1. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

1.1. Варианты положения плоскости в пространстве

Плоскость общего положения.

Плоскость, которая занимает произвольное положение по отношению к плоскости проекций (углы наклона этой плоскости к плоскостям проекций произвольные, но отличные от 0 и 90°), называется плоскостью общего положения. На комплексном чертеже следы плоскости общего положения составляют с осью проекций также произвольные углы.

Рассмотрим изображение на комплексном чертеже и свойства плоскостей частного положения: плоскости, перпендикулярные и параллельные плоскостям проекции.

Плоскости, перпендикулярные плоскостям проекций (проецирующие).

1. Горизонтально-проецирующая плоскость $\alpha \perp \pi_1$.

Плоскость α, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекции π_1, называется горизонтально-проецирующей (рис. 1).

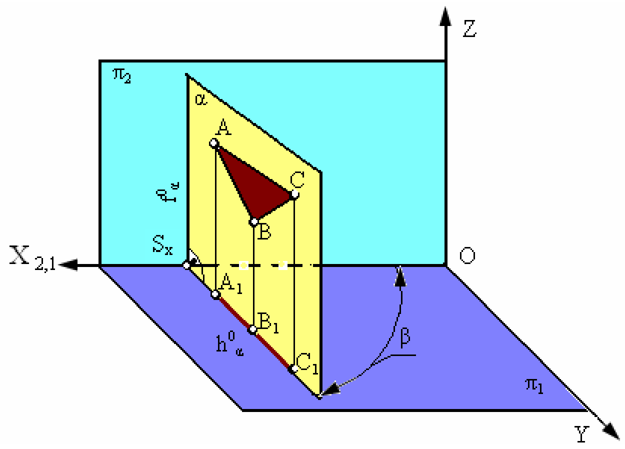


Рис. 1. Горизонтально-проецирующая плоскость

Основным свойством горизонтально-проецирующей плоскости является то, что любая фигура, расположенная в этой плоскости, проецируется на π_1 в прямую линию (горизонтальный след плоскости $h_{0\alpha}$). Угол β, который составляет горизонтальный след плоскости $h_{0\alpha}$ с координатной осью x, равен углу наклона плоскости α к плоскости проекций π_2. Фронтальный след такой плоскости перпендикулярен оси x ($f_{0\alpha} \perp x$).

2. Фронтально-проецирующая плоскость $\beta \perp \pi_2$.

Плоскость β, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций π_2, называется фронтально-проецирующей (рис. 2).

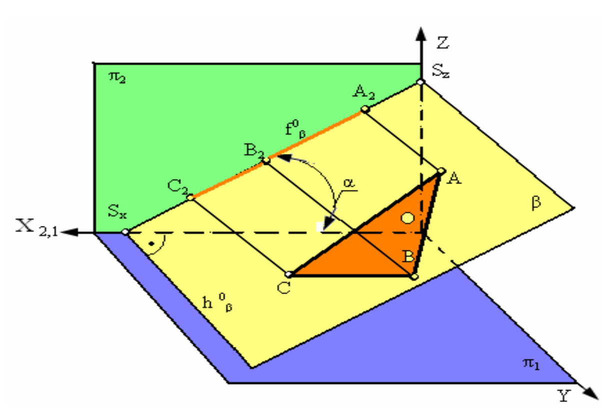


Рис. 2. Фронтально-проецирующая плоскость

Основным свойством фронтально-проецирующей плоскости является то, что любая фигура, расположенная в этой плоскости, проецируется на π_2 в прямую линию (фронтальный след плоскости f_{0b}). Угол α, который составляет фронтальный след плоскости f_{0b} с координатной осью x, равен углу наклона плоскости β к плоскости проекций π_1. Горизонтальный след такой плоскости перпендикулярен оси x.

3. Профильно-проецирующая плоскость.

Такая плоскость перпендикулярна профильной плоскости проекций и наклонена под произвольными углами к двум остальным плоскостям проекций. Любая фигура, расположенная в профильно-проецирующей плоскости, проецируется на π_3 в линию, т. е. на профильный след. Оба другие следа этой плоскости перпендикулярны соответствующим осям проекций.

Плоскости, параллельные плоскостям проекций (плоскости уровня).

1. Горизонтальная плоскость $\gamma \parallel \pi_1$.

Плоскость γ, параллельная плоскости π_1, называется горизонтальной (рис. 3). Любая фигура, расположенная в такой плоскости, проецируется на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину ($\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$). Фронтальный след этой плоскости параллелен оси x ($f_{0\gamma} \parallel x$).

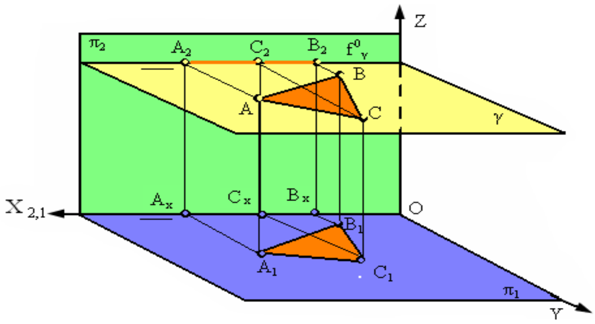


Рис. 3. Плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций

2. Фронтальная плоскость $\Sigma \parallel \pi_2$.

Плоскость Σ, параллельная плоскости π_2, называется фронтальной (рис. 4). Любая фигура, расположенная в такой плоскости, проецируется на фронтальную плоскость проекций без искажения, т. е. в натуральную величину. Горизонтальный след Σ_1 фронтальной плоскости параллелен оси x.

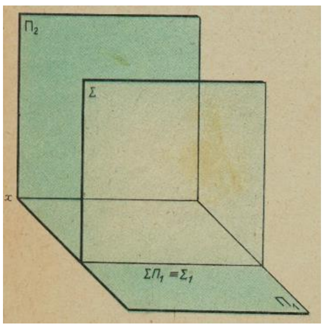


Рис. 4. Плоскость Σ, параллельная фронтальной плоскости проекций

3. Профильная плоскость $\Sigma \parallel \pi_3$ (рис. 5)

Плоскость, параллельная профильной плоскости проекций, называется профильной.

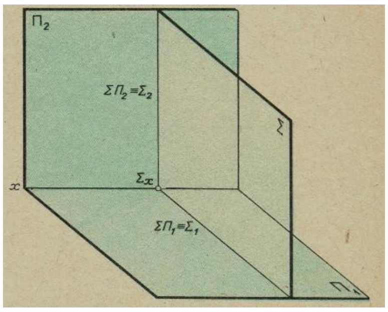
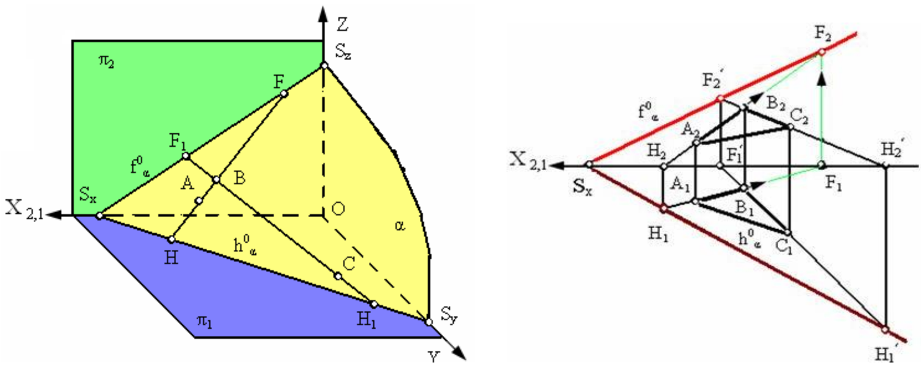


Рис. 5. Плоскость Σ, параллельная
профильной плоскости проекций

След Σ_2 на фронтальной плоскости проекций параллелен оси *z*, а след Σ_1 на горизонтальной плоскости проекций параллелен оси *y*.

1.2. Следы плоскости

Следом плоскости α называется линия пересечения этой плоскости с плоскостью проекций (рис. 6).



а *б*

Рис. 6. Изображения следов плоскости: *а* – в пространственной системе
плоскостей проекций; *б* – на комплексном чертеже

В системе двух плоскостей проекций π_1 и π_2 рассматриваемая плоскость α в общем случае имеет два следа: горизонтальный h_a^0 и фронтальный f_a^0. Они являются линиями пересечения плоскости α с горизонтальной и фронтальной плоскостями проекций. Точки пересечения плоскости α с координатными осями *x*, *y*, *z* называются точками схода следов и обозначаются соответственно S_x, S_y, S_z.

Вопросы для самоконтроля

1. Какими способами задается плоскость в пространстве?
2. Какой из имеющихся способов задания плоскости обладает большей наглядностью?
3. Какие плоскости являются плоскостями частного положения?
4. Какие названия имеют плоскости частного положения?
5. Назовите основное свойство плоскости частного положения.
6. Каким дополнительным важным свойством обладает плоскость уровня?
7. Что называется следом плоскости и как он определяется?
8. Что такое точка схода следов и сколько таких точек у плоскости общего положения?
9. Сколько следов имеет проецирующая плоскость и сколько следов у плоскости уровня?

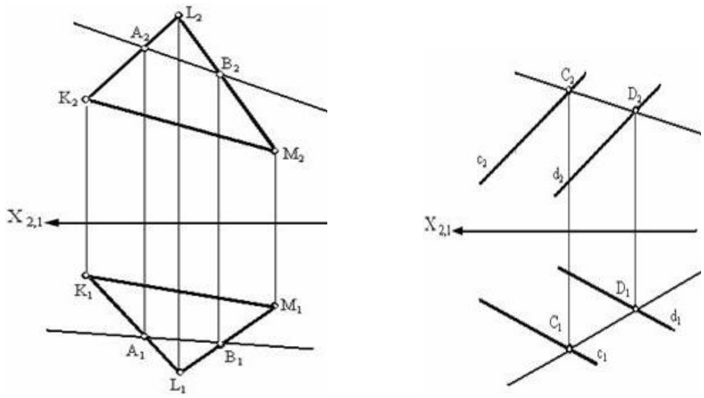
2. ОСНОВНЫЕ ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА ПЛОСКОСТИ

Позиционными задачами называются такие задачи, в которых определяется взаимное расположение различных геометрических объектов относительно друг друга. На первом этапе ограничимся рассмотрением объектов, находящихся в одной и той же плоскости, определяя их удаление друг от друга или угловые величины. Затем рассмотрим и пространственное их положение, т. е. положение нескольких объектов, которые не могут располагаться в одной плоскости.

3.1. Прямая и точка на плоскости

Прямая *AB* принадлежит плоскости α, если две ее точки *A* и *B* принадлежат этой плоскости α (Δ *KLM*). Справедливо и обратное утверждение: если точки *A* и *B* принадлежат плоскости α (Δ *KLM*), то прямая, проходящая через эти точки, принадлежит плоскости α.

Прямые *AB* и *CD*, принадлежащие разным плоскостям, показаны на рис. 7. Прямая *AB* принадлежит плоской фигуре *LKM*, потому что на проекциях прямой и плоской фигуры имеются две общие точки.



а *б*

Рис. 7. Изображение прямых, принадлежащих плоскостям:
а – плоскость задана треугольником *ABC*; *б* – плоскость задана параллельными прямыми *c* и *d*

Прямая *CD* принадлежит плоскости, заданной параллельными прямыми *c* и *d*, так как она проходит через точки *C* и *D*, расположенные на этих прямых.

Прямая принадлежит плоскости, если ее следы принадлежат одновременно следам плоскости. Справедливо и обратное утверждение: если следы прямой принадлежат следам плоскости, то прямая принадлежит плоскости.

Кроме того, существует еще одно свойство, определяющее взаимное положение точки и плоскости. Точка принадлежит плоскости, если она расположена на прямой, принадлежащей этой плоскости. Так, если на проекциях линии *AB* (см. рис. 7, *а*) или на проекциях линии *CD* (см. рис. 7, *б*) будут построены проекции какой-то иной точки, находящиеся в проекционной связи, то эти точки будут принадлежать заданным плоскостям.

Вопросы для самоконтроля

1. Как формулируется условие принадлежности прямой линии заданной плоскости?
2. Как можно судить о принадлежности рассматриваемой прямой плоскости, заданной следами?
3. Как формулируется условие принадлежности точки рассматриваемой плоскости?

4. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

4.1. Взаимное положение двух плоскостей

Две плоскости в пространстве могут быть либо параллельны (или совпадать друг с другом), либо пересекаться. Взаимно перпендикулярные плоскости представляют собой частный случай пересекающихся плоскостей.

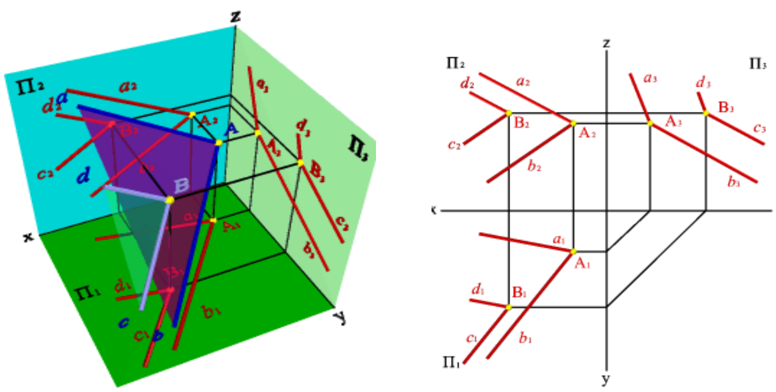
Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

Это определение хорошо иллюстрируется задачей: через точку B провести плоскость, параллельную плоскости, заданной двумя пересекающимися прямыми a и b (рис. 8).

Итак, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны между собой. Проводим через точку B две прямые c и d.

Для того чтобы провести на эпюре параллельные прямые, необходимо воспользоваться свойством параллельного проецирования – проекции параллельных прямых параллельны между собой:

$d \parallel a,\ c \parallel b \Rightarrow \delta_1 \parallel a_1,\ c_1 \parallel b_1;\ \delta_2 \parallel a_2,\ c_2 \parallel b_2;\ \delta_3 \parallel a_3,\ c_3 \parallel b_3.$



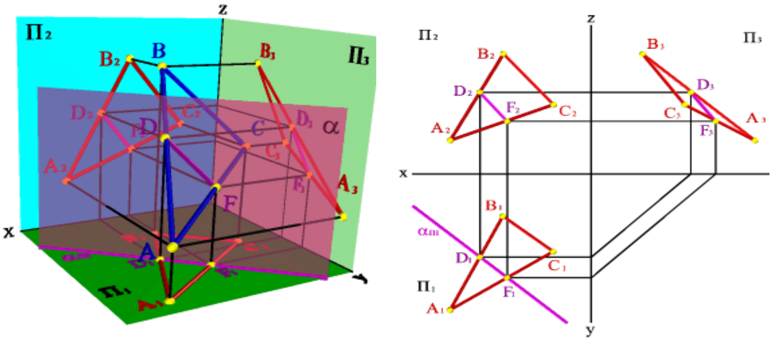
а *б*

Рис. 8. Параллельные плоскости: *а* – модель; *б* – эпюр

Если рассматриваемые плоскости не параллельны, то они пересекаются. Линией пересечения двух плоскостей является прямая, для построения которой достаточно определить две ее точки, общие для обеих плоскостей, либо одну точку и направление линии пересечения плоскостей. Рассмотрим построение линии пересечения двух плоскостей, когда одна из них проецирующая (рис. 9).

Задача. Дано: произвольная плоскость, заданная треугольником ABC, а вторая – горизонтально-проецирующая плоскость α. Требуется построить линию пересечения заданных плоскостей.

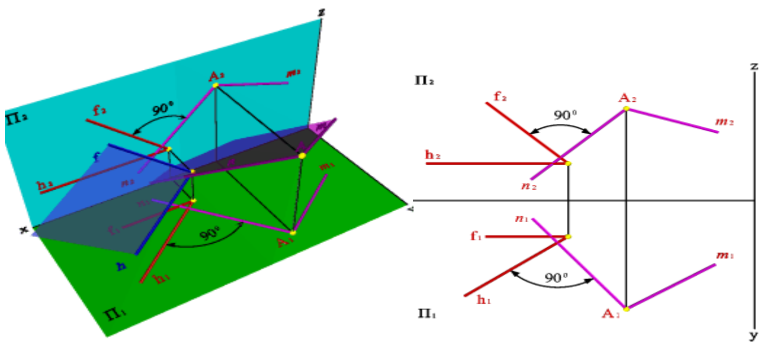
Решение задачи заключается в нахождении двух точек, общих для данных плоскостей, через которые можно провести прямую линию. Плоскость, заданную треугольником ABC, можно представить как прямые линии (AB), (AC), (BC). Точка пересечения прямой (AB) с плоскостью α – точка D, прямой (AC) – F. Отрезок $[DF]$ определяет линию пересечения плоскостей. Так как α – горизонтально - проецирующая плоскость, то проекция D_1F_1 совпадает со следом плоскости $\alpha_{П1}$. Таким образом, остается только построить недостающие проекции $[DF]$ на π_2 и π_3.



а б

Рис. 9. Пересечение плоскости общего положения с проецирующей плоскостью: *а* – модель; *б* – эпюр

Рассмотрим общий случай пересечения плоскостей, когда плоскости занимают общее положение в пространстве, на примере взаимно перпендикулярных плоскостей. Частным случаем пересечения плоскостей являются две перпендикулярные плоскости (рис. 10).



а б

Рис. 10. Взаимно перпендикулярные плоскости: *а* – модель; *б* – эпюр

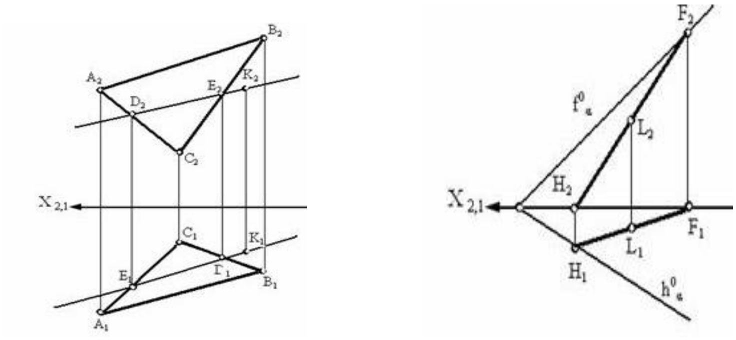
Из стереометрии известно, что две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой. Через точку *A* можно провести множество плоскостей, перпендикулярных данной плоскости $\alpha(h, f)$. Эти плоскости образуют в пространстве пучок плоскостей, осью которого является перпендикуляр, опущенный из точки *A* на плоскость α. Для того чтобы через точку *A* провести плоскость, перпендикулярную плоскости $\alpha(h, f)$, необходимо из точки *A* провести прямую *n*, перпендикулярную плоскости $\alpha(h, f)$ (горизонтальная проекция n_1 перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали h_1, фронтальная проекция n_2 перпендикулярна фронтальной проекции фронтали f_2). Любая плоскость, проходящая через прямую *n* будет перпендикулярна плоскости $\alpha(h, f)$, поэтому для задания плоскости через точку *A* проводим произвольную прямую *m*. Плоскость, заданная двумя пересекающимися прямыми *(m, n)*, будет перпендикулярна плоскости $\alpha(h, f)$ (см. рис. 10, *б*).

4.2. Взаимное положение прямой и плоскости

Рассмотрим три случая взаимного положения прямой и плоскости: прямая лежит в плоскости, прямая параллельна плоскости, прямая пересекает заданную плоскость.

1. Прямая, лежащая в плоскости или принадлежащая плоскости.

Условие принадлежности прямой плоскости рассмотрено в параграфе 3.1. Примеры, иллюстрирующие это условие, показаны на рис. 7 и 11.



а *б*

Рис. 11. Прямые, принадлежащие плоскостям, заданным:
а – плоскостью треугольника *ABC*; *б* – горизонтальным $h^0{}_\alpha$
и фронтальным $f^0{}_\alpha$ следами

2. Прямая, параллельная плоскости.

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, принадлежащей этой плоскости. На рис. 12 показана прямая *n*, параллельная отрезку 1*B*, принадлежащему плоскости *ABC*, а следовательно, параллельная этой плоскости.

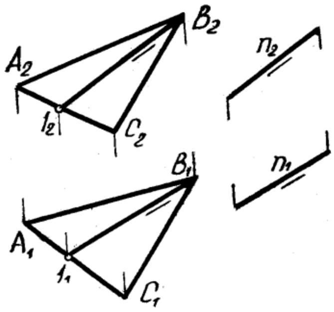


Рис. 12. Прямая *n* параллельна Δ *ABC*

3. Прямая, пересекающая плоскость.

Прямая, пересекающая плоскость, имеет с этой плоскостью одну общую точку. Подробно этот вариант взаимного положения прямой и плоскости будет рассмотрен в следующем параграфе. Частным случаем пересечения прямой с плоскостью является вариант перпендикулярности прямой и плоскости.

4.3. Пересечение прямой и плоскости

Рассмотрим упрощенный вариант пересечения прямой с плоскостью, когда заданная плоскость занимает частное положение, т. е. является либо проецирующей, либо плоскостью уровня. В подобных случаях определение места пересечения очевидно, так как проекция точки пересечения прямой и плоскости будет находиться на вырожденной проекции плоскости, т. е. на отрезке-следе заданной плоскости. Эта вырожденная проекция заданной плоскости отображается на той плоскости проекций, к которой заданная плоскость перпендикулярна. Таким образом, первая проекция точки пересечения прямой с заданной плоскостью строится в месте пересечения проекции прямой с вырожденной проекцией плоскости. Вторая и третья проекции искомой точки строятся с помощью линий проекционной связи.

На рис. 13 представлено построение точки пересечения *D* прямой общего положения с плоскостью уровня *ABC*, где начальная проекция точки пересечения D_1 находится на горизонтальной плоскости проекций, затем по линии проекционной связи найдена фронтальная проекция точки пересечения D_2.

На рис. 14 выполнено построение точки пересечения прямой с фронтально-проецирующей плоскостью *ABC*. Как и в предыдущем случае, вначале отмечена точка пересечения проекции прямой с вырожденной проекцией плоскости. В этом варианте это точка D_2 на фронтальной плоскости проекций. Вторая проекция точки пересечения D_1 прямой с плоскостью построена с помощью линии проекционной связи.

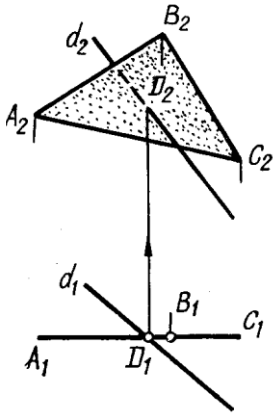


Рис. 13. Пересечение прямой с фронтальной плоскостью уровня

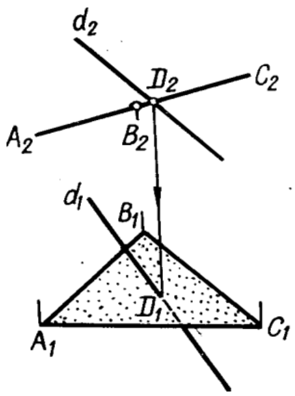
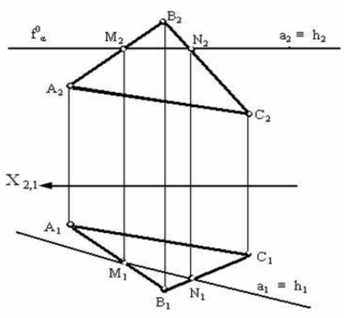


Рис. 14. Пересечение прямой с фронтально-проецирующей плоскостью

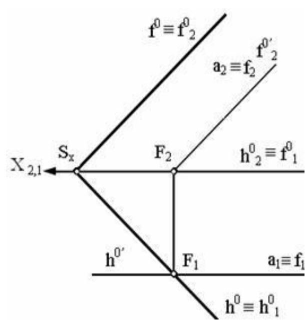
Определение видимых и скрытых участков заданной прямой также не вызывает затруднений, так как они очевидны.

4.4. Пересечение двух плоскостей (частный вариант)

Рассмотрим сначала частный случай (рис. 15, *а*), при котором одна из пересекающихся плоскостей параллельна горизонтальной плоскости проекций ($\alpha \parallel \pi_1$, $f^0_\alpha \parallel x$). В этом случае линия пересечения *a*, принадлежащая плоскости α, будет также параллельна плоскости π_1, т. е. будет совпадать с горизонталью пересекающихся плоскостей ($a \equiv h$). Если же одна из плоскостей параллельна фронтальной плоскости проекций (рис. 15, *б*), то линия пересечения *a*, принадлежащая этой плоскости, будет параллельна плоскости π_2 и будет совпадать с фронталью пересекающихся плоскостей ($a \equiv f$). Построение проекций линии пересечения этих плоскостей достаточно очевидно.



а



б

Рис. 15. Частный случай пересечения плоскости общего положения с плоскостями: *а* – горизонтального уровня; *б* – фронтального уровня

4.5. Пересечение прямой и плоскости (общее положение)

Пример построения точки пересечения *K* прямой *a* (*AB*) с плоскостью α (*DEF*) показан на рис. 16. Для этого прямая *a* заключена в некоторую плоскость β и определена линия пересечения плоскостей α и β. В рассматриваемом примере прямые *AB* и *MN* принадлежат одной плоскости β и пересекаются в точке *K*, а так как прямая *MN* принадлежит заданной плоскости α (*DEF*), то точка *K* является и точкой пересечения прямой *a* (*AB*) с плоскостью α.

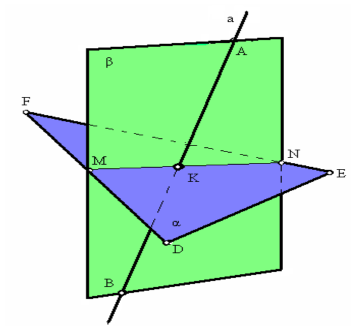


Рис. 16. Точка пересечения прямой *a* с плоскостью

Для решения подобной задачи на комплексном чертеже необходимо уметь находить точку пересечения прямой общего положения с плоскостью общего положения. Рассмотрим пример нахождения проекций точки пересечения прямой *AB* с плоскостью треугольника *DEF*, представленный на рис. 17.

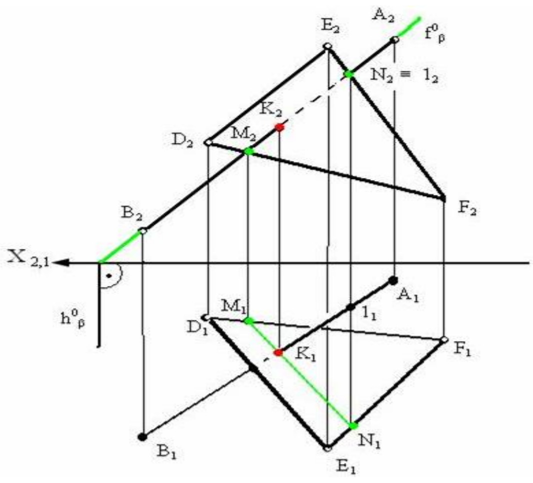


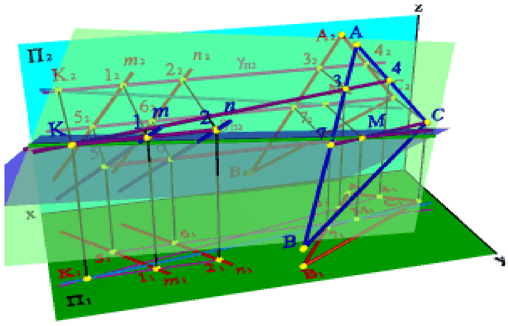
Рис. 17. Пример определения точки пересечения прямой и плоскости

Для нахождения точки пересечения через фронтальную проекцию прямой A_2B_2 проведена фронтально-проецирующая плоскость β, которая пересекла треугольник в точках *M* и *N*. На фронтальной плоскости проекций (π_2) эти точки представлены проекциями M_2, N_2. Из условия принадлежности прямой плоскости на горизонтальной плоскости проекций (π_1) находятся горизонтальные проекции полученных точек M_1, N_1. В пересечении горизонтальных проекций прямых A_1B_1 и M_1N_1 образуется горизонтальная проекция точки их пересечения (K_1). По линии связи и условиям принадлежности на фронтальной плоскости проекций находится фронтальная проекция точки пересечения (K_2).

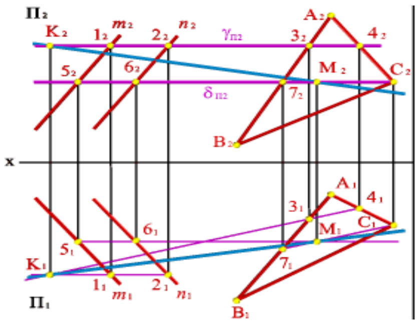
Видимость отрезка *AB* относительно треугольника *DEF* определена методом конкурирующих точек. На плоскости π_2 рассмотрены две точки: $N \in EF$ и $l \in AB$. По горизонтальным проекциям этих точек можно установить, что точка *N* расположена ближе к наблюдателю ($Y_N > Y_1$), чем точка l (направление луча зрения параллельно S). Следовательно, прямая AB, т. е. часть прямой AB (K_1), закрыта плоскостью DEF на плоскости π_2 (проекция $K_2\,l_2$ показана штриховой линией). Также установлена видимость на плоскости π_1.

4.6. Пересечение двух плоскостей общего положения

Задача. Дано: Две плоскости общего положения α ($m \parallel n$) и β (ABC) (рис. 18). Требуется построить линию пересечения плоскостей α и β.



а



б

Рис. 18. Пересечение двух плоскостей общего положения:
а – модель; *б* – эпюр

Рассмотрим последовательность построения линии пересечения плоскостей α ($m \parallel n$) и β (ABC). По аналогии с предыдущей задачей для нахождения линии пересечения данных плоскостей проведем вспомогательные секущие плоскости γ и δ. Найдем линии пересечения этих плоскостей с заданными плоскостями. Плоскость γ пересекает плоскость α по прямой (1, 2), а плоскость β – по прямой (3, 4). Точка пересечения этих прямых – точка K. Она одновременно принадлежит трем плоскостям: α, β и γ, а значит искомой линии пересечения плоскостей α и β. Плоскость δ пересекает плоскости α и β по прямым (5, 6) и (7, C). Точка их пересечения M расположена одновременно в трех плоскостях: α, β, δ и принадлежит линии пересечения плоскостей α и β. Таким образом, прямая KM является линией пересечения плоскостей α и β.

Построение линии пересечения двух плоскостей можно упростить, если вспомогательные секущие плоскости проводить через прямые, задающие плоскость. В этом случае точки, определяющие положение линии пересечения плоскостей, находятся как точки пересечения прямой и плоскости.

Вопросы для самоконтроля

1. Как могут располагаться в пространстве две плоскости?
2. Как определяется взаимопараллельность двух плоскостей?
3. Каким образом определяется взаимопересечение двух плоскостей?
4. Когда две плоскости перпендикулярны относительно друг друга?
5. Какие существуют варианты взаимного положения прямой и плоскости?
6. В какой последовательности строятся проекции линии пересечения двух плоскостей, если одна из них занимает частное положение?
7. Как определяется видимость участков пересекающихся плоскостей?
8. Как определяются проекции точки пересечения произвольной прямой с плоскостью частного положения?
9. В какой последовательности на комплексном чертеже решается задача по построению проекций точки пересечения произвольной прямой с плоскостью общего положения?
10. Какие действия и в какой последовательности нужно выполнить для построения проекций линии пересечения двух плоскостей, занимающих общие положения?
11. Какой метод может быть использован при определении видимых и закрытых элементов заданных плоскостей?

5. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОТРЕЗКА ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ

5.1. Определение длины и углов наклона отрезка к плоскостям проекций

Определение действительных размеров геометрических объектов, в том числе длин отрезков, относится к метрическим задачам начертательной геометрии. Линейные либо угловые размеры объектов определяются или при выгодном расположении объекта в системе плоскостей проекций, или при использовании соответствующих способов и дополнительных построений.

На рис. 48 показан отрезок AB и его горизонтальная проекция A_1B_1. Проведя прямую BB', параллельную горизонтальной проекции отрезка A_1B_1, получим прямоугольный треугольник $\Delta\, ABB'$.

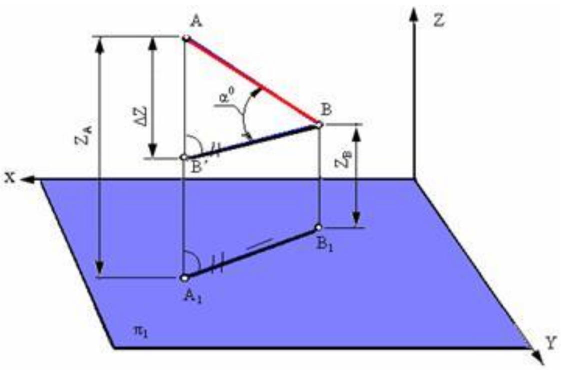


Рис. 19. Определение углов наклона и натуральной величины отрезков

Длина отрезка AB равна гипотенузе этого треугольника, катетами которого являются горизонтальная проекция отрезка A_1B_1 и разность координат Z точек A и B ($\Delta Z = Z_A - Z_B$).

Как известно, угол наклона прямой к плоскости равен углу между этой прямой AB и ее проекцией на плоскость (A_1B_1). Следовательно, угол $\Delta\, ABB'$, лежащий против катета Δ_z, равен углу наклона отрезка AB и горизонтальной плоскости проекций π_1 (угол α°).

Аналогично рассуждая (рис. 20), можно показать, что на эпюре длина отрезка AB равна гипотенузе треугольника.

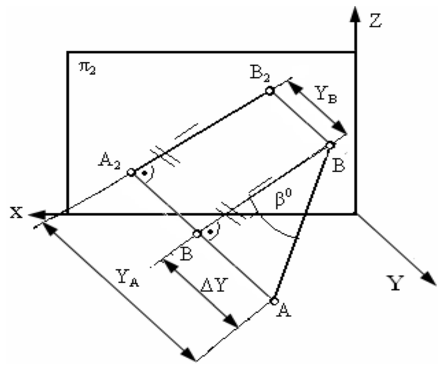


Рис. 20. Определение углов наклона
и натуральной величины отрезка

Аналогично длина отрезка AB может быть определена и как гипотенуза треугольника, катеты которого – профильная проекция отрезка A_3B_3 и разность координат X ($\Delta X = X_A - X_B$) точек A и B. Угол $\gamma°$ этого треугольника, лежащий против катета ΔX, определяет угол наклона отрезка AB к профильной плоскости проекций π_3.

На рис. 21 показан пример определения длины отрезка AB и углов наклона его ко всем плоскостям проекций.

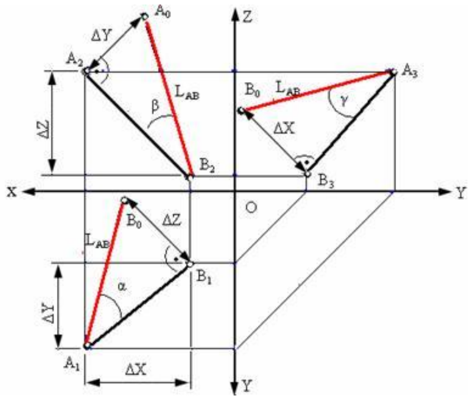
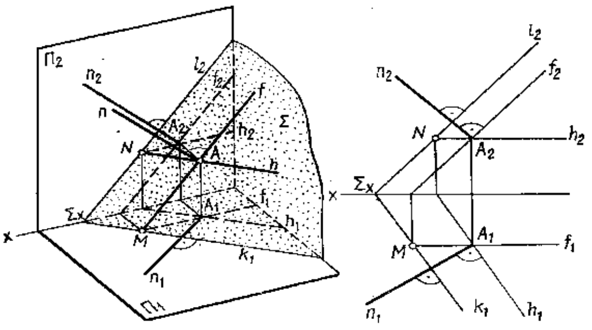


Рис. 21. Определение длины отрезка и углов
наклона к плоскостям проекций

5.2. Кратчайшее расстояние между объектами
Перпендикуляр к плоскости общего положения

Из обычного житейского опыта мы усваиваем направление, которое является кратчайшим между двумя геометрическими объектами. В классической и начертательной геометрии кратчайшим расстоянием между точкой и прямой линией будет отрезок, проведенный из заданной точки перпендикулярно к этой прямой. В соответствии с такими рассуждениями мы приходим к необходимости отображения прямого угла на соответствующих плоскостях проекций, который, как и любой другой угол, может проецироваться и с искажением, и в натуральную величину. Это значит, что мы должны уметь выполнять необходимые построения прямого угла на комплексном чертеже так, чтобы и в пространстве этот угол также оказывался прямым.

Вспомним теорему о проецировании двух отрезков, расположенных относительно друг друга под прямым углом. Итак, если хотя бы один из двух отрезков, составляющих прямой угол, параллелен соответствующей плоскости проекций, то прямой угол между ними проецируется на эту плоскость проекций в натуральную величину. Таким образом, наиболее просто выдерживать прямой угол по отношению к имеющейся плоскости, построив для нее проекции горизонтали и фронтали, либо иметь заранее следы заданной плоскости. Затем выполняется построение проекций перпендикуляра. Эти построения выполнены на рис. 22.



а *б*

Рис. 22. Прямая *n*, перпендикулярная плоскости Σ:
а – пространственная модель; *б* – эпюр

Резюмируя приведенные рассуждения, можно сформулировать следующее: если прямая перпендикулярна плоскости, то ее проекции перпендикулярны к соответствующим следам этой плоскости, а также к соответствующим проекциям горизонтали и фронтали плоскости.

Рассмотрим пример построения перпендикуляра n к плоскости Σ, заданной параллельными прямыми a и b, из точки A, принадлежащей заданной плоскости (рис. 23).

Через точку A проводится горизонталь h (h_1, h_2) и фронталь f (f_1,f_2) плоскости. Восставляем проекции искомого перпендикуляра, исходя из того, что $n_1 \perp h_1$, а $n_2 \perp f_2$. Длина перпендикуляра выбирается в данном случае произвольно.

Для построения перпендикуляра из определенной точки к заданной прямой, необходимо вначале построить плоскость, которая должна оказаться перпендикулярной к этой прямой. Любая линия, принадлежащая такой плоскости, будет перпендикулярна к исходной прямой. Такое построение выполнено на рис. 24.

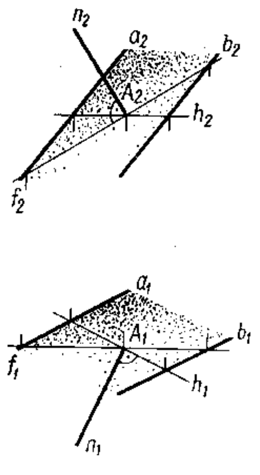


Рис. 23. Проекции перпендикуляра n к плоскости ($a \parallel b$)

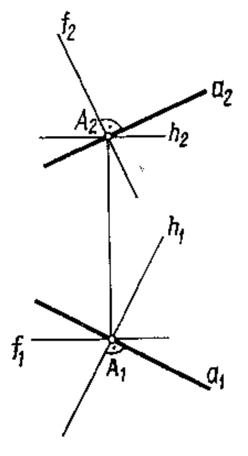


Рис. 24. Плоскость ($f \parallel h$) $\perp$ прямой a

При построении плоскости, перпендикулярной прямой *a*, руководствуемся теми же положениями. Через выбранную точку на прямой проводим проекции горизонтали и фронтали. При этом $h_1 \perp a_1$, $h_2 \parallel$ оси x, $f_2 \perp a_2$, $f_1 \parallel$ оси x либо расположена перпендикулярно линии связи A_1A_2.

5.4. Условие перпендикулярности двух плоскостей

Плоскости α и β перпендикулярны, если одна плоскость проходит через перпендикуляр другой плоскости.

Так, на рис. 25 показана прямая a, перпендикулярная плоскости α (следы $h^0{}_\alpha$, $f^0{}_\alpha$). Если через эту прямую провести (задать) плоскость, то она будет перпендикулярна плоскости α. Если же рассматривать две плоскости общего положения, заданные своими следами, то нужно представлять, что перпендикулярность одноименных следов не означает перпендикулярности самих плоскостей.

На рис. 25 изображены две проецирующие плоскости β и γ и произвольная плоскость δ, следы которой проходят через следы прямой a. Это означает, что прямая a лежит и в плоскости β, и в плоскости γ, и в плоскости δ. Задавая новую плоскость следами $h^0{}_\alpha$ и $f^0{}_\alpha$, нужно выдержать перпендикулярность этих следов относительно соответствующих проекций прямой a (a_1, a_2), что и показано на рис. 25. Одноименные же следы плоскостей δ и α оказываются расположенными под произвольным углом друг к другу.

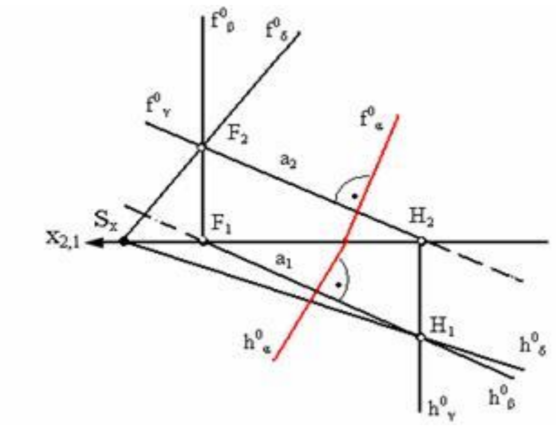


Рис. 25. Условие перпендикулярности плоскостей, заданных следами

Аналогичным образом подходим к построению взаимоперпендикулярных плоскостей, если они задаются иным способом, например, плоскими фигурами. Для первой (исходной) плоскости обязательно построение линий уровня, т. е. проекций горизонтали и фронтали. Далее строят в выбранном месте проекции прямой (отрезка), с условием перпендикулярности соответствующих проекций прямой и проекций фронтали и горизонтали. Затем через построенные проекции линии (отрезка) задают проекции второй плоскости. На рис. 26 изображена прямая b, перпендикулярная плоскости Δ ABC, следовательно, любая плоскость, проходящая через прямую b, будет перпендикулярна плоскости Δ ABC.

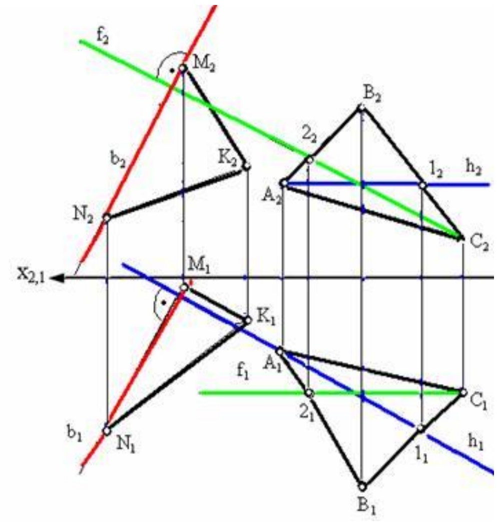


Рис. 26. Условие перпендикулярности плоскостей

5.5. Линия наибольшего ската плоскости

Линия наибольшего ската рассматриваемой плоскости, наряду с горизонталью и фронталью плоскости, относится к главным линиям плоскости. Линией наибольшего ската (наклона) плоскости γ называется прямая g, принадлежащая этой плоскости и перпендикулярная ее линии уровня – горизонтали h. Это значит, что плоский угол между этими двумя главными линиями плоскости равен 90°. По десятому инвариантному свойству для ортогонального проецирования этот прямой угол должен проецироваться таковым на плоскость π_1 (рис. 27).

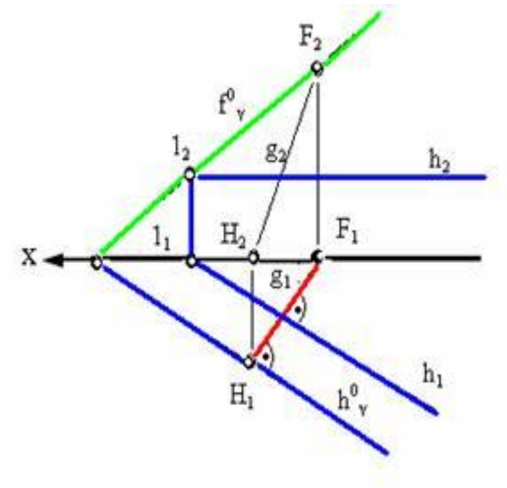


Рис. 27. Пример построения линии наибольшего наклона

На комплексном чертеже горизонтальная проекция линии наибольшего ската перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали этой плоскости, а фронтальная − строится по двум проекциям соответствующих точек (H и F).

Главным свойством линии наибольшего ската является то, что она образует с горизонтальной плоскостью проекций π_1 угол α°, равный углу наклона плоскости γ к плоскости π_1. Это свойство линии наибольшего наклона (ската) используется для определения углов наклона плоскостей к плоскостям проекций.

Вопросы для самоконтроля

1. Как формулируется теорема о перпендикулярности прямой и плоскости?
2. В каком положении относительно друг друга должны находиться проекции прямой (отрезка) и линий уровня плоскости, если в пространстве эта прямая и плоскость перпендикулярны?
3. Как проверяется условие перпендикулярности двух плоскостей?
4. Каким построением может быть найден реальный угол наклона отрезка к соответствующей плоскости проекций?
5. Что такое линия наибольшего ската (наклона) плоскости и как она может быть построена на комплексном чертеже?
6. Каким главным свойством обладает линия наибольшего ската плоскости?