3. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

В настоящее время при статистической обработке результатов измерения большое место занимает дисперсионный анализ. Основы дисперсионного анализа были разработаны в 20–30-х годах английским ученым Р. Фишером. По идее Фишера, если результаты наблюдения зависят от некоторых независимых факторов и случайных причин, то возможно разделить вклады этих факторов, анализируя соотношения между дисперсиями, связанными с влиянием упомянутых факторов. А именно, общая дисперсия случайной величины разлагается на независимые случайные слагаемые, обусловленные действием независимых факторов, и остаточную дисперсию, обязанную своим возникновением ошибкам эксперимента. Решение о том, играет ли роль некоторый фактор, т. е. влияет ли он существенным образом на исход эксперимента, зависит от того, насколько значимой является составляющая дисперсии, обусловленная этим фактором, по сравнению с дисперсией, обусловленной ошибкой эксперимента. Наиболее простым является случай, когда проверяется действие только одного фактора. Такая проверка осуществляется при однофакторном дисперсионном анализе. Если исследуется влияние двух одновременно действующих факторов, то такой дисперсионный анализ называется двухфакторным.

Проведение дисперсионного анализа возможно, если результаты измерений являются независимыми случайными величинами, подчиняющимися нормальному закону распределения.

3.1. ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

При однофакторном дисперсионном анализе выявляется степень влияния одного фактора X на математическое ожидание отклика $M(Y)$. Фактор может быть количественным (скорость резания, размер заготовки и т. д.) или качественным (модель станка, марка инструментального материала и т. д.). В процессе эксперимента фактор поддерживают на n уровнях. На каждом уровне фактора проводится m дублирующих опытов. Значение m может быть одинаковым или разным для каждого из уровней. Результаты всех измерений удобно представлять в виде таблицы, которую называют матрицей наблюдений (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Номер уровня фактора	Уровень фактора	Наблюдения	Число дублирующих опытов
1	X_1	$Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{1j}, \ldots, Y_{1m_1}$	m_1
2	X_2	$Y_{21}, Y_{22}, \ldots, Y_{2j}, \ldots, Y_{2m_2}$	m_2
3	X_3	$Y_{31}, Y_{32}, \ldots, Y_{3j}, \ldots, Y_{3m_3}$	m_3
i	X_i	$Y_{i1}, Y_{i2}, \ldots, Y_{ij}, \ldots, Y_{im_i}$	m_i
n	X_n	$Y_{n1}, Y_{n2}, \ldots, Y_{nj}, \ldots, Y_{nm_n}$	m_n

Вначале для каждой серии дублирующих опытов вычисляют оценки $M(Yi)$, равные $\bar{y}_i$, и дисперсии воспроизводимости $S^2_{воспрi}$:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i} Y_{ij}; \qquad S^2_{воспр} = \frac{1}{m_i - 1}\sum_{j=1}^{m_i}(Y_{ij} - \bar{y}_i)^2. \tag{3.1}$$

Затем проверяют однородность ряда дисперсий S_1^2, S_2^2, …, S_i^2, S_N^2 для каждой пары при помощи критерия Фишера, если m_i различны, или при помощи критерия Кохрена, если $m_i = const$. После подтверждения гипотезы об однородности дисперсий можно приступать к анализу. При этом полагают, что результат любого измерения Y_{ij}, можно представить моделью

$$Y_{ij} = \mu + \gamma_i + \varepsilon_{ij} , \tag{3.2}$$

где μ – общая средняя; γ_i – отклонение, вызванное изменением контролируемого фактора; ε_{ij} – отклонение, вызванное неконтролируемыми факторами.

Задача дисперсионного анализа состоит в оценке существенности влияния изменения уровня фактора.

Влияние неконтролируемых факторов, т. е. вклад ε_{ij} можно оценить средней дисперсией воспроизводимости

$$S^2_{воспр} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S^2_{воспрi} . \tag{3.3}$$

Общее рассеивание значений отклика, вызванное как контролируемыми, так и неконтролируемыми факторами, оценивается полной (или общей) дисперсией:

$$S_0^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{m_i}(Y_{ij} - \mu)^2 ,$$

где $$N = \sum_{i=1}^{n} m_i ; \qquad \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i . \tag{3.4}$$

Рассеивание значений отклика, вызванное контролируемым фактором, оценивается дисперсией

$$S^2_{(X)} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} m_i(\bar{y}_i - \mu)^2 . \tag{3.5}$$

Для выявления степени влияния фактора X и сопоставления ее с разбросом, вызванным случайными, неконтролируемыми причинами, проверяют однородность дисперсий $S^2_{(X)}$ и $S^2_{воспр}$. Если отношение $F_{расч} = S^2_{(X)} / S^2_{воспр}$ окажется меньше критического (табличного) $F_{табл}$, найденного для заданной доверительной вероятности P и числа степеней свободы $f_x = n - 1$ и $f_{воспр} = N - n$, то влияние фактора X несущественно и все полученные результаты измерений принадлежат одной генеральной совокупности, распределенной нормально с параметрами σ^2 и $M(Y)$, точечные оценки которых равны соответственно S^2_O и μ. При $F_{расч} > F_{табл}$ влияние фактора существенно. Считается, что в данном случае есть n нормально распределенных совокупностей, каждая из которых имеет одну и ту же дисперсию σ^2 и соответствующее математическое ожидание. Точечной оценкой σ^2 в данном случае является $S^2_{воспр}$, а математического ожидания – $\bar{y}_i$. Оценку дисперсии средних значений, вызванную влиянием исследуемого фактора X, производят по формуле

$$S^2_\mu = \frac{n-1}{N}[S^2_{(X)} - S^2_{воспр}]. \tag{3.6}$$

Пример. Требуется оценить качество пяти марок СОЖ, используемых для бесцентрового шлифования. Критерием качества выбрана шероховатость деталей, прошлифованных при одинаковых режимах.

Марки СОЖ ранжированы цифрами натурального ряда 1...5. Результаты опытов приведены в матрице наблюдений (табл. 3.2).

По формуле (3.1) получены: $\bar{y}_i$ = 0,6; 0,32; 0,44; 0,91; 0,71; S_i^2 = 0,028; 0,028; 0,012; 0,031; 0,04. Однородность дисперсий проверяем при помощи критерия Кохрена:

$$G_{расч} = 0{,}04 / \sum_{i=1}^{5} S_i^2 = 0{,}29.$$

Таблица 3.2

№ уровня фактора (марка СОЖ)	Уровень фактора	R_a					
		1	2	3	4	5	6
1	X_1	0,72	0,60	0,65	0,32	0,80	0,52
2	X_2	0,15	0,62	0,22	0,4	0,25	0,30
3	X_3	0,45	0,30	0,50	0,58	0,48	0,32
4	X_4	1,20	0,92	0,72	0,80	1,00	0,80
5	X_5	0,58	0,9	0,70	1,00	0,48	0,60

Согласно таблице приложения 4 $G_{табл}$ = 0,4783. Поскольку $G_{расч} < G_{табл}$, то разницу междудисперсиями можно считать незначимой и принять нулевую гипотезу. По формуле (3.3) $S^2_{воспр} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} S_i^2 = 0,0278$, а согласно формулам (3.4) и (3.5)

$$\mu = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} \overline{y}_i = 0{,}596; \qquad S^2_{(X)} = \frac{5}{6-1}\sum_{i=1}^{5} m_i(\overline{y}_i - \mu)^2 = 0{,}212.$$

Расчетное (наблюдаемое) значение критерия Фишера $F_{расч}$ = = 0,212/0,0278 = 7,63. Число степеней свободы f_x = 5 – 1 = 4 и $f_{воспр}$ = 30 – 5 = 25.

По таблице $F_{табл}$ = 2,67. Поскольку $F_{расч} > F_{табл}$ (7,63> 2,67), то изменение шероховатости детали при изменении марки СОЖ следует считать значимым. Согласно формуле (3.6) $S_\mu^{\,2}$ = 4(0,212 – 0,0278)/30 = = 0,0246.

Для более глубокого анализа рекомендуется оценить значимость различия влияния СОЖ марок 1 и 3, которые обеспечивают минимальную высоту микронеровностей. Это делается при помощи критерия Стьюдента.

В данном случае при оценке степени влияния двух одновременно действующих факторов X_1 и X_2 предполагается, что каждый фактор изменяется независимо от другого. В процессе эксперимента первый фактор поддерживается на n уровнях, а второй на r. Для каждого сочетания i-го уровня фактора X_1 и j-го уровня фактора X_2 проводится m_{ij} дублирующих опытов. В частном случае $m_{ij} = 1$ или $m_{ij} = m$. Результаты опытов заносятся в матрицу наблюдений (табл. 3.3), где в (i, j)-й ячейке записывается в общем случае матрица наблюдений:

$$\bar{Y}_{ij} = \begin{pmatrix} Y_{ij1} \\ Y_{ij2} \\ Y_{ijm} \end{pmatrix}.$$

Таблица 3.3

X_1 \ X_2	X_{21}	X_{22}	…	X_{2j}	…	X_{2r}
X_{11}	$\bar{Y}_{11}$	$\bar{Y}_{12}$	…	$\bar{Y}_{1j}$	…	$\bar{Y}_{1r}$
X_{12}	$\bar{Y}_{21}$	$\bar{Y}_{22}$	…	$\bar{Y}_{2j}$	…	$\bar{Y}_{2r}$
X_{1i}	$\bar{Y}_{i1}$	$\bar{Y}_{i2}$	…	$\bar{Y}_{ij}$	…	$\bar{Y}_{ir}$
X_{1n}	$\bar{Y}_{n1}$	$\bar{Y}_{n2}$	…	$\bar{Y}_{nj}$	…	$\bar{Y}_{nr}$

Результаты любого наблюдения можно представить моделью

$$Y_{ijv} = \mu + \gamma_{iv} + g_{ij} + v_{ij} + \varepsilon_{ijv},$$

где μ – общая средняя; γ_{iv} – отклонение, вызванное влиянием первого фактора на i-м уровне в v-м дублирующем опыте; g_{ij} – отклонение, вызванное влиянием второго фактора на j-м уровне; v_{ij} – отклонение за счет взаимодействия факторов; ε_{ijv} – отклонение, вызванное влиянием неконтролируемых факторов.

На первом этапе для каждой ячейки вычисляются следующие значения:

$$\bar{y}_{ij} = \frac{1}{m_{ij}} \sum_{v=1}^{m_{ij}} Y_{ijv}; \qquad S^2_{воспрij} = \frac{1}{m_{ij}-1} \sum_{v=1}^{m_{ij}} (Y_{ijv} - \bar{y}_{ij})^2. \tag{3.7}$$

Затем проверяется однородность полученного ряда дисперсий. После подтверждения нулевой гипотезы приступают к вычислениям средних значений по строкам и столбцам матрицы наблюдений (табл. 3.4):

$$\bar{y}_i = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \bar{y}_{ij}; \qquad \bar{y}'_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_{ij}; \qquad \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \bar{y}'_j.$$

Средняя дисперсия воспроизводимости

$$S^2_{воспр} = \frac{1}{nr} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\substack{i=n \\ j=r}} S^2_{воспрij}; \tag{3.8}$$

Таблица 3.4

X_1 / X_2	X_{21}	X_{22}	…	X_{2j}	…	X_{2r}	Средние значения по строкам
X_{11}	$\bar{y}_{11}$	$\bar{y}_{12}$	…	$\bar{y}_{1j}$	…	$\bar{y}_{1r}$	$\bar{y}_1$
X_{12}	$\bar{y}_{21}$	$\bar{y}_{22}$	…	$\bar{y}_{2j}$	…	$\bar{y}_{2r}$	$\bar{y}_2$
X_{1i}	$\bar{y}_{i1}$	$\bar{y}_{i2}$	…	$\bar{y}_{ij}$	…	$\bar{y}_{ir}$	$\bar{y}_i$
X_{1n}	$\bar{y}_{n1}$	$\bar{y}_{n2}$	…	$\bar{y}_{nj}$	…	$\bar{y}_{nr}$	$\bar{y}_n$
Средние значения по столбцам	$\bar{y}'_1$	$\bar{y}'_2$		$\bar{y}'_j$			μ

дисперсия изменчивости отклика под влиянием фактора X_1

$$S^2_{(X_1)} = \frac{mr}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{y}_i - \mu)^2; \tag{3.9}$$

дисперсия изменчивости отклика под влиянием фактора X_2

$$S^2_{(X_2)} = \frac{mn}{r-1}\sum_{j=1}^{r}(\bar{y}_j - \mu)^2; \tag{3.10}$$

дисперсия за счет взаимодействия факторов X_1 и X_2

$$S^2_{(X_2,X_1)} = \frac{m}{(n-1)(r-1)}\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{r}(\bar{y}_{ij} - \bar{y}_i = \bar{y}'_j + \mu)^2. \tag{3.11}$$

Формулами (3.9)–(3.11) можно пользоваться, если количество дублирующих опытов постоянно и равно m.

Значимость влияния факторов X_1 и X_2, а также их взаимодействия проверяются при помощи критерия Фишера. Расчетные (наблюдаемые) значения критерия определяются по формулам

$$F_{расч}(x_1) = S^2_{(X_1)} \big/ S^2_{воспр}; \quad F_{расч}(x_2) = S^2_{(X_2)} \big/ S^2_{воспр}; \quad F_{расч}(x_3) = S^2_{(X_3)} \big/ S^2_{воспр},$$

а критические (табличные) – по таблице приложения 3 согласно заданному значению доверительной вероятности, числу степеней свободы $f(X_1) = n-1$; $f(X_2) = r-1$; $f(X_1, X_2) = (n-1)(r-1)$; $f_{воспр} = nr(m-1)$.

Если $m = 1$, т. е. при каждом сочетании уровней факторов проводится только один опыт, то анализ можно проводить, если эффект взаимодействия факторов X_1 и X_2 незначим. Тогда дисперсия воспроизводимости вычисляется по формуле (3.11).