

1. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

1.1. Понятие об аксонометрии

Аксонометрические изображения широко применяются благодаря наглядности и простоте построений.

Слово «аксонометрия» в переводе с греческого означает измерение по осям. Аксонометрический метод может сочетаться и с параллельным, и с центральным проецированием при условии, что предмет проецируется вместе с координатной системой. Сущность метода параллельного аксонометрического проецирования заключается в том, что предмет относят к некоторой системе координат и затем проецируют параллельными лучами на плоскость вместе с координатной системой.

На рис. 1 показана точка A , отнесенная к системе прямоугольных координат xuz . Вектор S определяет направление проецирования на плоскость проекций Π^* .

Аксонометрическую проекцию A_1^* горизонтальной проекции точки A принято называть вторичной проекцией. Искажение отрезков осей координат при их проецировании на Π^* характеризуется так называемым коэффициентом искажения.

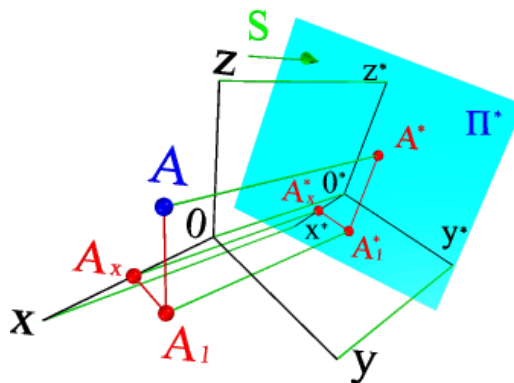


Рис. 1. Аксонометрическое проецирование объекта (точки A)

Коэффициентом искажения называется отношение длины проекции отрезка оси на чертеже к его истинной длине. Так, по оси x^* коэффициент искажения составляет: $u = 0^*x^*/0x$, а по оси y^* и z^* – $v = 0^*y^*/0y$ и $\omega = 0^*z^*/0z$.

В зависимости от отношения коэффициентов искажения аксонометрические проекции могут быть:

- изометрическими, если коэффициенты искажения по всем трем осям равны между собой. В этом случае $u = v = \omega$;
- диметрическими, если коэффициенты искажения по двум любым осям равны между собой, а по третьей – один отличается от первых двух;
- триметрическими, если все три коэффициента искажения по осям различны.

Аксонометрические проекции различаются также и по тому углу φ , который образуется проецирующим лучом с плоскостью проекций. Если $\varphi \neq 90^\circ$, то аксонометрическая проекция называется косоугольной, а если $\varphi = 90^\circ$ – прямоугольной.

1.2. Основная теорема аксонометрии

Рассмотрев общие сведения об аксонометрических проекциях, можно сделать следующие выводы:

- аксонометрические чертежи обратимы;
- аксонометрическая и вторичная проекции точки вполне определяют ее положение в пространстве.

АксонOMETрические проекции обратимы, если известна аксонOMETрия трех главных направлений измерений фигуры и коэффициенты искажения по этим направлениям. АксонOMETрические проекции фигуры являются ее проекциями на плоскости произвольного положения при произвольно выбранном направлении проецирования. Очевидно, возможно и обратное. На плоскости можно выбрать произвольное положение осей с произвольными аксонOMETрическими масштабами.

В пространстве всегда возможно такое положение натуральной системы прямоугольных координат и такой размер натурального масштаба по осям, параллельной проекцией которых является данная аксонOMETрическая система.

Немецкий ученый Карл Польке (1810–1876) сформулировал основную теорему аксонOMETрии: три отрезка прямых произвольной длины, лежащих в одной плоскости и выходящих из одной точки под произвольными углами друг к другу, представляют собой параллельную проекцию трех равных отрезков, отложенных на координатных осях от начала. Согласно этой теореме, любые три прямые в плоскости, исходящие из одной точки и не совпадающие между собой, можно принять за аксонOMETрические оси. Любые отрезки произвольной длины на этих прямых, отложенные от точки их пересечения, можно принять за аксонOMETрические масштабы. Эта система аксонOMETрических осей и масштабов является параллельной проекцией некоторой прямоугольной системы координатных осей и натуральных масштабов.

В практике построения аксонOMETрических изображений обычно применяют лишь некоторые определенные комбинации направлений аксонOMETрических осей и аксонOMETрических масштабов: прямоугольные изометрия и диметрия, косоугольная фронтальная диметрия, кабинетная проекция и др. АксонOMETрические масштабы отражаются на построении, т. е. используются не точные, а округленные, так называемые приведенные коэффициенты искажения размеров по осям.

1.3. Стандартные аксонOMETрические проекции

Согласно ГОСТ 2.317–69, из прямоугольных аксонOMETрических проекций рекомендуется применять прямоугольные изометрию и диметрию.

Между коэффициентами искажения и углом φ , образованным направлением проецирования и картинной плоскостью, существует следующая зависимость: $u^2 + v^2 + \omega^2 = 2 + \text{ctg}^2\varphi$, если $\varphi = 90^\circ$, то $u^2 + v^2 + \omega^2 = 2$.

В изометрии $u = v = \omega$ и, следовательно, $3u^2 = 2$, $u = \sqrt{2/3} \approx 0,82$.

Таким образом, в прямоугольной изометрии размеры предмета по всем трем измерениям сокращаются на 18 %. ГОСТом рекомендуется изометрическую проекцию строить без сокращения по осям координат (рис. 2), что соответствует увеличению изображения против оригинала в 1,22 раза.

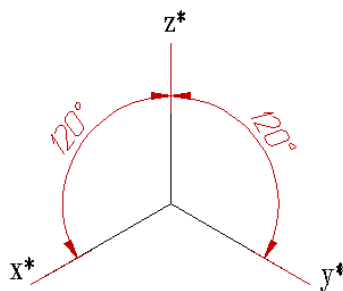


Рис. 2. Расположение осей в прямоугольной изометрии

При построении прямоугольной диметрической проекции сокращение длин по оси y^* (рис. 3) принимают вдвое больше, чем по двум другим осям, т. е. полагают, что $u = \omega$, а $v = 0,5u$.

Тогда $2u^2 + (0,5u)^2 = 2$, откуда $u^2 = 8/9$ и $u \approx 0,94$, а $v = 0,47$.

В практических построениях от таких дробных коэффициентов обычно отказываются, вводя масштаб увеличения, определяемый соотношением $1 / 0,94 = 1,06$, и тогда коэффициенты искажения по осям x^* и z^* равны единице, а по оси y^* – вдвое меньше, $v = 0,5$.

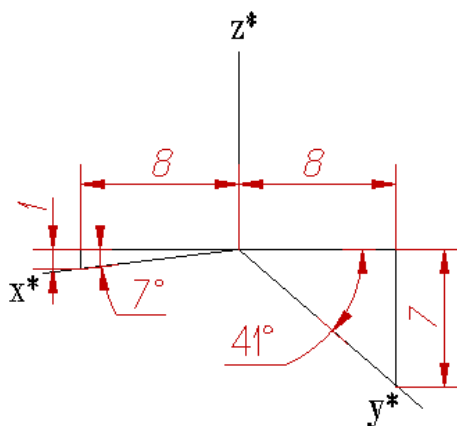


Рис. 3. Расположение осей в прямоугольной диметрии

Из косоугольных аксонометрических проекций ГОСТом предусмотрено применение фронтальной и горизонтальной изометрии и фронтальной диметрии (последнюю еще называют кабинетной проекцией). Фронтальную и горизонтальную изометрические проекции выполняют без искажения по осям x , y , z . Все изображения, лежащие в плоскостях, параллельных фронтальной плоскости проекций, отображаются без искажения. Предмет во фронтальной изометрии выгодно располагать по отношению к осям так, чтобы окружности и дуги находились в плоскостях, параллельных фронтальной плоскости. При таком положении окружность на фронтальной плоскости не искажается. По этой же причине, применяя горизонтальную изометрическую проекцию, предмет, или модель, имеющий цилиндрические отверстия либо закругления, выгодно располагать так, чтобы эти контуры были параллельны горизонтальной плоскости. Для фронтальной диметрической проекции длина отрезков прямых, отложенных в направлении осей x и z выполняется без искажения, а в направлении оси y сокращается вдвое.

Углы между аксонометрическими осями вышеупомянутых проекций указаны на рис. 4.

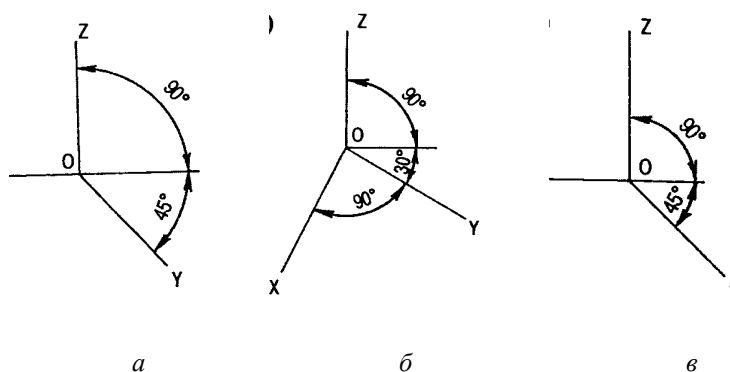


Рис. 4. Расположение осей в косоугольных аксонометрических проекциях:
a – фронтальной изометрии; *б* – горизонтальной изометрии;
в – фронтальной диметрии

1.4. Окружность в аксонометрии

При параллельном проецировании окружности на какую-нибудь плоскость Π^* получаем ее изображение в общем случае в виде эллипса (рис. 5).

Как бы ни была расположена плоскость окружности, сначала целесообразно построить параллелограмм $A^*B^*C^*D^*$ – параллельную проекцию квадрата $ABCD$, описанного около данной окружности, а затем с помощью восьми точек и восьми касательных вписать в него эллипс. Точки 1, 3, 5 и 7 – середины сторон параллелограмма. Точки 2, 4, 6 и 8 расположены на диагоналях так, что каждая из них делит полудиагональ в соотношении 3:7.

Действительно, на основании свойств параллельного проецирования можно записать, что $A1 / 10 = A^*1^* / 1^*0^*$, но $A1/10 = (r\sqrt{2} - r) / r \approx 3/7$.

Из восьми касательных к эллипсу первые четыре – это стороны параллелограмма, а остальные t_2, t_4, t_6 и t_8 – прямые, параллельные его диагоналям. Так, касательная t_2^* к эллипсу параллельна диагонали C^*D^* . Объясняется это тем, что t_2^* и C^*D^* являются проекциями двух параллельных прямых t_2 и CD .

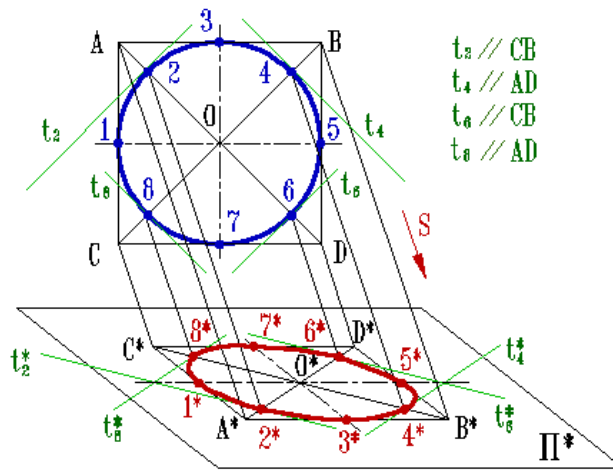


Рис. 5. Проецирование окружности на плоскость

Графические построения, предшествующие вычерчиванию самого эллипса, целесообразно выполнять в следующей последовательности (рис. б):

- построить аксонометрическую проекцию квадрата – параллелограмм $A^*B^*C^*D^*$ и провести диагонали A^*C^* и B^*D^* ;
- отметить середины сторон параллелограмма – точки $1^*, 3^*, 5^*, 7^*$ и на отрезке 3^*B^* , как на гипотенузе, построить прямоугольный равнобедренный треугольник 3^*KB^* ;
- из точки 3^* радиусом 3^*K описать полуокружность, которая пересечет A^*B^* в точках L и M . Эти точки делят отрезок 3^*A^* и равный ему отрезок 3^*B^* в отношении 3:7;
- через точки L и M провести прямые, параллельные боковым сторонам параллелограмма, и отметить точки $2^*, 4^*, 6^*$ и 8^* , расположенные на диагоналях;
- построить касательные к эллипсу в найденных точках. Касательные t_2 и t_6 параллельны BD , а касательные t_4 и t_8 параллельны AC ;
- получив восемь точек и столько же касательных, можно с достаточной точностью вычертить эллипс.

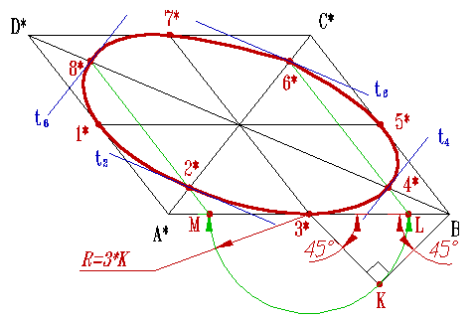


Рис. 6. Построение эллипса

Существуют и иные способы построения эллипса, например, путем замены лекальных кривых дугами окружностей (построением овала с помощью циркуля).

ГОСТ 2.317–69 определяет положение окружностей, лежащих в плоскостях, параллельных плоскостям проекций, для прямоугольной изометрической проекции (рис. 7, а) и для прямоугольной диметрии (рис. 7, б).

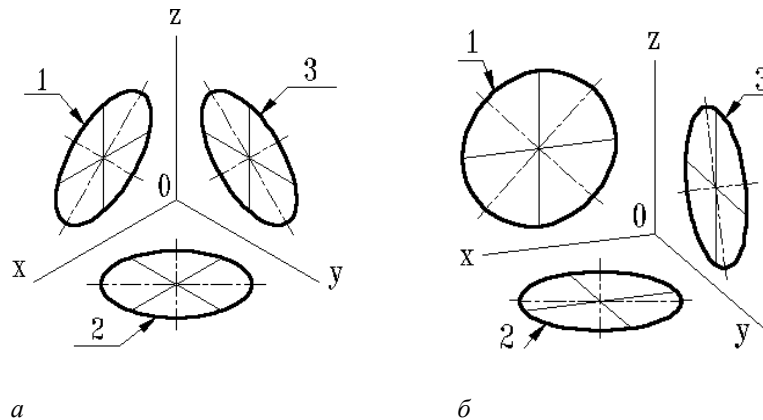


Рис. 7. Аксонометрические проекции окружностей для трех плоскостей проекций: а – изометрические; б – диметрические

Если изометрическую проекцию выполняют без искажения по осям x , y , z , то большая ось эллипсов 1, 2, 3 равна 1,22, а малая ось – 0,71 диаметра окружности.

Если изометрическую проекцию выполняют с искажением по осям x , y , z , то большая ось эллипсов 1, 2, 3 равна диаметру окружности, а малая – 0,58 диаметра окружности.

Если диметрическую проекцию выполняют без искажения по осям x и z , то большая ось эллипсов 1, 2, 3 равна 1,06 диаметра окружности, а малая ось эллипса 1 – 0,95, эллипсов 2 и 3 – 0,35 диаметра окружности.

Если диметрическую проекцию выполняют с искажением по осям x и z , то большая ось эллипсов 1, 2, 3 равна диаметру окружности, а малая ось эллипса 1 – 0,9, эллипсов 2 и 3 – 0,33 диаметра окружности.

Эллипс 1 (большая ось расположена под углом 90° к оси y ; эллипс 2 – большая ось расположена под углом 90° к оси z ; эллипс 3 – большая ось расположена под углом 90° к оси x).

1.5. Построение аксонометрических изображений предметов

Переход от ортогональных проекций предмета к аксонометрическому изображению рекомендуется осуществлять в нижеприведенной последовательности (рис. 8):

- на ортогональном чертеже размечают оси прямоугольной системы координат, к которой и относят данный предмет. Оси ориентируют так, чтобы они допускали удобное

измерение координат точек предмета. Например, при построении аксонометрии тела вращения одну из координатных осей целесообразно совместить с осью тела;

- строят аксонометрические оси с таким расчетом, чтобы обеспечить наилучшую наглядность изображения и видимость тех или иных точек предмета;
- по одной из ортогональных проекций предмета чертят вторичную проекцию;
- создают аксонометрическое изображение, для наглядности делают вырез четверти;

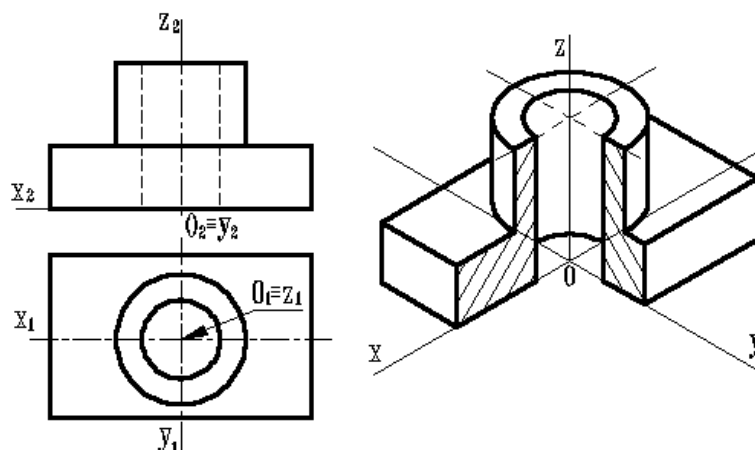


Рис. 8. Ортогональные и аксонометрическая проекции предмета

ГОСТ 2.317–69 определяет условия и способы нанесения размеров при построении аксонометрического изображения, основное внимание следует обратить на следующее:

- линии штриховки сечения в аксонометрических проекциях наносят параллельно одной из диагоналей проекций квадратов, лежащих в соответствующих координатных плоскостях, стороны которых параллельны аксонометрическим осям (рис. 9);
- при нанесении размеров выносные линии проводят параллельно аксонометрическим осям, размерные линии – параллельно измеряемому отрезку;
- в аксонометрических проекциях спицы маховиков и шкивов, ребра жесткости и подобные элементы штрихуют.

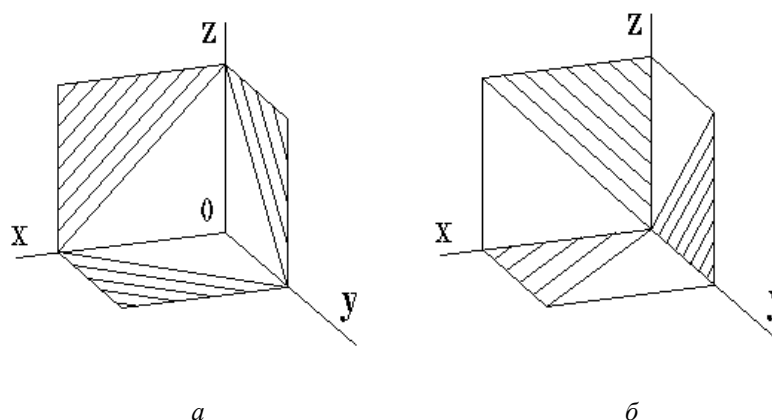


Рис. 9. Штриховка в прямоугольной аксонометрии:
а – изометрия; б – диметрия

Вопросы для самоконтроля

1. В чем состоит сущность аксонометрического проецирования?
2. Что такое аксонометрический коэффициент искажения?
3. Какие бывают аксонометрические проекции?

4. Как формулируется основная теорема аксонометрии?
5. Какие аксонометрические проекции считаются стандартными?
6. Какая из них применяется наиболее часто?
7. Под какими углами располагают аксонометрические оси для прямоугольной изометрии? Каков коэффициент искажения размеров по этим осям?
8. Как располагают аксонометрические оси для прямоугольной диметрии? Каков коэффициент искажения размеров по этим осям?
9. Что представляет собой проекция окружности в прямоугольной изометрии? Как располагается эта проекция?
10. Чему равны полуоси эллипсов для прямоугольной изометрии?
11. Чему равны полуоси эллипсов для прямоугольной диметрии?
12. В какой последовательности рекомендуется строить аксонометрическую проекцию предмета?