1. ПРЕДМЕТ И ОСНОВОПОЛАГАЮЩИЕ ПОНЯТИЯ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

1.1. Предмет начертательной геометрии

Издавна люди научились отображать на любой двумерной поверхности разнообразнейшие предметы окружающего их трехмерного мира: горы, деревья, водоемы, животных, строения и самих себя. Эти плоские образы в виде совокупности точек и линий условно, с большей или меньшей степенью достоверности, в зависимости от мастерства автора, давали представление о прообразах реального мира.

Информация о третьем измерении восполнялась рядом разных приемов, и, пока требовалась только наглядность, было достаточно одной интуиции мастера. Но с развитием человечества потребовалось новое качество – точность. Необходимостью стало точное соответствие между прообразом и образом, между оригиналом и его изображением, между пространственными объектами и их плоскими моделями. Решение таких задач становилось необходимым при строительстве зданий, конструировании машин, проведении горных разработок, массовом производстве разнообразных товаров.

Все это требовало коллективного труда сотен и тысяч людей, точного графического языка как средства технического общения. Появилась необходимость в новой науке, перебрасывающей мост между пространством и плоскостью чертежа. Эта новая наука должна была указать правила, устанавливающие точное соответствие между объектами трехмерного пространства и их плоскими двумерными изображениями. Такой наукой и явилась начертательная геометрия.

Начертательная геометрия является одной из фундаментальных наук, составляющих основу инженерно-технического образования. Она изучает методы изображения множества точек, линий, поверхностей и тел, т. е. плоских и пространственных геометрических фигур на плоскости, и способы решения по этим изображениям метрических и позиционных задач в пространстве.

Методы начертательной геометрии, устанавливающие законы соответствия между пространственными объектами и их плоскими моделями, позволяют решать многие прикладные задачи специальных инженерных дисциплин (механики, химии, кристаллографии, картографии, инструментоведения и др.). Эти же методы широко используются при проектировании различных транспортных конструкций и сооружений, при конструировании сложных поверхностей технических форм в авиационной, судостроительной и других отраслях промышленности. В последнее время при подобном конструировании используется компьютерная графика и автоматизированное проектирование.

Начертательная геометрия как наука была создана в конце XVIII века великим французским геометром и инженером Гаспаром Монжем (1746–1818). Величайшей заслугой Г. Монжа явилось обобщение в 1795 году всех научных трудов его предшественников, всей теории о методах изображения пространственных фигур и создание единой математической науки об ортогональном проецировании – начертательной геометрии. Первым учебником этой науки справедливо считается книга «Начертательная геометрия» Г. Монжа, опубликованная в Париже в 1799 году.

Изучение новой науки в Российской империи совпало с основанием в Петербурге первого в России высшего транспортного учебного заведения – Института Корпуса инженеров путей сообщения (1809). Питомцы этого института, его профессора и ученые С. А. Севастьянов, В. И. Курдюмов, Е. С. Федоров и др. внесли большой вклад в развитие геометрических методов изображения, в теорию и практику начертательной геометрии. Развитие науки происходило и позже, что нашло отражение в трудах ученых XX столетия: А. И. Добрякова, Д. И. Каргина, Н. А. Рынина, Н. Ф. Четверухина и др. Современные ученые-геометры, а именно: В. Н. Виноградов, В. Е. Михайленко, Н. Н. Рыжов, С. А.

Фролов, А. А. Чекмарев и др. занимаются разработкой геометрического обеспечения систем автоматизированного проектирования (САПР). В последние десятилетия во всех развитых странах для выполнения чертежей широко применяется компьютерная графика, а также системы автоматизированного проектирования для разработки и выполнения конструкторской документации.

1.2. Термины и понятия начертательной геометрии

Любая математическая наука, в том числе геометрия, строится на основе дедуктивного метода. Сущность этого метода заключается в следующем:

- перечисляются основные (неопределяемые) понятия;
- формулируются аксиомы (постулаты), с помощью которых описываются свойства основных отношений;
- даются определения прочих геометрических отношений через основные понятия;
- доказываются теоремы на основе аксиом и определений.

Основные понятия классической геометрии – это точка, прямая, плоскость. Точки, прямые линии (отрезки) и плоскости могут находиться в определенных соотношениях. Они могут принадлежать (лежать между), быть конгруэнтными, параллельными, перпендикулярными, обладать непрерывностью. Эти же понятия справедливы и для начертательной геометрии. Дополнительно может быть добавлено понятие пространственного расстояния и общее для всей математики понятие множества. Определение перпендикулярности может быть заменено ортогональностью.

Таким образом, неопределяемые понятия для начертательной геометрии – это множество, точка, прямая, плоскость, расстояние, принадлежность, параллельность, ортогональность, непрерывность.

Дальнейшие определения базируются на этих основных понятиях.

Геометрическая фигура (объект) – это множество точек.

Плоскость проекций – плоскость для отображения отдельных точек, отрезков, фигур, находящихся, как правило, на некотором расстоянии от плоскости.

Проецирующие прямые – это прямые, принадлежащие связке прямых, ортогональных плоскости проекций.

Проецирующая плоскость – это плоскость, проходящая через проецирующую прямую.

Проекцией точки называется точка пересечения прямой, проходящей через точку пространства, с плоскостью проекций.

Проекцией геометрической фигуры называется множество проекций ее точек.

Конкурирующими называются точки фигуры пространства, принадлежащие одной проецирующей прямой.

Вырожденной проекцией проецирующей прямой называется точка, являющаяся множеством проекций всех точек прямой.

Вырожденной проекцией проецирующей плоскости называется прямая, являющаяся множеством проекций всех линий этой плоскости.

Следом прямой является точка пересечения прямой пространства с плоскостью проекций.

Следом плоскости является линия пересечения плоскости пространства с плоскостью проекций.

1.3. Метод проекций

В начертательной геометрии чаще всех других применяется слово «проекция». Объяснение простое – в основе начертательной геометрии лежит метод проекций, т. е. отображение реального объекта в выбранном месте пространства. Для определения такого отображения следует ввести три уже известных понятия:

- что проецируется, т. е. объекты проецирования;
- на что проецируется (поверхности проецирования);
- как проецируется (способ проецирования).

Объектами реального физического проецирования могут быть любые предметы окружающего нас мира. В качестве поверхностей проецирования может быть взята любая удобная поверхность: участок плоскости (лист фотобумаги), часть цилиндрической поверхности (экран в кинозале), сфера (купол планетария). Способ или направление проецирования может задаваться реальными физическими лучами: параллельными от далеких светил или расходящимися от лампы, находящейся рядом.

В абстрагированном мире начертательной геометрии в качестве основных элементов начального аппарата проецирования выбираются три простейших геометрических объекта: точка, прямая, плоскость.

Для обозначения геометрических фигур и их проекций, для отображения отношения между ними, а также для краткости записи геометрических предложений и решения задач в начертательной геометрии предлагается использовать геометрический язык, составленный из следующих обозначений и символов.

Геометрическая фигура обозначается Ф.

Точки обозначаются прописными буквами латинского алфавита или арабскими цифрами: $A, B, C, \dots, L, M, N$ и т. д. или 1, 2, 3, …, 13, 14 и т. д.

Линии, произвольно расположенные по отношению к плоскостям проекций, обозначаются строчными буквами латинского алфавита: $a, b, c, d, \dots, l, m, n$ и т. д.

Линии уровня обозначаются: h − горизонталь; f − фронталь; p − профильная прямая.

Для прямых используются также следующие обозначения: (AB) − прямая, проходящая через точки A и B; $[AB)$ − луч с началом в точке A; $[AB]$ − отрезок прямой, ограниченный точками A и B.

Поверхности обозначаются строчными буквами греческого алфавита: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \lambda$ и т. д.

Чтобы подчеркнуть способ задания поверхности, следует указывать геометрические элементы, которыми она определяется, например:

$\alpha\ (a \parallel b)$ − плоскость α определяется параллельными прямыми a и b;

$\beta\ (d_1 d_2 g\ \alpha)$ − поверхность β определяется направляющими d_1 и d_2, образующей g и плоскостью параллелизма α.

Углы обозначаются: $\angle ABC$ − угол с вершиной в точке B, а также $\angle\alpha^o, \angle\beta^o, \dots, \angle\varphi^o$ и т. д.

Угловая величина (градусная мера) обозначается знаком, который ставится над углом: φ^o − величина угла φ.

Прямой угол отмечается квадратом с точкой внутри: ⊡.

Для плоскостей проекций приняты обозначения π_1, π_2, π_3: π_1 − горизонтальная плоскость проекций; π_2 − фронтальная плоскость проекций; π_3 − профильная плоскость проекций.

При замене плоскостей проекций или введении новых плоскостей проекций последние обозначаются π_4, π_5 и т. д.

Плоскость проекций при построении аксонометрических и перспективных проекций обозначается строчной буквой с добавлением значка «штрих» – π'.

Плоскость проекций (плоскость нулевого уровня) в методе проекций с числовыми отметками – π_0.

Оси проекций обозначаются x, y, z, где x − ось абсцисс; y − ось ординат; z − ось аппликат.

Проекции точек, линий поверхностей, любой геометрической фигуры обозначаются теми же буквами (или цифрами), что и оригинал, с добавлением нижнего индекса, соответствующего плоскости проекций, на которой они получены:

$A_1, B_1, C_1, D_1, \dots L_1, M_1, N_1$ и т. д.– горизонтальные проекции точек;

$A_2, B_2, C_2, D_2, \dots L_2, M_2, N_2$ и т. д.– фронтальные проекции точек;

$A_3, B_3, C_3, D_3, \dots L_3, M_3, N_3$ и т. д.– профильные проекции точек;

$a_1, b_1, c_1, d_1, \dots l_1, m_1, n_1$ и т. д.– горизонтальные проекции линий;

a_2, b_2, c_2, d_2, ... l_2, m_2, n_2 и т. д.− фронтальные проекции линий;

a_3, b_3, c_3, d_3, ... l_3, m_3, n_3 и т. д.− профильные проекции линий.

Проекции самих поверхностей обозначаются греческими буквами:

α_1, β_1, γ_1, δ_1, … ζ_1, η_1, λ_1 и т. д.− горизонтальные проекции;

α_2, β_2, γ_2, δ_2, … ζ_2, η_2, λ_2 и т. д.− фронтальные проекции;

α_3, β_3, γ_3, δ_3, … ζ_3, η_3, λ_3 и т. д.− профильные проекции.

Следы прямых (линий) обозначаются прописными буквами, с которых начинаются слова, определяющие название (в латинской транскрипции) плоскости проекций, которую пересекает линия.

Например: H − горизонтальный след прямой (линии) a;

F − фронтальный след прямой (линии) a;

P − профильный след прямой (линии) a.

Следы плоскостей (поверхностей) обозначаются теми же буквами, что горизонталь и фронталь, с добавлением верхнего индекса, подчеркивающего, что эти линии лежат в плоскости проекций и принадлежат плоскости (поверхности).

Например: h^0 − горизонтальный след плоскости (поверхности);

f^0 − фронтальный след плоскости (поверхности);

p^0 − профильный след плоскости (поверхности).

Основные операции:

$\parallel$ − параллельность элементов;

$\equiv$ − совпадение двух геометрических элементов;

$\perp$ − перпендикулярность элементов;

^ − знак, соответствующий союзу «и»;

= − результат геометрической операции;

$\cap$ − пересечение двух элементов;

$\in$ − знак принадлежности и включения для точки;

$\cup$ − знак объединения;

$\subset$ − принадлежность одного геометрического элемента другому;

$\dot{-}$ − скрещивающиеся прямые.

1.4. Способы проецирования

Проекцией точки A на плоскость проекций π_1 называется точка A_1 пересечения проецирующей прямой l с плоскостью проекций π_1, проходящей через точку A (рис. 1).

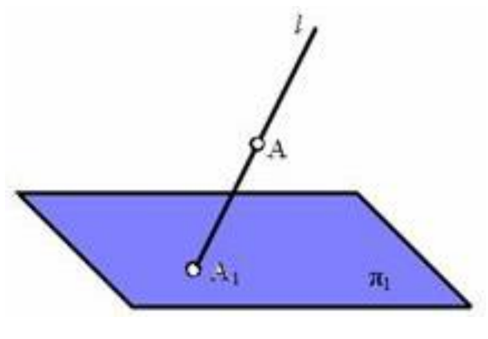


Рис. 1. Проекция точки A на плоскость проекций π_1

Проекция любой геометрической фигуры есть множество проекций всех ее точек. Направление проецирующих прямых l и положение плоскостей π_1 определяют аппарат проецирования.

Центральным проецированием называется такое проецирование, при котором все проецирующие лучи исходят из одной точки S – центра проецирования (рис. 2).

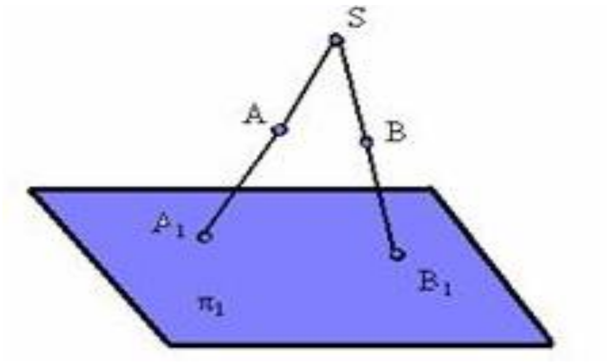


Рис. 2. Пример центрального проецирования

Параллельным проецированием называют такое проецирование, при котором все проецирующие прямые параллельны заданному направлению S (рис. 3).

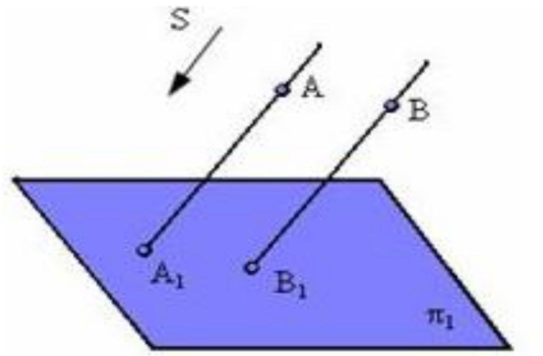


Рис. 3. Пример параллельного проецирования

Параллельное проецирование представляет собой частный случай центрального проецирования, при котором точка S находится на бесконечно большом расстоянии от плоскости проекций π_1. При заданном аппарате проецирования каждой точке пространства соответствует только одна точка на плоскости проекций.

Одна проекция точки не определяет положения этой точки в пространстве. Действительно, проекции A_1 может соответствовать бесчисленное множество точек A', A'', …, расположенных на проецирующей прямой (рис. 4).

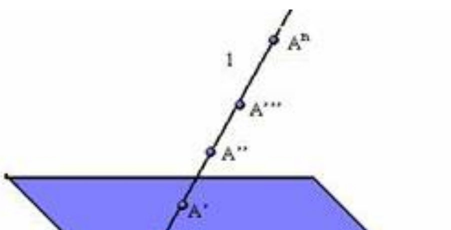


Рис. 4. Множество точек на прямой

Для определения положения точки в пространстве при любом аппарате проецирования необходимо иметь две ее проекции, полученные при двух различных направлениях проецирования (или при двух различных центрах проецирования).

Так, из рис. 5 видно, что две проекции точки A (A_1 и A_2), полученные при двух направлениях проецирования S_1 и S_2, определяют единственным образом положение самой точки A в пространстве как пересечение проецирующих прямых l_1 и l_2, проведенных из проекций A_1 и A_2 параллельно направлениям проецирования S_1 и S_2.

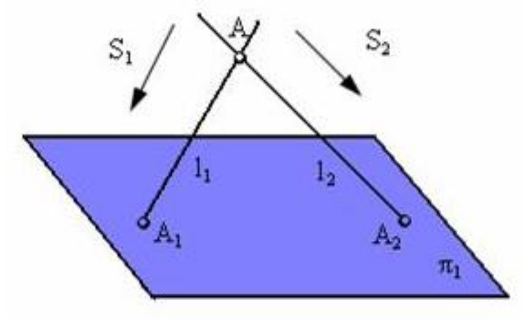


Рис. 5. Определение положения точки *A* в пространстве

1.5. Инвариантные свойства параллельного проецирования

Геометрические фигуры в общем случае проецируются на плоскость проекций с искажением. Проекции не сохраняют линейные и угловые величины оригинала. Характер искажений зависит от положения геометрической фигуры в пространстве, от аппарата проецирования и от положения плоскости проекций. Однако некоторые геометрические свойства фигур остаются неизменными в процессе проецирования. Такие свойства геометрических фигур называются независимыми, или инвариантными для данного аппарата проецирования. Рассмотрим основные инвариантные свойства параллельного проецирования.

1. Проекция точки есть такая же точка. Это очевидно из определения проекции как точки пересечения проецирующей прямой с плоскостью.

2. Проекция прямой есть прямая (рис. 6).

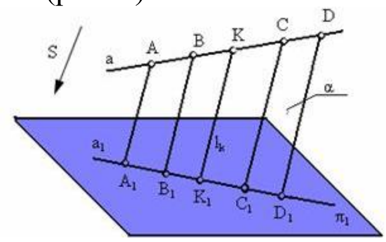


Рис. 6. Примеры инвариантных свойств 2, 3, 4

Все проецирующие прямые, проходящие через точки прямой *a* параллельно направлению проецирования *S*, образуют проецирующую, или лучевую, плоскость α. Проекция прямой *a* на плоскость π_1 определяется как линия пересечения этой лучевой плоскости α с плоскостью π_1, т. е. прямая линия.

3. Если точка *K* принадлежит прямой *a*, то и проекция этой точки принадлежит проекции прямой (см. рис. 6). Это свойство следует из определения проекции геометрической фигуры как множества проекций всех точек. Если точка *K* принадлежит прямой *a* и плоскости α, то и проецирующий луч l_K принадлежит плоскости α. Следовательно, этот луч пересечет плоскость π_1 в линии пересечения плоскостей α и π_1, т. е. в точке K_1, принадлежащей проекции прямой a_1.

4. Если точка *K* делит отрезок *AD* в отношении $m : n$, то и проекция этой точки делит в этом же отношении проекцию отрезка A_1D_1 (см. рис. 6).

Фигура ADD_1A_1 – трапеция. Прямая KK_1 параллельна основаниям трапеции AA_1 и DD_1, значит делит ее стороны *AD* и A_1D_1 на пропорциональные части.

5. Проекция точки пересечения прямых есть точка пересечения проекций этих прямых (рис. 7).

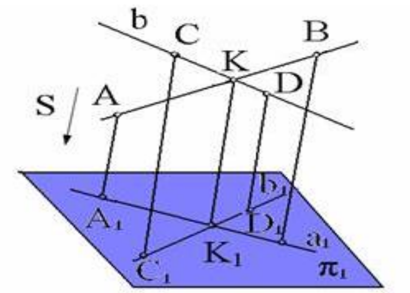


Рис. 7. Пример инвариантного свойства 5

Действительно, точка K принадлежит одновременно прямым AB и CD. По третьему инвариантному свойству проекция этой точки K_1 должна принадлежать проекциям этих прямых, т. е. должна являться точкой пересечения этих проекций.

6. Проекции параллельных прямых параллельны (рис. 8).

Лучевые плоскости α и β проходят через параллельные прямые AB и CD. Они параллельны, так как две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости ($AB \parallel CD$ и $AA_1 \parallel CC_1$). Две параллельные плоскости пересекаются с третьей по параллельным прямым, следовательно, $A_1B_1 \parallel C_1D_1$.

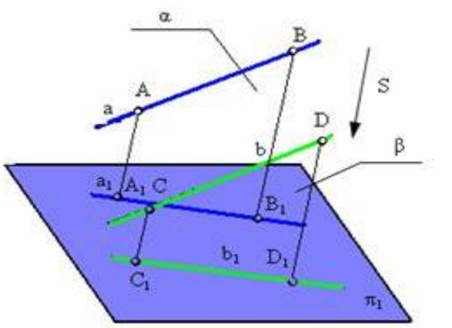


Рис. 8. Пример инвариантного свойства 6

7. Плоский многоугольник в общем случае проецируется в многоугольник с тем же числом вершин.

Исключение составляет многоугольник (CDE), расположенный в проецирующей (лучевой) плоскости. Он проецируется в прямую линию (рис. 9).

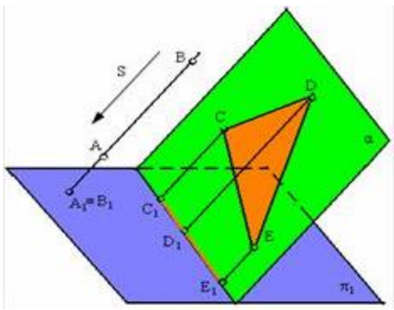


Рис. 9. Примеры инвариантных свойств 7, 8

8. Прямая AB, параллельная направлению проецирования, проецируется в точку $A_1 \equiv B_1$ (см. рис. 9).

9. Проекция плоской фигуры, параллельной плоскости проекций, конгруэнтна (идентична) этой фигуре (рис. 10).

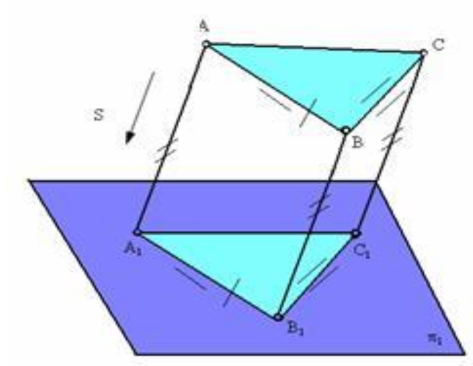


Рис. 10. Пример инвариантного свойства 9

Следствия этого инвариантного свойства следующие:

1) проекция отрезка прямой, параллельной плоскости проекций, конгруэнтна и параллельна самому отрезку (см. рис. 10);

2) проекция угла, стороны которого параллельны плоскости проекций, конгруэнтна этому углу (рис. 11).

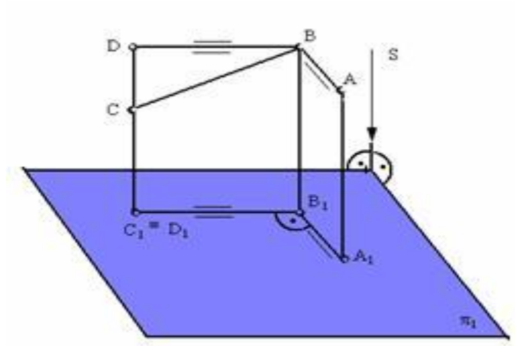


Рис. 11. Ортогональная проекция прямого угла

1.6. Ортогональное проецирование

Направление проецирования ортогонально (перпендикулярно) плоскости проекций, т. е. $S \perp \pi_1$. Ортогональное проецирование является частным случаем параллельного проецирования.

Ортогональное проецирование находит широкое применение в инженерной практике для изображения геометрических фигур на плоскости, так как обладает рядом преимуществ перед центральным и параллельным (косоугольным) проецированием, к которым относят:

- простоту графических построений для определения ортогональных проекций точек;
- возможность при определенных условиях сохранить на проекциях форму и размеры проецируемой фигуры.

Указанные преимущества обеспечили широкое применение ортогонального проецирования в технике, в частности для составления машиностроительных чертежей.

Для ортогонального проецирования справедливы все девять инвариантных свойств, рассмотренных выше. Кроме того, необходимо отметить еще одно, десятое, инвариантное свойство, которое справедливо только для ортогонального проецирования: если хотя бы одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, то на эту плоскость проекций прямой угол проецируется без искажения (см. рис. 11). На рисунке показан прямой угол ABD, обе стороны которого параллельны плоскости проекций π_1. По девятому инвариантному свойству этот угол проецируется на плоскость π_1 без искажения, т. е. $\angle A_1B_1D_1 = 90°$.

Возьмем на проецирующем луче DD_1 произвольную точку C, тогда полученный ABC будет прямым, так как $AB \perp BB_1DD_1$. Проекцией этого прямого угла ABC, у которого только одна сторона AB параллельна плоскости проекций π_1, будет прямой угол $A_1B_1D_1$.

1.8. Система трех плоскостей проекций. Эпюр Монжа

Все пространственные геометрические фигуры могут быть ориентированы относительно декартовой прямоугольной системы координатных осей – системы трех взаимно перпендикулярных координатных плоскостей (рис. 13).

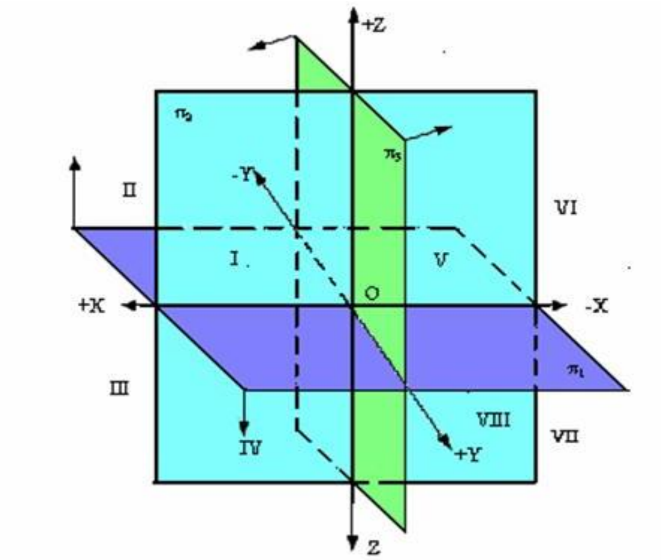


Рис. 13. Изображение системы трех плоскостей проекций

Эти координатные плоскости обозначаются:

1) горизонтальная плоскость проекций – π_1;
2) фронтальная плоскость проекций – π_2;
3) профильная плоскость проекций – π_3.

Линии пересечения этих плоскостей образуют координатные оси: ось абсцисс – x; ось ординат – y; ось аппликат – z. Точка пересечения координатных осей принимается за начало координат и обозначается буквой o. Положительными направлениями осей считают: для оси x − влево от начала координат, для оси y − в сторону зрителя от плоскости π_2, для оси z – вверх от плоскости π_1; противоположные направления считают отрицательными.

Для упрощения дальнейших рассуждений будем рассматривать только часть пространства, расположенную влево от профильной плоскости проекций π_3. При таком допущении три координатные плоскости проекций образуют четыре пространственных угла – октанта (в общем случае – восемь октантов).

Ось абсцисс x делит горизонтальную плоскость проекций π_1 на две части: переднюю полу π_1 (оси x, y) и заднюю полу π_1 (оси x, $–y$). Эта же ось делит фронтальную плоскость проекций π_2 также на две части: верхнюю полу π_2 (оси x и z) и нижнюю полу π_2 (оси x и $–z$).

Оси ординат y и аппликат z делят профильную плоскость проекций π_3 на четыре части: верхнюю переднюю полу π_3 (оси y и z), верхнюю заднюю полу π_3 (оси $–y$ и z), нижнюю переднюю полу π_3 (оси y и $–z$), нижнюю заднюю полу π_3 (оси $–y$ и $–z$). Точки, расположенные в различных октантах, могут иметь как положительные, так и отрицательные знаки координат.

Для того чтобы получить плоскую (двумерную) модель пространственных координатных плоскостей проекций, горизонтальную π_1 и профильную π_3 плоскости совмещают с фронтальной плоскостью проекции π_2 в том порядке, как это показано стрелками на рис. 13. При этом горизонтальная плоскость проекций π_1 вращается вокруг оси x на 90°, профильная плоскость проекций π_3 вращается вокруг оси z также на 90° (направление вращения показано). Полученное таким образом совмещение трех плоскостей проекций является плоской моделью системы трех пространственных координатных плоскостей.

Для построения плоской модели пространственной геометрической фигуры каждая ее точка проецируется ортогонально на плоскости проекций π_1, π_2 и π_3, которые затем совмещаются в одну плоскость. Полученная таким образом плоская модель пространственной геометрической фигуры называется эпюром Монжа.

На рис. 14 изображена пространственная точка A, координаты которой (x, y, z) показывают величины расстояний, на которые точка удалена от плоскостей проекций.

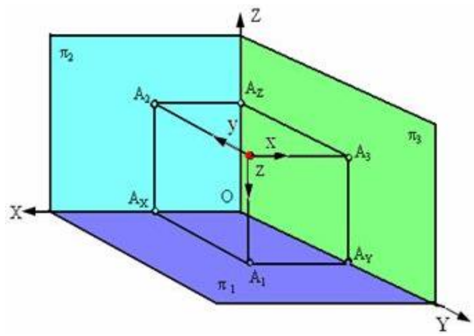


Рис. 14. Пространственная модель точки A

Для того чтобы получить ортогональные проекции точки A, необходимо из этой точки опустить перпендикуляры на плоскости проекций. Точки пересечения перпендикуляров с плоскостями проекций образуют проекции точки A: A_1 – горизонтальную проекцию точки; A_2 – фронтальную проекцию точки; A_3 – профильную проекцию точки.

На рис. 15 плоскости проекций π_1 и π_3 совмещены с плоскостью чертежа (с плоскостью проекции π_2), а вместе с ними совмещены с плоскостью чертежа и проекции точки A (A_1, A_2, A_3), и таким образом получена плоскостная модель координатных плоскостей проекций и плоскостная модель пространственной точки A – ее эпюр. Положение проекций точки A на эпюре однозначно определяется ее тремя координатами.

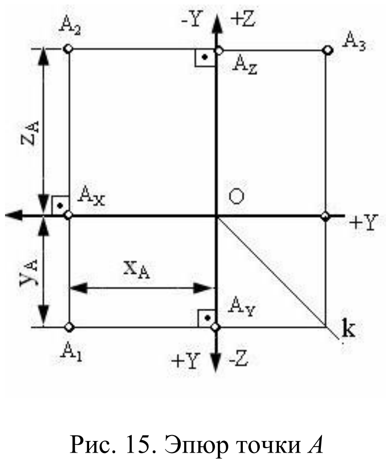


Рис. 15. Эпюр точки A

На рис. 14 и 15 также видно, что на эпюре горизонтальная и фронтальная проекции точки лежат на одном перпендикуляре к оси x, а также фронтальная и профильная проекции – на одном перпендикуляре к оси z: $A_1A_2 \perp X$, $A_2A_3 \perp Z$.

1.9. Универсальное правило проекционной связи

На рис. 15 построен комплексный чертеж, или эпюр точки, наиболее простого, т. е. элементарного, объекта проецирования. На эпюре сам объект проецирования отсутствует, но зато появляются его проекции, которые представляют собой его геометрические формы, о чем в отношении такого объекта, как точка, говорить не имеет смысла. Однако проекции объекта показывают также и его положение в системе плоскостей проекций. Применительно к объекту «точка» мы можем говорить о координатах точки, т. е. количественных параметрах, определяющих пространственное положение объекта. Между проекциями любого объекта, в том числе и между проекциями точки, существует так называемая проекционная связь.

Положение проекций точки подчиняется правилу проекционной связи, состоящему из трех пунктов:

1) горизонтальная и фронтальная проекции точки располагаются на одной линии связи – перпендикуляре к оси абсцисс (оси *ox*);

2) фронтальная и профильная проекции точки располагаются на одной линии связи – перпендикуляре к оси аппликат (оси *oz*);

3) горизонтальная и профильная проекции точки также располагаются на одной, но разорванной линии связи – перпендикуляре к оси ординат (оси *oy*). При этом расстояние от горизонтальной проекции точки до оси *ox* должно равняться расстоянию от профильной проекции точки до оси *oz*.

Координаты точки – это три числа, соответствующие кратчайшему расстоянию от точки до каждой плоскости проекций. Эти три числа всегда записываются в строго установленном порядке. На первом месте указывается абсцисса точки (x), на втором – ордината (y), на третьем – аппликата (z). Поэтому и говорят, что координаты точки – это упорядоченная тройка чисел, показывающая кратчайшее расстояние от этой точки до каждой плоскости проекций.

Расстояние от точки до профильной плоскости проекций измеряется перпендикулярно этой плоскости, т. е. параллельно оси абсцисс *ox*. На рис. 15 это расстояние соответствует отрезку OA_x, или A_1A_y, или $A_2\,A_z$ (обозначение x_A). Расстояние от точки до фронтальной плоскости проекций измеряется перпендикулярно данной плоскости либо параллельно оси ординат *oy*. Оно соответствует отрезку OA_y, или A_1A_x, или A_3A_z (обозначение y_A). Расстояние от точки до горизонтальной плоскости проекций измеряется перпендикулярно горизонтальной плоскости, т. е. параллельно оси аппликат *oz*. На рис. 15 оно соответствует отрезку OA_z, или A_2A_x, или A_3A_y (обозначение z_A). Три числа всегда будут записываться в следующем порядке: X_A , Y_A , Z_A.

Вопросы для самоконтроля

1. Что изучает начертательная геометрия?
2. Что устанавливают методы начертательной геометрии? Какой метод считается главным?
3. В чем заключается идея метода проецирования?
4. Какие существуют способы проецирования объектов?
5. Сколько проекций у выбранной точки пространства, при заданном аппарате проецирования, находится на заданной плоскости проекций?
6. При каком условии проекция точки определяет положение самой точки в пространстве?
7. В чем заключается сущность параллельного проецирования и каковы его основные свойства?

8. В чем заключается сущность ортогонального (прямоугольного) проецирования?
9. Как формулируется теорема о проецировании прямого угла?
10. В чем заключается сущность проекций с числовыми отметками для геометрических объектов?
11. Что представляет собой система плоскостей проекций?
12. В чем заключается сущность построения эпюра точки?
13. Какие координаты точки однозначно определяют ее положение в пространстве?
14. Какие координаты точки определяют ее положение на горизонтальной плоскости проекций, на фронтальной плоскости проекций, на профильной плоскости проекций?
15. Какую взаимосвязь имеют три проекции одной и той же точки?
16. Как, имея горизонтальную и фронтальную проекции точки, можно построить профильную ее проекцию?

2. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ТОЧКА, ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

2.1. Способы задания точки и прямой. Положения прямой

Точка как математическое понятие не имеет размеров. Очевидно, если объект проецирования является нульмерным образом, то говорить о его проецировании бессмысленно. В геометрии под точкой целесообразно понимать физический объект, имеющий линейные измерения. Условно за точку будем принимать шарик с бесконечно малым радиусом. При такой трактовке понятия точки можно говорить о ее проекциях.

Прямая линия определяется двумя точками, поэтому на комплексном чертеже всякая прямая может быть задана проекциями двух ее точек. Прямую на комплексном чертеже можно задать ее проекциями на две любые плоскости системы плоскостей проекций.

Прямая в системе плоскостей проекций может располагаться произвольно, параллельно какой-то плоскости проекций и перпендикулярно какой-то плоскости проекций. Всякая произвольно расположенная (не параллельная π_3) прямая вполне определяется двумя своими проекциями. Для определения же профильной прямой, параллельной плоскости π_3, необходимо задать на проекциях этой прямой проекции ее двух точек.

Чтобы задать на одной профильной прямой какую-нибудь точку, достаточно задать ее проекции на одноименных проекциях данной прямой.

Для деления данного отрезка в данном отношении достаточно разделить в этом отношении одну из проекций данного отрезка, а затем спроецировать делящую точку на другую проекцию отрезка.

2.2. Частные положения прямой

На рис. 16 показаны несколько вариантов прямых общего положения, т. е. прямых, произвольно расположенных относительно плоскостей проекций. Такие прямые наиболее часто встречаются при рассмотрении проецирования линий и отрезков.

Особый интерес представляют прямые частного положения, т. е. прямые, расположенные определенным образом относительно плоскостей проекций. К таким прямым относят линии либо отрезки, находящиеся в параллельном или же перпендикулярном положении по отношению к плоскости π_1 или π_2 или π_3. Сюда же относят и прямые, принадлежащие какой-то одной плоскости проекций. Перечислим все прямые частного положения, рассмотрим их изображение на эпюре и отметим основные свойства этих прямых.

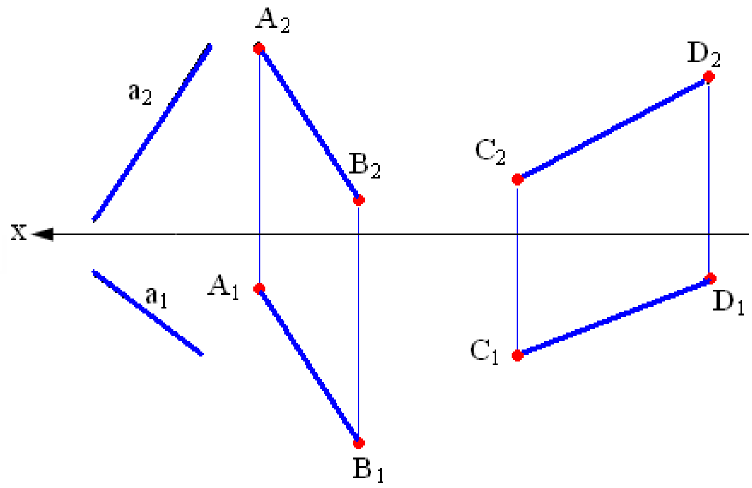


Рис. 16. Прямые и отрезки общего положения

Прямые, параллельные плоскостям проекций.

1. Горизонтальная прямая *h* (рис. 17) – *горизонталь.*

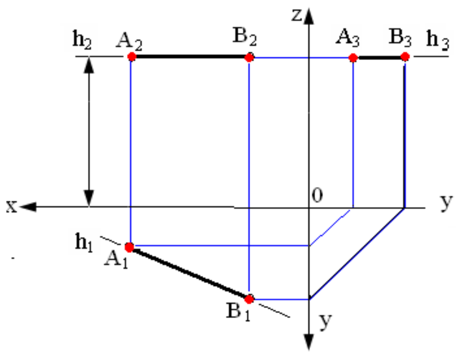


Рис. 17. Горизонтальная прямая

Горизонтальная прямая – это прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций π_1. Так как все точки этой прямой равноудалены от плоскости проекций π_1 (координаты *z* всех точек прямой равны), то фронтальная и профильная проекции прямой соответственно параллельны координатным осям *x* и *y*. На горизонтальную плоскость проекций π_1 проецируются без искажения отрезок прямой *AB* ($A_1B_1 = AB$) и углы наклона прямой к плоскостям проекций π_2 и π_3 (углы β^0 и γ^0).

2. Фронтальная прямая *f* (рис. 18) – *фронталь.*

Фронтальная прямая – это прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций π_2. Так как все точки этой прямой равноудалены от плоскости проекций π_2 (координаты *y* всех точек прямой одинаковы), то горизонтальная и профильная проекции прямой параллельны координатным осям *x* и *z*. На плоскость проекций π_2 проецируются без искажений отрезок этой прямой *CD* ($C_2D_2 = CD$) и углы наклона прямой к плоскостям проекций π_1 и π_3 (углы α^0 и γ^0).

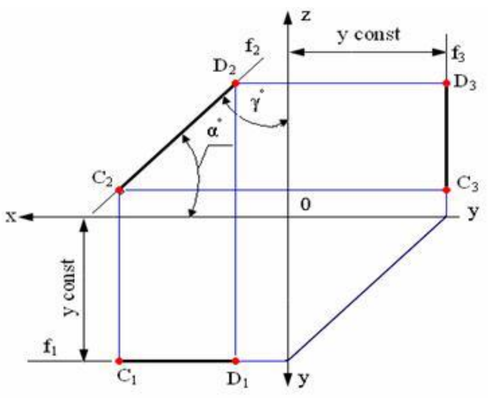


Рис. 18. Фронтальная прямая

3. Профильная прямая *p* (рис. 19).

Профильная прямая – это прямая, параллельная профильной плоскости проекций π_3. Так как все точки этой прямой равноудалены от плоскости проекций π_3 (координаты *x* всех точек прямой одинаковы), то горизонтальная и фронтальная проекции прямой соответственно параллельны координатным осям *y* и *z*. На плоскость проекций π_3 проецируются без искажения отрезок этой прямой *EF* ($E_3F_3 = EF$) и углы наклона прямой к плоскостям проекций π_1 и π_2 (углы α^0 и β^0).

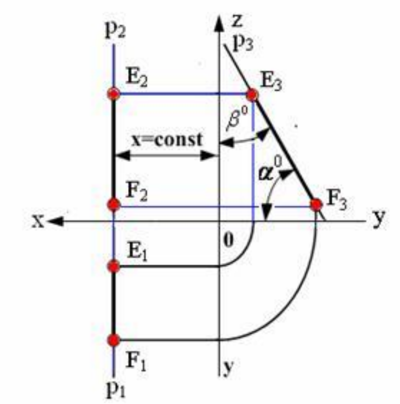
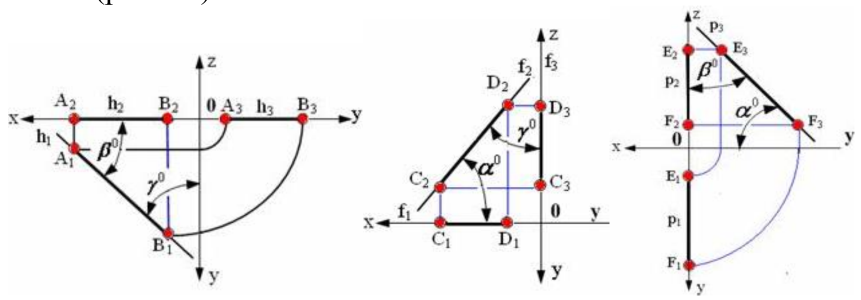


Рис. 19. Профильная прямая

Прямые, принадлежащие плоскостям проекций.

Прямые, принадлежащие плоскостям проекций, являются частным случаем горизонтальных, фронтальных и профильных прямых. Характерным признаком для эпюра, на котором изображена подобная прямая, будет принадлежность одной из проекций прямой соответствующей оси (рис. 20).



а *б* *в*

Рис. 20. Прямая, принадлежащая плоскости проекций: *а* – горизонтальной; *б* – фронтальной; *в* – профильной

На рис. 20, *а* показана прямая, принадлежащая горизонтальной плоскости проекций (частный случай горизонтальной прямой, $z = 0$). На рис. 20, *б* изображена прямая, принадлежащая фронтальной плоскости проекций (все координаты $y = 0$) и на рис. 20, *в* – профильной плоскости проекций (все координаты $x = 0$).

Прямые, перпендикулярные плоскостям проекций.

На рис. 21 показаны прямые, перпендикулярные соответственно горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций.

Прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций, – горизонтально-проецирующая прямая. Такая прямая проецируется на плоскость π_1 в точку; ее фронтальная проекция перпендикулярна оси x. Прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций, – фронтально-проецирующая прямая. Эта прямая проецируется на плоскость π_2 в точку, а ее горизонтальная проекция перпендикулярна оси x.

Эти прямые являются частными случаями фронтали и горизонтали.

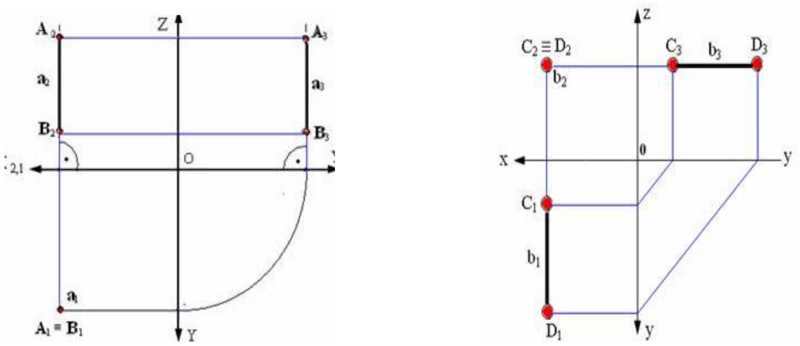


Рис. 21. Прямая, перпендикулярная плоскости проекций:
а – горизонтальной; *б* – фронтальной

Прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций, – профильно-проецирующая прямая (рис. 22).

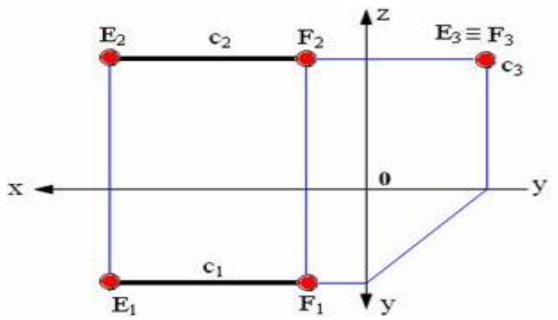
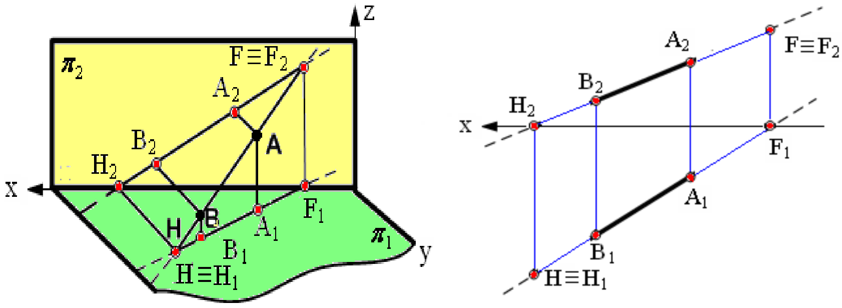


Рис. 22. Прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций

2.3. Следы прямой

Следом прямой линии называется точка пересечения прямой с плоскостью проекций. В системе двух плоскостей проекций π_1 и π_2 прямая в общем случае имеет два следа: горизонтальный H (H_1, H_2) и фронтальный F (F_1, F_2) – точки пересечения прямой с горизонтальной и фронтальной плоскостями проекций (рис. 23).



а *б*

Рис. 23. Изображение следов прямой линии: *а* – в пространстве; *б* – на эпюре

Для нахождения горизонтального следа прямой необходимо:

1) продолжить фронтальную проекцию прямой до пересечения с осью x (получим точку $H_X \equiv H_2$);

2) восставить перпендикуляр в точке H_X к оси x (провести линию связи, перпендикулярную к оси x);

3) продолжить горизонтальную проекцию прямой до пересечения с линией связи.

Полученная точка пересечения и будет являться горизонтальным следом этой прямой ($H \equiv H_1$).

Для нахождения фронтального следа прямой необходимо:

1) продолжить горизонтальную проекцию прямой до пересечения с осью x (точка $F_X \equiv F_1$);

2) провести линию связи из точки F_X (перпендикуляр из точки к оси x);

3) продолжить фронтальную проекцию прямой до пересечения с линией связи.

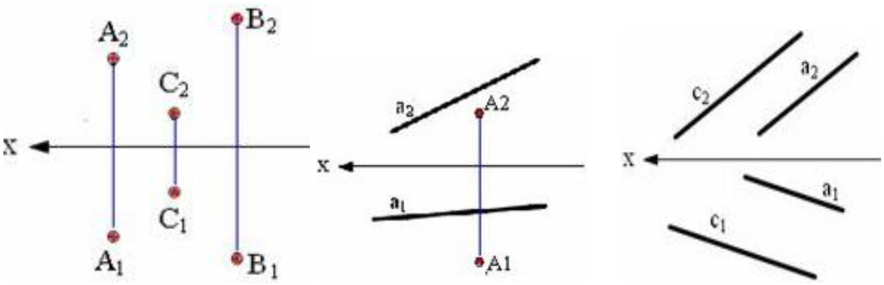
Полученная точка пересечения $F \equiv F_2$ является фронтальным следом этой прямой ($F \equiv F_1$).

В начертательной геометрии считается, что наблюдатель расположен в первом пространственном углу на сравнительно большом расстоянии от плоскостей проекций, поэтому видимыми геометрическими фигурами будут только те, которые расположены в первом октанте.

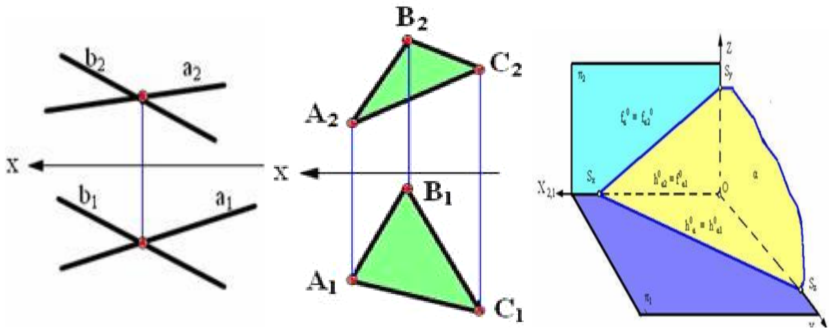
Проекции этих фигур в ортогональных и аксонометрических проекциях показываются сплошными линиями. Фигуры, расположенные в других пространственных углах, не видны наблюдателю, и их проекции показываются штриховыми линиями.

2.4. Плоскость и способы ее задания на эпюре

На эпюре плоскость может быть задана графически одним из следующих способов (рис. 24).



а *б* *в*



г *д* *е*

Рис. 24. Способы задания плоскости: *а* − тремя точками, не лежащими на одной прямой; *б* − прямой и точкой вне ее; *в* − двумя пересекающимися прямыми;
г − двумя параллельными прямыми; *д* − плоской фигурой; *е* − следами плоскости

Вопросы для самоконтроля

1. Какие линии называют прямыми: а) общего положения; б) частного положения?
2. Как называется прямая, параллельная одной плоскости проекций? Какую особенность имеют проекции такой прямой?
3. Как называется прямая, перпендикулярная одной плоскости проекций? Какую особенность имеют проекции такой прямой?
4. Что такое след прямой? Как строятся проекции такого следа?

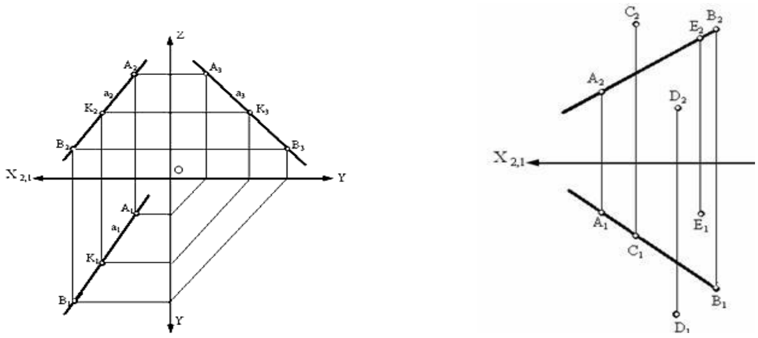
3. ОСНОВНЫЕ ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Позиционными задачами называются такие задачи, в которых определяется взаимное расположение различных геометрических объектов относительно друг друга. На первом этапе ограничимся рассмотрением объектов, находящихся в одной и той же плоскости, определяя их удаление друг от друга или угловые величины. Затем рассмотрим и пространственное их положение, т. е. положение нескольких объектов, которые не могут располагаться в одной плоскости.

3.1. Прямая и точка (принадлежность)

Из третьего инвариантного свойства параллельного проецирования следует, что проекции точки K (K_1, K_2 и K_3), принадлежащие прямой a, должны принадлежать соответствующим проекциям этой прямой (рис. 25), так как если хотя бы одна проекция точки не принадлежит соответствующей проекции прямой, то и точка в пространстве не принадлежит прямой.

Точки *A* и *B*, принадлежащие прямой *a*, и точки *C*, *D* и *E*, которые лежат вне этой прямой, показаны на рис. 25.



а *б*

Рис. 25. Взаимное положение прямой и точки: *а* – *A*, *B*, *K* принадлежат прямой; *б* – *C*, *D*, *E* не принадлежат прямой

3.3. Взаимное положение прямых

Две прямые в пространстве могут пересекаться, скрещиваться и могут быть параллельны.

1. Пересекающиеся прямые.

Пересекающимися прямыми называются прямые, которые имеют одну общую точку.

Из пятого инвариантного свойства следует, что проекции точки пересечения проекций прямых *a* и *b* (K_1, K_2) определяют точку пересечения этих прямых в пространстве (рис. 26).

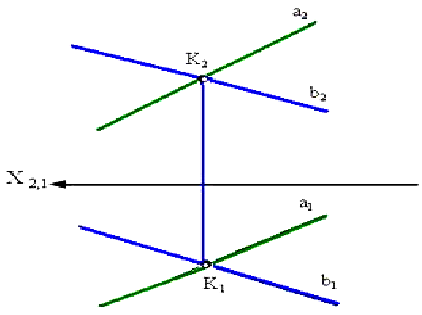


Рис. 26. Пересекающиеся прямые

2. Параллельные прямые.

На рис. 27 изображены параллельные прямые – прямые, пересекающиеся в несобственной точке (прямые, лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в бесконечно удаленной точке).

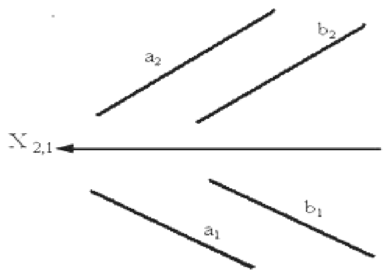


Рис. 27. Параллельные прямые

Из шестого инвариантного свойства следует, что проекции параллельных прямых a и b взаимно параллельны.

3. Скрещивающиеся прямые.

Скрещивающиеся прямые – это прямые, не лежащие в одной плоскости, не имеющие ни одной общей точки.

На комплексном чертеже (рис. 28) точки пересечения проекций этих прямых не лежат на одном перпендикуляре к оси x (в отличие от пересекающихся прямых, см. рис. 26).

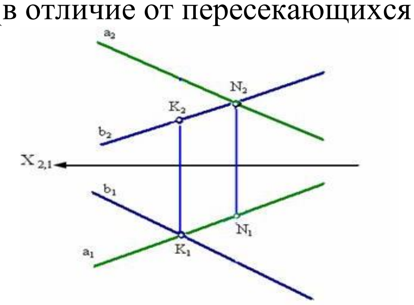


Рис. 28. Скрещивающиеся прямые

3.4. Конкурирующие точки

Конкурирующими точками называются такие точки пространства, у которых совпадают какие-либо две одноименные проекции. Такие точки показаны на рис. 29.

Это конкурирующие точки A и B (совпадают горизонтальные проекции $A_1 \equiv B_1$) и C и D (совпадают фронтальные проекции $C_2 \equiv D_2$).

Метод конкурирующих точек заключается в определении взаимной видимости точек (фигур) по их несовпадающим проекциям. Точка B находится выше точки A относительно плоскости π_1 ($Z_B > Z_A$), поэтому на плоскости π_1 видна точка B, которая закрывает точку A (считается, что наблюдатель смотрит на плоскости проекций из бесконечности и направление луча зрения параллельно проецирующему лучу S). На плоскости π_2 видна точка D, так как она находится ближе к наблюдателю (дальше от плоскости π_2, $Y_D > Y_C$) и закрывает собой точку C.

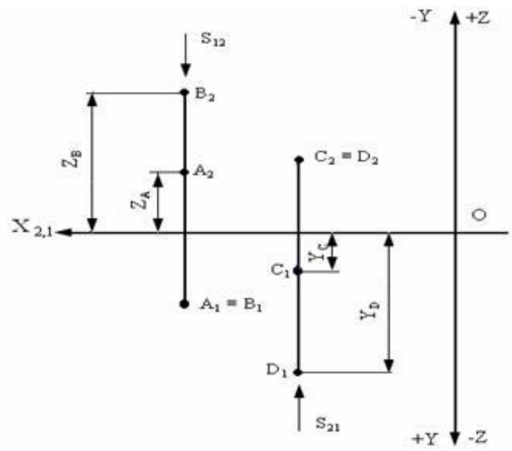


Рис. 29. Конкурирующие точки

Методом конкурирующих точек пользуются при определении видимости пересекающихся геометрических фигур.

Вопросы для самоконтроля

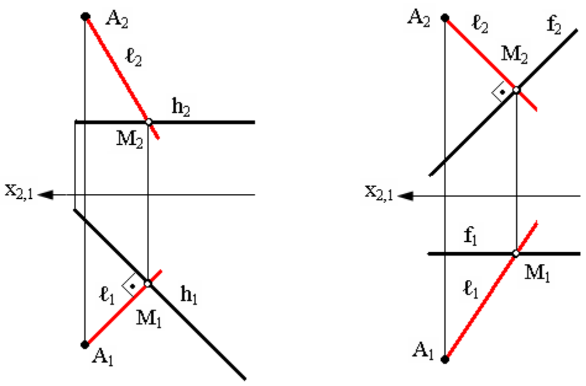
1. Что считается позиционной задачей в начертательной геометрии?
2. Какие точки являются конкурирующими?
3. Как можно судить о принадлежности в пространстве точки прямой линии по проекциям этой точки и этой линии?
4. Назовите варианты взаимного расположения двух отрезков в пространстве.
5. В чем проявляется принципиальное отличие двух пересекающихся отрезков от скрещивающихся отрезков?

4. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОТРЕЗКА ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ

4.1. Условие перпендикулярности двух прямых

В начертательной геометрии существует утверждение: две прямые перпендикулярны, если угол между проекциями этих прямых на соответствующей плоскости проекций равен 90°, причем одна из этих прямых представляет собой линию уровня. Для подтверждения этого рассмотрим примеры, приведенные на рис. 30.

Предположим, что необходимо через точку A провести прямую l, пересекающую горизонталь h под прямым углом, т. е. в пространстве
$l \perp h$. Так как одна из сторон h прямого угла параллельна плоскости π_1, то на эту плоскость прямой угол спроецируется без искажения. Поэтому через горизонтальную проекцию A_1 проведем горизонтальную проекцию искомой прямой $l_1 \perp h_1$. Отметим горизонтальную проекцию точки пересечения прямой и горизонтали $M_1 = l_1 \cap h_1$.



а *б*

Рис. 30. Примеры построения перпендикулярных прямых:
а – прямая $a \perp h$; *б* – прямая $l \perp f$

Найдем по принадлежности фронтальную проекцию точки пересечения M_2. Точки A_2 и M_2 определяют фронтальную проекцию искомой прямой l. Две проекции отрезка AM прямой определяют ее положение в пространстве.

Если вместо горизонтали будет задана фронталь f, то геометрические построения по проведению прямой $l \perp f$ аналогичны рассмотренным. Разница лишь в том, что построения начальной проекции прямого угла следует начинать с его фронтальной проекции (см. рис. 30, *б*).

Выполнять построение перпендикуляра по отношению к проекциям прямой линии общего положения не имеет смысла, так как построенный прямой угол на плоскости проекций никогда не окажется прямым в пространстве.

Вопросы для самоконтроля

1. Как формулируется условие перпендикулярности двух прямых линий (отрезков) с учетом положения проекций этих линий либо отрезков?
2. Каким способом может быть определена действительная длина отрезка общего положения? Какой элемент построения представляет эту величину?