

# 1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОСТИ И ПОВЕРХНОСТИ

## 1.1. Пересечение поверхности многогранника плоскостью

Определение взаимного положения плоскости и поверхности – позиционная задача, для решения которой применяется метод вспомогательных секущих плоскостей. В зависимости от положения плоскости по отношению к плоскостям проекций сложность решения позиционной задачи по определению линии пересечения ее с поверхностью существенно меняется. Наиболее простым представляется случай, когда плоскость проецирующая, поэтому к рассмотрению предлагается пример пересечения поверхности проецирующей плоскостью. В качестве вспомогательных секущих плоскостей также используются проецирующиеся плоскости – плоскости, перпендикулярные плоскостям проекций, поэтому основу метода вспомогательных секущих плоскостей составляет алгоритм решения задачи по нахождению линии пересечения поверхности проецирующей плоскостью.

Если пересечь поверхность многогранника плоскостью, то в сечении получается многоугольник. Первая задача заключается в построении проекций многоугольника, получившегося в сечении, затем следует определить натуральный вид этого многоугольника. Также необходимо построить развертку поверхности данного многогранника, причем нужно указать на его поверхности след секущей плоскости (построение разверток будет описано ниже).

Построение проекций фигуры сечения можно выполнить двояко:

1. Можно найти точки встречи ребер многогранника с секущей плоскостью, после чего соединить проекции найденных точек. В результате этого получатся проекции искомого многоугольника. Далее целью задачи является определение точек встречи нескольких прямых с данной плоскостью.

2. Можно последовательно найти линии пересечения каждой из граней многогранника с секущей плоскостью. Для этого необходимо несколько раз строить линию пересечения двух плоскостей.

Чтобы определить истинные размеры многоугольника, который получается в секущей плоскости, выполняют операции преобразования эпюра, чаще всего совмещают эту плоскость с плоскостью проекций.

### Пересечение призмы

На рис. 1 показано пересечение поверхности прямой призмы фронтально-проецирующей плоскостью  $P$ . Прежде всего нужно рассмотреть проекции сечения. Ребра призмы перпендикулярны горизонтальной плоскости и проецируются на ней точками. Здесь горизонтальная проекция  $a$  точки  $A$  является пересечением ребра  $KK_1$  с плоскостью  $P$ , она совпадает с проекцией  $k$ . Фронтальная проекция  $a$  располагается на следе  $P_v$ . Следовательно, горизонтальная проекция  $abc$  искомого сечения совпадает с проекцией основания  $klm$ . При этом фронтальная проекция  $a'b'c'$  расположена на следе  $P_v$ . Если располагать двумя проекциями и сечениями, то нетрудно построить третью. Для определения истинных размеров треугольника  $ABC$  нужно совместить плоскость  $P$  с горизонтальной плоскостью путем вращения плоскости вокруг следа  $P_v$ .

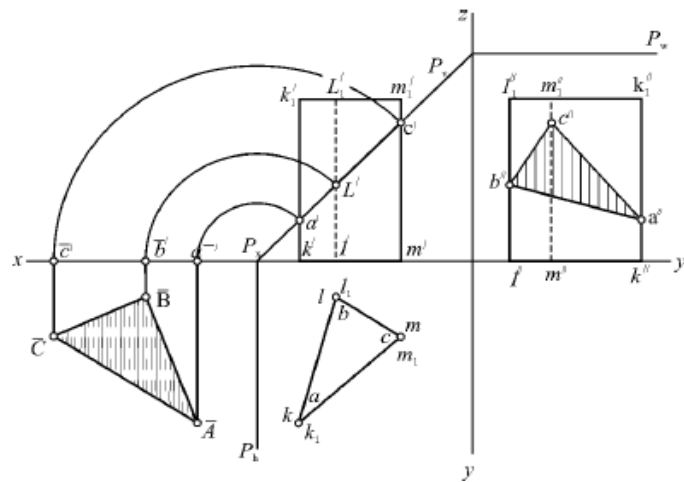


Рис. 1. Проекции прямой призмы и сечения фронтально-проецирующей плоскостью и построение действительной величины сечения

Рассмотрим далее пересечение поверхности призмы горизонтально-проецирующей плоскостью  $Q$  (рис. 2, а, б).

Здесь сечением является прямоугольник  $AA_1B_1B$  (см. рис. 2, а), одна пара сторон которого  $AB$  и  $A_1B_1$  проецируется без искажения на горизонтальную плоскость, а вторая пара  $AA_1$  и  $BB_1$  – на фронтальную и профильную плоскости.

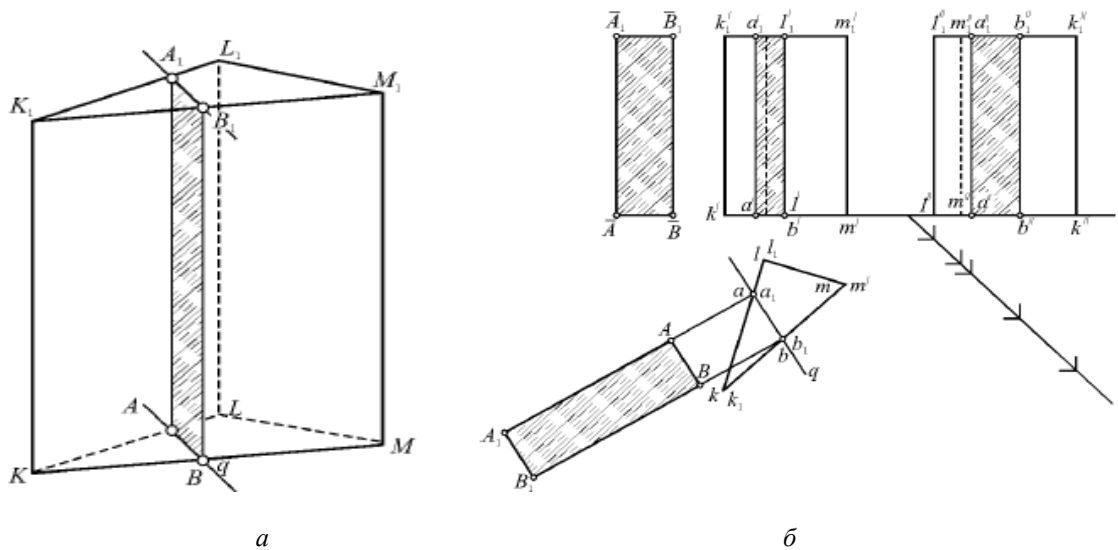


Рис. 2. Сечение прямой призмы проецирующей плоскостью:  
а – наглядное изображение призмы и сечения; б – проекции сечения и натуральная величина сечения (два варианта) прямой призмы

На рис. 2, б представлены проекции призмы с построенными проекциями сечения, на которых видны натуральные размеры обеих сторон прямоугольника  $AA_1B_1B$ . Для построения прямоугольника в натуральную величину нужно через  $a$  и  $b$  провести прямые перпендикулярно  $q$ , затем наметить на них где-нибудь положение точек  $A$  и  $B$  ( $AB = ab$ ). После этого откладываются от точек  $A$  и  $B$  на вспомогательных линиях натуральные размеры сторон  $AA_1$  и  $BB_1$ , при этом их берут с фронтальной проекции. Строя натуральную величину сечения, мы как бы совмещаем прямоугольник с горизонтальной плоскостью, вращая его около горизонтального следа  $AB$  ( $AB = ab$ ), после чего для удобства немного отодвигаем это изображение от линии  $q$ .

Построение натурального вида прямоугольника сечения другим способом весьма удобно делать слева от фронтальной проекции призмы. На произвольном расстоянии от

фронтальной проекции призмы откладываем отрезок, равный высоте сечения призмы, например,  $BB_1$ . От него откладываем отрезок  $AB$ , равный ширине  $ab$  сечения, измеряя его на горизонтальной проекции сечения, затем строим две остальные стороны сечения и получаем прямоугольник  $ABB_1A_1$ .

### Пересечение пирамиды

Рассмотрим варианты сечения пирамиды некоторой плоскостью частного положения (рис. 109).

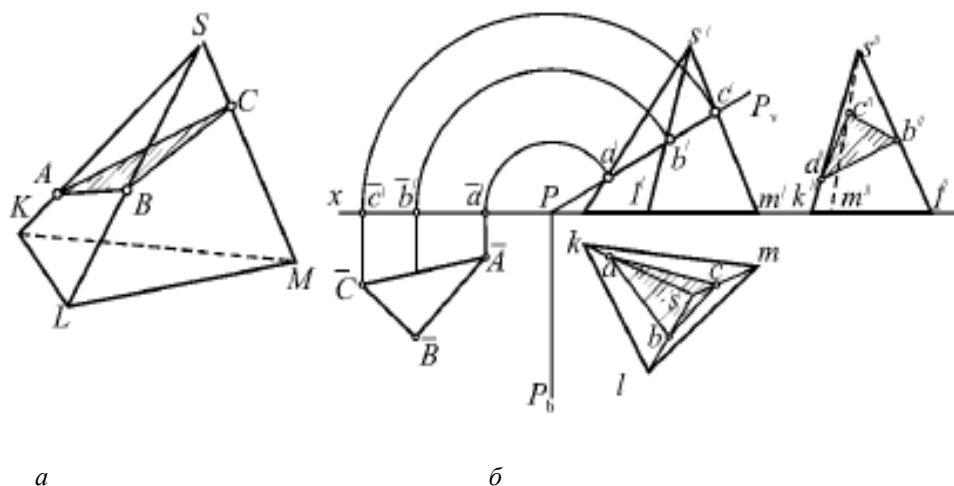


Рис. 3. Пересечение поверхности пирамиды фронтально-проецирующей плоскостью: *a* – изображение пирамиды и сечения  $ABC$ ; *б* – проекции сечения и построение натуральной величины сечения

Показано как пространственное отображение сечения ( $ABC$ ) поверхности пирамиды фронтально-проецирующей плоскостью  $P$  (см. рис. 3, *a*), так и процесс построения проекций сечения пирамиды этой плоскостью (см. рис. 3, *б*). На рисунке изображена фронтальная проекция *a* точки встречи ребра  $KS$  с плоскостью  $P$ . Эта проекция определяется пересечением следа  $P_v$  с фронтальной проекцией ребра  $k's'$ . Аналогично находят фронтальные проекции точек  $b'$  и  $c'$ . Горизонтальные проекции  $a, b$  и  $c$  находятся на соответствующих отрезках с использованием линии проекционной связи. Также на рис. 3, *б* показаны натуральные размеры  $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$  сечения  $ABC$ , которые были определены совмещением его с горизонтальной плоскостью путем вращения около следа  $P_h$ .

На рис. 4 показано пересечение поверхности пирамиды горизонтально-проецирующей плоскостью  $Q$ .

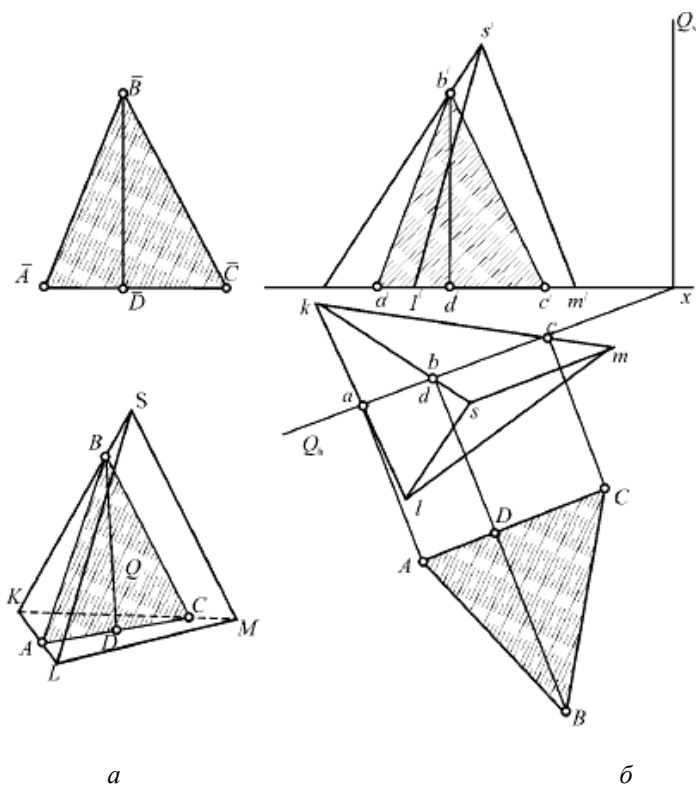


Рис. 4. Пересечение поверхности пирамиды горизонтально-проецирующей плоскостью:  
*a* – пространственное изображение;  
*б* – ортогональные проекции с действительной фигурой сечения

Треугольник  $ABC$  является сечением поверхности пирамиды плоскостью  $Q$ . Основание  $AC$  треугольника проецируется на горизонтальную плоскость без искажения, а высота  $BD$  – на фронтальную и профильную плоскости.

Чтобы построить натуральное изображение сечения, нужно провести через проекции  $a$ ,  $c$  и  $d$  вспомогательные прямые, которые перпендикулярны  $Q_h$ . После этого следует провести прямую  $AC$  параллельно  $Q_h$  ( $AC = ac$ ), точка  $D$  будет лежать на  $AC$ . Затем необходимо отложить от точки  $D$  на прямой  $Dd$  высоту треугольника ( $DB = d'b'$ ). Это определит положение вершины  $B$ . Теперь треугольник  $ABC$  представляет собой натуральный вид сечения поверхности данной пирамиды плоскостью  $Q$ . Строить натуральный вид треугольника сечения весьма удобно слева от фронтальной проекции (треугольник  $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$ ).

## 1.2 Сечения поверхностей тел вращения

### Сечение поверхности цилиндра

Бывают следующие случаи сечения поверхности прямого кругового цилиндра плоскостью:

- окружность, если секущая плоскость  $P$  перпендикулярна оси цилиндра, причем она параллельна основанию цилиндра (рис. 5, *a*);
- эллипс, если секущая плоскость  $P$  не перпендикулярна и не параллельна оси цилиндра (рис. 5, *б*);
- пара прямых, если секущая плоскость  $Q$  содержит ось цилиндра или параллельна ей (рис. 5, *в*).

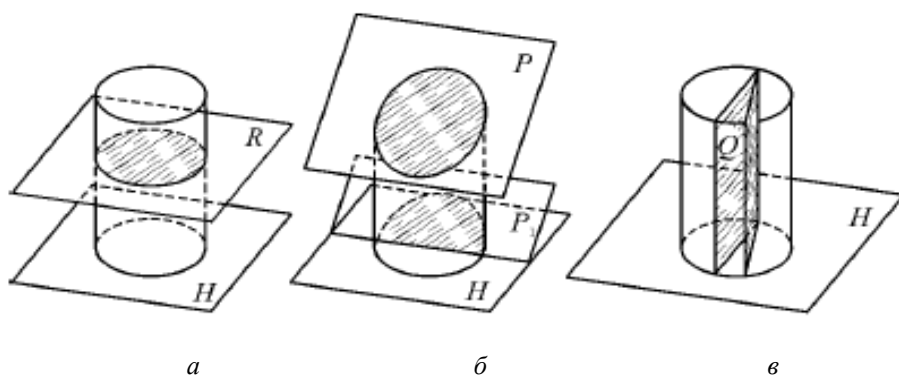


Рис. 5. Варианты сечения поверхности цилиндра плоскостью:  
*a* – окружность; *б* – эллипс; *в* – пара прямых

Особый интерес представляет случай, когда наклонная секущая плоскость пересекает основание цилиндра (плоскость  $P_1$  на рис. 5, б). Здесь часть эллипса может быть неверно принята за параболу или гиперболу. Нужно знать, что ни парабола, ни гипербола не могут быть получены как сечение поверхности кругового цилиндра плоскостью.

На следующем примере показано пересечение поверхности цилиндра фронтально-проецирующей плоскостью  $P$  (рис. 6). Здесь для цилиндра рассмотрено решение двух основных задач, связанных с сечением тела плоскостью, т. е. отыскание проекций сечения и его натурального вида.

На рис. 6 слева дано изображение сечения. Из него видно, что большая ось эллипса представлена хордой 0–6, пересекающей ось цилиндра в точке  $C$ . Малая ось эллипса перпендикулярна хорде 0–6 и направлена по горизонтали.

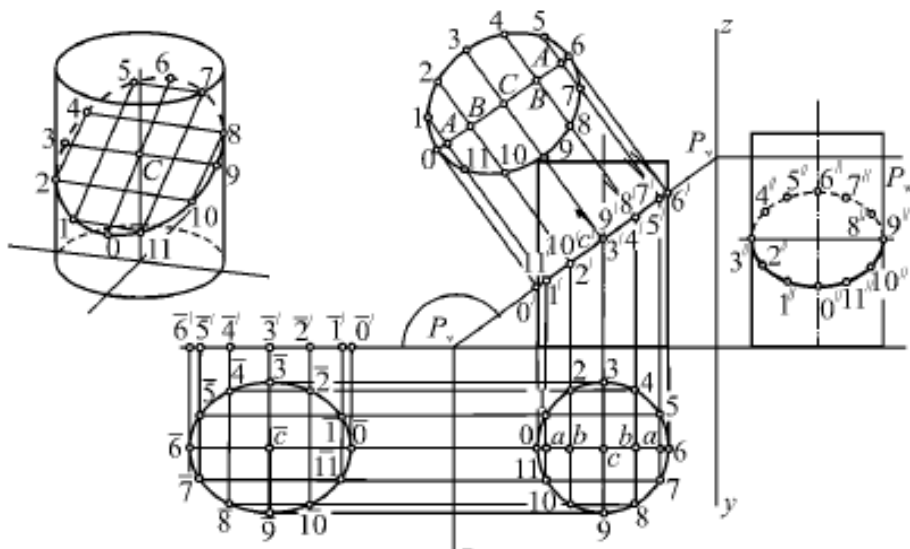


Рис. 6. Пространственное и трехпроекционное изображение сечения поверхности цилиндра фронтально-проецирующей плоскостью

Большая ось эллипса проецируется без искажения на фронтальную плоскость проекций, а малая – на горизонтальную и профильную плоскости. Центр эллипса находится на пересечении этих осей, а также на оси цилиндра (точка  $C$ ). Следует отметить, что на рис. 6 ось симметрии проходит через точки 0–6.

Получающийся в горизонтальном сечении эллипс проецируется на эту плоскость в виде окружности основания, а на профильную плоскость – в виде эллипса. При этом большая ось эллипса 3–9 на профильной плоскости является проекцией малой оси 3–9 исходного эллипса, а малая ось 0–6 на профильной плоскости представляет собой проекцию большой

оси 0–6. На фронтальной плоскости проекция эллипса есть отрезок 0–6, который равен большой оси самого эллипса.

Следовательно, в самом начале построения можно получить две готовые проекции сечения: горизонтальную и фронтальную. После этого нужно построить только профильную проекцию. Следует заметить, что точки 3 и 9 отделяют видимую часть кривой от невидимой на профильной проекции. Если секущая плоскость  $P$  наклонена к плоскости основания цилиндра под углом  $45^\circ$ , то профильная проекция эллипса является окружностью. На рис. 6 угол наклона секущей плоскости меньше  $45^\circ$ , вследствие этого профильная проекция большой оси представляет собой малую ось профильной проекции эллипса. В случае, если бы угол наклона секущей плоскости был больше  $45^\circ$ , проекция большой оси была бы большой осью профильной проекции.

Далее выполняется построение натурального вида сечения. Сначала нужно отметить цифрами ряд точек на проекциях эллипса (на рис. 6 отмечено 12 таких точек), после чего следует начинать построение натурального вида сечения. Выполнить это можно двумя способами:

1) построением совмещения плоскости  $P$  с горизонтальной плоскостью путем вращения ее около горизонтального следа  $P_h$ . На рис. 6 справа совмещение построено слева от горизонтального следа и соответствующие точки отмечены цифрами с чертой сверху;

2) указанием 12 точек эллипса. При этом хорды, параллельные  $P_h$ , проецируются без искажения на горизонтальную плоскость, а расстояния между этими хордами проецируются на фронтальную плоскость. Вследствие этого проводят через точки следа  $P_v$ , которые отмечены цифрами, прямые, перпендикулярные  $P_v$ . Затем перпендикулярно этим линиям проводят ось симметрии данного эллипса. Вместе с крайними вспомогательными прямыми ее пересечение определит точки эллипса 0 и 6, т. е. концы большой оси. После этого от точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  следует отложить в обе стороны половины соответствующих хорд ( $A1 = a1$ ,  $B2 = b2$ ,  $C3 = c3$ ). В данном случае хорда 3–9 является малой осью эллипса.

### Сечение поверхности конуса

В общем случае круговая коническая поверхность включает в себя две совершенно одинаковые полости, которые имеют общую вершину (рис. 7, *а*). Образующие одной полости представляют собой продолжение образующих другой полости. На практике мы имеем дело не с бесконечно расширяющимися двумя полостями конической поверхности, а с телом, которое ограничено одной полостью этой поверхности и плоскостью и является обычным круговым конусом.

Может быть несколько различных вариантов сечений кругового конуса, которые перечислены ниже.

1. Гипербола, если секущая плоскость параллельна двум образующим (рис. 7, *а*). При этом секущая плоскость пересекает обе полости конуса. Угол наклона секущей плоскости по отношению к основанию конуса больше угла наклона образующей.

2. Эллипс, если секущая плоскость не параллельна ни одной образующей (рис. 7, *б*). Здесь секущая плоскость пересекает поверхность только одной полости конуса. Угол наклона секущей плоскости по отношению к основанию конуса меньше угла, который образующая конуса составляет с основанием конуса. В другом случае (рис. 7, *б*) угол наклона плоскости больше угла, который образующая составляет с основанием.

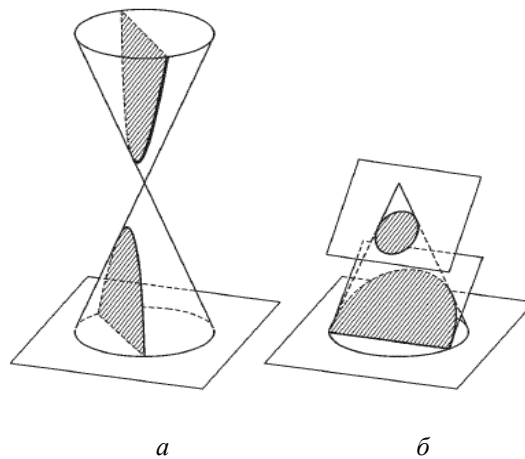


Рис. 7. Сечения прямого кругового конуса:  
*a* – гипербола; *б*– эллипс

В случае, если секущая плоскость перпендикулярна оси конуса, окружность можно рассматривать как частный случай эллипса.

3. Парабола, если секущая плоскость параллельна только одной образующей (рис. 8, *a*). Здесь секущая плоскость не пересекает вторую полость конуса, а угол наклона секущей плоскости по отношению к основанию конуса равен углу наклона образующей к основанию.

4. Две прямые (рис. 8, *б*), если секущая плоскость проходит через вершину конуса. Эти прямые являются образующими конуса. Наибольший возможный угол между этими образующими получается при условии перпендикулярности секущей плоскости и основания конуса.

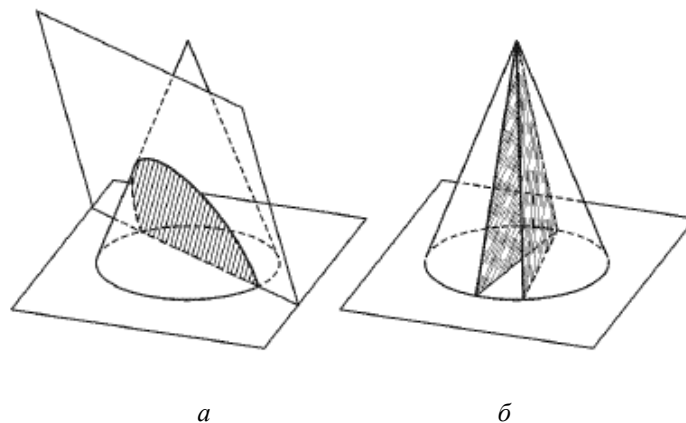


Рис. 8. Варианты сечения поверхности конуса  
 плоскостью: *a* – парабола; *б* – две прямые

Рассмотрим вариант пересечения прямого кругового конуса плоскостью частного положения.

Прямой круговой усеченный конус (рис. 9) с условной вершиной  $S$  поставлен на горизонтальную плоскость проекций и рассечен фронтально-проецирующей плоскостью  $\Omega$ . На третьей проекции конуса обозначены его размеры:  $l$  – длина всей образующей,  $l_1$  – длина образующей усеченной части конуса,  $r$  – радиус основания конуса. Поскольку плоскость  $\Omega$  оказывается параллельной двум образующим конуса, то в сечении на поверхности конуса получается гипербола. Фронтальная ее проекция совпадает с фронтальным следом  $\Omega_2$  секущей плоскости. Для построения горизонтальной и профильной проекций сечения

необходимо применять дополнительные построения. Эти построения можно выполнять двумя способами.

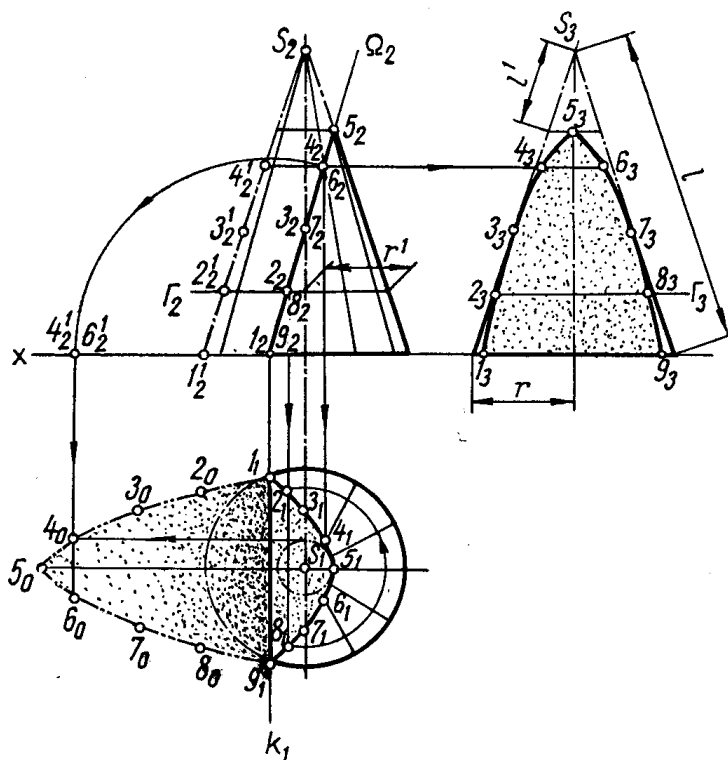


Рис. 9. Проекция сечения конуса фронтально-проецирующей плоскостью и натуральная фигура сечения

Первый способ – способ образующих. Определяем, прежде всего, опорные точки фронтальной проекции кривой. Высшей точкой ее будет точка  $5_2$ , а нижней – точка пересечения следа  $\Omega_2$  с основанием конуса. В ней на плоскости  $\pi_2$  окажутся две совпадающие точки:  $1_2$  и  $9_2$ . На горизонтальной и профильной плоскостях проекций соответствующие им точки находятся с помощью линий проекционной связи. На профильной плоскости проекций опорной будет точка  $5_3$ , которая строится сразу, и точки  $1_3$ ,  $9_3$ , которые строятся по их положению на горизонтальной плоскости. К этим опорным точкам прибавляются точки раздела видимости  $3_3$  и  $7_3$ , которые находятся в соответствии с положением двойной точки  $3_2 \equiv 7_2$ , полученной в пересечении следа-проекции  $\Omega_2$  с фронтальными проекциями профильных образующих. Для определения проекций промежуточных точек кривой наносим на поверхность дополнительные образующие, можно с равным интервалом между ними. Найдя фронтальные проекции точек пересечения соответствующих образующих со следом-проекцией  $\Omega_2$ , дальнейшим проецированием определяем их проекции на  $\pi_1$  и  $\pi_3$ .

Второй способ – способ окружностей. После определения опорных точек проводим фронтальные проекции нескольких окружностей, располагающихся на поверхности конуса, например окружность с радиусом  $r^1$ . На горизонтальной плоскости проекций эта окружность изобразится в свою натуральную величину. Из точки пересечения фронтальной проекции окружности со следом-проекцией  $\Omega_2$  проводим линию связи до пересечения с горизонтальной проекцией окружности в точках  $2_1$  и  $8_1$ . Откладывая на профильной проекции окружности отрезки, равные полухорде  $2_1 8_1$ , получаем точки  $2_3$  и  $8_3$ . Поступаем так же и далее, если нужно определить еще некоторое количество точек для построения проекции кривой пересечения. Натуральная величина сечения построена способом совмещения фигуры сечения с плоскостью  $\pi_1$  путем вращения ее вокруг следа  $k_1$  секущей плоскости  $\Omega$ .

## Сечение поверхности шара

Любое сечение поверхности шара плоскостью является окружностью, которая проецируется на плоскость проекций без искажения только в том случае, если секущая плоскость параллельна плоскости проекций. В общем же случае на плоскости получается эллипс.

В случае, если секущая плоскость перпендикулярна плоскости проекций, на этой плоскости проекцией окружности является отрезок прямой, который равен диаметру окружности.

На рис. 10 показана проекция сечения поверхности шара горизонтально-проецирующей плоскостью  $P$ .

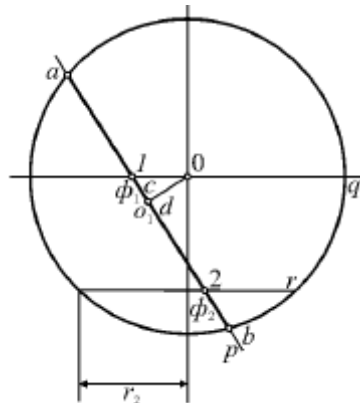


Рис. 10. Горизонтальная проекция сечения шара плоскостью  $P$

На горизонтальную плоскость сечение будет проецироваться в виде отрезка проекции  $p$  плоскости  $P$ , который заключен между контуром шара и равен диаметру окружности сечения.

На фронтальной плоскости мы получим эллипс. Точка  $O_1$  является центром окружности, который получен в сечении шара. Он расположен на одной высоте с центром  $O$ .

Горизонтальная проекция  $o_1$  центра  $O_1$  окружности располагается посередине отрезка  $ab$ . Перпендикуляр, который опущен из точки  $O$  на прямую  $ab$ , попадает в точку  $o_1$ , являющуюся горизонтальной проекцией центра окружности сечения. Фронтальная проекция  $o'_1$  центра окружности является центром интересующего нас эллипса (рис. 11).

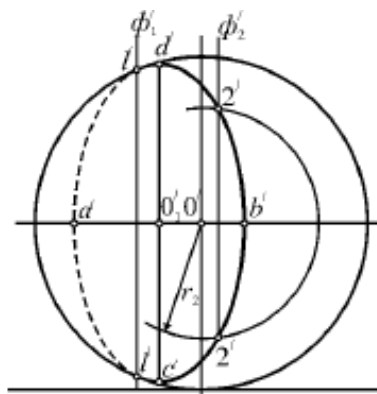


Рис. 11. Фронтальная проекция сечения шара проецирующей плоскостью  $P$

Если рассматривать эллипс как проекцию некоторой окружности, то его большая ось всегда будет проекцией того диаметра окружности, который параллелен плоскости проекций, а малая ось эллипса будет представлять собой проекцию диаметра,

перпендикулярного ему. Вследствие этого большая ось эллипса проекции всегда равна диаметру проецируемой окружности. Здесь диаметр окружности  $CD$  перпендикулярен плоскости  $\pi_1$  и проецируется без искажения на фронтальную плоскость. Для нахождения концов большой оси эллипса необходимо отложить вниз и вверх от центра  $o_1$  эллипса (по перпендикуляру к прямой  $o'o'_1$ ) отрезки  $o'_1c'$  и  $o'_1d'$ , которые равны половине диаметра окружности сечения:  $o'_1c' = o'_1d' = 1/2(ab)$ . Диаметр  $AB$  окружности параллелен горизонтальной плоскости, а его фронтальная проекция  $a'b'$  представляет собой малую ось рассматриваемого эллипса.

Найдем точки, отделяющие видимую часть эллипса от невидимой. Начнем с проведения фронтальной плоскости  $Q$ , которая делит шар пополам. Плоскость  $Q$  будет пересекать поверхность шара по окружности, проецирующейся на фронтальную плоскость в виде контура. Тогда часть линии сечения, расположенную на передней части шара, будет видно, если смотреть на шар спереди, а остальная часть не будет видна. Плоскость  $Q$  пересечет плоскость  $P$  по фронтале  $f_1$ . Пересекаясь с контуром, ее фронтальная проекция  $f$  определит точки 1, которые разделяют видимую и невидимую части кривой. Промежуточные точки 2 эллипса можно найти с помощью вспомогательной фронтальной плоскости  $R$ , пересекающей поверхность шара по окружности с радиусом  $r_2$ , а плоскость  $P$  – по фронтале  $f_2$ .

### Вопросы для самоконтроля

1. Что представляет собой сечение многогранника плоскостью?
2. Какие способы построения фигуры сечения применяются и к каким задачам начертательной геометрии они сводятся?
3. Как находится натуральная величина сечения многогранника?
4. Что требуется для построения боковой развертки многогранника?
5. Какие варианты многоугольника могут получиться при пересечении плоскостью трехгранной прямой призмы и трехгранной прямой пирамиды?
6. Какие варианты сечения могут быть при пересечении плоскостью прямого кругового цилиндра?
7. Какие варианты сечения могут быть при пересечении плоскостью прямого кругового конуса?
8. Какие способы преобразования эпюра применяются для построения натуральной величины сечения плоскостью цилиндра или конуса?
9. Какая фигура получается при развертке боковой поверхности прямого кругового цилиндра? Как подсчитываются размеры сторон у этой фигуры?
10. Что представляет собой развертка боковой поверхности прямого кругового конуса?
11. Что представляет собой сечение шара плоскостью? Как может проецироваться это сечение на основные плоскости проекций?

## 2. ПОСТРОЕНИЕ РАЗВЕРТОК ПОВЕРХНОСЕЙ

### 2.1 Основные понятия и свойства

Поверхность называется развертываемой, если она путем изгибания может быть совмещена с плоскостью без образования складок и разрывов. При этом исходим из представления поверхности как гибкой, но нерастяжимой и несжимаемой пленки. Свойством развертываемости обладают многогранные поверхности и кривые линейчатые поверхности с ребром возврата: торсы, конические и цилиндрические.

Линейчатые косые и нелинейчатые поверхности этим свойством не обладают. Существуют различные способы построения их условных разверток с помощью аппроксимации.

Плоская фигура, полученная в результате совмещения поверхности рассматриваемого геометрического тела с плоскостью, называется разверткой (рис. 12).

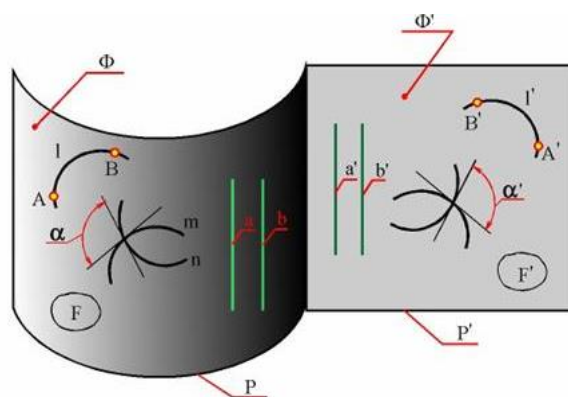


Рис. 12. Развертка поверхности

Между поверхностью и ее разверткой существует взаимно-однозначное точечное соответствие (точке  $A$  на поверхности соответствует точка  $A'$  на развертке, и наоборот), обладающее следующими свойствами:

1) длина участка  $AB$  линии  $l$  на поверхности равна длине участка  $A'B'$  соответствующей ей линии  $l'$  на развертке;

2) угол  $\alpha$  между кривыми  $m$  и  $n$  на поверхности равен углу  $\alpha'$  между соответствующими им кривыми  $m'$  и  $n'$  на развертке (углом между кривыми называется угол между касательными к ним в точке пересечения);

3) площадь отсека  $F$  поверхности равна площади соответствующего отсека  $F'$  развертки.

В дифференциальной геометрии доказывается, что второе и третье свойства являются следствием первого. Первое свойство вытекает из представления поверхности как гибкой, но нерастяжимой и несжимаемой пленки.

Из рассмотренных свойств следует:

1) прямой линии  $a$  на поверхности соответствует прямая  $a'$  на развертке;

2) прямым, параллельным на поверхности ( $a \parallel b$ ), соответствуют прямые, параллельные на развертке ( $a' \parallel b'$ ).

Однако оба указанных свойства обратной силы не имеют, т. е. не всякой прямой на развертке соответствует прямая на поверхности. Примерами этого могут служить цилиндрическая винтовая линия, параллели поверхности вращения.

Если кривой линии, принадлежащей поверхности, соответствует прямая на развертке, то эта кривая линия является геодезической для данной поверхности. Геодезической называется линия, принадлежащая поверхности и соединяющая кратчайшим путем две точки, также принадлежащие поверхности.

## 2.2. Построение разверток многогранников

Плоская фигура, которая получается, если все грани вычертить в настоящую величину на плоскости чертежа в том порядке, в каком они следуют на самом многограннике, называется разверткой (или выкройкой) поверхности данного многогранника. Для ясности можно сказать, что поверхность многогранника как бы разрезается вдоль некоторых его ребер так, чтобы потом эту поверхность можно было совместить с плоскостью чертежа. В том случае, если поверхность многогранника пересечена некоторой плоскостью, для построения развертки на каждой грани следует изобразить след секущей плоскости.

Построение развертки боковой поверхности многогранника осуществляется в два основных этапа:

- 1) определение истинных размеров всех элементов каждой ее грани. Именно благодаря им можно построить изображение этой поверхности в натуральную величину;
- 2) последовательное построение каждой грани в натуральную величину исходя из найденных раньше элементов.

Если данная грань многогранника представляет собой треугольник, тогда, чтобы построить ее в натуральную величину, нужно просто знать размеры всех ее сторон. Если грань многогранника представляет собой четырехугольник, то, кроме четырех его сторон, следует знать еще какой-либо ее элемент (или один из углов, или диагональ и т. п.). В некоторых случаях вспомогательными линиями могут быть следы секущей плоскости.

Рассмотрим построение развертки поверхности пирамиды.

Боковые грани любой пирамиды являются треугольниками. Для построения развертки пирамиды (рис. 13) способом триангуляции необходимо предварительно определить натуральные величины боковых ребер и сторон основания.

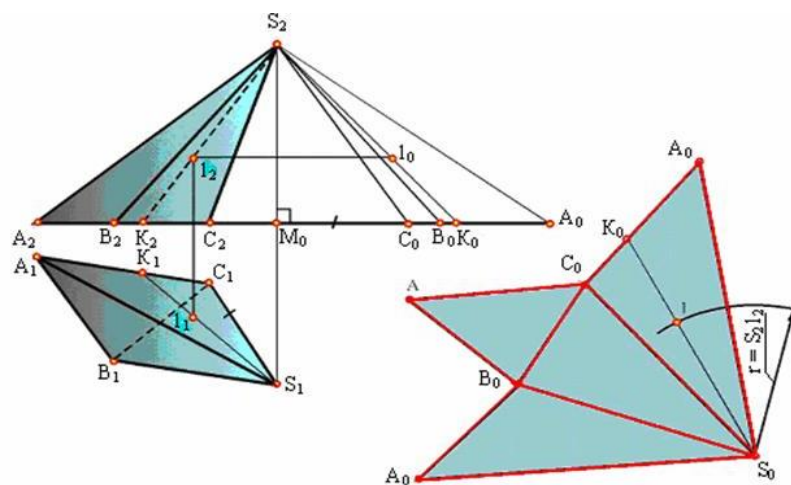


Рис. 13. Построение развертки пирамиды (способ триангуляции)

У изображенной на рисунке пирамиды стороны основания являются горизонталями и проецируются на плоскость  $\pi_1$  в истинную величину. Истинные величины боковых ребер определены способом прямоугольных треугольников  $S_2M_0C_0$ ,  $S_2M_0B_0$  и  $S_2M_0A_0$ , у которых одним катетом является высота пирамиды  $S_2M_0$ , а другим – горизонтальная проекция соответствующего ребра.

$$|M_0C_0| = |S_1C_1|; |M_0B_0| = |S_1B_1|; |M_0A_0| = |S_1A_1|; |M_0K_0| = |S_1K_1|.$$

Натуральные величины ребер пирамиды могут быть определены способом вращения вокруг оси, проходящей через вершину  $S$  и перпендикулярной плоскости  $\pi_1$ .

Следующая операция состоит в построении каждой боковой грани как треугольника по трем сторонам. В результате получается развертка боковой поверхности пирамиды в виде ряда примыкающих друг к другу треугольников с общей вершиной  $S$ . Присоединив к полученной фигуре основание ( $\Delta ABC$ ), получим полную развертку пирамиды. Построение на развертке точки 1, принадлежащей поверхности пирамиды, понятно из чертежа. Такой способ построения развертки поверхности называется способом триангуляции.

Для построения развертки наклонной призмы, изображенной на рис. 14, способом нормального сечения необходимо найти истинные величины боковых ребер и сторон основания призмы. Призма расположена так, что ее боковые ребра параллельны плоскости  $\pi_2$  и проецируются на нее в натуральную величину. Стороны оснований являются горизонталями и проецируются на плоскость  $\pi_1$  без искажения. Таким образом, длины

сторон каждой грани известны, однако этого еще недостаточно для построения истинной формы боковых граней.

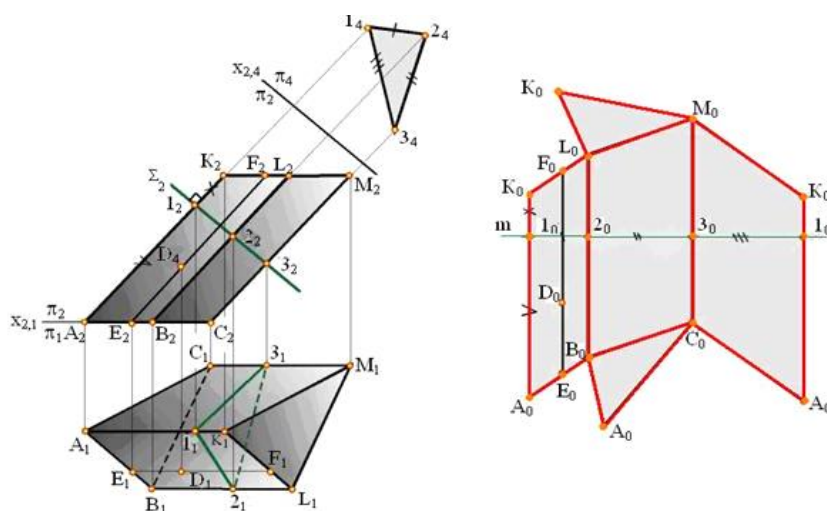


Рис. 14. Построение развертки призмы

Боковые грани наклонной призмы являются параллелограммами, которые не могут быть построены по четырем сторонам. Для построения параллелограмма необходимо помимо длины сторон знать еще его высоту. Для определения высот граней пересечем призму плоскостью  $\Sigma$ , перпендикулярной к ребрам (способ нормального сечения), и определим истинную величину сечения путем замены плоскостей проекций. Стороны этого нормального сечения и будут высотами соответствующих граней. Теперь приступаем к построению развертки. На свободном месте чертежа проводим горизонтальную прямую  $m$  и откладываем на ней отрезки:  $1_0 2_0 = 1_4 2_4$ ,  $2_0 3_0 = 2_4 3_4$  и  $3_0 1_0 = 3_4 1_4$ . Через точки  $1_0, 2_0, 3_0, 1_0$  проводим перпендикуляры к прямой  $m$ , откладываем на них величины боковых ребер так, чтобы  $A_0 1_0 = A_2 1_2$  и  $1_0 K_0 = 1_2 K_2$ ,  $B_0 2_0 = B_2 2_2$  и  $2_0 L_0 = 2_2 L_2$  и т. п. Соединив концы построенных отрезков, получим развертку боковой поверхности призмы. Присоединив к ней оба основания, получим полную развертку призмы. Построение на развертке точки  $D$ , принадлежащей поверхности призмы, понятно из чертежа.

### 2.3. Развертки кривых развертываемых поверхностей

Необходимо отметить, что к развертываемым кривым поверхностям относятся только торсы (поверхности с ребром возврата, коническая и цилиндрическая поверхности).

Развертка любой развертываемой поверхности (кроме гранных) является приближенной. Это можно объяснить тем, что при развертке такой поверхности ее аппроксимируют поверхностями вписанных или описанных многогранников, имеющих грани в форме прямоугольников или треугольников. Поэтому при графическом выполнении развертки поверхности происходит спрямление кривых линий, принадлежащих поверхности, что и приводит к потере точности. Обычно строят приближенные развертки поверхностей, вполне пригодные для практических целей.

Используя способ триангуляции, необходимо определить истинные величины ребер вписанной пирамиды. Поверхность заменяется многогранной поверхностью, состоящей из треугольных граней. Рассмотрим применение способа триангуляции при построении развертки эллиптического конуса, изображенного на чертеже (рис. 15).

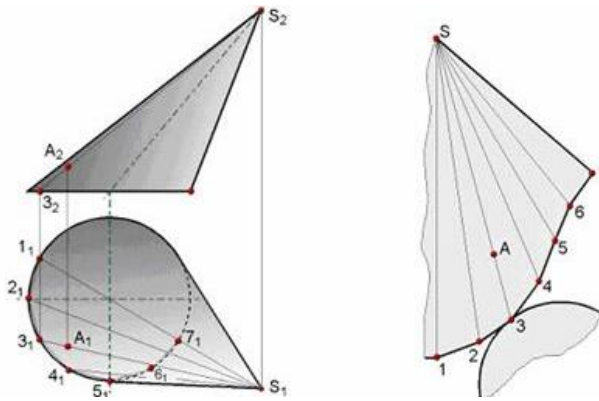


Рис. 15. Построение развертки эллиптического конуса

Триангуляция конической поверхности осуществляется вписыванием в нее пирамидальной поверхности, которая определяется ломаной 1234 ..., вписанной в направляющую кривую конуса, и вершиной  $S$ . Развертка этой  $n$ -угольной пирамиды и принимается за развертку конуса. Все построения на чертеже (на рис. 15) выполняются аналогично построениям на чертеже (на рис. 13). Ломаная линия 1234..., получающаяся на развертке пирамиды, заменяется плавной кривой, проходящей через те же точки.

При построении разверток цилиндрических поверхностей способ триангуляции, как правило, не применяется. Цилиндрическая поверхность заменяется (аппроксимируется) вписанной в нее призматической поверхностью (рис. 16).

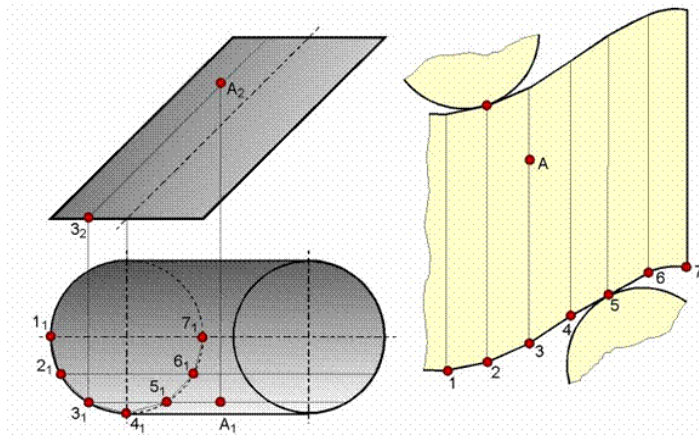


Рис. 16. Построение развертки цилиндрической поверхности

Фигура развертки определяется ломаной 1234 ..., вписанной в направляющую кривую цилиндра, и направлением образующих. Развертка этой  $n$ -угольной призмы и принимается за развертку цилиндра. Построения выполняются так же, как на рис. 14. Ломаная линия 1234..., получающаяся на развертке призмы, заменяется плавной кривой, проходящей через те же точки.

Развертка боковой поверхности прямого кругового цилиндра представляет собой прямоугольник со сторонами, соответственно равными  $\pi D$  и  $h$ , где  $D$  – диаметр окружности основания цилиндра, а  $h$  – его высота. На рис. 17 показано построение развертки боковой поверхности такого цилиндра. Основание построенного прямоугольника равно длине окружности ( $\pi D$ ), а высота равна длине образующей цилиндра.

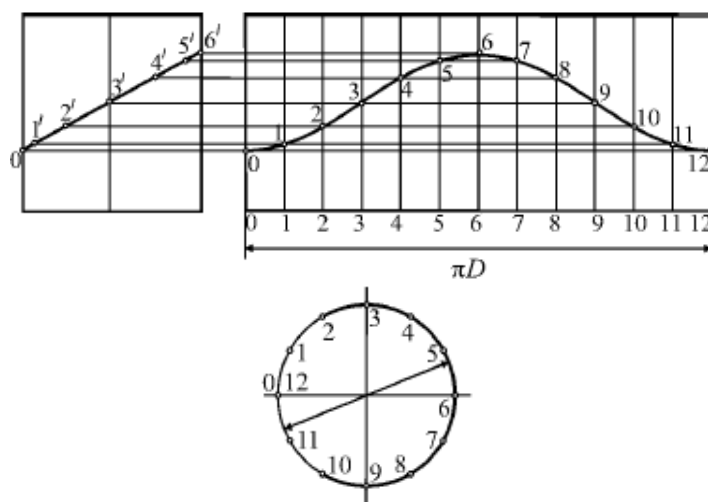


Рис. 17. Построение развертки поверхности цилиндра и нанесение линии сечения

Для построения линии сечения на развертке цилиндра длина окружности заменена периметром вписанного правильного 12-угольника, после чего через соответствующие точки делений спрямленной окружности проведены образующие. При этом на каждой образующей отмечена точка ее встречи с плоскостью  $P$  (0, 1, 2, ...). Соединив эти точки плавной кривой линией, получаем развернутую линию сечения поверхности цилиндра.

#### 2.4. Условные развертки неразвертывающихся поверхностей

Неразвертывающуюся поверхность совместить с плоскостью невозможно. Для построения условной развертки такой поверхности применяют метод аппроксимации, который заключается в следующем: данная неразвертывающаяся поверхность  $\Phi$  разбивается на некоторые отсеки. Каждый из этих отсеков заменяется отсеком кривой развертывающейся поверхности. Совокупность всех отсеков развертывающихся поверхностей называется обводом  $\Phi'$  поверхности  $\Phi$ . С помощью триангуляции обвод  $\Phi'$  заменяется обводом  $\Phi''$  гранных поверхностей. Развертка гранных поверхностей, образующих обвод  $\Phi''$ , принимается за условную развертку поверхности  $\Phi$ . При свертывании такой развертки, кроме изгибания, необходимо произвести частичное растяжение или сжатие отдельных ее участков.

Рассмотрим построение развертки поверхности сферы (шара).

Сферическая поверхность является неразвертывающейся. Существующие методы построения ее развертки дают лишь приближенные результаты. Сущность одного из них заключается в том, что элемент сферической поверхности заменяется элементом цилиндрической поверхности, касательной к сфере по главному меридиану  $m$ . Ось такой цилиндрической поверхности проходит через центр сферы перпендикулярно плоскости  $G_2$ , в которой расположен этот главный меридиан. При этом под элементом сферы понимают часть ее, ограниченную двумя большими окружностями.

Для построения развертки поверхности сферы (рис. 18) нужно выполнить следующее:

- разделить сферу большими (меридиальными) окружностями на несколько (8–12) равных частей. Каждый из образовавшихся элементов сферы проецируется на плоскость  $\pi_1$  в виде сектора (рис. 18, *a*);
- описать вокруг сферы цилиндрическую поверхность, ось которой проходит через центр сферы перпендикулярно к  $\pi_2$  (рис. 18, *a*);
- заменить элемент сферы частью цилиндрической поверхности. Горизонтальной проекцией этого цилиндрического элемента окажется треугольник  $A_1B_1O_1$ , а фронтальной – контур сферы (дуга окружности);

- для построения развертки цилиндрического элемента (лепестка) разделить его фронтальную проекцию на восемь равных частей;
- построить горизонтальные проекции образующих, соответствующих точкам деления. Истинные длины отрезков образующих для построения развертки взять с горизонтальной проекции (это отрезки  $A_1B_1, C_1D_1, E_1F_1, G_1H_1$ ), а расстояния между ними измерить на фронтальной проекции (расстояния между точками  $1_22_2$  и  $2_23_2$ );
- при построении цилиндрического элемента (лепестка) через середину отрезка  $AB = A_1B_1$  провести вертикальную ось симметрии лепестка, на которой отложить вверх и вниз четыре отрезка:  $1_02_0 = 1_22_2, 2_03_0 = 2_23_2, 3_04_0 = 3_24_2, 4_05_0 = 4_25_2$ ;
- через точки  $2_0, 3_0, 4_0$  провести отрезки  $C_0D_0 = C_1D_1, E_0F_0, G_0H_0 = G_1H_1$ ;
- соединить плавной кривой концы отрезков, т. е. ломаная 1357... заменяется плавной кривой, проходящей через те же точки, и получается развертка верхней половины лепестка.

Строим развертку каждого сектора (лепестка) цилиндрической поверхности. Построенная фигура принимается за условную развертку сектора сферы. Полная развертка будет состоять из восьми таких фигур (рис. 18, б).

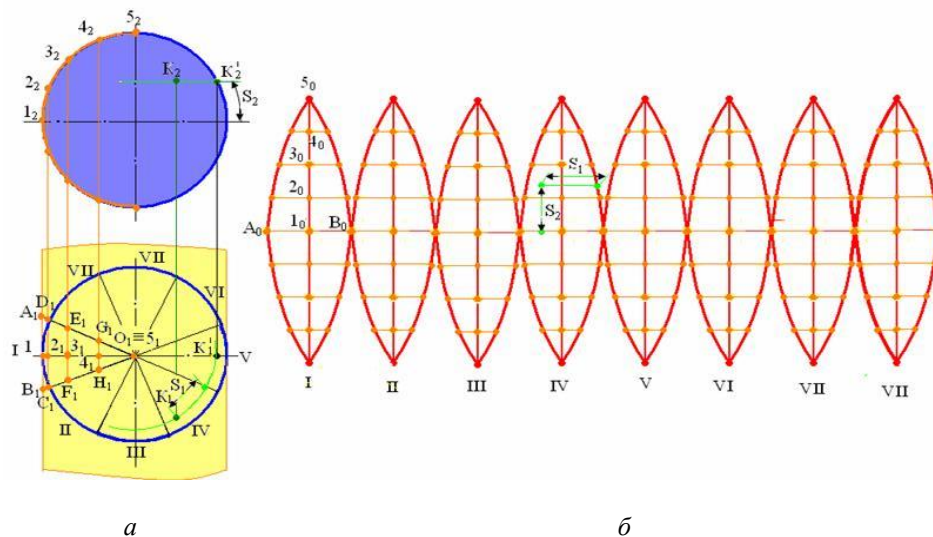


Рис. 128. Построение развертки сферы: *а* – исходные проекции и построения; *б* – развертка поверхности

При выполнении построения развертки часто возникает необходимость определить положение какой-либо точки на поверхности. Рассмотрим положение точки  $K$  на поверхности сферы и перенесем ее изображение на развертку.

Это можно выполнить с помощью двух координат дуг  $S_1$  и  $S_2$ , показанных на рис. 18, *а*. Дуга  $S_2$  показывает смещение точки  $K$  от экватора к полюсу, а дуга  $S_1$  – смещение ее от одного из меридианов по параллели сферы. Дуга  $S_2$  равна той части меридиана сферы, которая ограничена экватором и параллелью, проходящей через точку  $K(K_2)$ . Длину этой дуги (см. рис. 18, *б*)  $S_2 = K_2'M_2$  нужно откладывать на развертке от экватора соответствующего (4-го) лепестка по вертикальной оси симметрии. Величина  $S_1$  откладывается параллельно линии экватора от соответствующего края данного лепестка развертки.

## Вопросы для самоконтроля

1. Что называют разверткой поверхности?
2. Какая поверхность называется развертываемой?
3. Какие поверхности обладают свойством развертываемости?
4. Какие существуют способы для построения развертки поверхности?
5. В чем состоит сущность способа триангуляции?
6. Какие развертки являются точными и какие приближенными?
7. Какие поверхности относят к неразвертываемым?
8. Как и в какой последовательности может быть построена развертка сферы?