

1. $F_1 = S^2_{1ср} / S^2 = (9{,}0 \cdot 10^{-4})/24{,}5 \cdot 10^{-6} = 36{,}73.$
2. $F_2 = S^2_{2ср} / S^2 = (6{,}13 \cdot 10^{-4})/24{,}5 \cdot 10^{-6} = 25{,}02.$
3. $F_3 = S^2_{3ср} / S^2 = (2{,}02 \cdot 10^{-4})/24{,}5 \cdot 10^{-6} = 52{,}73$ и т. д.

Табличное значение F-критерия при числе степеней свободы для большей $f = 7$ и меньшей $f = 3$ дисперсий при доверительной вероятности 0,95 равно $F_{табл}$ = 8,84. Следовательно, гипотеза об остаточном рассеянии за счет ошибок опытов может быть принята с 95-процентной доверительной вероятностью, так как $F_{расч} < F_{табл.}$

На основании анализа данных табл. 7.14 и диаграммы выделенных эффектов (рис. 7.6) сделаны следующие выводы.

1. Наибольшее влияние на изменения коэффициента трения металлополимерной пары при данных режимах оказывает фактор X_1 – удельное давление *(p)* и двойное взаимодействие факторов X_1X_2 *(pv)* – произведение нагрузки *p* на скорость *v*. С повышением этих факторов значение коэффициента трения возрастает.

2. Следующими по значимости факторами, влияющими на коэффициент трения, являются фактор X_3 – удельный расход смазки *q* и фактор X_2 – скорость скольжения *v*. С увеличением расхода смазки коэффициент трения понижается, а с ростом скорости – возрастает. Однако при одновременном увеличении расхода смазки *q* и скорости скольжения *v* коэффициент трения снижается и наоборот.

3. Влияние геометрических параметров узла трения, определяемых диаметром вала *D* (фактор X_5) и первоначальной шероховатостью стального вала *Ra* (фактор X_4), на коэффициент трения менее значительно, также незначительно влияет и их парное взаимодействие. С увеличением диаметра вала коэффициент трения будет несколько возрастать, а с уменьшением шероховатости – снижаться.

4. Следует считать, что основными факторами, определяющими процесс трения пары пластмасса (капрон Б) – металл (сталь марки 45 незакаленная), являются нагрузка *p* (фактор X_1), расход смазки *q* (фактор X_3), скорость скольжения *v* (фактор X_2) и их парные взаимодействия.

7.3. Разбиение факторных планов на блоки

Полный факторный план с n_a уровнями фактора A, n_b уровнями фактора B и т. д. требует $N_1 = n_a\, n_b \ldots$ измерений отклика. Это число может оказаться настолько большим, что возникают сомнения в целесообразности проведения экспериментов. Поэтому необходимо найти такие части факторного плана, которые позволят получить лучшие результаты при минимальных затратах.

Части факторных планов (ПФЭ) называют **блоками**. Чаще всего в качестве блоков рассматривают источники неоднородностей, лежащие в основе эксперимента:

– при изучении различных технических систем – отдельные подсистемы, технические характеристики подсистем;

– в микроэлектронике при исследовании свойств интегральных схем – различные кристаллические структуры, способы крепления выводов и др.;

– в промышленных экспериментах при изучении загрузки цехов – отдельные участки, рабочие места, группы специалистов, рабочие смены и др.;

– при физико-химических исследованиях свойств различных материалов, например при изучении коррозийной стойкости материалов, – методы нанесения покрытий, способы механической обработки материалов и т.д.

Блочное планирование широко применяется при планировании экспериментов в биологических, технических, химических, технологических и промышленных исследованиях. Теорию блочного планирования используют как математический аппарат при построении других планов, например ПФЭ, ДФЭ второго и третьего порядков.

Рассмотрим эксперимент с тремя неизвестными переменными (факторами) X_1; X_2; X_3, варьирующими на двух уровнях. Чтобы исчерпать все возможные комбинации этих факторов, нужно поставить 8 опытов (табл. 7.18), где буквы *a, b, c* обозначают, что в соответствующих строчках на уровне +1 был только один из факторов X_1; X_2; X_3:

– произведение трех букв *abc* – на верхнем уровне были все три фактора;

– символ (+1) – все факторы были на нижнем уровне;

– произведение двух букв *ac*, *b*c, *ab* – в соответствующих строчках на верхних уровнях были два фактора X_1 и X_3 ; X_2 и X_3 ; X_1 и X_2 .

С помощью такого кодового обозначения матрицу планирования, представленную в табл. 7.18, можно записать одной строчкой.

Таблица 7.18

Блоки	№ опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	Кодовое обозначение строк	Вектор выхода *y*
1	1	+	–	–	+	+	–	–	+	*c*	$y_1 + \beta_q$
	2	+	+	–	–	–	–	+	+	*a*	$y_2 + \beta_q$
	3	+	–	+	–	–	+	–	+	*b*	$y_3 + \beta_q$
	4	+	+	+	+	+	+	+	+	*abc*	$y_4 + \beta_q$
2	5	+	–	–	–	+	+	+	–	(1)	$y_5 - \beta_q$
	6	+	+	–	+	–	+	–	–	*ac*	$y_6 - \beta_q$
	7	+	–	+	+	–	–	+	–	*bc*	$y_7 - \beta_q$
	8	+	+	+	–	+	–	–	–	*ab*	$y_8 - \beta_q$

Матрицу планирования в кодовых обозначениях для трех независимых переменных получают из планирования для двух переменных, повторив его дважды: первый раз при значениях X_3, находящихся на нижнем уровне, второй раз – на верхнем уровне. Если нужно включить в рассмотрение четвертый фактор X_4, то аналогичным образом дважды повторяют планирование для трех переменных: один раз для фактора X_4, находящегося на нижнем уровне, другой раз – на верхнем. В результате получают матрицу планирования, которая будет представлена следующей строчкой:

(1) *a, b, ab, c, ac, bc, abc, d, ad, abd, cd, acd, bcd, abcd.*

Аналогичным образом можно построить планы для сколь угодно большого числа независимых переменных.

Воздействие неуправляемых временных изменений некоторых факторов на план называется **временным дрейфом.**

Влияние этого временнóго дрейфа на параметры математического моделирования процесса можно устранить, разбив серию опытов на отдельные блоки так, чтобы эффект от временного дрейфа оказался смешанным с произведением факторов, для которых коэффициенты регрессии достаточно малы. Допустим, нужно устранить влияние временного дрейфа на параметры управления регрессии, получаемого в результате полного трехфакторного эксперимента. С этой целью разобьем эксперимент на два блока и введем новую независимую переменную $X_q = X_1 X_2 X_3$, характеризующую дрейф.

В один из блоков отберем опыты, для которых $X_q = +1$, а в другой – для которых $X_q = –1$. Формально план, приведенный в табл. 7.18, можно рассматривать как эксперимент типа 2^{4-1} с генерирующим соотношением $I = X_1 X_2 X_3$. Исходя из матрицы планирования, можно считать, что в первом блоке все результаты опытов вследствие временно́го дрейфа превышены на β_q, а во втором – занижены на β_q (табл. 7.19).

Таблица 7.19

Блоки	X_1 X_2 X_3	Кодовое обозначение	Вектор выхода
1	+	*c*	$y_1 + \beta_q$
	+	*a*	$y_2 + \beta_q$
	+	*b*	$y_3 + \beta_q$
	+	*abc*	$y_4 + \beta_q$
2	–	(1)	$y_5 - \beta_q$
	–	*ac*	$y_6 - \beta_q$
	–	*bc*	$y_7 - \beta_q$
	–	*ab*	$y_8 - \beta_q$

Если уравнение регрессии записано в виде $y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + b_{23}X_2X_3 + b_{123}X_1X_2X_3$, то для коэффициентов регрессии b_i можно получить следующие оценки:

$$b_1 = 1/8\,[-(y_1+\beta_q) + (y_2+\beta_q) - (y_3+\beta_q) + (y_4+\beta_q) - (y_5-\beta_q) + (y_6-\beta_q) - (y_7-\beta_q) + (y_8-\beta_q)] = 1/8(-y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + y_6 - y_7 + y_8),$$

аналогично определяются другие коэффициенты, кроме b_{123}:

$$b_{123} = 1/8\,[(y_1+\beta_q) + (y_2+\beta_q) + (y_3+\beta_q) + (y_4+\beta_q) - (y_5-\beta_q) - (y_6-\beta_q) - (y_7-\beta_q) - (y_8-\beta_q)] = 1/8(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - y_5 - y_6 - y_7 - y_8) + b_q.$$

Все коэффициенты, кроме b_{123}, не содержат погрешностей, обусловленных временным дрейфом.

Временной дрейф смещает координаты экстремума поверхности облика без значимой ее деформации. Таким образом, если есть возможность отказаться от определения взаимодействий высокого порядка (в данном случае от третьего порядка), то за счет этого можно сократить число опытов по сравнению с планом ПФЭ.

Пример. Рассмотрим пример разбивки на блоки матрицы эксперимента 2^4. Известно, что имеются четыре источника неоднородностей, которые могут значительно исказить результаты эксперимента. Поэтому в данном случае матрицу 2^4 следует разбить на 4 блока, чтобы линейные эффекты были освобождены от влияния межблочного эффекта. Чтобы произвести разбивку на 4 блока по 4 опыта в каждом блоке, нужно выбрать три взаимодействия, которыми можно пожертвовать. Два таких взаимодействия можно выбрать произвольно (предпочтительно взаимодействие высокого порядка, которое можно считать пренебрежительно малым), а третье оказывается однозначно определенным по следующему правилу: нужно взять алгебраическое произведение первых двух выбранных взаимодействий и заменить единицей каждый множитель, стоящий в квадрате. Так, если выбраны парные взаимодействия X_1X_2 и X_3X_4, то третьим будет $X_1X_2X_3X_4$. Если выбраны тройные взаимодействия $X_1X_2X_3$ и $X_2X_3X_4$, то третьим будет $X_1 X_4$.

Матрицу планирования эксперимента 2^4 разбиваем на блоки (табл. 7.20).

Межблочные эффекты отразятся на подсчете коэффициентов b_0, b_{14}, b_{123}, b_{234}.

Таблица 7.20

Блоки	Номер опыта	Кодовое обозначение	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_1X_2	X_1X_3	X_1X_4	X_2X_3	X_2X_4	X_3X_4	$X_1X_2X_3$	$X_1X_3X_4$	$X_1X_2X_4$	$X_2X_3X_4$	$X_1X_2X_3X_4$	y
1	1	*(1)*	+	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	+	y_1
	2	*bc*	+	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	+	y_2
	3	*acb*	+	+	-	+	+	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-	-	y_3
	4	*abd*	+	+	+	-	+	+	-	+	-	+	-	-	-	-	-	-	y_4
2	5	*a*	+	+	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	y_5
	6	*abc*	+	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	-	-	-	y_6
	7	*cd*	+	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	-	+	-	+	y_7
	8	*bd*	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	y_8
3	9	*b*	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	-	+	+	-	y_9
	10	*c*	+	-	+	+	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	+	-	y_{10}
	11	*abcd*	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	y_{11}
	12	*ad*	+	+	+	-	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+	+	y_{12}
4	13	*d*	+	-	-	-	+	+	+	-	+	-	-	-	+	+	+	-	y_{13}
	14	*bcd*	+	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	-	y_{14}
	15	*ac*	+	+	-	+	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	+	+	y_{15}
	16	*ab*	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	+	-	+	+	+	+	y_{16}