

---

---

## 6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ ПЛАНОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

---

---

### 6.1. ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

#### 6.1.1. Общие сведения

В практике научных исследований чаще всего встречаются задачи, в которых параметр оптимизации зависит от нескольких факторов. Такие задачи могут решаться по-разному. Например, можно изучить поведение параметра оптимизации в зависимости от каждого фактора в отдельности и получают несколько уравнений, выражающих их взаимосвязь (пример: метод наименьших квадратов).

Другой метод заключается в том, что в каждом опыте эксперимента варьируются все факторы одновременно, а затем, после обработки экспериментальных данных, получают единое уравнение, описывающее изучаемый процесс. Если факторы варьируются в опытах по определенному типу, то такой эксперимент называют «активным». Если же варьировать факторы по определенному плану по каким-либо причинам не представляется возможным, то такой эксперимент называют «пассивным» (метод наименьших квадратов).

**Полный факторный эксперимент (ПФЭ)** – это эксперимент, в котором реализуются все возможные, неповторяющиеся комбинации уровней факторов.

Если **число факторов** равно  $k$ , а **число уровней** каждого из них равно  $S$ , то **число комбинаций (опытов)**  $N$  при ПФЭ будет равно:  $N = S^k$ .

Обычно встречаются планы эксперимента типа  $2^k$  (два уровня варьирования факторов), реже  $3^k$  и очень редко при  $S > 3$  в связи с резким ростом числа независимых опытов (табл. 6.1).

**Пример :**  $2^2 = 4$  опыта     $2^3 = 8$  опытов     $2^4 = 16$  опытов  
 $3^2 = 9$      $3^3 = 27$      $3^4 = 81$   
 $4^2 = 16$      $4^3 = 64$      $4^4 = 256$

Таблица 6.1

$S \backslash k$	2	3	4
2	4	8	16
3	9	27	81
4	16	64	256

Наиболее широко применяются планы типа  $2^k$ .

**ПФЭ** – эксперимент  $N = 2^k$  – позволяет описать процесс математической моделью первого порядка вида

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i \neq j}^k b_{ij} x_i x_j. \quad (6.1)$$

Следует отметить, что порядок математического уравнения на единицу меньше, чем принятое в плане эксперимента число уровней факторов.

$2^k$  – два уровня варьирования факторов – верхний и нижний, кодирование факторов будет соответствовать +1, -1.

Этапы планирования и реализации ПФЭ:

- 1) выбор параметров оптимизации, факторов и уровней их варьирования ( $2^k$ );
- 2) кодирование факторов;

- 3) составление плана-матрицы (матрица планирования) эксперимента;
- 4) рандомизация опытов;
- 5) реализация плана эксперимента;
- 6) проверка однородности дисперсий параллельных опытов, их воспроизводимости;
- 7) расчет коэффициентов уравнения регрессии, их ошибок и значимости;
- 8) проверка адекватности модели.

Условия эксперимента обычно записывают в виде матриц планирования эксперимента (табл. 6.2), где строки соответствуют различным независимым опытам, а столбцы – значениям (уровням) факторов. На рис. 6.1 представлена геометрическая интерпретация ПФЭ.

*Таблица 6.2*

**Матрица планирования ПФЭ**

№ опыта	$X_1$	$X_2$	$y$
1	-1	-1	$y_1$
2	+1	-1	$y_2$
3	-1	+1	$y_3$
4	+1	+1	$y_4$

Каждая комбинация  $+1, -1$   $X_1X_2$  должна встречаться один раз.

В общем случае планы типа  $2^k$  геометрически представляют собой совокупность точек, расположенных в вершинах гиперкуба, раз-

мещенного в многомерном пространстве. Пространство, заключенное внутри гиперкуба, является областью планирования эксперимента.

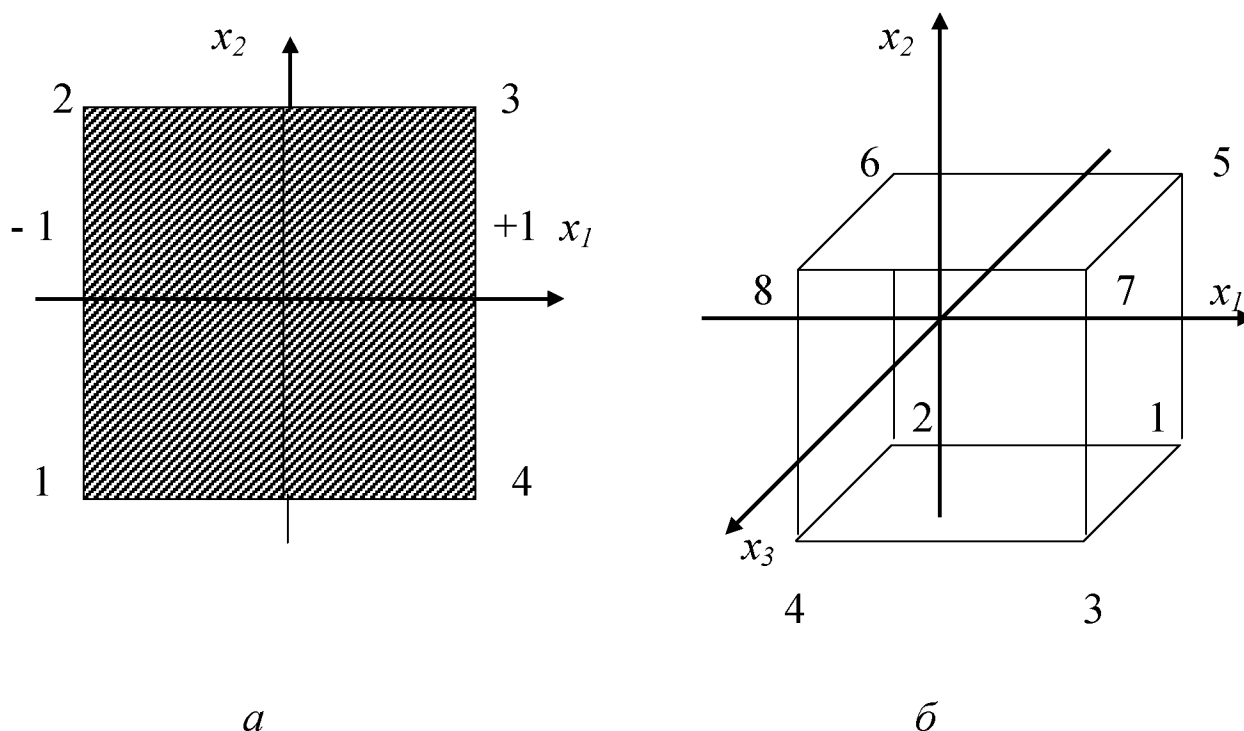


Рис. 6.1. Геометрическая интерпретация ПФЭ: *a* – в двухмерном пространстве ( $N = 2^2$ ); *б* – в трехмерном пространстве ( $N = 2^3$ )

Имеется несколько способов построения матрицы планирования большой размерности. Один из них основан на чередовании знаков: в первом столбце знаки меняются поочередно, во втором – через два, в третьем – через четыре и т. д.

В табл. 6.3 представлена матрица полного факторного эксперимента (от  $2^2$  до  $2^4$ ), построенная по данному способу. Вместо единиц с соответствующими знаками указаны только одни знаки. Такое обозначение возможно для полного факторного эксперимента, построенного на двух уровнях факторов.

Таблица 6.3

**Матрица планирования ПФЭ**

	№ опыта	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>
2 <sup>2</sup>	1	+	+	+	+
	2	-	+	+	+
	3	+	-	+	+
	4	-	-	+	+
2 <sup>3</sup>	5	+	+	-	+
	6	-	+	-	+
	7	+	-	-	+
	8	-	-	-	+
2 <sup>4</sup>	9	+	+	+	-
	10	-	+	+	-
	11	+	-	+	-
	12	-	-	+	-
	13	+	+	-	-
	14	-	+	-	-
	15	+	-	-	-
	16	-	-	-	-

**6.1.2. Свойства матрицы ПФЭ**

ПФЭ относится к числу планов, которые являются наиболее эффективными при построении линейных моделей. Эффективность достигается за счет следующих свойств.

**1. Симметричность** относительно центра эксперимента – алгебраическая сумма значений каждого из столбцов матрицы (кроме  $x_0$ ) равна нулю:

$$\sum_{u=1}^N X_{iu} = 0, \quad (6.2)$$

где  $u$  – номер фактора ( $u = 1, 2, \dots, k$ );  $i$  – номер опыта;  $N$  – число опытов.

**2. Условие нормировки** – сумма квадратов элементов каждого столбца-матрицы равна числу опытов:

$$\sum_{u=1}^N X_{iu}^2 = N. \quad (6.3)$$

Это является следствием того, что значения факторов в матрице задаются равными +1 и –1.

**3. Ортогональность** – сумма почленных произведений двух столбцов матрицы равна нулю:

$$\sum_{u=1}^N X_{iu} X_{ju} = 0 \quad j \neq i. \quad (6.4)$$

**4. Ротатабельность** – экспериментальные точки в матрице планирования располагаются так, чтобы точность предсказания параметра оптимизации была одинакова на равных расстояниях от центра плана и не зависела от направления.

### 6.1.3. Расчет коэффициентов регрессии

По результатам эксперимента находим значения коэффициентов регрессии  $b_i$  и  $b_{ij}$  (формула (6.1), табл. 6.2), позволяющие оценить сте-

пень воздействия факторов и их взаимодействий на параметр оптимизации. Чем больше численная величина коэффициента, тем большее влияние оказывает фактор. Если коэффициент имеет знак «+», то с увеличением значения фактора параметр оптимизации увеличивается, а если «-», – уменьшается. Величина коэффициента соответствует вкладу данного фактора в величину параметра оптимизации при переходе фактора с нулевого уровня на верхний или нижний. Иногда удобно оценивать линейный (главный) эффект фактора при переходе из нижнего уровня к верхнему. Численно он равен удвоенному коэффициенту полиномиальной модели  $2b_i$ .

$$b_i = \frac{\sum_{i=1}^N X_{ji} y_i}{N}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k. \quad (6.5)$$

$$y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2.$$

Для подсчета коэффициента  $b_1$  используют столбец  $X_1$ , а для  $b_2$  –  $X_2$ . Остается неясным, как определить  $b_0$ . Если наше уравнение  $\bar{y} = b_0 + b_1 \bar{X}_1 + b_2 \bar{X}_2$  справедливо, то оно верно и для средних арифметических значений переменных  $\bar{y} = b_0 + b_1 \bar{X}_1 + b_2 \bar{X}_2$ . Но в силу свойства симметрии  $\bar{X}_1 = \bar{X}_2 = 0 \rightarrow \bar{y} = b_0$ , где  $b_0$  есть среднее арифметическое значение параметра оптимизации.

Чтобы привести процедуру в соответствие с формулой для вычисления коэффициентов, в матрицу планирования удобно ввести столбец **фиктивной переменной**  $X_0$ , которая принимает во всех опытах значение +1 (табл. 6.4).

Если есть основания считать, что модель нелинейна, то следует ее усложнить. Один из часто встречающихся видов нелинейности связан с тем, что эффект одного фактора зависит от уровня, на кото-

ром находится другой фактор. В этом случае говорят, что существует эффект взаимодействия двух факторов. ПФЭ позволяет количественно оценить эффект взаимодействия. Для этого надо, пользуясь правилом перемножения столбцов, получить столбец произведения двух факторов (табл. 6.5).

Таблица 6.4

**Матрица планирования ПФЭ**

№ опыта	X <sub>0</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	y
1	+	-	-	y <sub>1</sub>
2	+	+	-	y <sub>2</sub>
3	+	-	+	y <sub>3</sub>
4	+	+	+	y <sub>4</sub>

$$b_1 = ((-1)y_1 + (+1)y_2 + (-1)y_3 + (+1)y_4)/4;$$

$$b_2 = ((-1)y_1 + (-1)y_2 + (+1)y_3 + (+1)y_4)/4; \quad (6.6)$$

$$b_0 = ((+1)y_1 + (+1)y_2 + (+1)y_3 + (+1)y_4)/4.$$

Таблица 6.5

**Матрица планирования ПФЭ**

№ опыта	X <sub>0</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>1</sub> X <sub>2</sub>	y
1	+	-	-	+	y <sub>1</sub>
2	+	+	-	-	y <sub>2</sub>
3	+	-	+	-	y <sub>3</sub>
4	+	+	+	+	y <sub>4</sub>

Теперь модель выглядит так:

$$y = b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_{12}X_1X_2$$

$$b_{12} = ((+1)y_1 + (-1)y_2 + (-1)y_3 + (+1)y_4)/4 \quad (6.7)$$

**Пример.** Рассчитать коэффициенты регрессии уравнения

$$y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_{12}X_1X_2.$$

Матрица планирования ПФЭ представлена в табл. 6.6.

Таблица 6.6

**Матрица планирования ПФЭ**

№ опыта	X <sub>0</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>1</sub> X <sub>2</sub>	y
1	+	-	-	+	95
2	+	+	-	-	90
3	+	-	+	-	85
4	+	+	+	+	82

$$b_1 = (-95 + 90 - 85 + 82)/4 = -2;$$

$$b_2 = (-95 - 90 + 85 + 82)/4 = -4,5;$$

$$b_0 = (95 + 90 + 85 + 82)/4 = 88;$$

$$b_{12} = (95 - 90 - 85 + 82)/4 = 0,5.$$

Для расчета коэффициентов существует и другой метод – **метод Йетса**. Рассмотрим этот метод на примере табл. 6.7.

Таблица 6.7

1	2	3
y <sub>1</sub>	y <sub>1</sub> +y <sub>2</sub>	y <sub>1</sub> +y <sub>2</sub> +y <sub>3</sub> +y <sub>4</sub>
y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub> +y <sub>4</sub>	y <sub>2</sub> -y <sub>1</sub> +y <sub>4</sub> -y <sub>3</sub>
y <sub>3</sub>	y <sub>2</sub> -y <sub>1</sub>	y <sub>3</sub> +y <sub>4</sub> -y <sub>1</sub> -y <sub>2</sub>
y <sub>4</sub>	y <sub>4</sub> -y <sub>3</sub>	y <sub>4</sub> -y <sub>3</sub> -y <sub>2</sub> +y <sub>1</sub>

Первый столбец – значения параметра оптимизации. Первая операция (второй столбец) состоит в попарном сложении и вычитании этих значений, причем верхнее число вычитается из нижнего.

Вторая операция (третий столбец) состоит в том же действии, но уже с числами второго столбца. Если теперь числа, оказавшиеся в третьем столбце, разделить на число опытов, то получим значения коэффициентов. Операции сложения и вычитания повторяются столько раз, сколько имеется факторов.

**Пример.** Рассчитать значение коэффициентов (*b*) по методу Йетса, воспользовавшись данными примера, приведенного выше.

Выполненные расчеты представлены в табл. 6.8.

Таблица 6.8

1	2	3	4	
95	95+90	95+90+85+82	88	$b_0$
90	85+82	90-95+82-85	-2	$b_1$
85	90-95	85+82-95-90	-4,5	$b_2$
82	82-85	82-85-90+95	0,5	$b_{12}$

В ПФЭ встречаются различные уровни взаимодействия факторов. В табл. 6.9 представлены такие взаимодействия.

Таблица 6.9

№ опыта	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_1X_2$	$X_1X_3$	$X_2X_3$	$X_1X_2X_3$	$y$
1	+	-	-	+	+	-	-	+	$y_1$
2	+	+	-	+	-	+	-	-	$y_2$
3	+	-	+	+	-	-	+	-	$y_3$
4	+	+	+	+	+	+	+	+	$y_4$
5	+	-	-	-	+	+	+	-	$y_5$
6	+	+	-	-	-	-	+	+	$y_6$
7	+	-	+	-	-	+	-	+	$y_7$
8	+	+	+	-	+	-	-	-	$y_8$

↑ ↑ ↑ ↑  
 Эффект взаимодействия первого порядка,  
 второго порядка.

Чтобы найти число возможных взаимодействий некоторого порядка, можно воспользоваться обычной формулой числа сочетаний

$$C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}, \quad (6.8)$$

где  $k$  – число факторов;  $m$  – число элементов во взаимодействии. Так, для плана  $2^4$  число взаимодействий равно 6:  $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$ .

Из ПФЭ нельзя извлечь информацию о квадратичных членах. Столбцы для квадратичных членов ( $X_1^2$ ;  $X_2^2$ ) совпадают друг с другом и со столбцом  $X_0$ .

В ПФЭ разность между числом опытов и числом коэффициентов велика. Возникает проблема уменьшения числа опытов. **Дробный факторный эксперимент** позволяет это осуществить.

## 6.2. ДРОБНЫЕ РЕПЛИКИ ОТ ПОЛНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

### 6.2.1. Общие сведения

Число опытов ПФЭ  $N = 2^k$  быстро растет с увеличением размерности факторного пространства « $k$ ». При больших значениях « $k$ » такие планы оказываются практически неприемлемы, т. к. количество опытов в плане значительно превышает число определяемых коэффициентов регрессии (табл. 6.10). В таком случае для наибольшей эффективности из множества точек может быть отобрана некоторая часть, например  $1/2$ ,  $1/4$  и т. д., представляющая **дробный факторный план (ДФЭ)**. Эксперимент, составляющий по объему только часть ПФЭ, называется **дробной репликой от полного факторного эксперимента**.

Таблица 6.10

Число факторов	Число опытов	Число оцениваемых коэффициентов линейного уравнения	Избыточность опытов	Число коэффициентов с учетом взаимодействий	Избыточность опытов
$k$	$N=2^k$	$k+1$	$2^k-(k+1)$	$k(k+1)/2+1$	$2^k-k(k+1)/2-1$
2	4	3	1	4	0
3	8	4	4	7	1
4	16	5	11	11	5
5	32	6	26	16	16
6	64	7	57	22	42
7	128	8	120	29	99
8	256	9	247	37	219

Рассмотрим принцип построения дробной реплики на примере двухфакторного эксперимента  $2^2$  (табл. 6.11). Параметр оптимизации выражается равенством  $y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_{12}X_1X_2$ .

Если есть основания полагать, что в выбранных интервалах варьирования  $y$  может быть представлен линейной моделью (т. е.  $b_{12} \rightarrow 0$ ), то достаточно определить только три коэффициента:  $b_0, b_1, b_2$ . Взаимодействие факторов  $X_1X_2$  отсутствует или несущественно, тогда в матрице плана ПФЭ вводят столбец  $X_3$  вместо  $X_1X_2$ , ( $X_3 = X_1X_2$ ). При этом получается матрица планирования для трех факторов, полностью совпадающая с матрицей планирования  $2^2$ . Планирование по такой матрице представляет собой планирование типа  $2^{3-1}$ , т. е. в основе лежит ПФЭ для  $3 - 1 = 2$  переменных. Построив 4 опыта для оценки влияния трех факторов, воспользовались половиной ПФЭ –  $2^3$ , или полурепликой. При этом матрица планирования не теряет своих оптимальных свойств (ортогональность, ротатабельность и т. д.).

Таблица 6.11

№ опыта	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_1X_2$ , ( $X_3 = X_1X_2$ )	$y$
1	+	-	-	+	$y_1$
2	+	+	-	-	$y_2$
3	+	-	+	-	$y_3$
4	+	+	+	+	$y_4$

**Правило:** Чтобы сократить число опытов, нужно новому фактору присвоить столбец матрицы, принадлежащий взаимодействию, которым можно пренебречь. Тогда значение нового фактора в условиях опытов определяется знаками этого столбца.

Если в дополнение к столбцам (табл. 6.11) вычислим еще столбцы для произведения  $X_1X_3$ ,  $X_2X_3$  и  $X_1X_2$ , то увидим, что элементы столбца  $X_1X_3 = X_2$ ,  $X_2X_3 = X_1$ ,  $X_1X_2 = X_3$  (табл. 6.12).

Таблица 6.12

№ опыта	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_1X_2$	$X_1X_3$	$X_2X_3$
1	+	-	-	+	+	-	-
2	+	+	-	-	-	-	+
3	+	-	+	-	-	+	-
4	+	+	+	+	+	+	+

Это означает, что невозможно отличить эффект  $X_1$  от эффекта  $X_2X_3$ , т. е. найденный коэффициент регрессии  $b_i$  будет служить совместной оценкой для  $\beta_1$  и  $\beta_{23}$ , что записывается как  $b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}$  и аналогично  $b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}$ ;  $b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}$ . Такие **оценки** называются **смешанными**.

Таким образом, мы смешали эффекты взаимодействия с основными эффектами из-за наличия корреляции. Так как модель является линейной, то предполагается, что эффекты взаимодействия близки к нулю и поэтому  $b_1 \cong \beta_1$ ,  $b_2 \cong \beta_2$ ,  $b_3 \cong \beta_3$ . В ходе эксперимента стремятся к тому, чтобы максимальное число линейных эффектов оказалось не смешанным с парными взаимодействиями. Число линейных эффектов, которые не смешаны в данном плане, называют **разрешающей способностью плана**.

Планирование  $2^{3-1}$  можно осуществлять иначе:  $X_3 = -X_1X_2$ ;  $X_1 = -X_2X_3$ ;  $X_2 = -X_1X_3$ , тогда  $b_1 \rightarrow \beta_1 - \beta_{23}$ ,  $b_2 \rightarrow \beta_2 - \beta_{13}$ ,  $b_3 \rightarrow \beta_3 - \beta_{12}$ .

Количество опытов ДФЭ рассчитывается по формуле

$$N = 2^{k-p}, \quad (6.9)$$

где  $k$  – число факторов;  $p$  – число факторов, приравненных к произведениям; 2 – число уровней варьирования факторов.

**Дробным факторным экспериментом** называется эксперимент, реализующий строго определенную часть полного факторного эксперимента.

*Пример.*  $2^{3-1}$  (рассмотренный выше случай)

$$2^3 = 8 \text{ опытов } 2^{3-1} = 4 \text{ опыта.}$$

Так, полуреплика от ПФЭ  $2^5$  ( $2^5 = 32$  опыта) записывается в виде  $2^{5-1}$  ( $2^{5-1} = 16$  опытов), а четверть от ПФЭ  $2^5$  в виде ( $2^{5-2} = 8$  опытов).

В табл. 6.13 приведены реплики, количество опытов для дробной реплики и число опытов полного факторного эксперимента.

Таблица 6.13

Число факторов $k$	Дробные реплики: $2^{k-p}$	Условное обозначение	Число опытов дробной реплики	Число опытов ПФЭ
3	$\frac{1}{2}$ реплики от $2^3$	$2^{3-1}$	4	8
4	$\frac{1}{2}$ реплики от $2^4$	$2^{4-1}$	8	16
5	$\frac{1}{2}$ реплики от $2^5$	$2^{5-1}$	16	32
5	$\frac{1}{4}$ реплики от $2^5$	$2^{5-2}$	8	32
6	$\frac{1}{2}$ реплики от $2^6$	$2^{6-1}$	32	64
6	$\frac{1}{4}$ реплики от $2^6$	$2^{6-2}$	16	64
6	$\frac{1}{8}$ реплики от $2^6$	$2^{6-3}$	8	64
7	$\frac{1}{4}$ реплики от $2^7$	$2^{7-2}$	32	128
7	$\frac{1}{8}$ реплики от $2^7$	$2^{7-3}$	16	128
7	$\frac{1}{16}$ реплики от $2^7$	$2^{7-4}$	8	128
8	$\frac{1}{8}$ реплики от $2^8$	$2^{8-3}$	32	256
8	$\frac{1}{16}$ реплики от $2^8$	$2^{8-4}$	16	256

### 6.2.2. Генерирующие соотношения и определяющие контрасты.

#### Выбор реплик

Перед построением плана эксперимента по дробной реплике необходимо определить те взаимодействия, которыми можно пренебречь при замене их новыми факторами.

Рассмотрим  $2^{3-1}$ ;  $X_3 = X_1X_2$ ;  $X_3 = -X_1X_2$ .

Матрица эксперимента представлена в табл. 6.14. Она состоит из двух частей: I часть для условия  $X_3 = X_1X_2$ , II часть для условия  $X_3 = -X_1X_2$ .

Таблица 6.14

I. $X_3 = X_1X_2$						II. $X_3 = -X_1X_2$					
№ опыта	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_1X_2X_3$	№ опыта	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_1X_2X_3$
1	+	+	+	+	+	1	-	+	+	-	-
2	+	-	-	+	+	2	-	-	-	-	-
3	+	+	-	-	+	3	-	+	-	+	-
4	+	-	+	-	+	4	-	-	+	+	-

Для произведения трех столбцов матрицы I выполняется соотношение  $+1 = X_1X_2X_3$ , а для матрицы II  $-1 = X_1X_2X_3$ . Произведения столбцов матрицы, равные  $+1$  или  $-1$ , называются **определяющим контрастом**.

Например, определяющий контраст может быть  $1 = X_1X_2X_3X_4$  или  $1 = X_1X_2X_3X_4X_5$  и т. д.

Определяющий контраст позволяет установить разрешающую способность дробной реплики, которая задается системой смешивания эффектов. Для того чтобы определить, какой эффект смешан с другими эффектами, нужно умножить обе части определяющего контраста на столбец эффекта, интересующего исследователя.

$$+1 = X_1X_2X_3$$

$$X_1 = X_1^2X_2X_3 = X_2X_3, \quad \text{так как } X_1^2 = 1$$

$$X_2 = X_1X_2^2X_3 = X_1X_3, \quad X_2^2 = 1$$

$$X_3 = X_1X_2X_3^2 = X_1X_2, \quad X_3^2 = 1$$

Эти соотношения указывают на равенство соответствующих столбцов в матрице планирования. Так, например, столбцы  $X_1$  и  $X_2X_3$  одинаковы. Поэтому  $b_1$  оценивается как  $\beta_1 + \beta_{23}$  и записывается  $b_1 = \beta_1 + \beta_{23}$ ,  $b_2 = \beta_2 + \beta_{13}$ ,  $b_3 = \beta_3 + \beta_{12}$ .

Соотношение, показывающее, с каким из эффектов смешан данный эффект, называется **генерирующим соотношением**.

*Пример.*  $X_3 = X_1X_2$  – генерирует (создает) дробную реплику.

$X_1X_2$  – незначительное взаимодействие.

$X_3^2 = X_1X_2X_3$ .

$1 = X_1X_2X_3$  – **определяющий контраст**.

Разрешающая способность дробной реплики считается максимальной, если линейные эффекты смешаны с эффектами взаимодействия наиболее высокого порядка. Реплики, в которых линейные эффекты смешаны с двухфакторными взаимодействиями, называются планами с разрешающей способностью III (по наибольшему числу факторов в определяющем контрасте). Например,  $2_{III}^{3-1}$ .

Вообще, номер разрешающей способности реплики определяется числом факторов в определяющем контрасте.

*Пример.*  $2^{4-1}$ . При выборе полуреплики  $2^{4-1}$  выражены 8 решений.

1.  $X_4 = X_1X_2$
2.  $X_4 = -X_1X_2$
3.  $X_4 = X_2X_3$
4.  $X_4 = -X_2X_3$
5.  $X_4 = X_1X_3$
6.  $X_4 = -X_1X_3$

где с 1 по 6 имеют три фактора в определяющем контрасте

7.  $X_4 = X_1 X_2 X_3$  } 7 и 8 имеют четыре фактора в определяющем контрасте.  
 8.  $X_4 = -X_1 X_2 X_3$  } 7 и 8 имеют максимальную разрешающую способность; они называются главными.

**Пример (Полуреплика).** Необходимо спланировать эксперимент с целью выбора оптимальных параметров устройства для получения максимального значения выходной характеристики  $y$ . Данные представлены в табл. 6.15.

Таблица 6.15

Факторы	Уровни факторов			Интервал варьирования
	-1	0	+1	
$X_1$	200	220	240	20
$X_2$	3	6	9	3
$X_3$	40	100	160	60
$X_4$	1	2	3	1

Полуреплики.

ПФЭ –  $2^4 = 16$  опытов.

Полуреплика  $2^4 - 8$  опытов, заданная  $2^{4-1}$ .

$X_4 = X_1 X_2 X_3$  – генерирующие соотношения.

$1 = X_1 X_2 X_3 X_4$  – определяющий контраст.

Умножая определяющий контраст на  $X_1$ ;  $X_2$ ;  $X_3$  и  $X_4$ , получим

$$X_1 = X_2 X_3 X_4; \quad b_1 = \beta_1 + \beta_{234}.$$

$$X_2 = X_1 X_3 X_4; \quad b_2 = \beta_2 + \beta_{134}.$$

$$X_3 = X_1 X_2 X_4; \quad b_3 = \beta_3 + \beta_{124}.$$

$$\begin{aligned}
X_4 &= X_1X_2X_3; & b_4 &= \beta_4 + \beta_{123}. \\
X_1X_2 &= X_3X_4; & b_1b_2 &= \beta_{12} + \beta_{34}. \\
X_1X_3 &= X_2X_4; & b_1b_3 &= \beta_{13} + \beta_{24}. \\
X_1X_4 &= X_2X_3; & b_1b_4 &= \beta_{14} + \beta_{23}.
\end{aligned}$$

В реальных задачах тройные взаимодействия бывают равны нулю значительно чаще, чем двойные. Число опытов  $N$  в дробной реплике должно удовлетворять неравенству  $k + 1 \leq N \leq 2^k$ . Если число опытов  $N$  равно  $k + 1$  числу определяемых коэффициентов в линейном уравнении регрессий, то дробная реплика представляет собой насыщенный линейный ортогональный план (табл. 6.16).

Таблица 6.16

### Матрица планирования и результаты эксперимента

№ опыта	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_1X_2=X_3X_4$	$X_1X_3=X_2X_4$	$X_1X_4=X_2X_3$	$y$
1	+	+	+	-	-	+	-	-	10
2	+	-	-	-	-	+	+	+	9
3	+	+	-	-	+	-	-	+	15
4	+	-	+	-	+	-	+	-	25
5	+	+	+	+	+	+	+	+	26
6	+	-	-	+	+	+	-	-	14
7	+	+	-	+	-	-	+	-	5
8	+	-	+	+	-	-	-	+	20
$b_i$	15	-1,5	4,75	0,75	4,5	-0,75	0,75	2	-

Рассчитываем коэффициенты по формуле (6.5):

$$b_0 = 1/8(+10+9+15+25+26+14+5+20) = 15;$$

$$b_1 = 1/8(+10-9+15-25+26-14+5-20) = -1,5 \text{ и т.д.};$$

$$y = 15 - 1,5X_1 + 4,75X_2 + 0,75X_3 + 4,5X_4 - 0,75X_1X_2 + 0,75X_1X_3 + 2X_1X_4.$$

**Полуреплики типа  $2^5$  (32 опыта) план  $2^{5-1}$  (16 опытов).**

В распоряжении экспериментатора имеется множество вариантов.  $X_5$  можно приравнять.

- |    |                    |   |
|----|--------------------|---|
| 1) | 1. $X_5 = X_1 X_2$ | Полуреплика с разрешающей способностью III (не лучшая полуреплика $2_{III}^{5-1}$ ) |
|    | 2. $X_5 = X_1 X_3$ |   |
|    | 3. $X_5 = X_1 X_4$ |   |
|    | 4. $X_5 = X_2 X_3$ |   |
|    | 5. $X_5 = X_2 X_4$ |   |
|    | 6. $X_5 = X_3 X_4$ |   |

$X_5$  приравниваем к одному из парных взаимодействий.

ИЛИ

- |    |                        |   |
|----|------------------------|---|
| 2) | 1. $X_5 = X_1 X_2 X_3$ | Полуреплика с разрешающей способностью IV, все линейные эффекты будут смешаны с тройными взаимодействиями, $2_{IV}^{5-1}$ |
|    | 2. $X_5 = X_1 X_3 X_4$ |   |
|    | 3. $X_5 = X_1 X_2 X_4$ |   |
|    | 4. $X_5 = X_2 X_3 X_4$ |   |

$X_5$  приравнивается к одному из четырех тройных взаимодействий

ИЛИ

- |    |   |   |
|----|---|---|
| 3) | $X_5 = X_1 X_2 X_3 X_4$ –<br>генерирующее соотношение | Полуреплика с разрешающей способностью V, $2_V^{5-1}$ . |
|    | $1 = X_1 X_2 X_3 X_4$ –<br>определяющий контраст      |   |

### Четверть реплики плана типа $2^k$ .

При достаточно большом числе факторов часто оказывается полезным использовать более легкие дробные реплики. Такой план содержит  $2^{k-2}$  наблюдений. План типа  $2^{k-2}$  можно построить, если выбрать два эффекта или генератора (два генерирующих соотношения) и разбить полный план  $2^k$  на четыре блока.

Если выбранные генерирующие соотношения  $1 = P$  и  $1 = Q$  ( $P \neq Q$ ,  $P; Q \rightarrow X_1 X_2 X_i$ ). Знак «плюс» или «минус» зависит от того, какой из четырех блоков выбран в качестве дробной решетки. Дробная реплика, для которой  $P$  и  $Q$  положительны, называется **главной**. Полное определяющее соотношение для плана включает в себя  $P$ ,  $Q$  и их обобщенное взаимодействие  $PQ$ , то есть имеет вид  $1 = P = Q = PQ$ .

#### *Пример.*

Рассмотрим  $2^{5-2}$  ( $2^5 = 32$  опыта,  $2^{5-2} = 2^3 = 8$  опытов, пять факторов).

При анализе априорной информации предполагается что  $X_4 = X_1 X_2$  и  $X_5 = X_1 X_2 X_3$  – генерирующие соотношения, тогда  $1 = X_1 X_2 X_4$  и  $1 = X_1 X_2 X_3 X_5$  – определяющие контрасты. Если перемножить между собой эти исходные определяющие контрасты, то получим еще один определяющий контраст  $1 = X_3 X_4 X_5$ .

$1 = X_1 X_2 X_4 = X_1 X_2 X_3 X_5 = X_3 X_4 X_5$  – **обобщенный определяющий контраст**.

Умножая обобщенный определяющий контраст последовательно на  $X_1$ ;  $X_2$ ;  $X_3$ ;  $X_4$ ;  $X_5$ , получим следующую систему смешивания независимых переменных и взаимодействий:

$$\begin{aligned} 1 &= X_0 = X_1 X_2 X_4 = X_3 X_4 X_5 = X_1 X_2 X_3 X_5 \\ X_1 &= X_2 X_4 = X_1 X_3 X_4 X_5 = X_2 X_3 X_5 \\ X_2 &= X_1 X_4 = X_2 X_3 X_4 X_5 = X_1 X_3 X_5 \\ X_3 &= X_1 X_2 X_3 X_4 = X_4 X_5 = X_1 X_2 X_5 \end{aligned} \tag{6.10}$$

$$X_4 = X_1 X_2 = X_3 X_5 = X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$$

$$X_5 = X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 = X_3 X_4 = X_1 X_2 X_3$$

Если модель включает значимые взаимодействия  $X_1 X_3$  и  $X_1 X_5$ , то

$$X_1 X_3 = X_2 X_3 X_4 = X_1 X_4 X_5 = X_2 X_5$$

$$X_1 X_5 = X_2 X_4 X_5 = X_1 X_3 X_4 = X_2 X_3$$

Получается довольно сложная система смешивания линейных эффектов с эффектами взаимодействия первого, второго, третьего и четвертого порядков.

Если, например, коэффициенты  $b_{13} = \beta_{13} + \beta_{234} + \beta_{145} + \beta_{25}$  и  $b_{15} = \beta_{15} + \beta_{245} + \beta_{134} + \beta_{23}$  отличаются от нуля, то возникают сомнения, можно ли пренебрегать другими парными взаимодействиями, с которыми смешаны линейные эффекты. Тогда следует поставить вторую серию опытов, выбрав нужным образом другую 1/4 реплики или же данный ДФЭ не позволяет разделить коэффициенты, то есть необходимо вначале достроить до полуреплики, а если это не поможет, то достроить до ПФЭ.

Кроме того, можно воспользоваться методом «перевала», заключающимся в том, что вторая четверть реплики получается из первой путем изменения всех знаков матрицы на противоположные. Тогда в обобщающем определяющем контрасте тройные произведения имеют знак, противоположный знаку в первой четверти реплики.

Вообще существуют 12 возможных решений  $2^{5-2}$ :

1.  $X_4 = X_1 X_2$      $X_5 = X_1 X_2 X_3$  (было рассмотрено)
2.  $X_4 = X_1 X_2$      $X_5 = -X_1 X_2 X_3$
3.  $X_4 = -X_1 X_2$      $X_5 = X_1 X_2 X_3$  ← если возможно    выберем другую
4.  $X_4 = -X_1 X_2$      $X_5 = -X_1 X_2 X_3$     генерирующую
5.  $X_4 = X_1 X_3$      $X_5 = X_1 X_2 X_3$     совокупность
6.  $X_4 = X_1 X_3$      $X_5 = -X_1 X_2 X_3$      $X_4 = -X_1 X_2$

7.  $X_4 = -X_1X_3$   $X_5 = X_1X_2X_3$
8.  $X_4 = -X_1X_3$   $X_5 = -X_1X_2X_3$
9.  $X_4 = X_2X_3$   $X_5 = X_1X_2X_3$
10.  $X_4 = X_2X_3$   $X_5 = -X_1X_2X_3$
11.  $X_4 = -X_2X_3$   $X_5 = X_1X_2X_3$
12.  $X_4 = -X_2X_3$   $X_5 = -X_1X_2X_3$

$X_5 = X_1X_2X_3$ ,  
 обобщающий  
 контраст будет  
 $1 = -X_1X_2X_4 =$   
 $= X_1X_2X_3X_5 =$   
 $-X_3X_4X_5$ .

Система смешивания будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 X_1 &= -X_2X_4 = X_1X_3 & X_4X_5 &= -X_2X_3X_5 \\
 X_2 &= -X_1X_4 = X_2X_3 & X_4X_5 &= -X_1X_3X_5 \\
 X_3 &= -X_1X_2X_3 & X_4 &= X_4X_5 = -X_1X_2X_5 \\
 X_4 &= -X_1X_2 = X_3X_5 & &= -X_1X_2X_3X_4X_5 \\
 X_5 &= -X_1X_2X_4X_5 = X_3 & X_4 &= -X_1X_2X_3 \\
 X_1X_3 &= -X_2X_3 & X_4 &= X_1X_4X_5 = -X_2X_5 \\
 X_1X_5 &= -X_2X_4X_5 = X_1X_3 & X_4 &= -X_2X_3
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

При сложении двух  $1/4$  реплик ((6.10) и (6.11)) получается следующая картина:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \beta_1 + \beta_{1345} \\
 b_2 &= \beta_2 + \beta_{2345} \\
 b_3 &= \beta_3 + \beta_{45} \\
 b_4 &= \beta_4 + \beta_{35} \\
 b_5 &= \beta_5 + \beta_{34} \\
 b_{13} &= \beta_{13} + \beta_{145} \\
 b_{15} &= \beta_{15} + \beta_{134}
 \end{aligned}$$

Итак, линейные эффекты освободились от совместных оценок с тройными эффектами взаимодействия и в некоторых случаях – с пар-

ными. Такое планирование целесообразно, если ставится задача освободить все линейные эффекты от взаимодействия второго ( $X_1X_2X_3$ ) и третьего порядков ( $X_1X_2$ ) для  $b_1$  и  $b_2$ .

### Реплики большой дробности.

При выборе  $1/8$  реплики от  $2^6 \Rightarrow 2^{6-3}$  можно воспользоваться столбцами трех взаимодействий максимум.

1.  $X_4 = X_1X_2$      $X_5 = X_1X_3$      $X_6 = X_2X_3$  – наиболее удачное решение, так как все линейные эффекты смешиваются с парными взаимодействиями.

2.  $X_4 = X_1X_3$      $X_5 = X_2X_3$      $X_6 = X_1X_2X_3$

3.  $X_4 = X_1X_2$      $X_5 = X_2X_3$      $X_6 = X_1X_2X_3$

4.  $X_4 = X_1X_2$      $X_5 = X_1X_3$      $X_6 = X_1X_2X_3$

Если априорно известно, что из всех взаимодействий наиболее существенно  $X_1X_2$ , то нужно выбрать второе решение, если  $X_1X_3$  – третье решение, если  $X_2X_3$  – четвертое.

С ростом числа факторов увеличивается дробность реплики и усложняется система смешивания. Предельное число факторов для 8 опытов – 7. В этом случае оценивается восемь коэффициентов линейного уравнения  $y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_4X_4 + b_5X_5 + b_6X_6 + b_7X_7$ .

При числе факторов от 8 до 15 приходится ставить 16 опытов. С ростом числа факторов дробность реплики растет следующим образом:  $1/32$  реплики от  $2^9$ ;  $1/64$  реплики от  $2^{10}$ ;  $1/128$  реплики от  $2^{11}$ ;  $1/256$  реплики от  $2^{12}$ ;  $1/512$  реплики от  $2^{13}$ ;  $1/1024$  реплики от  $2^{14}$ ;  $1/2048$  реплики от  $2^{15}$ . Предельное число факторов для 16 опытов – 15. **План** с предельным числом факторов для данного числа опытов и заданной модели называется **насыщенным**. В этом случае число опытов равно числу оцениваемых коэффициентов.

### **6.2.3. ОсобенностиДФЭ**

ПреимуществаДФЭ по сравнению с ПФЭ следующие.

1. Эффекты факторов, представляющих первостепенный интерес, могут быть изучены в более общих условиях, чем это возможно в других случаях.

2. Уменьшается число опытов, необходимых для исследования заданного числа главных эффектов и эффектов парных взаимодействий.

Принципиальными недостатками дробных реплик являются следующие.

1. Может остаться слишком мало степеней свободы для выявления разнообразных возможных случаев недостаточно высокого качества описания.

2. Более высокая по сравнению с полными планами уязвимость по отношению к обычным опасностям экспериментирования: ошибочным данным, перепутанным наблюдателем, недопустимым условиям опытов.

Таким образом, дробные решетки находят широкое применение для исследования сложных процессов особенно на первом этапе оптимизаций.

### **6.2.4. Особенности планов с разрешающей способностью III, IV, V**

1. Планы разрешающей способности III.

К ним относятся планы, в которых никакие главные эффекты не являются совместимыми друг с другом, но с главными эффектами со-

вместны двухфакторные взаимодействия, которые совместны друг с другом (например,  $2^{3-1}$ ).

## 2. Планы разрешающей способности IV.

К ним относятся планы, в которых никакие главные эффекты не являются совместными друг с другом или двухфакторными взаимодействиями, но последние друг с другом совместны (например,  $2^{4-1}$ ).

## 3. Планы разрешающей способности V.

К ним относятся планы, в которых никакие главные эффекты и двухфакторные взаимодействия не являются совместными друг с другом, но двухфакторные взаимодействия совместны с трехфакторными взаимодействиями (например,  $2^{5-1}$ ).

Свойства: планы  $2^k$  и  $2^{k-1}$  – ортогональны (коэффициенты вычисляются независимо друг от друга).

## 6.3. ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

После планирования проводят непосредственно сам эксперимент. Для каждого принятого сочетания факторов измеряют значения параметра оптимизаций. Следует учитывать, что результаты каждого опыта обладают статической неопределенностью. Она получается за счет погрешности измерения значений факторов и самого параметра оптимизаций, влияния неучтенных факторов. Поэтому если воспроизвести несколько раз опыт при одних и тех же значениях факторов, то каждый раз значение параметра оптимизаций будет разным. Обычно стараются при каждом сочетании значений факторов («в каждой точке») провести несколько повторных опытов, которые называ-

ются **параллельными (дублированными)**. Дублирование позволяет проверить воспроизводимость эксперимента.

### **6.3.1. Проверка однородности дисперсии параллельных опытов (ошибки параллельных опытов)**

Эта проверка необходима для того, чтобы установить и доказать нормальный закон распределения ошибок отдельных опытов в эксперименте. В противном случае нельзя приступить к регрессионному анализу – расчету коэффициентов регрессии, проверке их значимости и проверке адекватности математической модели экспериментальных данных.

Проверку однородности проводят с помощью одного из статистических критериев – критерия Кохрена (G-критерий). Проверка состоит в следующем.

- Среди вычисленных по формулам (2.23), (2.24) оценок дисперсий находят наибольшую  $S^2_{max}$ .
- Вычисляют отношение наибольшей оценки к сумме всех оценок дисперсии. Критерий Кохрена – это отношение максимальной дисперсии к сумме всех дисперсий:

$$G_{расч} = \frac{S^2_{max}}{\sum_{i=1}^n S_i^2}, \quad (6.12)$$

где  $S^2_{max}$  – максимальная дисперсия;  $S_i^2$  –  $i$ -дисперсия.

- Определяют числа степеней свободы  $f_1$  и  $f_2$ :  $f_1 = n - 1$ ;  $f_2 = N$ , где  $n$  – количество параллельных опытов, а  $N$  – все количество опытов.

- Выбирают уровень значимости (обычно  $g = 0,05$ ).
- В специальных таблицах по заданным  $g$ ;  $f$ ;  $n$  находят критическое отклонение  $G_{табл}$ .
- Сравнивают величины  $G_{расч}$  и  $G_{табл}$ . Если  $G_{расч} \leq G_{табл}$ , то дисперсия однородна, в противном случае – неоднородна.
- Делают вывод об однородности дисперсии параллельных опытов.

Если эта проверка дала отрицательный результат, то полученный эмпирический материал использовать для аппроксимации функции не рекомендуется. Следует повторить эксперимент, увеличив при этом число повторений для каждого опыта.

Критерий Кохрена используется, когда сравниваемое количество дисперсии больше двух и одна дисперсия значительно превышает остальные. Этот критерий пригоден для случаев, когда во всех точках имеется одинаковое число повторных опытов.

Для оценки однородности дисперсии кроме критерия Кохрена ( $G$ -критерий) используют критерий Фишера ( $F$ -критерий), критерий Бартлета ( $B$ -критерий). В табл. 6.17 представлены расчетные формулы и случаи применения критериев.

Таблица 6.17

### Критерии для оценки однородности дисперсии

Критерий	Расчетная формула	Условие опровержения гипотезы об однородности дисперсии	В каких случаях применяется
$F$ -критерий Фишера	$F_{расч} = \frac{S_{max}^2}{S_{min}^2} \quad (6.13)$	Если $F_{расч} > F_{табл}$	Используется для сравнения двух дисперсий

Критерий	Расчетная формула	Условие опровержения гипотезы об однородности дисперсии	В каких случаях применяется
G-критерий Кохрена	$G_{расч} = \frac{S_{\max}^2}{\sum_{i=1}^N S_i^2} \quad (6.14)$	Если $G_{расч} > G_{табл}$	Используется при одинаковом числе параллельных опытов
B-критерий Бартлета	$B_{расч} = \frac{2,303}{C} (f \lg S^2(y) - \sum_{i=1}^N f_i \lg S_i^2)$ $C = 1 + \frac{1}{3(N-1)} \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{f_i} - \frac{1}{f} \right)$ <p><math>f</math> – число степеней свободы всего эксперимента;  <math>f_i</math> – число степеней свободы параллельных опытов</p>	Если $B_{расч} > B_{табл}$	Используется в случае неравномерного числа опытов во всех точках плана

### 6.3.2. Дисперсия воспроизводимости и ошибка всего эксперимента

В случае однородности дисперсий параллельных опытов рассчитывают дисперсию воспроизводимости и ошибку всего эксперимента.

Матрица планирования состоит из серии опытов, и дисперсия всего эксперимента получается в результате усреднения дисперсии всех опытов. По терминологии, принятой в планировании эксперимента, речь идет о подсчете дисперсии параметра оптимизации  $S^2(y)$  или, что то же самое, дисперсии воспроизводимости эксперимента  $S^2_{воспр}$ .

При подсчете дисперсии параметра оптимизации квадрат разности между результатом отдельного опыта (значением  $y_g$ ) и средними значениями ( $\bar{y}$ ) из  $n$  повторенных наблюдений нужно просуммировать по числу опытов в матрице  $N$ , а затем разделить на  $N(n-1)$ :

$$S^2(y) = \frac{\sum_1^N \sum_1^n (y_{ig} - \bar{y}_i)^2}{N(n-1)} = \frac{1}{N} \sum_1^N S^2 \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad g = 1, 2, \dots, n. \quad (6.15)$$

Такой формулой можно пользоваться в случаях, когда число повторных опытов одинаково во всей матрице. Для двух повторных опытов ( $n = 2$ ) формула принимает вид

$$S^2(y) = \frac{2 \sum_1^N (y_{ig} + \bar{y}_i)^2}{N}. \quad (6.16)$$

На практике часто приходится сталкиваться со случаями, когда число повторных опытов различно. Это происходит вследствие отброса грубых наблюдений, неуверенности экспериментатора в правильности некоторых результатов.

Тогда пользуются средневзвешенным значением дисперсии, взятым с учетом числа степеней свободы:

$$S^2(y) = \frac{S_1^2 f_1 + S_2^2 f_2 + \dots + S_N^2 f_N}{f_1 + f_2 + \dots + f_N} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i S_i^2}{\sum_{i=1}^N f_i}, \quad (6.17)$$

где  $S_1^2$  – дисперсия первого опыта;  $S_N^2$  – дисперсия  $N$  опыта;  $f_1$  – число степеней свободы в первом опыте:  $f_1 = n_1 - 1$  (равное числу параллельных опытов  $n_1$  минус 1:  $n_1 - 1$ ).

Ошибка всего эксперимента:

$$S(y) = \sqrt{S^2(y)} . \quad (6.18)$$

### 6.3.3. Рандомизация

Чтобы исключить влияние систематических ошибок, вызванных внешними условиями, рекомендуется случайная последовательность при постановке опытов. Опыты необходимо рандомизировать во времени. Термин «рандомизация» происходит от английского слова random – случайный.

Пусть проводится эксперимент типа  $2^3$ . Матрица планирования представлена в табл. 6.18.

Например, опыты 1–4 ставим сегодня, а 5–8 – завтра. Различие в условиях эксперимента может вызвать систематическую ошибку, которая отразится на величине  $b_3$ , так как в опытах 1–4 фактор  $X_3$  находится на верхнем уровне, а в опытах 5–8 – на нижнем уровне.

Таблица 6.18

№ опыта	$X_1$	$X_2$	$X_3$
1	+	+	+
2	–	–	+
3	+	–	+
4	–	+	+
5	+	+	–
6	–	–	–
7	+	–	–
8	–	+	–

Отличие в условиях первого и второго дня вызовет некоторую ошибку  $E$ .

$$b_3 = \frac{1}{8} [(y_1 + E) + (y_2 + E) + (y_3 + E) + (y_4 + E) - y_5 - y_6 - y_7 - y_8] \rightarrow \beta_3 + \frac{E}{2},$$

где  $\beta_3$  – истинное значение коэффициента при  $X_3$ .

Из рассмотренного выше следует, что в такой последовательности опыты ставить нельзя.

Если в рассмотренном опыте  $2^3$  предполагается каждое значение параметра оптимизации ( $y$ ) определить по двум параллельным опытам, то всего получается 16 опытов ( $8 \cdot 2 = 16$ ), тогда для определения порядка проведения опытов воспользуемся таблицей случайных чисел. Например, начиная с четвертого столбца записываем числа с 1 до 16, отбрасывая больше 16, то можно получить следующую последовательность: 2; 15; 9; 12; 14; 8; 13; 16; 1; 3; 7; 4; 6; 11; 10. Тогда можно составить таблицу проведения опытов (табл. 6.19).

*Таблица 6.19*

Номер опыта по матрице планирования	1	2	3	4	5	6	7	8
Случайный порядок реализаций опытов	2	15	9	5	12	14	8	13
	16	1	3	7	4	6	11	10

Выбранную случайным образом последовательность опытов не рекомендуется нарушать.

## 6.4. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

### 6.4.1. Проверка значимости коэффициентов регрессий

Эта проверка производится с целью упрощения уравнения регрессии путем исключения статистически незначительных коэффициентов.

Проверку можно осуществлять двумя способами: проверка по  $t$ -критерию Стьюдента или построение доверительного интервала. Доверительные интервалы для всех коэффициентов равны друг другу. Ошибки всех коэффициентов одинаковы.

$S_{b_0} = S_{b_1} = S_{b_{1g}}$  – среднеквадратические ошибки в определении коэффициентов.

Расчет ошибок коэффициентов производится по формуле

$$S_{b_i} = \frac{S(y)}{\sqrt{Nn}} \quad (S_{b_i}^2 = \frac{S^2(y)}{Nn} = \frac{S_{\text{осп}}^2}{Nn}). \quad (6.19)$$

Коэффициент регрессий считается значимым, если он по абсолютной величине больше величины доверительного интервала  $|b| > \Delta b$ .

Величина доверительного интервала рассчитывается, как правило, при помощи критерия Стьюдента ( $t$ -критерия).

$$b = \pm t \cdot S_{b_i} \quad (6.20)$$

или 
$$b = \pm \frac{t \cdot S(y)}{\sqrt{Nn}}. \quad (6.21)$$

Для отыскания значения  $t$ -критерия пользуются таблицами. Кроме того, проверять значимость коэффициентов можно по  $t$ -критерию следующим образом.

– Находят ошибки определения коэффициентов по формуле (6.19).

– Определяют отношения абсолютного значения коэффициента регрессий  $b_i$  к среднему квадратическому отклонению ошибки его

определения:  $t_i = \frac{|b_i|}{S(b_i)}$ .

– Находят число степеней свободы  $f = N(n - 1)$ .

– Выбирают уровень значимости  $g$  (обычно 0,05) .

– По таблице при заданных величинах  $f$  и  $g$  находят критическое значение  $t_{табл}$  .

Если рассчитанное значение отношения больше критического, то есть  $t_i > t_{табл}$  , то коэффициент  $b_i$  признается значимым, в противном случае – статически незначимым.

Незначимость коэффициентов может быть обусловлена рядом причин:

– фактор, соответствующий незначимому коэффициенту, не влияет на функцию;

– имеет место большая ошибка;

– выбран малый шаг варьирования независимой переменной;

– экстремум функции по переменной находится вблизи центра

планирования:  $b_i \approx \frac{\partial f(0,0,0...0)}{\partial X_i}$  .

Если какой-то коэффициент назначен, он отбрасывается без пересчета всех остальных коэффициентов. Однако, прежде чем исключить коэффициент, необходимо проанализировать причины, вызвавшие незначимость коэффициента.

#### 6.4.2. Проверка адекватности модели

Данная проверка проводится с целью доказательства пригодности полученного уравнения регрессии для описания экспериментальных данных с заданной точностью. Для этого оценивают отклонения вычисленных по уравнениям регрессии значений функции оптимизации  $\hat{y}$  от экспериментально установленных  $\bar{y}$ . Для оценки отклонений используют критерий Фишера F-критерий.

Наиболее надежные результаты проверки адекватности получаются в планах, обеспечивающих одинаковую точность предсказанных значений функции отклика в точках, находящихся на одинаковых расстояниях от центра эксперимента. Проверку адекватности математической модели выполняют в несколько этапов.

1. Находят дисперсию адекватности:

$$S_{ad}^2 = \frac{1}{n-l} \sum_{i=1}^N m_i (\bar{y}_i - \hat{y})^2, \quad (6.22)$$

где  $m_i$  – число параллельных опытов в  $i$ -й строчке матрицы планирования;  $\bar{y}_i$  – среднеарифметическое функции отклика из  $m$  параллельных опытов;  $\hat{y}$  – значение функции отклика, предсказанное по уравнению в  $i$ -м опыте;  $l$  – число значимых коэффициентов в уравнении регрессии;  $N$  – число независимых опытов.

Если все опыты повторяются  $m$  раз, то формула будет иметь вид

$$S_{ад}^2 = \frac{m}{N-l} \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \hat{y})^2. \quad (6.23)$$

2. Находят значения  $F$ -критерия Фишера (дисперсное отношение):

$$F_{расч} = \frac{S_{ад}^2}{S_{восн}^2} = \frac{S_{ад}^2}{S^2(y)}, \quad (6.24)$$

где  $S^2(y)$  – дисперсия параметра оптимизации.

3. Определяют число степеней свободы :

$$f_{ад} = N - l; \quad (6.25)$$

$$f_{восн} = N(m-1). \quad (6.26)$$

4. Выбирают уровень значимости  $g$  (обычно 0,05).

5. По значениям  $f_{ад}; f_{восн}; g$  находят  $F$  табличное.

6. Если  $F_{расч} \leq F_{табл}$ , то математическое описание функции отклика уравнениями регрессий считается адекватным, в противном случае описание признается неадекватным изучаемому процессу.

Если математическая модель неадекватна данным эксперимента, то необходимо перейти к более сложной форме уравнения регрессии или уменьшить интервал варьирования факторов в эксперименте. Например, если неадекватна линейная модель, то следует дополнить, введя в нее числа, соответствующие эффектам взаимодействия.

## 6.5. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПЛАНОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

**Пример 1.** Применение полного факторного эксперимента рассмотрим на примере исследования влияния нагрузки и скорости, а также качества обработки на температуру в узле трения. Ранее было выяснено, что на температуру в узлах трения без смазки влияют следующие факторы: удельная нагрузка  $p$ , скорость скольжения  $v$  и первоначальная шероховатость трущейся шейки стального валика  $R_a$ .

Для оценки влияния указанных факторов и математического описания процесса трения использована модель первого порядка вида

$$\hat{y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + b_{23}X_2X_3 + b_{123}X_1X_2X_3. \quad (6.27)$$

Значения выбранных уровней варьируемых факторов даны в табл. 6.20.

Таблица 6.20

Уровень варьируемых факторов	Обозначение кодовое	$p$ , кг/см <sup>2</sup>	$v$ , м/с	$R_a$ , мкм
		$X_1$	$X_2$	$X_3$
Основной уровень	0	6,84	0,59	1,575
Интервал варьирования	$\Delta x_i$	4,00	0,31	0,925
Верхний уровень	+1	10,84	0,90	0,65
Нижний уровень	-1	2,84	0,28	2,50

Для получения оценок коэффициентов уравнения (6.27) использовали полный факторный эксперимент типа  $2^3$ . Матрица планирования эксперимента с расчетными столбцами взаимодействия факторов представлена в табл. 6.21.

Таблица 6.21

№ опыта	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_1X_2$	$X_1X_3$	$X_2X_3$	$X_1X_2X_3$
1	+	-	-	-	+	+	+	-
2	+	+	-	-	-	-	+	+
3	+	-	+	-	-	+	-	+
4	+	+	+	-	+	-	-	-
5	+	-	-	+	+	-	-	+
6	+	+	-	+	-	+	-	-
7	+	-	+	+	-	-	+	-
8	+	+	+	+	+	+	+	+

Испытывалась пара трения: пластмасса (фторопласт 3) и металл (сталь марки 45 незакаленная). Каждый опыт проводили трижды. Порядок испытаний рандомизирован с помощью таблиц случайных чисел. Результаты испытаний приведены в табл. 6.22.

Среднее значение параметра оптимизации по параллельным опытам определяли, например, для первого опыта:

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{r} \sum_{v=1}^r y_{1v} = \frac{57 + 60 + 55}{3} = 57,3 \quad \text{и т. д.}$$

Определяли дисперсию параллельных опытов, например, для первого опыта:

$$S_1^2 = \frac{1}{r-1} \sum_{v=1}^r (y_{1v} - \bar{y}_1)^2 = \frac{0,09 + 7,29 + 5,29}{2} = 6,34.$$

Таблица 6.22

№ опыта	Температура, °С				$y_{u1} - \bar{y}_u$	$y_{u2} - \bar{y}_u$	$y_{u3} - \bar{y}_u$	$(y_{u1} - \bar{y}_u)^2$	$(y_{u2} - \bar{y}_u)^2$	$(y_{u3} - \bar{y}_u)^2$	$S_u^2$
	$y_{u1}$	$y_{u2}$	$y_{u3}$	$\bar{y}_u$							
1	57	60	55	57,3	-0,3	+2,7	-2,3	0,099	7,29	5,29	6,34
2	57	55	52	54,7	+2,3	+0,3	+22,7	5,29	0,09	7,29	6,34
3	80	85	90	85	-5,0	0	+5,0	25,00	0	25,00	25,00
4	120	125	130	125	-5,0	0	+5,0	25,00	0	25,00	25,00
5	50	55	45	50	0	+5,0	-5,0	0	25,00	25,00	25,00
6	54	55	60	56,3	-2,3	-1,3	+3,7	5,29	1,69	13,69	10,34
7	55	50	60	55,0	0	-5,0	+5,0	0	25,00	25,00	25,00
8	98	105	115	106	-8,0	-1,0	+9,0	64,00	1,00	81,00	73,00
$\Sigma$				589,3							196

Для определения возможности проведения регрессионного анализа рассчитали однородности дисперсий параллельных опытов по критерию Кохрена:

$$G_{расч} = \frac{S_{u_{max}}^2}{\sum_{u=1}^N S_u^2} = \frac{73,0}{196,02} = 0,373.$$

Расчетное значение критерия сравнивали с табличным для степеней свободы: числителя  $f_1 = r - 1$ ,  $f_2 = N$  и соответственно при выбранном уровне значимости 0,05:

$$G_{табл} = 0,5157 > G_{расч} = 0,373.$$

Следовательно, гипотеза об однородности дисперсий параллельных опытов принимается. Отсюда дисперсия воспроизводимости

$$S_{восп}^2 = S_{(y)}^2 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N s_u^2 = \frac{196,02}{8} = 24,5.$$

Ошибка эксперимента

$$S(y) = +\sqrt{S_{(y)}^2} = \sqrt{24,5} \approx 4,95 \approx 5,0.$$

Далее рассчитывали коэффициенты уравнения (6.1). Например, для коэффициента  $b_1$ :

$$b_1 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N X_{1u} y_u = \frac{-57,3 + 54,7 - 85 + 125 - 50 + 56,3 - 55 - 106}{8} = \frac{94,7}{8} = 11,8 \text{ и т. д.}$$

После расчета всех коэффициентов уравнение (6.1) принимает вид

$$\hat{y} = 73,7 + 11,8 X_1 + 19,1 X_2 - 6,8X_3 + 10,9 X_1X_2 + 2,5 X_1X_3 - 5,4 X_2X_3 + 0,3 X_1X_2X_3.$$

Проверку статистической значимости коэффициентов проводили с помощью  $t$ -критерия. Для полного факторного эксперимента ошибки всех коэффициентов равны между собой и определяются как

$$S(b_i) = \frac{S(y)}{\sqrt{Nr}} = \frac{5,0}{\sqrt{8 \cdot 3}} = 1,02 \approx 1,0.$$

Далее определяли доверительный интервал длиной  $2\Delta b_i$ :

$$\Delta b_i = t_{табл} S(b_i) = 2,12 \cdot 1,02 = 2,16.$$

Критическое значение  $t_{табл}$  выбирали по таблице для числа степеней свободы  $N(r - 1) = 16$  и при принятом уровне значимости 0,05. Все коэффициенты уравнения (6.27), кроме  $b_{123}$ , оказались статистически значимыми. После исключения статистически незначимого коэффициента  $b_{123}$  уравнение регрессии принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{y} = 73,7 + 11,8 X_1 + 19,1 X_2 - 6,8X_3 + 10,9 X_1X_2 + \\ + 2,5 X_1X_3 - 5,4 X_2X_3 . \end{aligned} \quad (6.28)$$

Полученное уравнение проверяли на адекватность. В табл. 6.23 представлены результаты расчета дисперсии адекватности с учетом коэффициента  $b_{13}$  и без него (коэффициент  $b_{13}$  статистически незначим при уровне значимости 0,02).

Таблица 6.23

№ опыта	С учетом коэффициента				Без учета коэффициента			
	$\bar{y}_u$	$\hat{y}_u$	$\bar{y}_u - \hat{y}_u$	$(\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2$	$\bar{y}_u$	$\hat{y}_u$	$\bar{y}_u - \hat{y}_u$	$(\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2$
1	57,3	57,6	- 0,3	0,09	57,3	55,1	+ 2,2	4,84
2	54,7	54,4	+ 0,3	0,09	54,7	56,9	- 2,2	4,84
3	85,0	84,8	+ 0,2	0,04	85,0	82,3	+ 2,7	7,29
4	125,0	125,0	- 0,2	0,04	125,0	127,7	- 2,7	7,29
5	50,0	49,8	+ 0,2	0,04	50,0	52,3	- 2,3	5,29
6	56,3	56,6	- 0,3	0,09	56,3	54,3	+ 2,2	4,84
7	55,0	55,4	- 0,4	0,16	55,0	57,9	- 2,9	8,41
8	106,0	105,8	+ 0,2	0,04	106,0	103,3	+2,7	7,27
$\Sigma$				0,59				50,09

Гипотезу об адекватности уравнения (6.28) проверяли с учетом значимости коэффициента  $b_{13}$  и соответственно без его учета.

$$F_{1,расч} = \frac{S_{1ад}^2}{S^2(y)} = \frac{3 \cdot 0,59}{24,5} = 0,073.$$

Так как  $F > 1$ , то уравнение (6.28) адекватно.

$$F_{2,расч} = \frac{S_{2ад}^2}{S^2(y)} = \frac{(3 \cdot 50,09) / 2}{24,5} = 3,1.$$

$F_{2табл} = 3,00$  соответственно для степеней свободы  $f_{ад} = 2$ ,  $f_{восп} = 16$  и при уровне значимости 0,05. В связи с тем что  $F_{2,расч} < F_{2табл}$ , уравнение (6.29) можно считать адекватным при  $b_{13} = 0$ .

$$\hat{y} = 73,7 + 11,8 X_1 + 19,1 X_2 - 6,8X_3 + 10,9 X_1X_2 - 5,4 X_2X_3 . \quad (6.29)$$

Для приведения уравнения (6.29) к виду с натуральными значениями факторов используют формулу кодирования, подставляя в уравнение (6.29) вместо кодовых натуральных значения факторов.

На основании полученных результатов и анализа уравнения (6.29) можно сделать следующие выводы.

1. С увеличением удельной нагрузки  $p$  и скорости скольжения  $v$  температура в зоне трения возрастает (так как коэффициенты  $b_1$  и  $b_2$  при  $X_1$  и  $X_2$  положительные), причем наибольшее влияние оказывает скорость скольжения при выбранных условиях варьирования ( $b_2 > b_1$ ).

2. С уменьшением шероховатости поверхности  $R_a$  снижается температура в зоне трения, так как  $b_3$  отрицателен, но влияние этого фактора менее значительно, чем удельного давления и скорости скольжения ( $b_3 < b_1 < b_2$ ).

3. Наряду с линейными эффектами значимыми оказались также и эффекты взаимодействия  $X_1X_2$  и  $X_2X_3$ , причем эти взаимодействия противоположны по своему эффекту (они имеют противоположные знаки). Для снижения температуры в зоне трения необходимо стремиться при увеличенных нагрузках снижать скорость скольжения. Снижение шероховатости поверхности позволяет несколько повысить скорость скольжения.

Использование полного факторного эксперимента позволило не только оценить влияние факторов и их взаимодействий на температуру трения, но и наметить гипотезы по выяснению механизма процесса.

**Пример 2.** Другим примером использования полного факторного эксперимента типа  $2^3$  является исследование износостойкости захватов грейферов железнодорожных кранов. Анализ литературных источников показал, что можно значительно повысить работоспособ-

ность захвата грейфера, работающего в абразивной среде, путем наплавки его режущих кромок порошковой проволокой. Лабораторные испытания на изнашивание проводили на машине трения типа «вращающаяся чаша».

Размер изнашиваемой поверхности образца (40×65 мм) и его форма были подобны режущей кромке захвата грейфера. В качестве абразивной среды был использован щебень твердостью 800–900 кг/см<sup>2</sup> и размером 40–50 мм. Предварительно образцы наплавляли следующими твердосплавными наплавками: электродом Т-590 и порошковыми проволоками ППАН-125, ППАН-170 и ППИСТО2. Проведенный технико-экономический расчет позволил выбрать наиболее приемлемый наплавочный материал – порошковую проволоку марки ППАН-125.

Наплавку образцов проводили на установке с помощью полуавтоматов типа А-537, переоборудованных для работы с порошковой проволокой. Режимы наплавки представлены в табл. 6.24.

Таблица 6.24

Наименование	Обозначение	Размерность	Значение
Сварочный ток	I	А	600
Напряжение дуги	U	В	31–37
Скорость подачи электродной проволоки	$v_{\text{п}}$	м/мин	4,7
Скорость наплавки	$v_{\text{н}}$	м/мин	2,6
Скорость перемещения образца	$v_0$	м/мин	0,47
Число колебаний	n	1/мин	58

Влияние режимов работы на износостойкость наплавленного слоя исследовали с помощью многофакторного эксперимента. В качестве плана эксперимента использовали полный факторный эксперимент типа 2<sup>3</sup>. За функцию отклика выбрана интенсивность изнашивания на 1 км пути.

Варьируемыми факторами были приняты: глубина погружения образца в абразивную среду  $h$ , скорость перемещения образца  $v$  и угол наклона рабочей поверхности (угол резания)  $\varphi$ . На основании априорной информации были выбраны уровни факторов и интервалы их варьирования. Значения натуральных уровней факторов и кодовых представлений в табл. 6.25.

Таблица 6.25

Уровни факторов и интервалы варьирования	Кодовые значения			Натуральные значения		
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$h$ , см	$v$ , м/с	$\varphi$ , °
Основной уровень	0	0	0	10	0,18	33
Интервал варьирования	1	1	1	5	0,06	3
Верхний уровень	+ 1	+ 1	+ 1	15	0,24	36
Нижний уровень	- 1	- 1	- 1	5	0,12	30

Согласно принятому плану полного факторного эксперимента всего было проведено 8 опытов, каждый опыт повторяли трижды в случайном порядке для исключения систематических ошибок.

В табл. 6.26 представлены матрица планирования, экспериментальные данные по износу образцов и их расчетные значения.

На основании полученных экспериментальных данных рассчитывали среднее значение величины износа и дисперсии параллельных опытов. Например, для опыта 2

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{r} \sum_{v=1}^3 y_{2v} = \frac{1}{3} (0,43 + 0,45 + 0,44) = 0,44.$$

Таблица 6.26

№ опыта	Матрица плана				Результаты опытов (износ в граммах)				Расчетные значения износа $\hat{y}$
	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$y_{u1}$	$y_{u2}$	$y_{u3}$	$\bar{y}_u$	
1	+ 1	- 1	- 1	- 1	0,15	0,17	0,14	0,153	0,154
2	+ 1	+ 1	- 1	- 1	0,43	0,45	0,44	0,440	0,436
3	+ 1	- 1	+ 1	- 1	0,11	0,13	0,10	0,113	0,108
4	+ 1	+ 1	+ 1	- 1	0,31	0,28	0,32	0,303	0,314
5	+ 1	- 1	- 1	+ 1	0,19	0,17	0,20	0,187	0,188
6	+ 1	+ 1	- 1	+ 1	0,44	0,47	0,48	0,463	0,470
7	+ 1	- 1	+ 1	+ 1	0,12	0,15	0,14	0,137	0,144
8	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	0,36	0,33	0,39	0,360	0,348

Дисперсии параллельных опытов определяли по формуле

$$S_u^2 = \frac{1}{r-1} \sum_{v=1}^r (y_{uv} - \bar{y}_u)^2 .$$

Например, для опыта 2 имеем

$$S_2^2 = \frac{1}{r-1} \sum_{v=1}^3 (y_{2v} - \bar{y}_2)^2 = \frac{1}{3-1} (1,00 + 1,00 + 0) \cdot 10^{-4} = 1,0 \cdot 10^{-4} .$$

Проверку однородности полученных дисперсий параллельных опытов проводили по критерию Кохрена:

$$G_{расч} = \frac{S_{u_{max}}^2}{\sum_{u=1}^N S_u^2} = \frac{9,0 \cdot 10^{-4}}{27,7 \cdot 10^{-4}} = 0,324,$$

где  $S_{u_{max}}^2$  – наибольшее значение дисперсии параллельных опытов (табл. 6.27, опыт 8).

Полученные значения  $G_{расч}$  сравнивали с табличным для числа степеней свободы  $f = 2$  и  $f_2 = 8$  при выбранном уровне значимости 0,05  $G_{табл} = 0,526 > G_{расч} = 0,324$ .

Расчетные значения дисперсий параллельных опытов приведены в табл. 6.27.

Следовательно, дисперсии параллельных опытов оказались однородными, что позволило определить дисперсию воспроизводимости эксперимента. Дисперсия воспроизводимости

$$S^2(y) = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N S_u^2 = \frac{27,7 \cdot 10^{-4}}{8} = 3,45 \cdot 10^{-4}.$$

Ошибка эксперимента:

$$S(y) = \sqrt{S^2(y)} = \sqrt{3,45 \cdot 10^{-4}} = 1,85 \cdot 10^{-2}.$$

Далее рассчитали коэффициенты уравнения регрессии по формуле

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N X_{iu} \bar{y}_u$$

и их взаимодействия

$$b_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N X_{iu} X_{ju} \bar{y}_u.$$

Таблица 6.27

№ опыта	Результаты опытов			Среднее значение $\bar{y}_u$	$y_{u1} - \bar{y}_u$	$y_{u2} - \bar{y}_u$	$y_{u3} - \bar{y}_u$	$(y_{u1} - \bar{y}_u)^2 \cdot 10^4$	$(y_{u2} - \bar{y}_u)^2 \cdot 10^4$	$(y_{u3} - \bar{y}_u)^2 \cdot 10^4$	$S_u^2 \cdot 10^4$
	$y_{u1}$	$y_{u2}$	$y_{u3}$								
1	0,15	0,17	0,14	0,153	- 0,003	+ 0,007	+ 0,013	0,09	2,89	1,69	2,34
2	0,43	0,45	0,44	0,440	- 0,010	+ 0,010	0	1,00	1,00	0	1,00
3	0,11	0,13	0,10	0,113	- 0,003	+ 0,017	- 0,013	0,09	2,89	1,89	2,34
4	0,31	0,28	0,32	0,303	+ 0,007	- 0,023	+ 0,017	0,49	5,29	2,89	4,34
5	0,19	0,17	0,20	0,187	+ 0,003	- 0,017	+ 0,013	0,09	2,89	1,69	2,34
6	0,44	0,47	0,48	0,463	- 0,023	+ 0,007	+ 0,017	5,29	0,49	2,89	4,34
7	0,12	0,15	0,14	0,137	- 0,017	+ 0,013	+ 0,003	2,89	1,69	0,09	2,34
8	0,36	0,33	0,39	0,360	0	- 0,030	- 0,030	0	9,00	9,00	9,00
$\Sigma$				2,156							27,70

Так, для коэффициента  $b_0$ :

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N X_{0u} \bar{y}_u = \frac{2,156}{8} = 0,270.$$

Остальные коэффициенты рассчитывали аналогично.

Проверку статистической значимости коэффициентов проводили по  $t$ -критерию. Для этого определялась средняя квадратическая ошибка коэффициентов регрессии:

$$S(b_i) = S(b_{ij}) = \frac{S(y)}{\sqrt{Nr}} = \frac{1,85 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{8 \cdot 3}} = 0,38 \cdot 10^{-2}.$$

Затем определяли доверительный интервал  $2\Delta b_i$ :

$$\Delta b_i = t_{\text{табл}} S(b_i) = 2,12 \cdot 0,38 \cdot 10^{-2} = 0,8 \cdot 10^{-2}.$$

Критическое значение  $t$ -критерия выбрали из таблицы для числа степеней свободы  $f = N(r-1) = 16$  и при принятом уровне значимости 0,05. Видно, что не все коэффициенты уравнения оказались статистически значимыми. После исключения статистически незначимых коэффициентов уравнение регрессии приняло вид

$$\hat{y} = 0,270 + 0,122 X_1 - 0,042 X_2 + 0,017 X_3 - 0,019 X_1 X_2. \quad (6.30)$$

Полученное уравнение проверили на адекватность по методике, представленной в примере 1:

$$F_{\text{расч}} = \frac{S_{\text{ад}}^2}{S^2(y)} = \frac{4,06 \cdot 10^{-4}}{3,45 \cdot 10^{-4}} = 1,17.$$

Так как  $F_{расч} = 1,17 < F_{табл} = 3,2$  при уровне значимости 0,05 и степенях свободы  $f_1 = 3$  и  $f_2 = 16$ , то уравнение (6.30) является адекватным.

Анализ уравнения позволяет сделать следующие выводы.

1. Наибольшее влияние на износ оказывает глубина погружения образца в абразивную среду. Величина износа растет также и с увеличением угла резания.

2. С повышением скорости перемещения абразива относительно образца при одном и том же пути трения износ уменьшается.

3. Выявлено взаимодействие факторов скорости и глубины погружения образца в абразив и показано, что при увеличении глубины погружения образца в абразив целесообразно работать с повышенной скоростью.

**Пример 3.** Применение ПФЭ с преобразованием параметра оптимизации и факторов.

В ряде случаев как параметр оптимизации, так и факторы точнее выражают изучаемый процесс не одной физической величиной каждый, а комплексами (безразмерными критериями) физических величин. Кроме того, связь между ними нелинейна. Однако, используя ПФЭ типа  $2^k$ , путем преобразования параметра оптимизации и факторов можно получить более сложную нелинейную зависимость. Как правило, в данном случае принимается уравнение следующего вида:

$$y = ax_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \dots, \quad (6.31)$$

где  $y$  – параметр оптимизации, может быть представлен комплексом физических величин;  $a$  – постоянная, отражающая влияние на процесс неучтенных факторов;  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  – коэффициенты, которые опре-

деляются опытным путем;  $x_1, x_2, x_3 \dots$  – независимые переменные (факторы), которые являются безразмерными комплексами физических величин.

Преобразование независимых переменных  $x_i$  в безразмерные (кодовые) переменные  $X_i$  производится с помощью уравнения преобразования, где за единицу нового масштаба принимается выражение

$$\frac{1}{2} (\ln x_{i_{\max}} - \ln x_{i_{\min}}) . \quad (6.32)$$

Ниже рассмотрим случай, когда параметр оптимизации и факторы представляются комплексами (безразмерными критериями), составленными из ряда физических величин, и связь между ними может подчиняться нормальному логарифмическому закону. Рассмотрим применение ПФЭ на следующем примере.

Найти зависимость изнашивания твердосплавных материалов группы WC – Co по стали марки 45 (нетермообработанной и термообработанной) от основных факторов. Изнашивание материала осуществлялось на установке МДП-1, схема которой представлена на рис. 6.2. Анализ факторов, произведенный методом отсеивающего эксперимента, позволил выделить следующие параметры:

- 1) нагрузка на образец  $P$ , кгс;
- 2) скорость скольжения  $v$ , м/мин;
- 3) радиус сферической поверхности контакта образца  $R$ , мм;
- 4) время испытаний  $T$ , мин;
- 5) процентное содержание кобальта в твердосплавном материале  $Co, \%$ ;
- 6) твердость твердосплавного материала образца  $H$ , кгс/мм<sup>2</sup>;
- 7) твердость вращающегося диска  $H_2$ , кгс/мм<sup>2</sup>;

- 8) коэффициент теплопроводности испытываемого материала  $\lambda_1$ , кал/см·с·°С;
- 9) удельная теплоемкость вращающегося диска  $C_2$ , кал/г·°С.

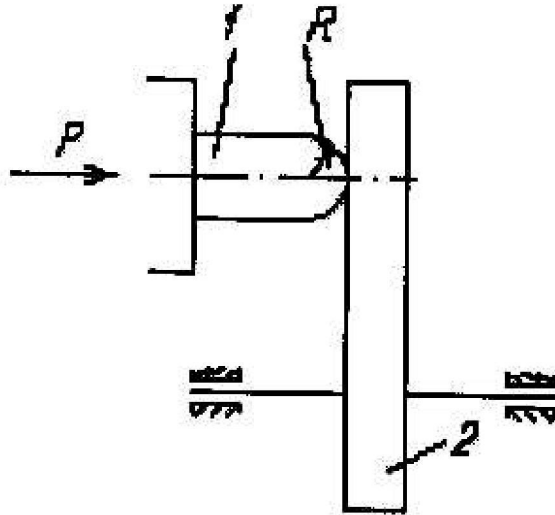


Рис. 6.2. Схема контактирования трущейся пары:  
1 – образец; 2 – контрообразец

Установлено, что влияние этих величин проявляется комплексно, в определенных обобщенных переменных (комплексах). Использование методов теории подобия и анализа размерностей позволяет получить комплексы (критерии) исходных параметров и в конечном счете установить критериальное уравнение из изучаемых факторов. Функциональная зависимость между параметром оптимизации  $y$  – весовым износом  $u$  (килограммы) и исследуемыми факторами имеет вид

$$u = \Phi \left( p, v, R, T, C_0, \frac{H_1}{H_2}, \lambda, C_2 \dots \right), \quad (6.33)$$

где  $C_0$  и  $H_1/H_2$  – безразмерные симплексы (соотношения).

Выразим размерности переменных:

$$\begin{aligned}
 u &= [P], \\
 p &= [P], \\
 v &= [LT^{-1}], \\
 T &= [T], \\
 R &= [L], \\
 \lambda &= [PT^{-1}\theta^{-1}], \\
 C_2 &= [L^2T^{-2}\theta^{-1}].
 \end{aligned}
 \tag{6.34}$$

Тогда уравнение (6.34) можно представить в виде

$$u = \Phi \left( p^a, v^b, R^c, T^d, C_2^e, \left( \frac{H_1}{H_2} \right)^f, \lambda^h, C_2^i \dots \right).
 \tag{6.35}$$

Подставим вместо символов их размерности:

$$[P] = \Phi \{ [p]^a; [LT^{-1}]^b; [L]^c; [T]^d; 1^e; 1^f [pT^{-1}\theta^{-1}]^h; [L^2T^{-2}\theta^{-1}]^i \}.
 \tag{6.36}$$

Согласно первой теореме подобия уравнение (6.36) должно быть однородным относительно размерностей. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 [P] - 1 &= a + h; \\
 [L] - 0 &= b + c + 2i; \\
 [T] - 0 &= -b + d - h - 2i; \\
 [\theta] - 0 &= -h - i.
 \end{aligned}
 \tag{6.37}$$

Подставляя в уравнение (6.35) найденные значения степеней, получим

$$u = \Phi \left( p^{1+i}, \nu^b, R^{-b-2i}, T^{b+i}, Co^e, \left( \frac{H_1}{H_2} \right)^f, \lambda^{-i}, C_2^{-i} \right). \quad (6.38)$$

Объединим члены с одинаковыми показателями степеней:

$$\frac{u}{P} = \Phi \left[ \left( \frac{PTC_2}{R^2 \lambda} \right)^i; \left( \frac{\nu T}{R} \right)^b; Co^e; \left( \frac{H_1}{H_2} \right)^f \right]. \quad (6.39)$$

Согласно второй теореме подобия число безразмерных комбинаций (комплексов и симплексов) равно разности между количеством факторов и основных единиц размерности, т. е.  $k = \Phi - p = 8 - 4 = 4$ . Общий вид критериального уравнения (6.39) служит основанием для получения расчетного уравнения. Для этого надо экспериментально определить коэффициенты уравнения. Представим эту функцию как непрерывный ряд, рассматривая только первый член ряда:

$$\frac{u}{P} = a \left( \frac{PTC_2}{R^2 \lambda} \right)^\alpha \left( \frac{\nu T}{R} \right)^\beta (Co)^\gamma \left( \frac{H_1}{H_2} \right)^\varepsilon, \quad (6.40)$$

где  $a$  – постоянная, отражающая влияние на процесс неучтенных факторов;  $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ , – коэффициенты, определяются экспериментальным путем. Полученная модель может быть использована в условиях соблюдения подобия схемы контактирования, нагружения и геометрической формы. Зависимость (6.40) представим в виде

$$y = ax_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma x_4^\varepsilon, \quad (6.41)$$

где  $x_1, x_2, x_3, x_4$  – независимые переменные, безразмерные параметры, которые считаем управляемыми параметрами или факторами.

Процесс трения осуществлялся на машине трения МДП-1 (рис. 6.2) при нагрузке 2; 6; 10 кгс, скорости скольжения 40; 80; 120 м/мин, в течение 15 мин. Образцы сплавов ВК2, ВК8, ВК15 твердостью  $H_1=1400$  кгс/мм<sup>2</sup>, сферической поверхности радиусом  $R = 5$  мм истирались о вращающийся диск твердостью  $H_2 = 180; 206; 510$  кгс/мм<sup>2</sup>. Теплофизические константы трущихся тел: теплопроводность твердых сплавов  $\lambda = 0,18$  кал/см·с °С; удельная теплоемкость стальных дисков  $C_2 = 0,112$  кал/г °С. Согласно принятым исходным данным уровни независимых переменных (факторов) получили значения, представленные в табл. 6.28.

Проведем преобразование уравнения (6.41), прологарифмировав его:

$$\ln y = \ln a + \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2 + \gamma \ln x_3 + \varepsilon \ln x_4, \quad (6.42)$$

запишем его в виде

$$\hat{y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4, \quad (6.43)$$

где  $\hat{y}$  – оценка  $\ln y$  по уравнению (6.43);  $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4$  – соответственно оценки коэффициентов.

Таблица 6.28

Уровни факторов	Факторы							
	$\frac{PTC_2}{R^2 \lambda}$		$\frac{\nu T}{R}$		$C_0$		$\frac{H_1}{H_2}$	
	$x_1$	$\ln x_1$	$x_2$	$\ln x_2$	$x_3$	$\ln x_3$	$x_4$	$\ln x_4$
+	$2240 \cdot 10^4$	16,926	$36 \cdot 10^4$	12,794	14	2,639	10,8	2,376
0	$1344 \cdot 10^4$	16,414	$24 \cdot 10^4$	12,386	8	2,079	6,8	1,475
–	$448 \cdot 10^4$	15,315	$12 \cdot 10^4$	11,696	2	0,693	2,8	1,010

Для определения коэффициентов уравнения был поставлен ПФЭ типа  $2^4$ . Преобразование независимых переменных  $x_i$  в переменные  $X_i$  производилось с помощью уравнения преобразования, где за единицу нового масштаба принято выражение

$$X_i = \frac{2(\ln x_i - \ln x_{i\max})}{\ln x_{i\max} - \ln x_{i\min}} + 1. \quad (6.44)$$

Матрица планирования, результаты эксперимента приведены в табл. 6.29.

Используя ортогональность матрицы эксперимента, вычисления коэффициентов уравнения регрессии проводили по формуле

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N X_{iu} \ln \bar{y}_u, \quad (6.45)$$

где  $i = 0; 1; 2; 3; 4$  – номер фактора;  $\ln \bar{y}_u$  – средний отклик по трем опытам в точке с номером  $u$ . Уравнение в преобразованных переменных приняло вид

$$\ln y = -15,36 - 0,752X_1 + 0,305X_2 + 0,436X_3 + 0,596X_4. \quad (6.46)$$

Таблица 6.29

№ точки	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$\bar{y}_u$	$\ln \bar{y}_u$	$\ln \hat{y}_u$	$(\ln \bar{y}_u - \ln \hat{y}_u)$
1	+	+	+	+	+	$34 \cdot 10^{-8}$	- 14,899	- 14,800	0,01
2	+	-	+	+	+	$17 \cdot 10^{-7}$	- 13,287	- 13,319	0,0009
3	+	+	-	+	+	$25 \cdot 10^{-8}$	- 15,207	- 15,419	0,04
4	+	-	-	+	+	$12 \cdot 10^{-7}$	- 13,713	- 13,913	0,04

5	+	+	+	-	+	$14 \cdot 10^{-8}$	- 15,792	- 15,097	0,01
6	+	-	+	-	+	$7 \cdot 10^{-7}$	- 14,176	- 14,197	0,0004
7	+	+	-	-	+	$8 \cdot 10^{-8}$	- 16,366	- 16,297	0,0036
8	+	-	-	-	+	$3 \cdot 10^{-7}$	- 15,011	- 14,797	0,04
9	+	+	+	+	-	$14 \cdot 10^{-8}$	- 15,82	- 15,016	0,04
10	+	-	+	+	-	$4 \cdot 10^{-7}$	- 14,721	- 14,516	0,04
11	+	+	-	+	-	$5 \cdot 10^{-8}$	- 16,816	- 16,616	0,04
12	+	-	-	+	-	$3 \cdot 10^{-7}$	- 15,018	- 15,116	0,01
13	+	+	+	-	-	$6 \cdot 10^{-8}$	- 16,685	- 16,865	0,004
14	+	-	+	-	-	$2 \cdot 10^{-7}$	- 15,448	- 15,394	0,0025
15	+	+	-	-	-	$3 \cdot 10^{-8}$	- 17,365	- 17,494	0,01
16	+	-	-	-	-	$1 \cdot 10^{-7}$	- 16,08	- 15,994	0,01
$b_i$	- 15,36	- 0,752	0,305	0,436	0,596				$\Sigma=0,3014$

Для получения уравнения в натуральных значениях факторов подставим значения  $X_1$  согласно формуле преобразования (6.44) и получим

$$\ln \hat{y} = - 9,386 - 0,433 \ln x_1 + 0,555 \ln x_2 + 0,450 \ln x_3 + 0,874 \ln x_4 . \quad (6.47)$$

Проведем статистический анализ результатов с целью оценки достоверности полученной зависимости.

Дисперсия параметра оптимизации определялась как

$$S^2(y) = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N S_u^2 = 0,0568 ,$$

где  $S_u^2$  – построчечные дисперсии.

Проверка значимости коэффициентов модели производилась по  $t$ -критерию Стьюдента.

Дисперсия коэффициента регрессии определялась по формуле

$$S^2(b_i) = \frac{S^2(y)}{Nr} = \frac{0,0568}{16 \cdot 3} = 0,00118 = 1,18 \cdot 10^{-3},$$

$$S(b_i) = 0,0343.$$

Значение  $t$ -критерия находилось из выражения

$$t_i = \frac{|b_i|}{S(b_i)}.$$

Значение  $t$ -критерия при уровне значимости  $\alpha = 5\%$  и  $N(r-1) = 32$  степенях свободы  $t_{табл} = 2,04$ . В рассматриваемом случае  $t_i > t_{табл}$ , следовательно, найденные коэффициенты статистически значимы.

Проверка гипотезы об адекватности модели проводилась с использованием  $F$ -критерия:

$$F_{расч} = \frac{S_{ад}^2}{S^2(y)} < F_{табл}.$$

Дисперсия адекватности  $S_{ад}^2$  характеризует рассеяние результатов эксперимента относительно уравнения связи и рассчитывается по формуле

$$S_{ад}^2 = \frac{r}{N - \lambda} \sum_{u=1}^N (\ln \bar{y}_u - \ln y_u)^2,$$

где  $\lambda = 5$  – число членов аппроксимирующего полинома.

Подставляя данные табл. 6.29, получаем

$$S_{ад}^2 = \frac{3}{16-5} \cdot 0,3014 = 0,0925, \quad F_{расч} = \frac{0,0925}{0,0568} = 1,63.$$

Табличное значение  $F_{табл}$ -критерия для уровня значимости  $\alpha = 0,05$  при  $f_{ад} = N - \lambda = 16 - 5 = 11$  и  $f_{восп} = N(r - 1) = 16 \cdot 2 = 32$  степенях свободы составляет  $F_{табл} = 2,14$ . Так как  $F_{расч} < F_{табл}$ , то уравнение адекватно.

Убедимся, что для описания искомой зависимости достаточно уравнения 1-й степени и не требуется членов 2-й степени. Для этого проверим нуль-гипотезу ( $H_0$ ) о том, что сумма всех коэффициентов регрессии  $\sum b_{ii}$  при квадратичных членах  $X_i^2$  равна нулю. Среднее значение опытов в центральной точке (опыт 17)  $\ln y_0 = -15,594$ , а ошибка эксперимента  $S(y) = 0,2383$ . Таким образом,  $(b_0 - \ln \bar{y}_0) = (15,36 - 15,594) = -0,234$ , что меньше  $S(y)$ . Следовательно, квадратичные эффекты, по-видимому, отсутствуют, и линейную модель можно считать адекватной.

После потенцирования уравнения (6.47) и подстановки натуральных значений факторов окончательно получим

$$\frac{u}{P} = e^{-9,386 \left( \frac{PTC}{R^2 \lambda} \right)^{-0,933} \left( \frac{vT}{R} \right)^{0,555} Co^{0,45} \left( \frac{H_1}{H_2} \right)^{0,874}}. \quad (6.48)$$

Располагая зависимостью (6.48), можно решать задачи об оптимальных условиях износа при поиске области оптимума. Учитывая многофакторность исследуемого процесса, использовали теорию подобия, которая позволила существенно уменьшить число переменных, входящих в задачу.

Анализ уравнения (6.48) показывает, что наиболее сильное влияние на параметр оптимизации оказывает комплекс механических свойств трущихся пар. Скорость трения и отношение твердостей материалов являются также весомыми факторами, но в меньшей степени; наименее ощутимым в процессе изнашивания является изменение нагрузки. Особая роль отводится процентному содержанию кобальта в сплавах. Учитывая, что этот параметр представлен в чистом виде и не является составляющим комплексом, становится понятным его первостепенное значение для процесса изнашивания.

*Пример 4.* Для исследования влияния режимов борохромирования на износостойкость узла трения была применена дробная реплика от полного факторного эксперимента.

В последнее десятилетие с целью увеличения износостойкости, коррозионной стойкости, теплостойкости, поверхностный слой металла насыщают бором совместно с другими легирующими компонентами. Была поставлена задача – разработать и реализовать методику определения оптимальных режимов борохромирования металлов, минимизирующих их износ, с применением методов планирования эксперимента. Исследования проводили на никелевых покрытиях при работе их в водно-абразивной среде.

Априорная информация и предварительно проведенные опыты показали, что основными факторами, существенно влияющими на качество поверхностных слоев при борохромировании, являются температура электролита  $T$ , плотность тока  $j$ , время процесса  $t$  и содержание окиси хрома в ванне  $q$ . Эти факторы и были выбраны в качестве варьируемых. Параметром оптимизации, характеризующим свойства борохромированного слоя, выбран износ, который оценивался при испытании весовым способом. Борохромированию подвергались образцы из стали марки 45 с предварительным никелевым покрытием толщиной до 0,1 мм. Испытание износостойкости проводили на тор-

цевой установке трения в водно-абразивной среде (вода водопродонная с 5 % абразива) при удельном давлении  $p = 3 \text{ кгс/см}^2$  и скорости скольжения  $v = 3 \text{ м/с}$ . В табл. 6.30 представлены уровни варьируемых факторов, интервалы их варьирования.

Таблица 6.30

Уровни факторов	Кодовые значения факторов				Натуральные значения факторов			
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$T, \text{ }^\circ\text{C}$	$j, \text{ А/см}^2$	$\tau, \text{ мин}$	$q, \text{ \%}$
Основной уровень	0	0	0	0	930	0,15	3	5
Интервал варьирования	1	1	1	1	30	0,05	1	2
Верхний уровень	1	1	1	1	960	0,20	4	7
Нижний уровень	-1	-1	-1	-1	900	0,10	2	3

В качестве плана эксперимента использована дробная реплика (полуреплика) с генерирующим соотношением  $X_4 = X_1X_2X_3$ .

Для уменьшения систематических ошибок опыты проводили в случайном порядке. Каждый из опытов осуществляли дважды. В табл. 6.31 представлены матрица планирования и результаты эксперимента.

Таблица 6.31

№ опыта	Матрица плана эксперимента					Результаты эксперимента		Среднее значение $\bar{y}_u$	Расчетное значение
	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$y_{u1}$	$y_{u2}$		
1	+1	-1	-1	-1	-1	15,4	16,2	15,8	12,2
2	+1	+1	-1	-1	+1	3,9	3,5	3,7	5,1
3	+1	-1	+1	-1	+1	13,7	13,4	13,55	12,6

4	+1	+1	+1	-1	-1	5,1	5,5	5,3	8,3
5	+1	-1	-1	+1	+1	6,2	5,6	5,9	8,7
6	+1	+1	-1	+1	-1	4,1	4,4	4,25	4,00
7	+1	-1	+1	+1	-1	10,4	10,8	10,6	11,9
8	+1	+1	+1	+1	+1	8,9	8,7	8,8	5,0

Коэффициенты уравнения регрессии рассчитывали по формулам

$$b_0 = \frac{1}{8} \sum_{u=1}^8 X_{0u} \bar{y}_u, \quad b_i = \frac{1}{8} \sum_{u=1}^8 X_{iu} \bar{y}_u, \quad b_{ij} = \frac{1}{8} \sum_{u=1}^8 X_{iu} X_{ju} \bar{y}_u.$$

Например, для  $b_1 = 1/8[15,8(-1) + 3,7(+1) + \dots + 8,8(+1)] = -2,9$ .

В табл. 6.32 представлен расчет дисперсий параллельных опытов.

Таблица 6.32

№ опыта	$y_{u1} - \bar{y}_u$	$y_{u2} - \bar{y}_u$	$(y_{u1} - \bar{y}_u)^2$	$(y_{u2} - \bar{y}_u)^2$	$\sum (y_{uv} - \bar{y}_u)^2$	$S_u^2$
1	-0,40	0,40	0,1600	0,1600	0,3200	0,320
2	0,20	-0,20	0,0400	0,0400	0,0800	0,080
3	0,15	-0,15	0,0225	0,0225	0,0450	0,045
4	-0,20	0,20	0,0400	0,0400	0,0800	0,080
5	0,30	-0,30	0,0900	0,0900	0,1800	0,180
6	-0,15	0,15	0,0225	0,0225	0,0450	0,045
7	-0,20	0,20	0,0400	0,0400	0,0800	0,080
8	0,10	-0,10	0,0100	0,0100	0,0200	0,020
$\Sigma$					0,8500	0,850

Однородность дисперсий параллельных опытов проверяли по критерию Кохрена

$$G_{расч} = \frac{S_{u_{max}}^2}{\sum_{u=1}^N S_u^2} = \frac{0,320}{0,850} = 0,376.$$

Расчетное значение  $G_{расч}$ -критерия сравнивали с табличным соответственно для степеней свободы  $f_1 = 1$  и  $f_2 = 8$  и уровня значимости 0,05.  $G_{табл} = 0,680$ . Так как  $G_{расч} = 0,376 < G_{табл} = 0,680$ , то дисперсии можно считать однородными.

Далее рассчитывали дисперсию воспроизводимости и среднюю квадратичную ошибку эксперимента:

$$S^2(y) = \frac{1}{8} \sum_{u=1}^8 S_u^2 = \frac{0,850}{8} = 0,106,$$

$$S(y) = +\sqrt{S^2(y)} = \sqrt{0,106} = 0,32.$$

Ошибки коэффициентов уравнения регрессии определяли по формуле

$$S(b_i) = \frac{S(y)}{\sqrt{Nr}} = \frac{0,32}{\sqrt{8 \cdot 2}} = 0,08.$$

Все коэффициенты уравнения регрессии оказались статистически значимыми. После расчета коэффициентов и учета только линейных членов уравнение приняло следующий вид:

$$\hat{y} = 8,50 - 2,90X_1 + 1,05X_2 - 1,10X_3 - 0,55X_4. \quad (6.49)$$

На основании уравнения (6.49) были получены расчетные значения интенсивности изнашивания и рассчитана дисперсия адекватности:

$$S_{ад}^2 = \frac{r}{N - \lambda} \sum_{u=1}^8 (\bar{y}_u - y_u)^2 = \frac{2 \cdot 49125}{8 - 5} = 32,75.$$

Адекватность уравнения (6.49) проверяли по  $F$ -критерию:

$$F_{расч} = \frac{s_{ад}^2}{s^2(y)} = \frac{32,75}{0,106} = 309.$$

Так как  $F_{расч} = 309$  оказалось значительно больше, чем  $F_{табл} = 4,46$  соответственно для  $f_{ад} = 3$  и  $f_{восн} = 8$  степеней свободы и уровня значимости 0,05, то уравнение получилось неадекватным.

Анализ уравнения (6.49) показывает, что влияние фактора  $X_4$  и его взаимодействие с другими факторами являются менее значимыми, а поэтому дальнейшее исследование процесса проводили при фиксированном значении  $X_4$ , соответствующем 5-процентному содержанию окиси хрома.

Реализация ортогонального плана второго порядка с тремя факторами позволила получить уравнение, адекватно описывающее процесс борохромирования, и определить оптимальные режимы.

## 6.6. ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МОДЕЛИ ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Модель вида (6.1) для наглядности и дальнейшего анализа можно представить графически в виде поверхности отклика. При  $k = 2$  поверхность отклика представляет собой гиперболический параболо-

ид, имеющий седлообразную форму. При пересечении его плоскостями, перпендикулярными оси  $y$ , в сечении получаем совокупность гипербол. При отсутствии эффектов взаимодействий факторов  $\left( \sum_{i \neq j}^k b_{ij} X_i X_j = 0 \right)$  функция отклика представляет плоскость в трехмерном пространстве. Функцию отклика можно представить также на плоскости в виде совокупности гипербол или прямых равных значений параметра  $y$ .

При  $k \geq 3$  геометрическая интерпретация функции отклика возможна при изменении двух факторов и фиксации остальных на постоянных уровнях.

1. Геометрическая интерпретация модели вида (6.1) при  $k = 2$ .  
Геометрическое изображение модели вида

$$y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_{12} X_1 X_2 \quad (6.50)$$

рассмотрим на примере нахождения функции отклика при абразивном изнашивании пары трения чугун – сталь. Задача формулируется следующим образом. Найти функцию отклика для весовой интенсивности изнашивания ( $u_n$ , мг/см<sup>2</sup>·км) чугунного подшипника, работающего в качестве опоры винтового конвейера на асфальтобетонном заводе.

Транспортировалась абразивная масса, которая подвергла поверхность подшипника абразивному износу. На основании априорной информации и испытаний установлено, что функция отклика должна иметь модель вида (6.50). Требуется графически представить функцию отклика.

Кодирование факторов, план-матрица полного факторного эксперимента (ПФЭ) вида  $2^2$ , условия и результаты опыта представлены в табл. 6.33.

Таблица 6.33

№	Уровни факторов	Кодовое обозначение	Значение факторов		План-матрица			Параметр оптимизации		$\bar{y}_u$	№ точки
			$p$ , кгс/см <sup>2</sup>	$v$ , м/с	$X_1$	$X_2$	$X_1 X_2$	$y_{u1}$	$y_{u2}$		
1	Нулевой уровень	$X_i = 0$	35	6	-1	-1	+1	27	28	27,5	1
2	Интервал варьирования	$\Delta x_i$	5	2	+1	-1	-1	15,9	17,1	16,5	2
3	Нижний уровень	$X_i = -1$	30	4	-1	+1	-1	22,1	22,9	22,5	3
4	Верхний уровень	$X_i = +1$	40	8	+1	+1	+1	13,4	13,6	13,5	4

Коэффициенты регрессии:

$$b_0 = 20, b_1 = -5, b_2 = -2, b_{12} = 0,5.$$

Уравнение регрессии

$$\hat{y} = 20 - 5X_1 - 2X_2 + 0,5X_1X_2. \quad (6.51)$$

В натуральных значениях, подставляя  $X_1 = \frac{p-35}{5}$ ,  $X_2 = \frac{v-6}{2}$

в уравнение (6.51), имеем

$$\hat{y} = 71,5 - 1,3p - 2,75v + 0,05pv. \quad (6.52)$$

Воспроизводимость опытов проверяли по критерию Кохрена  $G_{расч} \leq G_{табл} (\alpha = 0,05)$ , так как получено  $G_{расч} = 0,4615$ ,  $G_{табл} = 0,9065$ .

Дисперсия воспроизводимости  $S^2(y) = 0,39$ .

Проверка адекватности линейной модели выполнялась с помощью критерия Фишера  $F$ :  $F_{расч} \leq F_{табл}$ , т. е.  $F_{расч} = 2,56 \leq F_{табл} = 7,71$ , при  $\alpha = 0,05$ ;  $f_{ад} = N - \lambda = 4 - 3 = 1$ ,  $f_{воспр} = N(r - 1) = 4(2 - 1) = 4$  модель адекватна. Все коэффициенты значимы, кроме  $b_{12} = 0,5$ .

При  $k = 2$  линейная модель иллюстрируется плоскостью в  $(k+1)$ -мерном, т. е.  $(2+1)$ -трехмерном пространстве (рис. 6.3). Как в кодовом (рис. 6.3, а), так и натуральном значении (рис. 6.3, б) характер плоскости остается без изменения.

Как следует из рис. 6.3, во всех случаях плоскость проходит через точку  $y = b_0 = 20$ , так как свободный член  $b_0$  в линейном уравнении регрессии численно равен значению отклика при  $X_1 = X_2 = 0$ . Коэффициенты регрессии при линейных членах характеризуют ее наклон к соответствующим осям.

Точки 1, 2, 3, 4 являются координатами опытов при постановке ПФЭ типа  $2^2$ . Из них проведены прямые, параллельные оси  $y$ , на которых отложены значения откликов в соответствующих опытах (табл. 6.33).

Если провести плоскость, перпендикулярную оси  $y$ , то в пересечении этой плоскости с поверхностью получаем кривую, каждой точке которой соответствует одно и то же значение функции отклика (рис. 6.3, в).

Для построения системы кривых равного отклика (линий равного уровня) для уравнения (6.52) использовалась табл. 6.34.

Если бы в уравнении (6.50) не учитывался член, характеризующий парное взаимодействие факторов, т. е. член  $b_{12}X_1X_2 = 0,5X_1X_2$  или  $0,05pv$ , то на рис. 6.3 мы бы имели систему прямых.

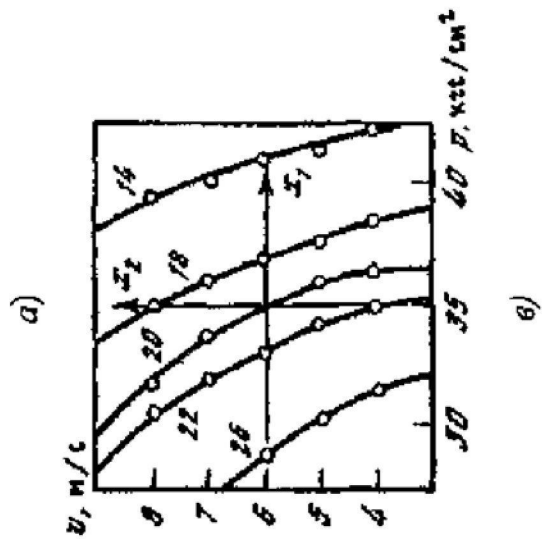
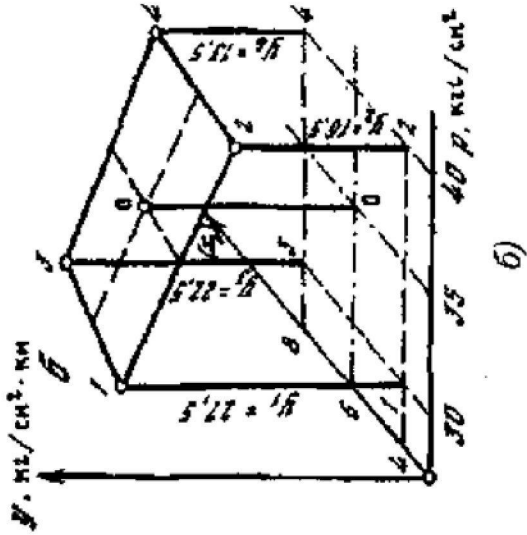
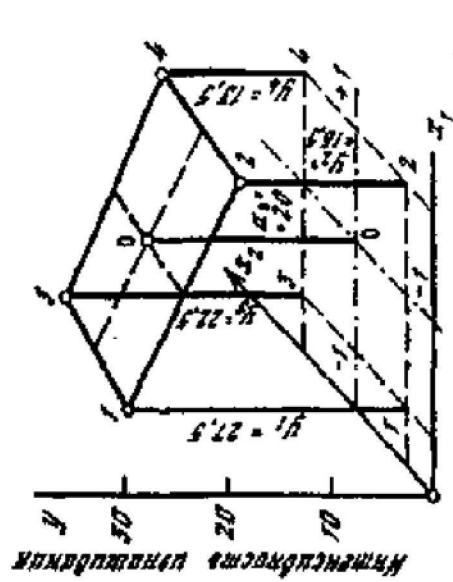


Рис. 6.3. Гиперплоскость в  $(k+1)$  – мерном пространстве при  $k=2$ : а) – в кодовой; б) – в натуральной форме; в) – графическая интерпретация уравнения (6.52) в виде линий равного уровня

Таблица 6.34

№ точки	Значение отклика $y$ , мг/см <sup>2</sup> км	Заданные скорости, м/с				
		8	7	6	5	4
		Полученное значение $p$ , кгс/см <sup>2</sup>				
1	14	39,45	40,26	41	41,67	42,27
2	18	35	36,05	37	37,85	38,64
3	20	32,77	33,68	35	35,95	36,5
4	22	30,56	31,84	33	34,04	35,0
5	26	26,1	27,63	29	30,24	31,4

Из рис. 6.3, в следует, что даже при незначимости коэффициента  $b_{12}$  в уравнении (6.51) его роль достаточно существенна. Если бы знак перед  $b_{12}$  был « $\leftarrow$ », то кривизна линий равного уровня имела бы противоположное направление.

## 2. Геометрическое изображение модели вида

$$y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + b_{23}X_2X_3 + b_{123}X_1X_2X_3.$$

В данном случае  $k = 3$  и пространство должно быть четырехмерное. Вследствие этого графическое представление функции отклика можно изобразить при фиксированном значении одной из координат, т. е. один из факторов должен получить ряд постоянных значений.

Данную задачу рассмотрим на примере нахождения функции отклика, которой является температура трения.

На основании проведенных исследований было выяснено, что на объемную температуру трения  $t$  пары пластмасса–сталь при граничной смазке влияют нагрузка, скорость, первоначальная шероховатость

стальной поверхности. Функция отклика  $y$  приближается к линейной зависимости.

Требуется графически представить функцию отклика.

Кодирование факторов, план-матрица факторного эксперимента типа  $2^3$  и функция отклика представлены в табл. 6.35.

Получили уравнение в преобразованных переменных

$$y = 73,7 + 11,8 X_1 + 19,1 X_2 - 6,8 X_3 + 10,95 X_1 X_2 + 14,1 X_1 X_3 + 5,44 X_2 X_3 + 0,187 X_1 X_2 X_3. \quad (6.53)$$

Однородность дисперсий была проверена по критерию Кохрена:  $G_{расч} = 0,376$ ;  $G_{табл} = 0,516$ , т. е.  $G_p < G_{табл}$ . Гипотеза об однородности принимается. Модель адекватна, так как  $F_{расч} = 2,02$ , а  $F_{табл} = 4,50$  при  $\alpha = 0,05$ .

Все коэффициенты, за исключением  $b_{123}$ , значимы.

Уравнение (6.53) в натуральных значениях факторов имеет вид

$$\hat{y} = 121,9 - 8,1p + 33,7v - 21,6Ra + 8,5pv + 3,8Ra - 20,1vRa + 0,16pvRa. \quad (6.54)$$

Для графического изображения функции отклика примем один из факторов, например первоначальную шероховатость стальной поверхности  $Ra$  фиксированной:  $Ra' = 0,65$  мкм и  $Ra'' = 2,5$  мкм. Тогда получим плоскость в трехмерном пространстве (рис. 6.4, а, б).

При построении диаграмм использованы основные точки 1–2–3–4 и вспомогательные 5–6–7–8, которые учитывают криволинейность плоскостей откликов. Результаты расчетов поверхностей откликов по формуле (6.53) представлены в табл. 6.36.

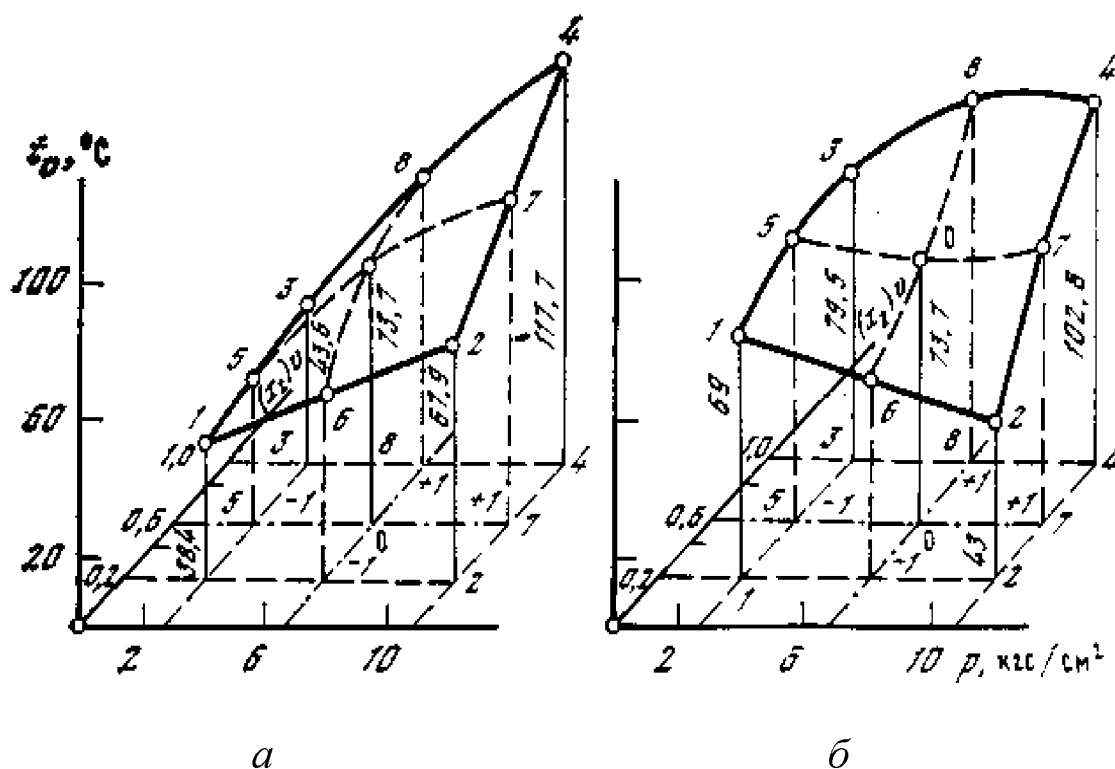


Рис. 6.4. Изменение объемной температуры трения  $t_v$  от нагрузки и скорости при различной первоначальной шероховатости стального (сталь марки 45) тела:  $a - R_a = 0,65 \text{ мкм}$ ;  $б - R_a = 2,5 \text{ мкм}$ . Материал контртела – полимер (капрон Б), смазка граничная, масло промышленное 20

Таблица 6.35

Уровни факторов		Обозначение	X <sub>1</sub>			X <sub>2</sub>			X <sub>3</sub>			
			p, кгс/см <sup>2</sup>			v, м/с			R <sub>a</sub> , мкм			
Основной уровень		0	6,84			0,59			1,575			
Интервал варьирования		$\Delta x_i$	4,0			0,31			0,925			
Верхний уровень		+ 1	10,8			0,90			0,65			
Нижний уровень		- 1	2,88			0,28			2,5			
Матрица планирования 2 <sup>3</sup>									Параметр оптимизации			
Точка плана	X <sub>0</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>1</sub> X <sub>2</sub>	X <sub>1</sub> X <sub>3</sub>	X <sub>2</sub> X <sub>3</sub>	X <sub>1</sub> X <sub>2</sub> X <sub>3</sub>	y <sub>u1</sub>	y <sub>u2</sub>	y <sub>u3</sub>	$\bar{y}_u$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	98	105	115	106
2	+	+	+	-	+	-	-	-	120	125	130	125

Окончание табл. 6.35

3	+	+	-	+	-	+	-	-	54	55	60	56,4
4	+	+	-	-	-	-	+	-	57	55	52	54,5
5	+	-	+	+	-	-	+	-	55	50	60	55
6	+	-	+	-	-	+	-	+	80	85	90	85
7	+	-	-	+	+	-	-	+	50	55	45	50
8	+	-	-	-	+	+	+	-	57	60	55	57,4

Таблица 6.36

Точка плана	Факторы, их знаки			Параметр оптимизации $\hat{y}$	Факторы, их знаки			Параметр оптимизации $\hat{y}$
	$X_1$	$X_2$	$X_3$		$X_1$	$X_2$	$X_3$	
1	-1	-1	+1	38,357	-1	-1	-1	68,94
2	+1	-1	+1	67,88	+1	-1	-1	42,81
3	-1	+1	+1	43,6	-1	+1	-1	79,44
4	+1	+1	+1	117,68	+1	+1	-1	102,75
5	-1	0	+1	40,98	-1	0	-1	82,82
6	0	-1	+1	53,12	0	-1	-1	55,88
7	+1	0	+1	92,78	+1	0	-1	78,22
8	0	+1	+1	80,64	0	+1	-1	105,16
0	0	0	+1	73,7	0	0	-1	73,7