
1. ЭКСПЕРИМЕНТ И ЕГО ПЛАНИРОВАНИЕ

1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Планирование эксперимента, как и всякий раздел науки, имеет свою терминологию. Рассмотрим наиболее общие термины.

Эксперимент – опыт, воспроизведение объекта познания, проверка гипотез и т. д. **Эксперимент** – целенаправленное воздействие на объект исследования с целью получения достоверной информации об объекте.

Всякий эксперимент предполагает наличие объекта исследования и цели. Объектом может быть изделие, процесс, препарат, физическое явление и т. д. Целью – исследование характеристик изделия, свойств препарата, оптимальных условий протекания процесса, изучение механизма явления и т. д.

При современном уровне развития науки и техники многие исследования в физике, биологии, химии, металлургии и так далее требуют постановки сложных и дорогостоящих экспериментов. Результаты эксперимента, практические выводы и решения непосредственно отражаются на работе производственных, энергетических объектов, сельскохозяйственных предприятий и др. Велика не только стоимость эксперимента как такового, но и цена последствий принятых решений.

Кроме того, все чаще оказываются недоступными непосредственному измерению характеристики объектов испытаний, подлежащих определению в результате эксперимента. Вследствие этого совокупность показателей, по которым проводится оценка испытуемого объекта или принимаются важные организационные, технико-экономические, инженерные и другие решения, не совпадает, как правило, с совокупностью параметров объекта, определяемых по результатам

натурального эксперимента. Следовательно, важной задачей является организация испытаний объектов, процессы функционирования которых носят сложный динамический характер и подвержены существенным влияниям изменяющихся условий внешней среды. В ходе испытаний собирается большое количество экспериментальных данных, требующих обработки и анализа.

Исходя из вышесказанного, необходимость планирования эксперимента представляется очевидной. При этом обычно преследуется одна из двух целей:

- 1) получение максимального количества информации при заданных ограничениях на затраты (включая затраты времени);
- 2) минимизация затрат при получении необходимого количества информации.

Планирование эксперимента – это средство построения математических моделей различных процессов, способ сокращения времени и средств, повышения производительности труда исследователя.

Чаще всего эксперименты ведутся в таких областях, где теоретически нельзя сделать предвидение. Планирование эксперимента опирается на математическую статистику – дисциплину, изучающую проблемы эффективной обработки экспериментальных результатов.

Широкое применение экспериментальных методов, математической статистики привело к созданию теории эксперимента. Эта теория призвана дать ответы на следующие вопросы:

- 1) как нужно организовать эксперимент, чтобы наилучшим образом решить поставленную задачу (в смысле затрат времени и средств или точности результатов);
- 2) как следует обрабатывать результаты эксперимента, чтобы получить максимальное количество информации об исследуемом объекте (явлении);
- 3) какие обоснования, выводы можно сделать об исследуемом объекте по результатам эксперимента.

1.2. КЛАССИФИКАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

По структуре эксперименты делятся:

- 1) на натуральные – средства экспериментального исследования взаимодействуют непосредственно с объектом исследования;
- 2) модельные – экспериментируют не с самим объектом, а с его заменителем – моделью;
- 3) модельно-кибернетические (машинные) – являются разновидностью модельного эксперимента, при котором соответствующие характеристики изучаемого объекта вычисляются с помощью алгоритма на ЭВМ.

По стадии научных исследований эксперименты делятся:

- 1) на лабораторные – эксперименты по изучению общих закономерностей различных явлений и процессов, по проверке научных гипотез и теорий;
- 2) стендовые – проводятся при необходимости изучить вполне конкретный процесс, протекающий в исследуемом объекте, определением физических, химических и других свойств. По результатам стендовых испытаний судят о различных недоработках при расчетах конструкции;
- 3) промышленные – проводятся при создании нового изделия или процесса по данным лабораторных или стендовых испытаний, при оптимизации действующего процесса, при проведении контрольно-выборочных испытаний качества выпускаемой продукции.

С точки зрения организации экспериментов можно выделить:

- 1) обычные эксперименты (рутинные) – проводятся в лабораторных условиях по несложным методикам с использованием простого экспериментального оборудования;

2) специальные эксперименты (технические) – эксперименты, связанные с созданием и исследованием различных приборов;

3) уникальные эксперименты – проводятся на сложном оборудовании (ядерный реактор). Они отличаются большим объектом экспериментальных данных, высокой скоростью протекания исследований, широким диапазоном измерения характеристик. Область применения: космос, новые технологии;

4) смешанные эксперименты – содержат совокупность разнотипных экспериментов, объединенных единой программой исследований.

Постановка задачи конкретного экспериментального исследования определяется уровнем сложности исследуемого объекта, степенью его изученности и требуемой степенью детализации его описания.

По принципу постановки задач по нахождению модели объекта исследования эксперименты могут быть:

1) учитывающие наличие неоднородностей различного вида (состав материала, различия во времени, в установлении);

2) рассчитанные на выявления механизма явлений (исследования хорошо организованных объектов и достаточно высокий уровень исходной информации);

3) учитывающие локальную область пространства его параметров, соответствующую экстремуму некоторого критерия оптимальности при наличии временного изменения параметров;

4) учитывающие локальную область пространства его параметров, соответствующую экстремуму некоторого критерия оптимальности при отсутствии временного изменения параметров;

5) учитывающие степень влияния входных переменных на выходные переменные;

6) позволяющие преобразовать набор переменных объекта исследования;

7) рассчитанные на прогнозирования его поведения.

По способу проведения:

1) пассивный эксперимент – основан на регистрации входных и выходных параметров, характеризующих объект исследования без вмешательства в эксперимент, в процессе его проведения, с применением математико-статистических методов только после окончания эксперимента для обработки экспериментальных данных;

2) неуправляемый активный эксперимент – существует возможность активного воздействия на исследуемый объект. При использовании методов активного эксперимента математическое описание строится в виде совокупности статистических и динамических выходных характеристик объекта, которые регистрируются при подаче на его входы специальных возмущающих воздействий;

3) активный эксперимент с программным управлением – проводится по заранее составленному плану. В соответствии с этим планом экспериментатор воздействует на входные параметры исследуемого объекта, а выходные параметры, отражая реакцию исследуемого объекта на управляющее воздействие, позволяют выяснить природу происходящих процессов в объекте исследования;

4) активный эксперимент с обратной связью – в этом случае, интерпретируя результаты на каждом шаге эксперимента, можно выбрать оптимальную стратегию управления экспериментом. Такие эксперименты можно проводить автоматически (без участия экспериментатора);

5) активно-пассивный эксперимент – характеризуется тем, что при его проведении одна часть данных просто регистрируется, а другая, кроме того, обрабатывается в процессе эксперимента и участвует в выработке управляющих воздействий. В таком эксперименте одна часть информации, получаемой от объекта, соответствует характеристикам, изменяющимся в соответствии с приложенными управляющими воздействиями, а другая отражает характеристики, не подверженные управляющим воздействиям.

Эксперименты могут проводиться непосредственно на объекте исследования или на его модели. Модель обычно отличается от объекта масштабом, а иногда – природой. Главное требование к модели – достаточно точное описание объекта.

1.3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБЪЕКТА

В эксперименте всегда выделяются некоторые величины, влияние которых на объект подлежит изучению. В теории эксперимента они называются факторами. Для эффективного анализа явлений (объекта, систем) необходимо выявить взаимосвязь факторов, определяющих ход процесса, и представить их в количественной форме – в виде математической модели. Такая модель является математическим отображением наиболее существенных сторон процесса. Она представляет собой совокупность соотношений (формул, уравнений...), определяющих характеристики состояния объекта в зависимости от условий. Модель позволяет получить информацию о процессах, протекающих в объектах, рассчитать характеристики объекта.

В зависимости от источника информации, используемого при построении математической модели, различают:

- 1) **физические** (называют иногда аналитическими или теоретическими) модели;
- 2) **статистические** (эмпирические) модели.

Аналитические – представляют в виде сложных систем уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных или дифференциально-интегральных), позволяющих очень точно описать процессы, протекающие в объекте, и допускающих экстраполяцию в точки факторного пространства, в которых невозможно непосредственное наблюдение этих процессов.

Статистические – получают в результате статистической обработки экспериментальной информации, собранной на исследуемом объекте. Эти модели имеют относительно простую структуру и часто представляются в виде полиномов. Область их применения ограничивается ближайшей окрестностью рабочих точек, в которых проводятся эксперименты. Во многих случаях построение таких моделей можно выполнить при сравнительно небольших затратах времени и средств.

Принято также различать **стационарные** и **динамические модели**.

Первые из них описывают неизменяющиеся во времени соотношения об объекте исследования, вторые – переходные процессы, т. е. нестационарные состояния. И те, и другие модели могут относиться либо к статистическому, либо к физическому типу.

Реальные процессы, если их рассматривать во всех деталях, весьма сложны, а сопровождающие их явления чрезвычайно разнообразны. Часто, приступая к решению сложных задач, исследователь имеет очень мало сведений о механизме процесса. Поэтому при построении математической модели процесса или объекта целесообразно пользоваться схематическим (упрощенным) представлением исследуемого объекта в виде некоторого «черного ящика».

Под «черным ящиком» понимают изображение процессов, на вход которого поступают воздействующие факторы, а на выходе получают значения параметров, характеризующие состояние объекта изучения (рис. 1.1).

На такой объект исследования воздействуют группы факторов, которые и определяют его состояние.

1. Группа $X=(x_1, x_2...x_i)$ – управляемые факторы. В процессе эксперимента их можно целенаправленно изменять (питающее напряжение, технологические режимы).

2. Группа $U=(u_1, u_2...u_m)$ – контролируемые факторы, которые в отличие от факторов первой группы не допускают целенаправленного изменения в ходе исследования. Информация о значениях параметров получается в результате лабораторных анализов, измерений (окружающая среда, температура, освещение).

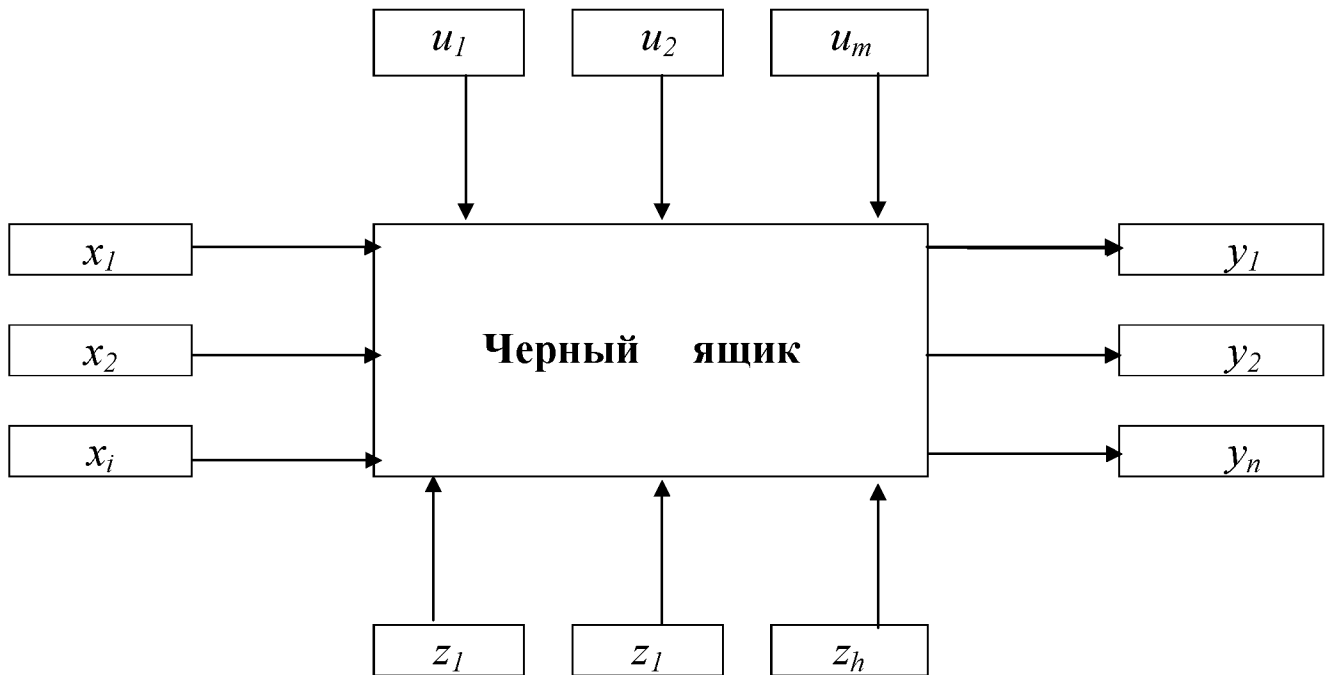


Рис. 1.1. Схематическое представление объекта исследования

3. Группа $Z=(z_1, z_2, \dots, z_h)$ – неконтролируемые и неуправляемые факторы. Они характеризуют действие на объект некоторого возмущения, в некоторых случаях неизвестного исследователю. Воздействие неконтролируемых факторов медленно изменяется во времени случайным образом.

4. Группа $Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ – выходные параметры процесса, часто их называют функциями отклика, цели или параметрами оптимизации. К их числу относятся величины, характеризующие эффективность процесса, технико-экономические параметры, технологические свойства, а также характеристики готовых продуктов.

Математическая модель объекта – связь входных и выходных параметров – функция отклика ($f(x_i; u_m; z_h)$).

$$Y = f(x_i; u_m; z_h), \quad (1.1)$$

где x_i – совокупность значений входных контролируемых и управляемых параметров; u_m – совокупность значений контролируемых,

но неуправляемых параметров; z_h – совокупность неконтролируемых и неуправляемых параметров.

Однако практически при построении модели такие соотношения получить невозможно. Приходится вводить ограничения, например считать, что каждый из параметров может изменяться в определенных пределах:

$$\begin{aligned} x_{iH} \leq x_i \leq x_{iB}, & \quad i = 1; k \\ u_{mH} \leq u_m \leq u_{mB}, & \quad m = 1; j \\ z_{hH} \leq z_h \leq z_{hB}, & \quad h = 1; g, \end{aligned} \quad (1.2)$$

обусловленных нижней ($x_{iH}; u_{mH}; z_{hH}$) и верхней ($x_{iB}; u_{mB}; z_{hB}$) границами. Выход хотя бы одного параметра за эти пределы приводит к нарушению нормальной работы устройства (или нормального протекания процесса). Задача каждого исследователя заключается в том, чтобы при фиксированных параметрах $z_h = const$ и $u_m = const$ выбрать такие значения $x_i = var$ ($i = 1, k$) (такую рабочую точку в области работоспособности), при которых выходной (или оптимизируемый) параметр объекта y достигает оптимальной величины. Другими словами, необходимо оптимизировать функцию $y = f(x_i = var; u_m = const; z_h = const)$ при $x_{iH} \leq x_i \leq x_{iB}$ ($i = 1, k$).

Статистической математической моделью объекта (рис. 1.1), так как в дальнейшем будет идти речь в основном о статистических моделях, служит функция отклика, связывающая параметр оптимизации y , характеризующий результаты эксперимента, с переменными параметрами, которыми варьируют при проведении опытов:

$$y = f(x_1; x_2; \dots; x_i), \quad i = 1; k. \quad (1.3)$$

Независимые переменные x_i принято называть факторами, независимыми переменными, которые можно изменять при постановке экспериментов.

Наиболее часто при неполном знании механизма явлений функцию отклика представляют в виде полинома

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i \neq j}^k \beta_{ij} x_i x_j + \dots, \quad (1.4)$$

где β_0 ; β_i ; β_{ii} ; β_{ij} – коэффициенты, характеризующие свободные члены уравнения.

Пользуясь данными эксперимента, исследователь находит лишь оценки коэффициентов уравнения регрессии b_0 ; b_i ; b_{ii} ; b_{ij} . После чего уравнение имеет вид

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + \sum_{i \neq j}^k b_{ij} x_i x_j + \dots, \quad (1.5)$$

где \hat{y} – оценка входного параметра оптимизации.

Такая математическая модель является наиболее простой и удобной для исследования.

1.4. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Хотя цели эксперимента и объекты исследования на разных этапах различны, тем не менее всегда можно выделить некоторые общие задачи. Можно выделить некоторые стандартные этапы решения задачи построения математических моделей объектов:

- 1) постановка задачи;
- 2) сбор априорной информации об исследуемом объекте;
- 3) выбор способа решения задачи;

- 4) проверка выбранного способа решения задачи;
- 5) реализация данного способа решения задачи;
- 6) анализ и интерпретация результатов и их представление.

На первом этапе определяют цели, выясняют исходную ситуацию, оценивают допустимые затраты времени и средств, устанавливают тип задачи: выявление структуры и параметров; определение условий управления объектом или нахождение оптимальных условий работы объекта.

На втором этапе, пользуясь литературой, опросом экспертов, техническими требованиями на объект и экспериментальными данными подобных объектов, собирают и оценивают всю информацию, касающуюся решения таких же или сходных задач.

На третьем этапе устанавливают тип модели – статистический или физический – и выделяют возможные влияющие переменные (факторы) и выходные переменные (отклики, целевые величины). Формируют статистические задачи, строят установку, необходимую для проведения экспериментов, и разрабатывают методику анализа их результатов. Составляют и отлаживают алгоритмы и программы, требуемые для обработки экспериментальных данных.

На четвертом этапе для своевременного выявления возможных ошибок в постановке задачи, выбранной модели, экспериментальной установке, методике анализа, а также с целью экономии времени и средств проводят предварительные эксперименты. С их помощью не только проверяют экспериментальную установку и методику, но и производят предварительную оценку качества модели.

Реализация выбранного способа решения задачи осуществляется **на пятом этапе** – этот этап является наиболее важным. Именно на этом этапе уточняют тип экспериментальной установки и определяют значения целевых функций и факторов, объемы выборок и планы

экспериментов, кратности повторения опытов и т. д. Завершается этап проведением экспериментов.

Анализ и интерпретация результатов производятся на заключительном **шестом этапе** экспериментального исследования. Анализ осуществляется средствами математической статистики. Он дает оценки интересующих экспериментатора величин и определяет степень достоверности этих оценок. Интерпретация имеет своей целью выражение результатов анализа в терминах и понятиях той области науки или техники, в интересах которой был проведен эксперимент. Без интерпретации полученные результаты могут быть не поняты, а значит, и не использованы в полной мере.

Представление результатов является последней заботой экспериментатора. Оптимальный способ представления зависит от многих причин (объема информации, квалификации лиц, ее использующих, времени, за которое информация должна и/или может быть использована, и т. д.). Несмотря на очевидную важность этого вопроса, ему часто уделяется недостаточно внимания.

В ходе экспериментальных исследований экспериментатору необходимо решить следующие творческие задачи: выбор числа и условий проведения опытов, построение алгоритмов оптимального управления экспериментов, выбор исходных данных (варьируемых факторов и параметров оптимизации), изучение поведения отдельных элементов системы и взаимодействие между ними, определение влияния различных факторов и реакции на изменения экспериментальных условий, определение совокупности регистрируемых величин, уточнение требований к точности измерения параметров и др. Главный признак, по которому судят **об окончании исследования**, – это значение параметра оптимизации. Если экспериментальная проверка показала, что результат воспроизводится с требуемой точностью, то задачу можно считать решенной.

1.5. ТИПИЧНЫЕ ЗАДАЧИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Несмотря на очевидное многообразие задач, с которыми приходится сталкиваться экспериментатору, большинство из них можно отнести к нескольким типичным:

- оценка определенных характеристик (параметров) изучаемого объекта, проявляющих себя статистически, а также проверка некоторых гипотез, касающихся упомянутых характеристик; эта задача имеет непосредственное отношение к измерительным процессам;

- выявление воздействия, влияния на выходную величину (отклик) тех или иных входных величин (факторов); результатом этого эксперимента должно быть одно из утверждений «да» или «нет», например, влияет ли добавка некоторого компонента на прочность бетона, влияет ли прием определенного лекарства на время выздоровления больных и т. п.; соответствующая экспериментальная процедура называется дисперсионным анализом;

- установление функции отклика, т. е. статистически достоверной зависимости, связывающей отклик с факторами; другими словами, построение математической модели изучаемого объекта; это задача регрессионного анализа;

- определение степени взаимной статистической связи двух величин, например энерговооруженности и производительности труда, затрат на техническую информацию и количество изобретений и т. п.; определение степени подобной связи является предметом корреляционного анализа;

- нахождение оптимальных условий протекания процесса, т. е. определение значений факторов, при которых отклик является максимальным (или минимальным), например определение температуры, давления, времени протекания реакции, при которых концентрация

кислоты на выходе химического реактора является максимальной; эта задача решается в ходе выполнения экстремального эксперимента.

Известен также ряд других типичных задач, но они встречаются реже, и мы их не будем касаться.

1.6. ПАРАМЕТРЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Выбор параметров оптимизации (критериев оптимизации) является одним из главных этапов работы на стадии предварительного изучения объекта исследования, т. к. правильная постановка задачи зависит от правильности выбора параметра оптимизации, являющегося функцией цели.

Под **параметром оптимизации** понимают характеристику цели, заданную количественно. Параметр оптимизации является реакцией (откликом) на воздействие факторов, которые определяют поведение выбранной системы.

Реальные объекты или процессы, как правило, очень сложны. Они часто требуют одновременного учета нескольких, иногда очень многих, параметров. Каждый объект может характеризоваться всей совокупностью параметров, или любым подмножеством этой совокупности, или одним-единственным параметром оптимизации. В последнем случае прочие характеристики процесса уже не выступают в качестве параметра оптимизации, а служат ограничениями. Другой путь – построение обобщенного параметра оптимизации как некоторой функции от множества исходных.

1.6.1. Требования к параметрам оптимизации

Параметр оптимизации – это признак, по которому оптимизируется процесс. Он должен быть количественным, задаваться числом. Множество значений, которые может принимать параметр оптимизации

ции, называется областью его определения. Области определения могут быть непрерывными и дискретными, ограниченными и неограниченными. Например, число бракованных изделий, число зерен на шлифе сплава – вот примеры параметров с дискретной областью определения, ограниченной снизу.

Количественная оценка параметра оптимизации на практике не всегда возможна. В таких случаях пользуются приемом, называемым ранжированием. При этом параметрам оптимизации присваиваются оценки – ранги по заранее выбранной шкале: двухбалльной, пятибалльной и т. д. Ранговый параметр имеет дискретную ограниченную область определения. В простейшем случае область содержит два значения (да, нет; хорошо, плохо). Это может соответствовать, например, годной продукции и браку.

Параметр оптимизации необходимо выбирать с учетом комплекса требований.

1. Параметр оптимизации должен быть **количественным**, т. е. иметь числовую оценку.

2. Параметр оптимизации должен обладать **однозначностью** в статистическом смысле. Заданному набору значений факторов должно соответствовать одно значение параметра оптимизации, при этом обратное неверно: одному и тому же значению параметра могут соответствовать разные наборы значений факторов.

3. Он должен быть **универсальным** и всесторонне отражать характеристики объекта, процесса, явления. Универсальными обычно являются экономические и технико-экономические параметры (себестоимость, надежность и др.).

4. Параметр оптимизации должен быть **эффективным** как с точки зрения достижения цели, так и в статистическом смысле.

Если, например, за параметр оптимизации принять себестоимость восстановления детали, то он не будет характеризовать надежность ее работы в узле трения. Поэтому в качестве параметра оптими-

зации целесообразно выбирать себестоимость при допустимой износостойкости или износостойкость при допустимой себестоимости. Эффективность в этом смысле определяет корректность постановки задачи. Говоря о статистической эффективности, следует учитывать дисперсии или ошибки измерений. Эффективным параметром оптимизации является тот, который имеет наименьшие ошибки измерений. Например, твердость материала – менее эффективный параметр оптимизации при оценке абразивной стойкости материала, чем интенсивность изнашивания, если принимать его в качестве оценки износостойкости.

5. Параметр оптимизации должен быть простым, с ясным физическим смыслом.

Требование физического смысла связано с последующей интерпретацией результатов эксперимента. Например, при исследовании процессов трения предпочтительнее в качестве параметра оптимизации принять безразмерный коэффициент трения, чем силу трения. Это требование не только полнее и точнее определяет цель исследования, но и облегчает интерпретацию полученных результатов экспериментального исследования.

Задачи с одним выходным параметром имеют очевидные преимущества. Но на практике чаще всего приходится учитывать несколько выходных параметров. Иногда их число довольно велико. Так, например, при производстве резиновых и пластмассовых изделий приходится учитывать физико-механические, технологические, экономические, художественно-эстетические и другие параметры. Математические модели можно построить для каждого из параметров, но одновременно оптимизировать несколько функций невозможно.

Обычно оптимизируется одна функция, наиболее важная с точки зрения исследования, при ограничениях, налагаемых другими функ-

циями. Поэтому из многих выходных параметров выбирается один в качестве параметра оптимизации, а остальные служат ограничениями. Всегда полезно исследовать возможность уменьшения числа выходных параметров. Для этого можно воспользоваться корреляционным анализом.

Кроме того, если имеются трудности в выборе параметра оптимизации, то принимаются различные меры: математические преобразования, переход от нескольких параметров оптимизации к обобщенному.

1.6.2. Обобщенный параметр оптимизации

Путь к единому параметру оптимизации часто лежит через обобщение. При обобщении множества откликов сталкиваются с рядом трудностей.

Каждый отклик имеет свой физический смысл и свою размерность. Чтобы объединить различные отклики, прежде всего придется вводить для каждого из них некоторую безразмерную шкалу. Шкала должна быть однотипной для всех объединяемых откликов, это делает их сравнимыми. Выбор шкалы – не простая задача, зависящая от априорной информации об откликах, а также от той точности, с которой определяется обобщенный признак.

После построения для каждого отклика безразмерной шкалы возникает следующая трудность: выбор правила комбинирования исходных частных откликов в обобщенный показатель. Единого правила не существует. Здесь можно идти различными путями, и выбор пути неформализован. Рассмотрим несколько способов построения обобщенного показателя.

Простейшие способы построения обобщенного отклика

Пусть исследуемый объект характеризуют n частных откликов y_u ($u = 1, 2, \dots, n$) и каждый из этих откликов измеряется в N опытах. Тогда y_{ui} – это значение u -го отклика в i -м опыте ($i = 1, 2, \dots, N$). Каждый из откликов y_u имеет свой физический смысл и, чаще всего, разную размерность. Введем простейшее преобразование: набор данных для каждого y_u поставим в соответствие с самым простым стандартным аналогом – шкалой, на которой имеются только два значения: 0 – брак, неудовлетворительное качество, 1 – годный продукт, удовлетворительное качество. Стандартизовав таким образом шкалу частных откликов, приступаем ко второму этапу – их обобщению.

В ситуации, когда каждый преобразованный частный отклик принимает только два значения: 0 и 1, желательно, чтобы и обобщенный отклик принимал одно из этих двух возможных значений, причем так, чтобы значение 1 имело место, если все частные отклики в этом опыте приняли значение 1. А если хотя бы один из откликов обратился в 0, то и обобщенный отклик будет нулем.

При таких рассуждениях для построения обобщенного отклика удобно воспользоваться формулой

$$Y_i = \sqrt[n]{\prod_{u=1}^n y_{ui}} \quad , \quad (1.6)$$

где Y_i – обобщенный отклик в i -м опыте; $\prod_{u=1}^n$ – произведение частных откликов $y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{ni}$.

Рассмотрим другой способ получения обобщенного отклика, который может применяться в тех случаях, когда для каждого из частных откликов известен «идеал», к которому нужно стремиться. Существует много способов введения метрики, задающей «близость к идеа-

лу». Здесь понятие «ввести метрику», значит, указать правило определения расстояния между любыми парами объектов из интересующего нас множества.

Дополним предыдущее обозначение еще одним: y_{uo} – наилучшее («идеальное») значение u -го отклика. Тогда $y_{ui} - y_{uo}$ можно рассматривать как некоторую меру близости к идеалу. Однако использовать разность при построении обобщенного отклика невозможно по двум причинам: она имеет размерность соответствующего отклика, а у каждого из откликов может быть своя размерность, что препятствует их объединению; отрицательный или положительный знак разности также создает неудобство. Чтобы перейти к безразмерным значениям, достаточно разность поделить на желаемое значение:

$$(y_{ui} - y_{uo}) / y_{uo} . \tag{1.7}$$

Если в некотором опыте все частные отклики совпадут с идеалом, то Y станет равным нулю. Это и есть то значение, к которому нужно стремиться. Чем ближе к нулю, тем лучше. Здесь необходимо условиться о том, что считать нижней границей, если верхняя равна нулю.

Среди недостатков такой оценки выделяется нивелировка частных откликов. Все они входят в обобщенный отклик на равных правах. На практике же различные показатели бывают далеко не равноправны. Устранить этот недостаток можно введением некоторого веса a_u :

$$Y_i = \sum_{u=1}^N a_u \left(\frac{y_{ui} - y_{uo}}{y_{uo}} \right)^2 , \tag{1.8}$$

причем $\sum_{u=1}^N a_u = 1$ и $a_u > 0$.

Чтобы проранжировать отклики по степени важности и найти соответствующие веса, можно воспользоваться экспертными оценками.

Мы рассмотрели простейшие способы построения обобщенного показателя. Для перехода к более сложным способам нужно научиться фиксировать более тонкие различия на шкале преобразования откликов. Здесь в основном приходится опираться на опыт экспериментатора. Но чтобы этот опыт разумно употребить в рамках формальных процедур, его тоже нужно формализовать. Наиболее естественный путь такой формализации – введение системы предпочтений экспериментатора на множестве значений каждого частного отклика, получение стандартной шкалы и затем обобщение результатов.

Пользуясь системой предпочтений, можно получить более содержательную шкалу вместо шкалы классификации с двумя классами. Пример построения такой шкалы рассмотрен ниже.

Шкала желательности

Одним из наиболее удобных способов построения обобщенного отклика является обобщенная функция желательности Харрингтона. В основе построения этой обобщенной функции лежит идея преобразования натуральных значений частных откликов в безразмерную шкалу желательности или предпочтительности. Шкала желательности относится к психофизическим шкалам. Ее назначение – установление соответствия между физическими и психологическими параметрами. Здесь под физическими параметрами понимаются всевозможные отклики, характеризующие функционирование исследуемого объекта. Среди них могут быть эстетические и даже статистические параметры, а под психологическими параметрами понимаются чисто субъективные оценки экспериментатора желательности того или иного значения отклика.

Чтобы получить шкалу желательности, удобно пользоваться готовыми таблицами соответствия между отношениями предпочтения в эмпирической и числовой системах (табл. 1.1).

Стандартные отметки на шкале желательности

Желательность	Отметки на шкале желательности
Очень хорошо	1,00–0,80
Хорошо	0,80–0,63
Удовлетворительно	0,63–0,37
Плохо	0,37–0,20
Очень плохо	0,20–0,00

В табл. 1.1 представлены числа, соответствующие некоторым точкам кривой (рис. 1.2), которая задается уравнением $d = e^{-e^{-y}}$ или $d = \exp[-\exp(-y)]$, где \exp – принятое обозначение экспоненты.

На оси ординат нанесены значения желательности, изменяющиеся от 0 до 1. По оси абсцисс указаны значения отклика, записанные в условном масштабе. За начало отсчета 0 по этой оси выбрано значение, соответствующее желательности 0,37. Выбор именно этой точки связан с тем, что она является точкой перегиба кривой, что создает определенные удобства при вычислениях.

Кривую желательности обычно используют как номограмму.

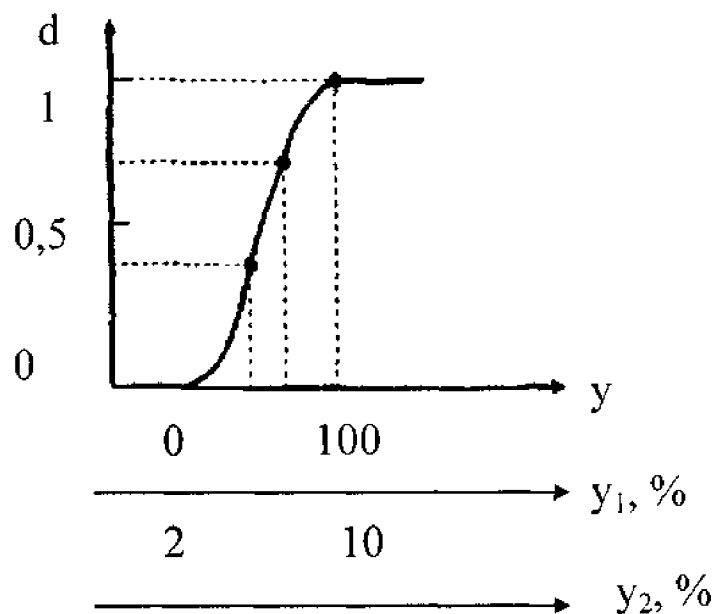


Рис. 1.2. Функция желательности

Пример. Пусть среди откликов будет выход реакции y_1 , естественные границы которого заключены между 0 и 100 %. Предположим, что 100 % соответствует на шкале желательности единице, а 0 % – нулю, тогда на оси абсцисс получаем две точки: 0 и 100 (рис. 1.2). Выбор других точек зависит от ряда обстоятельств, таких как сложившаяся в начальный момент ситуация, требования к результату, возможности экспериментатора.

В данном случае область хороших результатов (0,80–0,63 по шкале желательности) заключена в границы 50–55 %. 50 % дает нижнюю границу.

Пример. Другая картина получается, когда речь идет о синтезе нового вещества, которое до сих пор не удавалось получать в количествах, достаточных для идентификации.

При выходе менее 2 % нет способа идентифицировать продукт. Любой выход выше 10 % превосходит (рис. 1.2). Здесь выход продукции обозначен через y_2 .

В наших примерах рассмотрены одинаковые отклики – выхода реакции с границами измерения от 0 до 100 %. Однако это не всегда бывает так. Стоит включить такие отклики, как качество материала, и границы станут неопределенными. В этих случаях устанавливаются границы допустимых значений для частных откликов, причем ограничения могут быть односторонними в виде $y_u \geq y_{min}$ и двусторонними в виде $y_{min} \leq y_u \leq y_{max}$. Здесь надо иметь в виду то, что y_{min} соответствует отметке на шкале желательности $d_u = 0,37$, а значение y_{max} устанавливается на основании опыта и ситуации исследователя.

Обобщенная функция желательности

После выбора шкалы желательности и преобразования частных откликов в частные функции желательности приступают к построе-

нию обобщенной функции желательности, которую представляют формулой

$$D = \sqrt[n]{\prod_{u=1}^n d_u}, \quad (1.9)$$

где D – обобщенная желательность; d_u – частные желательности.

Способ задания обобщенной функции желательности таков, что если хотя бы одна желательность $d_u = 0$, то обобщенная функция будет равна нулю. С другой стороны, $D = 1$ только тогда, когда $d_u = 1$. Обобщенная функция весьма чувствительна к малым значениям частных желательностей.

Пример. При установлении пригодности материала с данным набором свойств для использования его в заданных условиях, если хотя бы один частный отклик не удовлетворяет требованиям, то материал считается непригодным. Например, если при определенных температурах материал становится хрупким и разрушается, то как бы ни были хороши другие свойства, этот материал не может быть применен по назначению.

Способ задания базовых отметок шкалы желательности, представленный в табл. 1.1, один и тот же как для частных, так и для обобщенных желательностей.

Обобщенная функция желательности является некоторым абстрактным построением, но она обладает такими важными свойствами, как адекватность, статистическая чувствительность, эффективность, причем эти свойства не ниже, чем таковые для любого технологического показателя, им соответствующего.

Обобщенная функция желательности является количественным, однозначным, единым и универсальным показателем качества исследуемого объекта и обладает такими свойствами, как адекватность, эффективность, статистическая чувствительность, поэтому может использоваться в качестве критерия оптимизации.

1.7. ФАКТОРЫ

После выбора объекта исследования и параметра оптимизации нужно рассмотреть все факторы, которые могут влиять на процесс. Если какой-либо существенный фактор окажется неучтенным и принимал произвольные значения, не контролируемые экспериментатором, то это значительно увеличит ошибку опыта. При поддержании этого фактора на определенном уровне может быть получено ложное представление об оптимуме, т. к. нет гарантии, что полученный уровень является оптимальным.

С другой стороны, большое число факторов увеличивает число опытов и размерность факторного пространства. Таким образом, выбор факторов является весьма существенным, т. к. от этого зависит успех оптимизации.

1.7.1. Характеристика факторов

Под фактором понимают величину, воздействующую на исследуемый процесс и принимающую в некоторый момент определенное значение. Фактор считается заданным, если вместе с его названием указывается область его определения. Под областью определения понимается совокупность всех значений, которые может принимать данный фактор. Область определения может быть непрерывной и дискретной. При планировании эксперимента значения факторов принимаются дискретными, что связано с уровнями факторов. В практических задачах области определения факторов имеют ограничения, которые носят либо принципиальный, либо технический характер.

Факторы принято обозначать x_1, x_2, x_3, x_4 и т. д. Нижний индекс указывает порядковый номер фактора.

Факторы разделяются на качественные и количественные.

Качественные факторы рекомендуется учитывать на первой стадии эксперимента (марка материала, тип оборудования и т. д.).

К **количественным** относятся те факторы, которые можно измерять, взвешивать и т. д.

Пример. Исследование процесса вулканизации каучука.

В эксперимент включены факторы:

x_1 – температура вулканизации, $^{\circ}\text{C}$;

x_2 – время вулканизации, мм;

x_3 – количество инициатора, вес. ч;

x_4 – количество вулканизирующего агента, вес. ч;

x_5 – количество окислителя, вес. ч;

x_6 – тип окислителя (окись цинка или окись магния);

x_7 – тип кислотного остатка (метакрилат);

x_8 – тип катиона соли (Na, Mg).

В рассмотренном примере $x_1 \dots x_5$ – количественные факторы, а $x_6 \dots x_8$ – качественные факторы.

1.7.2. Требования к факторам

При выборе факторов необходимо учитывать следующие требования.

1. Управляемость.

Под управляемостью понимается возможность придавать фактору любой уровень в области его определения и строго поддерживать (фиксировать) постоянным в течение всего опыта. Планировать эксперимент можно в том случае, если уровни факторов подчиняются воле экспериментатора (активный эксперимент).

2. Однозначность.

Фактор не должен быть функцией других факторов. В противном случае факторы очень трудно, а иногда, и невозможно поддерживать на установленных уровнях, что нарушает условия проведения эксперимента. Но в планировании могут участвовать и сложные факторы, состоящие из нескольких простых факторов. Необходимость введения сложных факторов возникает при необходимости представления динамических особенностей объекта в статистической форме.

Пример. Найти оптимальный режим подъема температуры в реакторе. Известно линейное возрастание температуры. В качестве фактора используем tg для наклона (*grad*). Начальная температура не зафиксирована. Ее вводят в качестве еще одного фактора.

При планировании эксперимента обычно одновременно изменяются несколько факторов. Поэтому существуют требования, предъявляемые к совокупности факторов.

1. Совместность.

Это означает, что каждый фактор может быть установлен (зафиксирован) на любом уровне вне зависимости от значений уровней других факторов. Если условие совместности факторов не соблюдается, то нельзя реализовать эксперимент. Несоблюдение требования совместности факторов может даже привести к выходу из строя установки или испытываемой машины.

2. Независимость.

Независимость факторов друг от друга – это отсутствие корреляции между факторами (т. е. связь между факторами не должна быть линейной). Если линейная связь между факторами существует, то исследованию приходится упрощать ранее поставленную задачу: учитывать меньшее число варьируемых факторов и т. д.

3. Точность.

Степень точности определяется диапазоном изменения факторов. Если факторы измеряются с большой ошибкой или особенность

объекта исследования такова, что значения факторов трудно поддерживать на заданном уровне, то экспериментатору следует обратиться к другим методам исследования объекта.

Точность фиксации уровней факторов должна быть значительно выше, чем точность измерения параметров оптимизации.

1.7.3. Выбор уровней варьирования факторов, интервалов варьирования факторов

Фактор считается заданным, если указаны его название и область определения. При выборе области определения необходимо учитывать следующие ограничения.

1. Принципиальные ограничения для значений факторов, которые не могут быть нарушены ни при каких обстоятельствах (например, минимальное температурное значение – абсолютный ноль).

2. Ограничения, связанные с технико-экономическими соображениями (например, стоимость сырья).

3. Ограничения, которые определяются конкретными условиями проведения процесса (например, возможности аппаратуры).

Процедура выбора области эксперимента включает два этапа:

- 1) выбор основного (нулевого) уровня;
- 2) выбор интервала варьирования.

Выбранные для эксперимента количественные или качественные состояния фактора носят название **уровней фактора**.

Выбор нулевой (основной) точки (уровня) эквивалентен определению такого состояния объекта исследований, которое принимается за исходное при поиске оптимума. Оптимизация связана с улучшением состояния объекта по сравнению с состоянием в нулевой точке. Поэтому желательно, чтобы данная точка была в области оптимума или как можно ближе к ней, тогда ускоряется поиск оптимальных решений.

Если проведению эксперимента предшествовали другие исследования по рассматриваемому вопросу, то за нулевую принимается такая точка, которой соответствует наилучшее значение параметра оптимизации, установленного в результате формализации априорной информации. В этом случае нулевыми уровнями факторов являются те значения последних, сочетания которых соответствуют координатам нулевой точки.

Часто при постановке задачи область определения факторов бывает заданной, являясь локализованной областью факторного пространства. Тогда центр этой области принимается за нулевую точку.

Предположим, в некоторой задаче фактор (температура) мог изменяться от 140 до 180 °С. Естественно, за нулевой уровень было принято среднее значение фактора, соответствующее 160 °С.

После установления нулевой точки выбирают интервалы варьирования факторов.

Интервалом варьирования факторов называется некоторое число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний, а вычитание – нижний уровни факторов. Другими словами, интервал варьирования – это расстояние на координатной оси между основным (нулевым) и верхним уровнями; между основным и нижним уровнями.

Нижний уровень – это значение фактора, откладываемое в отрицательном направлении оси координат. **Верхний уровень** – это значение фактора, откладываемое в положительном направлении оси координат. Верхний уровень принято обозначать (+), нижний уровень – (–).

На выбор интервала варьирования накладываются ограничения:

1) снизу – он не может быть меньше ошибки фиксирования уровня фактора;

2) сверху – верхний или нижний уровень не должен выходить за область определения.

Кроме того, чрезмерное увеличение величины интервалов варьирования нежелательно, т. к. это может привести к снижению эффективности поиска оптимума. А очень малый интервал варьирования уменьшает область эксперимента, что замедляет поиск оптимума.

При выборе интервала варьирования целесообразно учитывать, если это возможно, число уровней варьирования факторов в области эксперимента. От числа уровней зависят объем эксперимента и эффективность оптимизации.

В общем виде зависимость числа опытов от числа уровней факторов может иметь вид

$$N = p^k, \quad (1.10)$$

где N – число опытов; p – число уровней факторов; k – число факторов.

Минимальное число уровней, обычно применяемое на первой стадии работы, равно 2. Это верхний и нижний уровни. Варьирование факторов на двух уровнях используется в отсеивающих экспериментах, на стадии движения в область оптимума и при описании объекта исследования линейными моделями. Но такое число уровней недостаточно для построения моделей второго порядка (ведь фактор принимает только два значения, а через две точки можно провести множество линий различной кривизны).

С увеличением числа уровней повышается чувствительность эксперимента, но одновременно возрастает число опытов. При построении моделей второго порядка необходимы 3, 4 или 5 уровней, причем здесь наличие нечетных уровней указывает на проведение опытов в нулевых (основных) уровнях.

В каждом отдельном случае число уровней выбирают с учетом условий задачи и предполагаемых методов планирования эксперимента.

Здесь необходимо учитывать наличие качественных и дискретных факторов. В экспериментах, связанных с построением линейных моделей, наличие этих факторов, как правило, не вызывает дополни-

тельных трудностей. При планировании второго порядка качественные факторы не применимы, т. к. они не имеют ясного физического смысла для нулевого уровня. Для дискретных факторов часто применяют преобразование измерительных шкал, чтобы обеспечить фиксацию значений факторов на всех уровнях.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию области определения факторов, поверхности отклика. Для наглядности будем рассматривать случай (рис. 1.3) с двумя факторами (двумерное пространство). (Многомерное пространство – много факторов, геометрическая наглядность теряется.)

В декартовой системе координат в некотором масштабе значения (уровни) одного фактора откладываются по одной оси, а по другой оси (рис. 1.3) – второго. Тогда каждому состоянию «черного ящика» будет соответствовать точка на плоскости.

Для каждого фактора существует область определения, т. е. минимальное и максимальное значения (изменяется дискретно или непрерывно).

Если факторы совместны, то границы образуют на плоскости некоторый прямоугольник.



Рис. 1.3. Область определения факторов

Чтобы указать значение параметра оптимизации, требуется еще одна ось координат.

Пространство, в котором строится поверхность отклика (рис. 1.4), называется **факторным пространством**. Оно задается координатными осями, по которым откладывается значение факторов и параметров оптимизации.

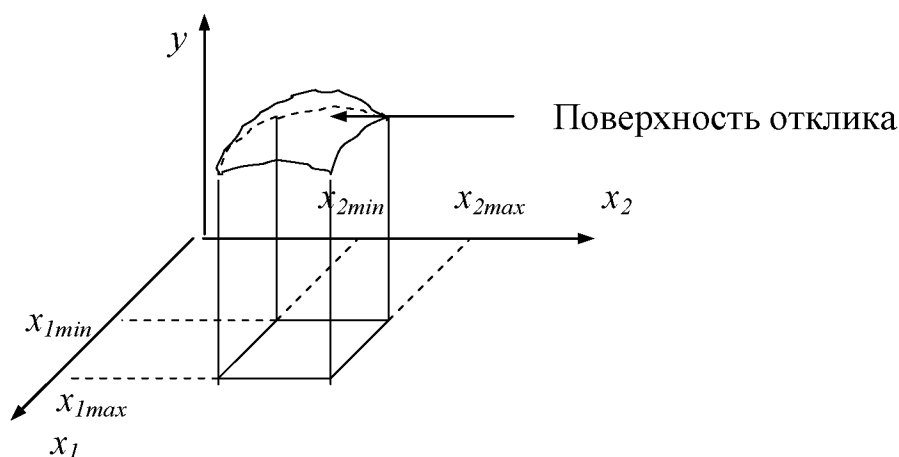


Рис. 1.4. Поверхность отклика

1.7.4. Кодирование факторов

Кодирование – это перевод натуральных значений уровней факторов в кодовые безразмерные величины с целью построения стандартной матрицы эксперимента.

Для факторов с непрерывной областью определения кодирование осуществляют по формуле

$$X_i = \frac{x_i - x_{i0}}{\Delta x_i}, \quad (1.11)$$

где X_i – кодовое значение i -го фактора; x_i – натуральное текущее значение i -го фактора; x_{i0} – начальный (нулевой) уровень фактора; Δx_i – интервал варьирования i -го фактора.

$$\Delta x_i = \frac{x_{i \max} - x_{i \min}}{2} . \quad (1.12)$$

После кодирования уровни факторов принимают значения: -1 , $+1$. $+1$ – верхний уровень; -1 – нижний уровень, 0 – нулевой уровень. В качестве нулевого уровня принимают центр интервала, в котором предполагается вести эксперимент.

На рис. 1.5 представлены факторное пространство и уровни факторов до кодирования, а на рис. 1.6 – уровни факторов после кодирования.

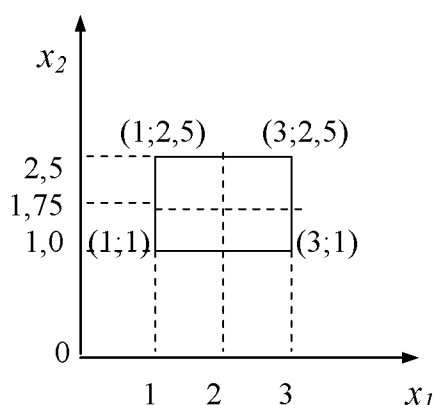


Рис. 1.5. Уровни факторов до кодирования

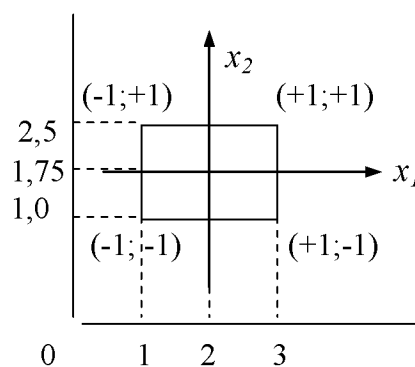


Рис. 1.6. Уровни факторов после кодирования

Пример. Пусть в эксперименте рассматривается процесс обработки изделий. В процессе задействованы три фактора: температура (T), давление (p), время обработки (τ). Температура может принимать значения от 140 до 170 °С. Давление может принимать значения от $2,5$ до $7,5$ кг/см². Оптимальное время обработки составляет от 10 до 30 мин. Требуется перевести натуральные значения в кодовые. Введем обозначения: температура – первый фактор (x_1); давление – второй фактор (x_2); время – третий фактор (x_3).

Тогда в натуральных значениях

$$\begin{aligned}
 x_{1max} &= 170 \text{ }^\circ\text{C}, & x_{1min} &= 140 \text{ }^\circ\text{C}, & \Delta x_1 &= (179 - 140)/2=15, \\
 x_{2max} &= 7,5 \text{ кг/см}^2, & x_{2min} &= 2,5 \text{ кг/см}^2, & \Delta x_2 &= (7,5 - 2,5)/2=2,5, \\
 x_{3max} &= 30 \text{ мин}, & x_{3min} &= 10 \text{ мин}, & \Delta x_3 &= (30 - 10)/2=10.
 \end{aligned}$$

Для кодированных значений

$$\begin{aligned}
 x_{1верх} &= +1, & x_{1нижн} &= -1, & \Delta x_1 &= 1, \\
 x_{2верх} &= +1, & x_{2нижн} &= -1, & \Delta x_2 &= 1, \\
 x_{3верх} &= +1, & x_{3нижн} &= -1, & \Delta x_3 &= 1.
 \end{aligned}$$

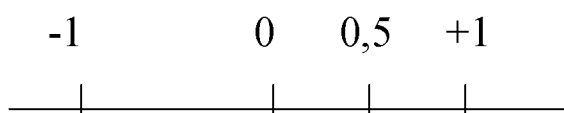
Уровни факторов	x_1	x_2	x_3	T	p	τ
Интервал варьирования	1	1	1	15	2,5	10
Верхний уровень	+1	+1	+1	170	7,5	30
Нижний уровень	-1	-1	-1	140	2,5	10
Основной уровень	0	0	0	155	5	20

Графическая интерпретация будет иметь следующий вид.



Пусть в натуральных значениях $\tau_i = 25$ мин. Найти кодированное значение. Вычисления осуществляют по формуле (1.11)

$$x_i = (25 - 20)/10 = 0,5$$



Приведенный пример позволяет понять, как можно перевести любые натуральные значения факторов к кодированным значениям.