ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. Точки, расположенные в пространстве, обозначены прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, D, … или цифрами 1, 2, 3, 4, … .

2. Прямые линии в пространстве – строчными буквами латинского алфавита: a, b, c, d, … .

3. Плоскости – строчными буквами греческого алфавита: α, β, γ, δ, … .

4. Углы линейные – строчными буквами греческого алфавита: φ, ψ, ω, … .

5. Основные операции:

а) соответствие двух геометрических фигур – $\equiv$, например $A \equiv B$, $a \equiv b$;

б) взаимная принадлежность геометрических фигур – $\in$, например $A \in a$;

в) пересечение двух геометрических фигур – $\cap$, например $a \cap b$;

г) результат геометрической операции – =, например $k = a \cap b$, $AB = CD$;

д) параллельность – $\|$, например $a \| \alpha$;

е) перпендикулярность – $\perp$, например $b \perp \beta$.

6. Способ задания указывается в скобках рядом с буквенным обозначением геометрической фигуры. Например, $\alpha\ (m \| n)$ – плоскость задана параллельными прямыми m и n, $\beta\ (a \cap b)$ – плоскость задана пересекающимися прямыми a и b.

7. Плоскости проекций при образовании эпюра – прописной буквой греческого алфавита: горизонтальная – Π_1, фронтальная – Π_2, профильная – Π_3. Новая плоскость проекций при замене плоскостей проекций – буквой П с добавлением подстрочного индекса – Π_4.

8. Оси проекций – X, Y, Z; при замене плоскостей проекций – X_{14}.

9. Проекции фигуры обозначаются той же буквой, что и фигура, но с индексом соответствующей плоскости проекций, например A_1 – проекция точки A на плоскость Π_1, a_2 – проекция прямой a на плоскость Π_2, γ_3 – проекция плоскости γ на плоскость Π_3.

10. Особые прямые имеют постоянные обозначения:

а) линии уровня: горизонталь – h, фронталь – f;

б) следы проецирующих плоскостей и плоскостей уровня:

α_1 – горизонтальный след плоскости $\alpha \perp \Pi_1$, $\alpha \| \Pi_2$;

β_2 – фронтальный след плоскости $\beta \perp \Pi_2$, $\beta \| \Pi_1$.

Проецирующая плоскость (плоскость уровня) изображается только одним следом – тем, который является проекцией данной плоскости, на плоскость проекций, к которой она перпендикулярна;

в) оси вращения *i*.

11. Плоскость проекций в методе с числовыми отметками – $П_0$ (основная плоскость проекций).

12. Проекции точек в проекциях с числовыми отметками – той же буквой, что и натура, с добавлением числа, характеризующего расстояние точки до плоскости проекций: A_{15}, $B_{2,3}$, C_0.

13. Масштаб уклона плоскости – той же буквой, что и плоскость, с добавлением индекса *i*, изображается двойной линией, тонкой и более толстой (основной), разделяемой на интервалы.

Т е м а 1. ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ

1. Какие плоскости проекций рассматриваются в начертательной геометрии и как они взаимно расположены?

2. Что называют осями проекций?

3. Что называется проекцией точки?

4. Что такое эпюр? Как он образуется?

5. Что называется координатами точки?

6. Какими координатами определяется горизонтальная проекция точки? Фронтальная? Профильная?

7. Сколько проекций определяет положение точки в пространстве?

8. В чем состоит основное правило проекционной связи?

Пример 1. Построить проекции точки А (x = 50, y = 40, z = 60).

На эпюре (рис. 1), где все плоскости проекций совмещены, проекции A_1 и A_2 окажутся на одном перпендикуляре к оси Ox, а проекции A_2 и A_3 – на одном перпендикуляре к оси Oz. Что касается проекций A_1 и A_3, то и они связаны прямыми A_1A_Y и A_3A_Y, перпендикулярными оси Oy. Но так как эта ось на эпюре занимает два положения, то отрезок A_1A_Y не может быть продолжением отрезка A_3A_Y.

Построение проекций точки А на эпюре по заданным координатам выполняют в такой последовательности: прежде всего на оси абсцисс от начала координат откладывают отрезок OA_X = x, затем через точку A_X проводят перпендикуляр к оси Ox, на котором с учетом знаков откладываем отрезки A_XA_1 = y (получаем A_1) и A_XA_2 = z (получаем A_2).

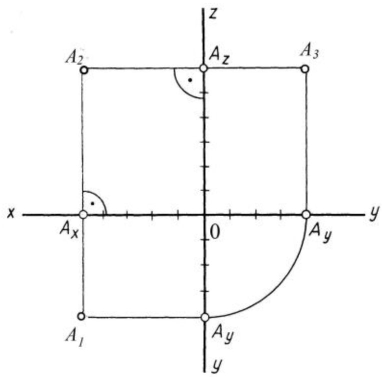


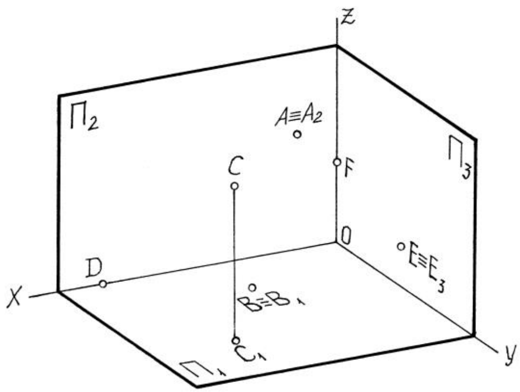
Рис. 1. Эпюр точки А

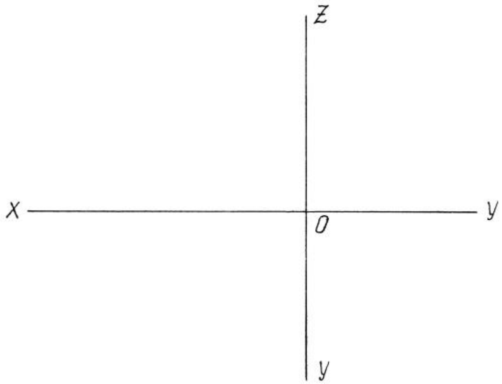
Так как профильная и фронтальная проекции точки должны быть расположены на одном перпендикуляре к оси Ox, то через A_2 проводят прямую $A_2A_Z \perp Oz$, на которой вправо от оси Oz откладываем расстояние A_ZA_3, равное расстоянию A_XA_1, т. е. координате у (получаем A_3).

Задачи.

1. По наглядному изображению построить проекции точек A, B, C, D, E, F и записать их координаты.

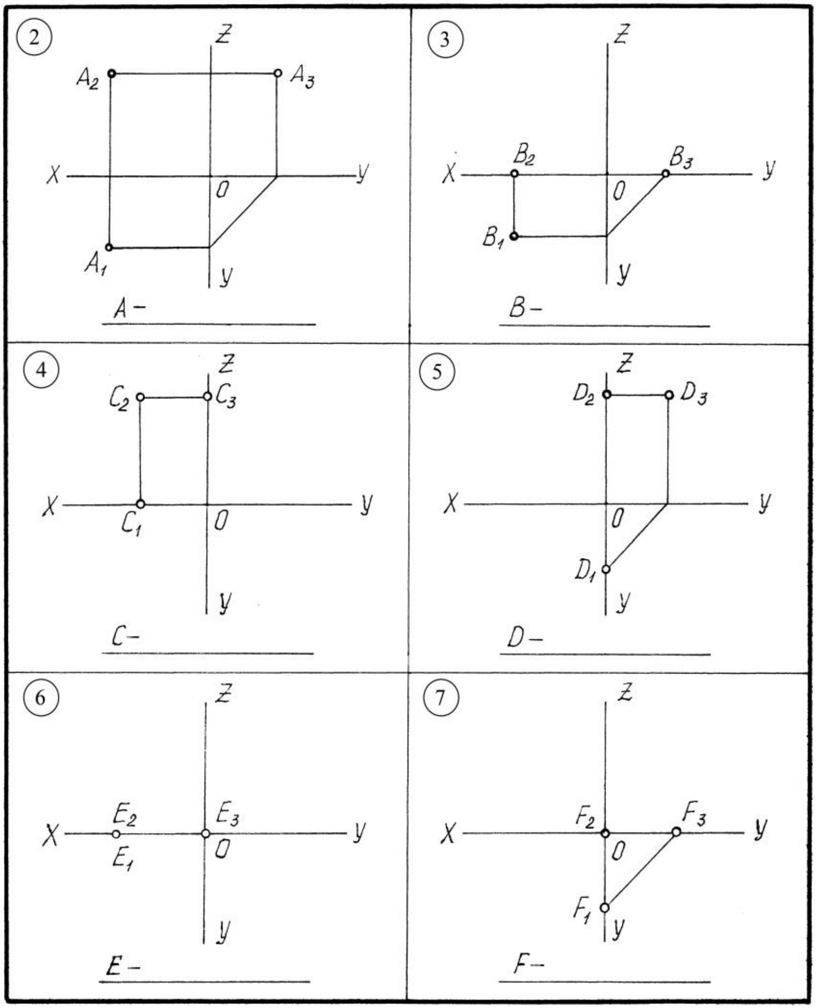
1





	X	y	z
A			
B			
C			
D			
E			
F			

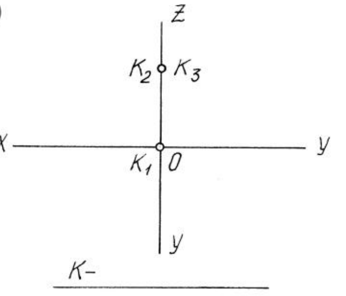
2–7. Как расположены точки A, B, C, D, E, F в пространстве?



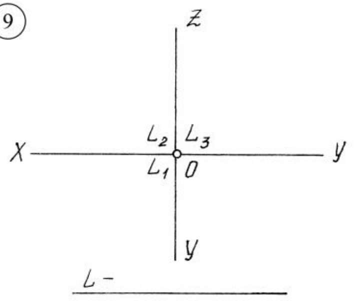
8–9. Как расположены точки K, L в пространстве?

10. Снять координаты точек A, B, C, D с эпюра и по заданным координатам построить проекции точек E, F, M и N.

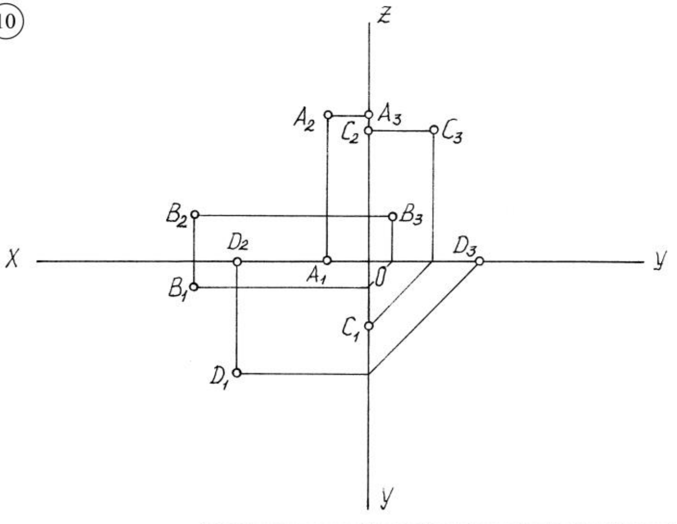
8



9



10



Координаты точек	A	B	C	D	E	F	M	N
X					65	0	50	0
Y					45	30	0	40
Z					50	40	20	0

Т е м а 2. ПРОЕКЦИИ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

1. Какая линия называется прямой общего положения?

2. Что такое проецирующие прямые, линии уровня и как они изображаются на чертеже?

3. Как по эпюру определить принадлежность точки прямой линии?

4. Как формулируется теорема о делении отрезка прямой линии в заданном отношении?

5. Что такое следы прямой? Как построить горизонтальный и фронтальный следы прямой линии?

6. Какие следы имеет горизонтальная прямая? Фронтальная прямая?

7. Как определить натуральную величину отрезка прямой линии общего положения?

8. Как определить угол наклона прямой общего положения к горизонтальной плоскости проекций? К фронтальной плоскости проекций?

9. Как по эпюру определить параллельны ли заданные прямые?

10. Как по эпюру определить пересекаются ли заданные прямые? Скрещиваются ли?

11. Какие точки называются конкурирующими: горизонтально-конкурирующими, фронтально-конкурирующими?

Пример 2. Определить длину отрезка прямой линии и углы наклона его к плоскостям проекций.

Как видно из рис. 2, длину отрезка прямой AB можно определить из прямоугольного треугольника AB^1B, в котором: катет $AB^1 = A_1B_1$ (проекции отрезка AB на плоскость Π_1), а катет BB^1 равен Δz – разности расстояний точек A и B от плоскости Π_1. Угол φ в том же треугольнике определяет угол наклона отрезка прямой AB к плоскости Π_1.

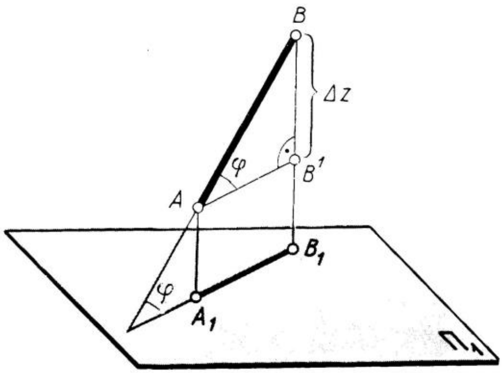


Рис. 2. Отрезок AB прямой линии
и его горизонтальная проекция

Если вместо плоскости $П_1$ взять плоскость $П_2$, то длину отрезка АВ можно определить аналогичным путем из прямоугольного треугольника $АВА^1$ (рис. 3), где катет $ВА^1$ равен проекции $А_2В_2$, а второй катет $АА^1$ равен $\Delta у$ – разности расстояний точек А и В от плоскости $П_2$. Угол ψ в том же треугольнике $АВА^1$ определяет угол наклона прямой АВ к плоскости $П_2$.

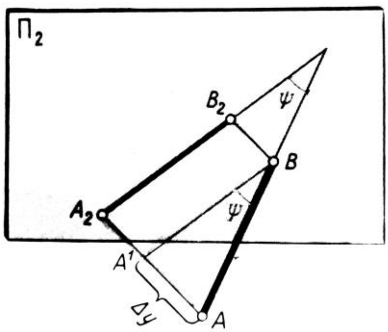


Рис. 3. Отрезок АВ прямой линии
и его фронтальная проекция

На рис. 4 и 5 показано на эпюрах нахождение длины отрезка прямой и углов наклона его к плоскостям $П_1$ (угол φ) и $П_2$ (угол ψ).

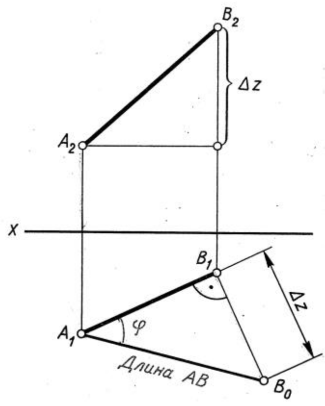


Рис. 4. Определение длины
отрезка прямой. Построение на $П_1$

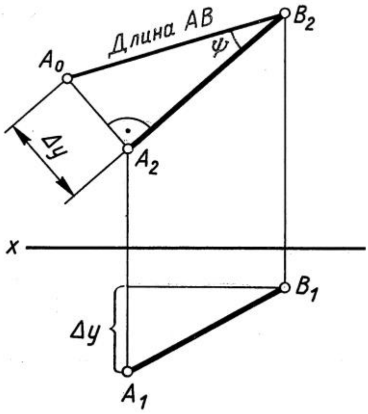
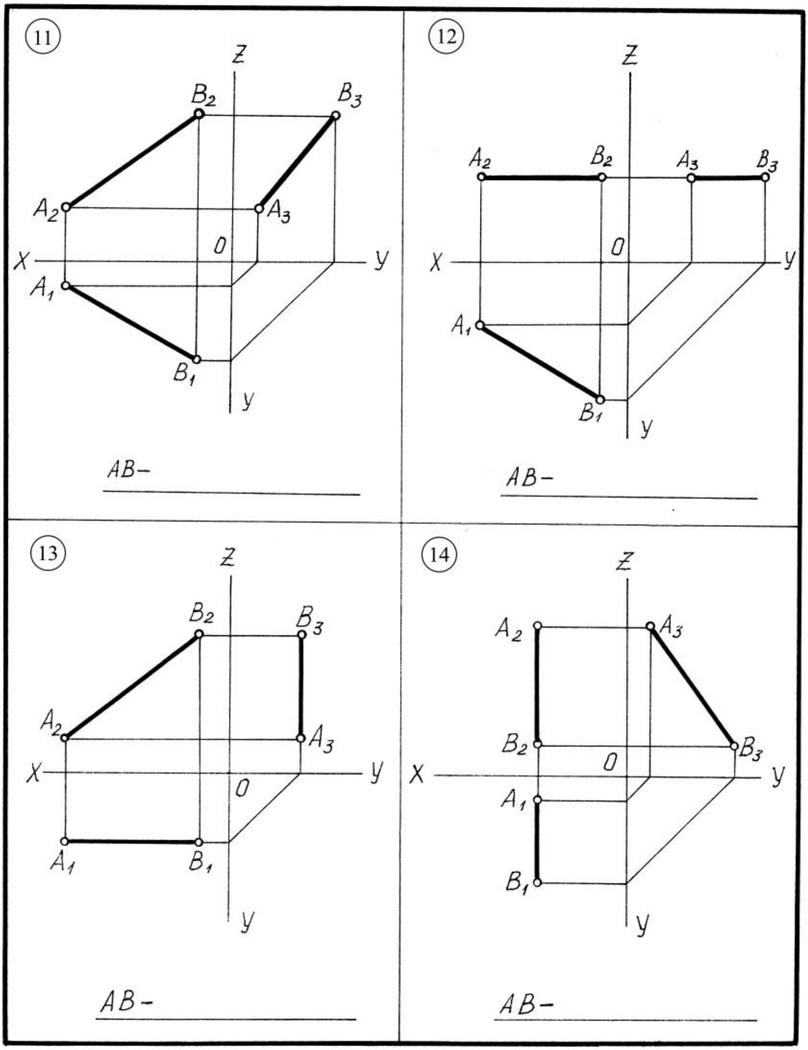


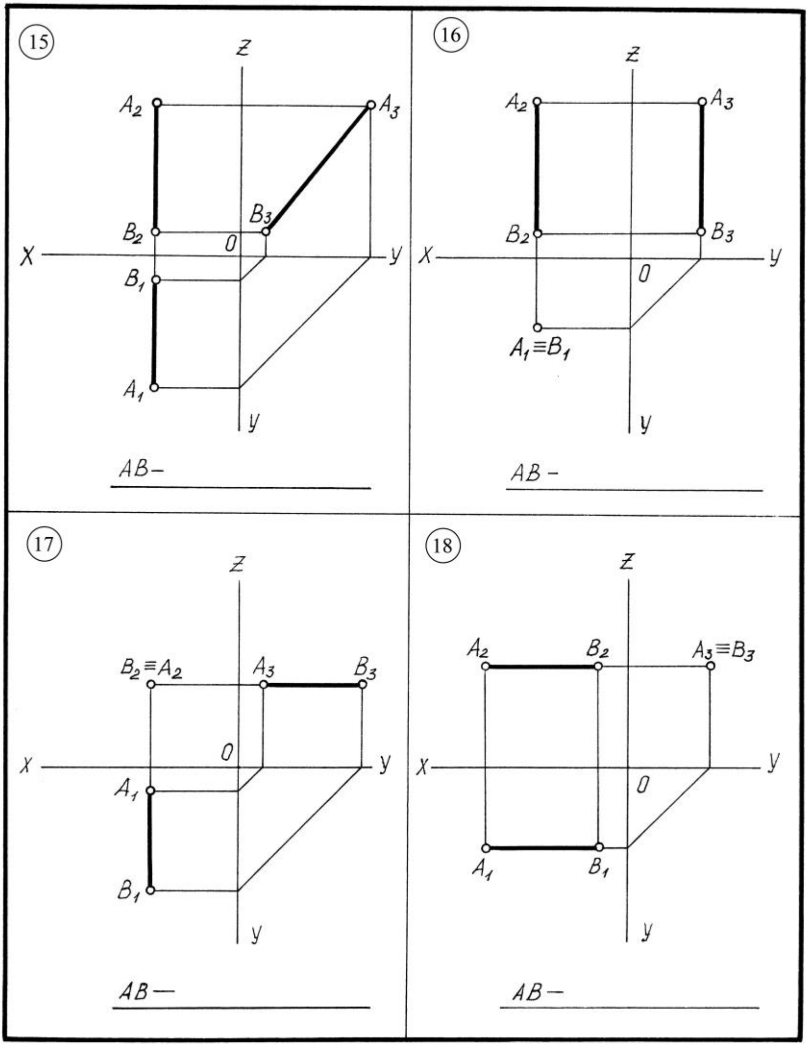
Рис. 5. Определение длины
отрезка прямой. Построение на $П_2$

Задачи.

11–14. Как прямая линия расположена в пространстве?



15–18. Как прямая линия расположена в пространстве?



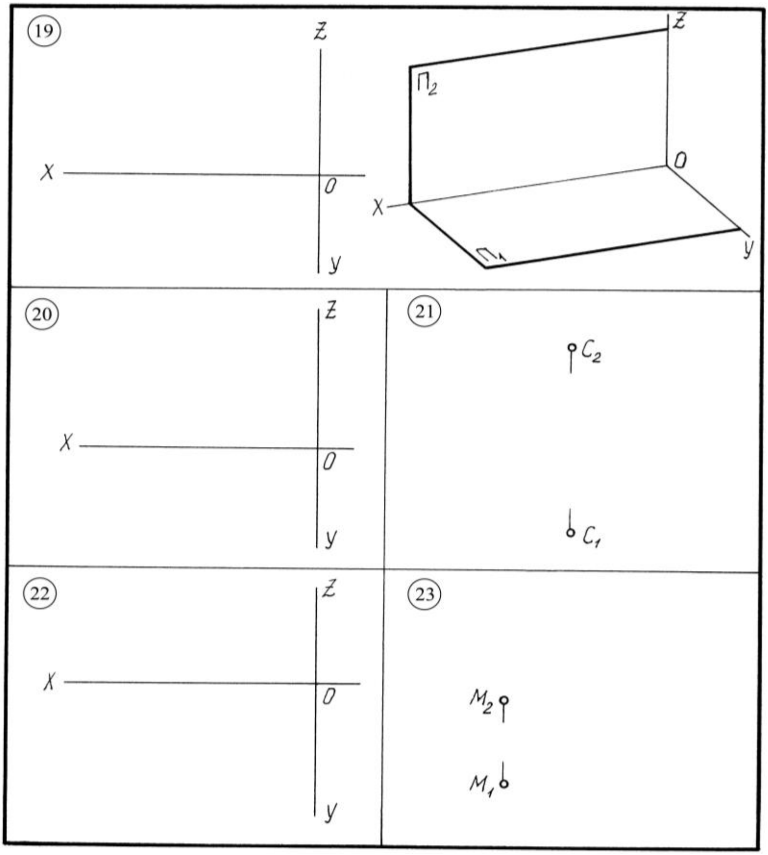
19. Построить проекции и наглядное изображение отрезка АВ в системе двух плоскостей-проекций, если А (50, 20, 10) и В (15, 10, 30).

20. Построить проекции отрезка АВ длиной 20 мм, расположенного перпендикулярно плоскости $П_1$ и отстоящего от плоскостей $П_2$ и $П_3$ на 25 мм.

21. Построить проекции отрезка CD, проходящего через точку С перпендикулярно плоскости $П_2$ и равного 30 мм.

22. Построить проекции отрезка EF, если Е (50, 30, 10), F (10, 10, 10). Определить длину отрезка EF и угол наклона его к плоскости $П_2$.

23. Через точку М провести фронтальную прямую под углом 30° к плоскости $П_1$. На прямой отложить отрезок MN, равный 40 мм.



24. Определить, принадлежат ли точки С, D, Е прямой АВ.

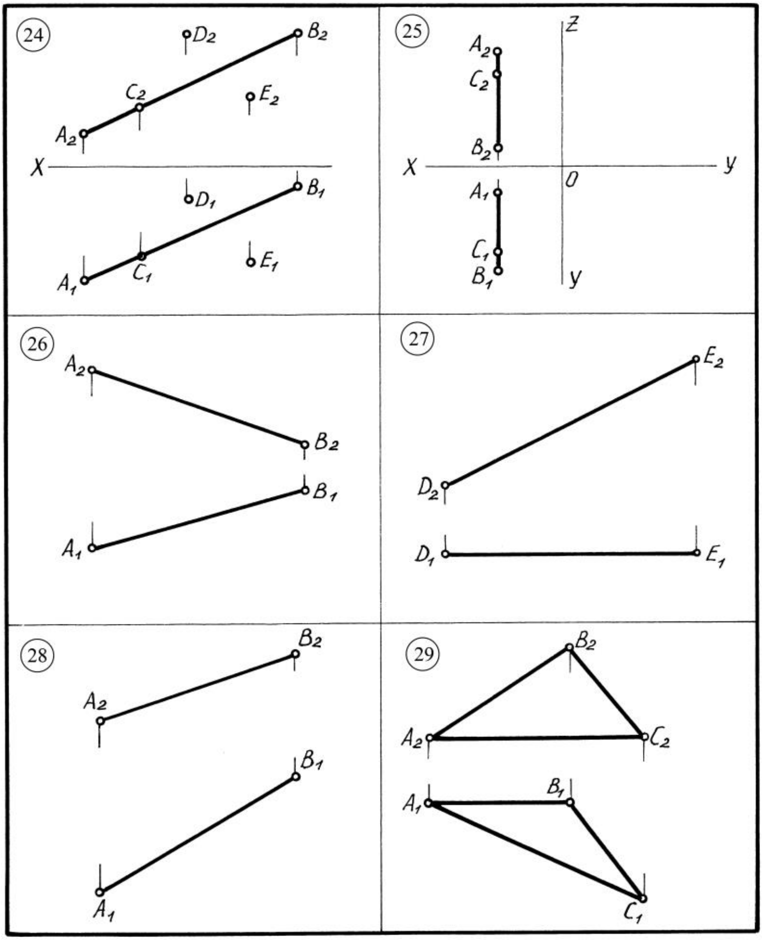
25. Принадлежит ли точка С прямой АВ?

26. Отрезок АВ разделить точкой К в отношении 2:3.

27. Построить точку С, отстоящую от точки D отрезка ED на 30 мм.

28. Построить точку K, отстоящую от точки А на 30 мм. Определить угол наклона отрезка АВ к плоскости $П_1$.

29. Определить длину сторон треугольника АВС. Показать угол наклона стороны ВС к плоскости $П_1$.



30. Найти следы прямой a.

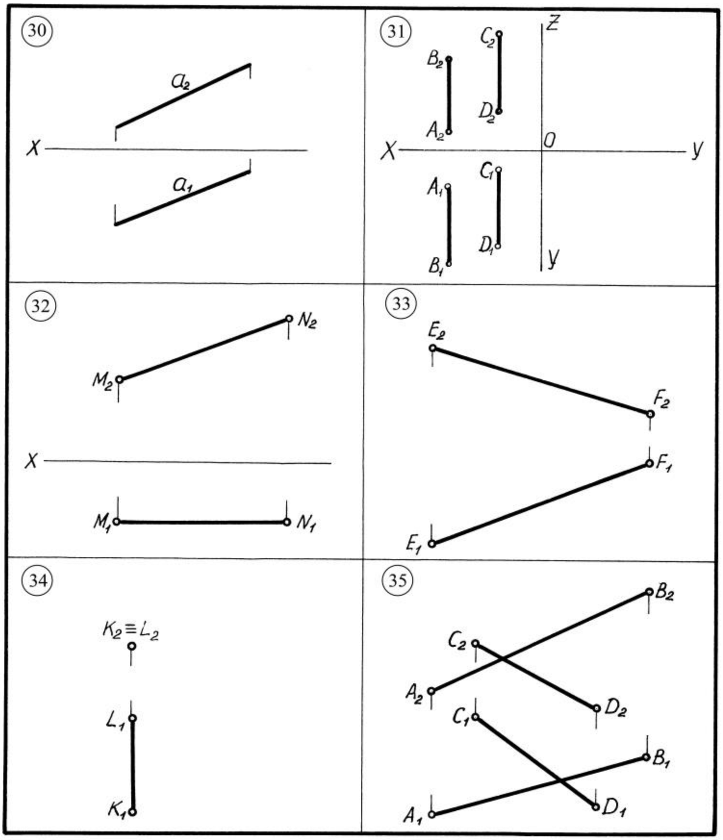
31. Определить взаимное положение прямых AB и CD.

32. Построить проекции отрезка KL так, чтобы он лежал в плоскости Π_2 и был параллелен отрезку MN.

33. Построить проекции отрезка CD так, чтобы он был параллелен плоскости Π_2 и пересекал отрезок EF.

34. Построить проекции отрезка MN длиной 25 мм, распложенного перпендикулярно плоскости Π_1. Как взаимно расположены отрезки KL и MN в пространстве?

35. На скрещивающихся прямых AB и CD определить горизонтально-конкурирующие и фронтально-конкурирующие точки.



Т е м а 3. ПЛОСКОСТЬ

1. Какими способами можно задать плоскость на чертеже?
2. Что называется следами плоскости?
3. Какие плоскости называются плоскостями общего положения, проецирующими и плоскостями уровня?
4. Какими свойствами обладают проецирующие плоскости?
5. Какими свойствами обладают плоскости уровня?
6. Как установить принадлежность прямой и точки данной плоскости?
7. Что называют линиями уровня плоскости: фронталью, горизонталью, профильной прямой?
8. Что называется линией наибольшего ската?
9. В каких случаях прямой угол проецируется без искажения на плоскость проекций?

Пример 3. Построить проекции произвольной прямой, принадлежащей плоскости α, которая задана пересекающимися прямыми m и n (рис. 6).

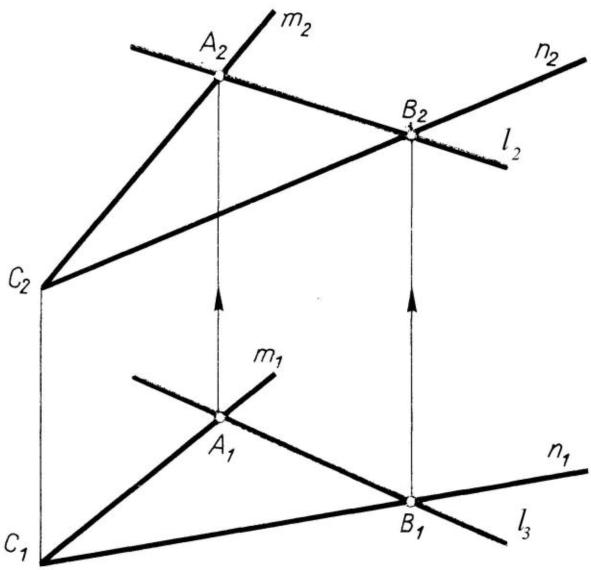


Рис. 6. Построение проекций прямой, принадлежащей плоскости

Воспользуемся основной аксиомой принадлежности, утверждающей, что прямая принадлежит плоскости, если две точки этой прямой принадлежат той же плоскости. На заданных прямых m и n отмечаем произвольные точки A $\in$ m и B $\in$ n, которые и определяют искомую прямую l (l_1, l_2). Одна из двух точек, A или B, может быть несобственной, и тогда аксиома принадлежности формулируется следующим образом: прямая принадлежит плоскости, если имеет с плоскостью одну общую точку и параллельна какой-либо прямой, расположенной в этой плоскости. На рис. 7 показаны проекции прямой l, принадлежащей плоскости α (m ∩ n). Эта прямая пересекает прямую n в точке A и параллельна прямой m.

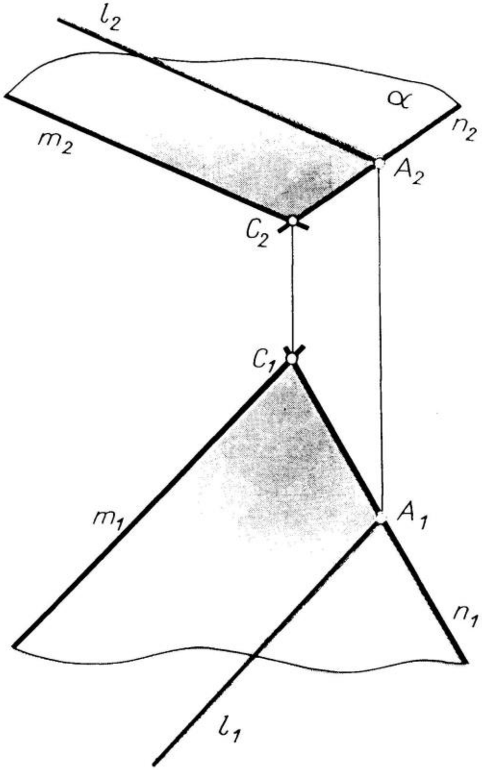
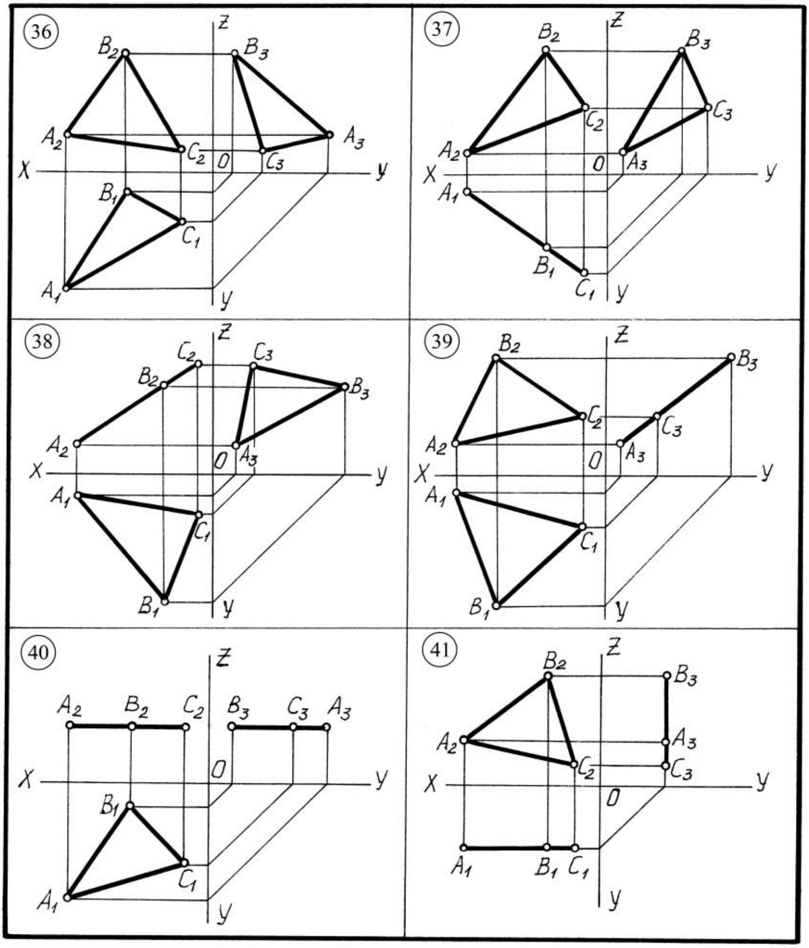


Рис. 7. Построение проекций прямой, принадлежащей плоскости, по одной точке и направлению

Задачи.

36–41. Как плоскость расположена в пространстве?



42. Как плоскость ABC расположена в пространстве?

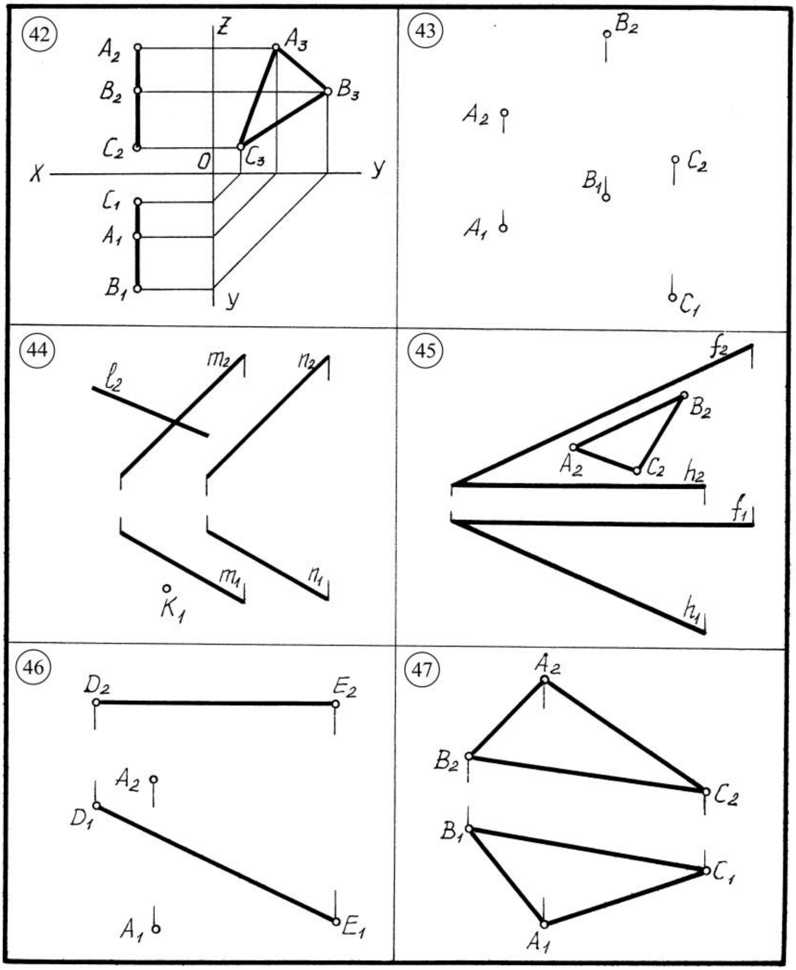
43. Плоскость, заданную тремя точками A, B, C, перезадать двумя пересекающимися прямыми (горизонталью и фронталью).

44. Построить недостающие проекции точки K и прямой *l*, принадлежащих плоскости α (m || n).

45. Построить горизонтальную проекцию треугольника ABC, принадлежащего плоскости α (h ∩ f).

46. Определить кратчайшее расстояние от точки A до прямой DE.

47. Определить угол наклона плоскости α (Δ ABC) к плоскости $П_1$.



48. а) Через прямую *1* провести горизонтально-проецирующую плоскость;

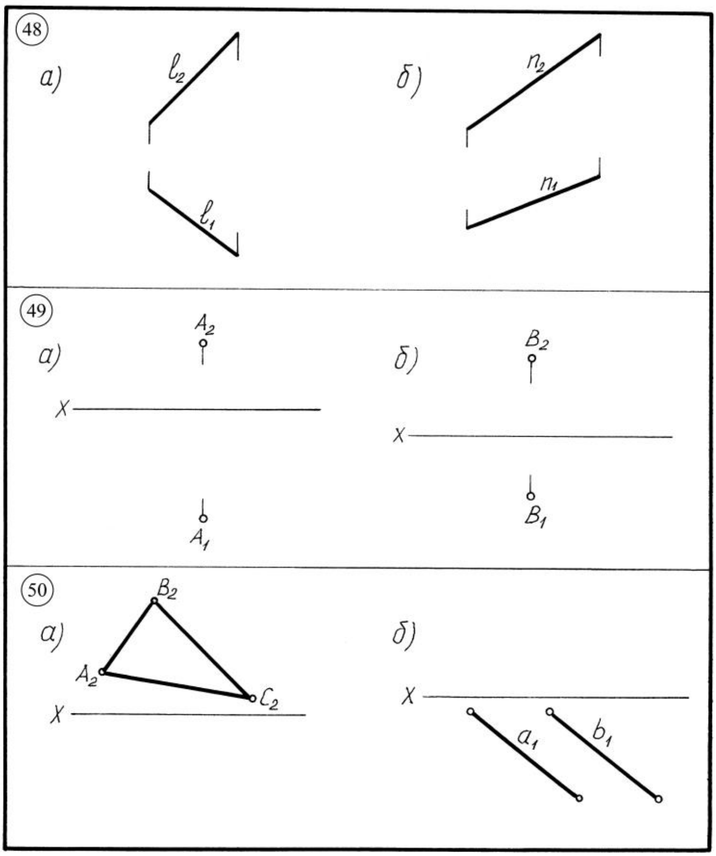
б) через прямую n провести фронтально-проецирующую плоскость.

49. а) Через точку A провести горизонтально-проецирующую плоскость с углом наклона 45° к фронтальной плоскости проекций;

б) через точку B провести фронтально-проецирующую плоскость с углом наклона 45° к горизонтальной плоскости проекций.

50. а) Построить горизонтальную проекцию треугольника ABC, все точки которого удалены от плоскости Π_2 на расстояние 15 мм;

б) построить фронтальную проекцию плоскости α (а || в), все точки которой удалены от плоскости Π_1 на расстояние 20 мм.



Т е м а 4. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ, ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

4.1. Параллельность плоскостей, прямой и плоскости

1. В чем состоит признак параллельности прямой и плоскости?
2. В чем состоит признак параллельности двух плоскостей?

Пример 4.1. Через точку A^1 провести плоскость β, параллельную заданной плоскости α (a ∩ b).

Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

При решении различных задач часто приходится через данную точку проводить плоскость, параллельную заданной. На рис. 8 плоскость задана двумя пересекающимися прямыми a и b. Искомая плоскость β определена прямыми a^1 и b^1, соответственно параллельными a и b и проходящими через точку A^1.

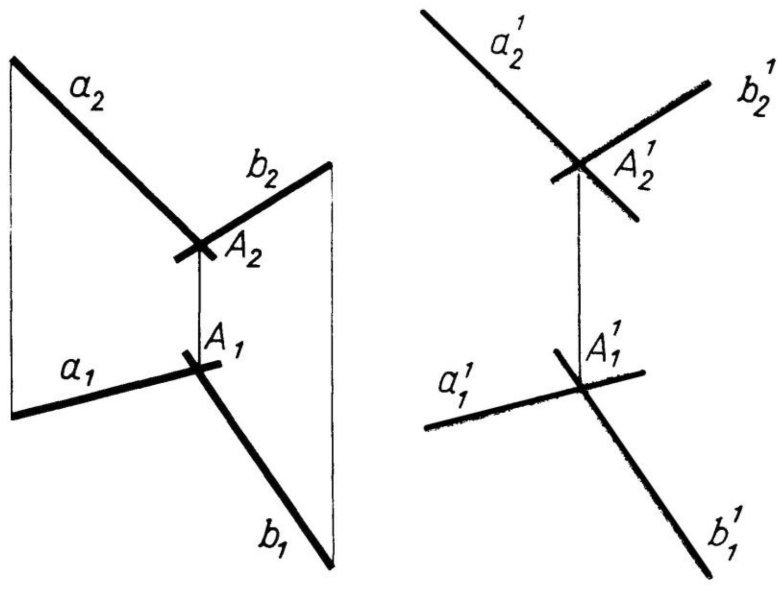


Рис. 8. Построение параллельных плоскостей

Задачи.

51. Через точку A провести плоскость, параллельную заданной:

а) плоскости треугольника KLM;

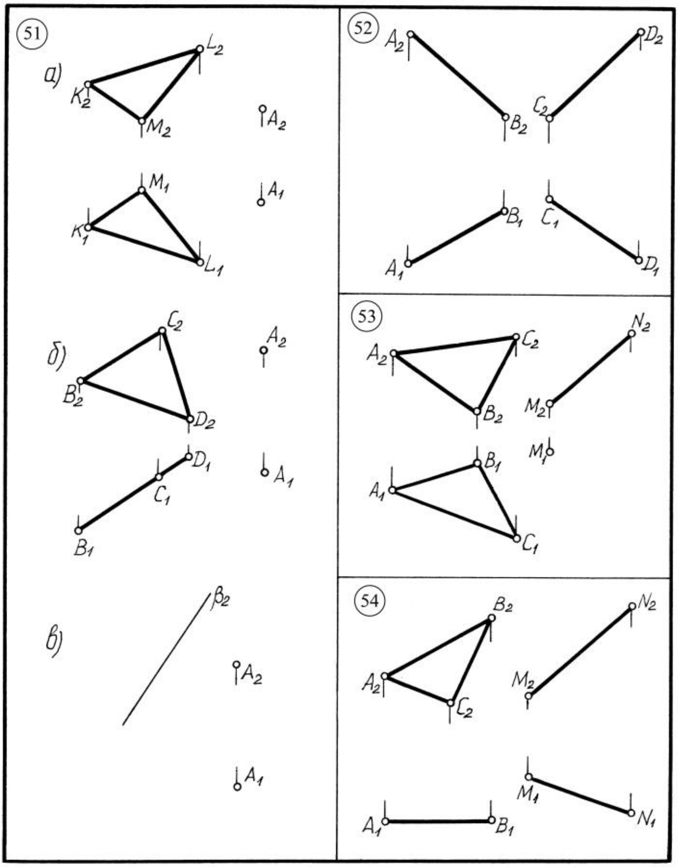
б) плоскости треугольника BCD;

в) плоскости β.

52. Через прямую AB провести плоскость, параллельную прямой CD.

53. Через точку M провести прямую MN, параллельную плоскости, заданной треугольником ABC (фронтальная проекция прямой задана).

54. Достроить горизонтальную проекцию плоскости α (Δ ABC), если a ∥ m.



4.2. Пересечение плоскостей

1. Как построить линию пересечения двух плоскостей?

2. По какой линии пересекает горизонтальная плоскость уровня все другие плоскости? Фронтальная плоскость уровня?

3. В каком случае при построении линии пересечения двух плоскостей вводятся плоскости-посредники?

Пример 4.2. Построить линию пересечения плоскостей, когда одна из них проецирующая.

На рис. 9 приведена плоскость общего положения, заданная треугольником ABC, и горизонтально проецирующая плоскость α. Найдем две общие точки для этих двух плоскостей. Очевидно, этими общими точками для плоскостей Δ ABC и α будут точки пересечения сторон AB и BC треугольника ABC с проецирующей плоскостью α. Построение таких точек D и E как на пространственном чертеже (рис. 9), так и на эпюре (рис. 10) не должно вызывать затруднений после разобранного выше примера.

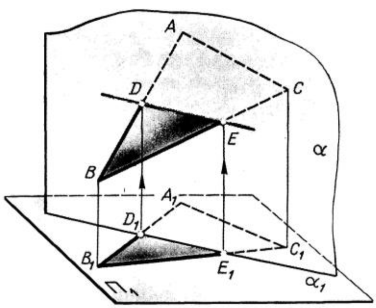


Рис. 9. Пересечение проецирующей плоскости с плоскостью общего положения

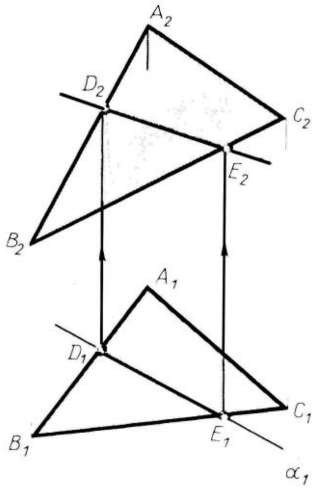


Рис. 10. Построение проекций линии пересечения горизонтально проецирующей плоскости с плоскостью общего положения

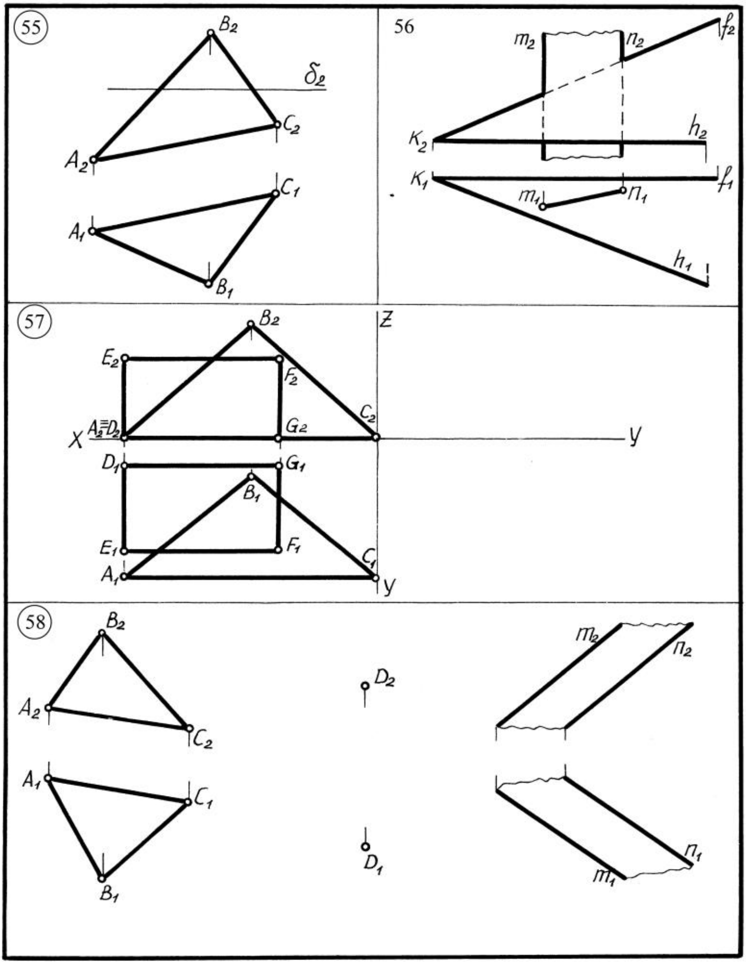
Задачи.

55. Построить линию пересечения плоскостей γ (Δ ABC) и δ.

56. Построить линию пересечения плоскостей β (m || n) и γ (f ∩ h).

57. Построить линию пересечения плоскостей α (Δ ABC) и β (DEFG).

58. Через точку D провести прямую, параллельную плоскостям γ (Δ ABC) и δ (m || n).



4.3. Пересечение прямой с плоскостью

1. В чем заключается общий способ построения точки пересечения прямой линии с плоскостью?

2. В каких случаях для определения точки пересечения прямой линии с плоскостью не требуется вводить вспомогательную плоскость?

3. Как определить видимость прямой на чертеже при пересечении ее с непрозрачной плоскостью?

Пример 4.3. Построить точку пересечения прямой a с плоскостью треугольника BCD и плоскостью, заданной параллельными прямыми (b || c).

На рис. 11 дано изображение прямой a, пересекающейся с плоскостью треугольника BCD. Точка пересечения K найдена с помощью горизонтально проецирующей плоскости γ, которая с заданной плоскостью пересекается по прямой n.

Построение прямой n – линии пересечения плоскости общего положения с проецирующей плоскостью – было рассмотрено ранее (см. рис. 9, 10). Искомая точка K пересечения прямой a с данной плоскостью треугольника BCD определена как точка пересечения линий a и n.

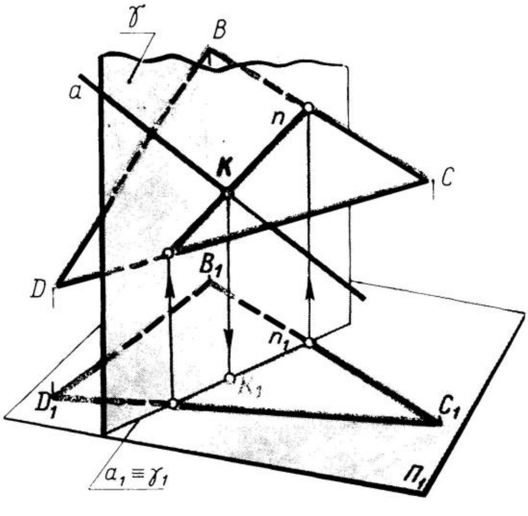


Рис. 11. Пересечение прямой с плоскостью треугольника

В такой же последовательности решаются два примера на эпюре (рис. 12 и 13). При выполнении эпюрных построений необходимо проявлять особое внимание к последней стадии решения, когда определяются проекции искомой точки.

Следует иметь в виду, что если в качестве вспомогательной плоскости взята горизонтально проецирующая, то первой из двух будет определена фронтальная проекция искомой точки (рис. 12). Решение задачи на эпюре должно завершиться определением видимых участков на проекциях данной прямой. Видимость прямой а относительно плоскости треугольника BCD (рис. 12) и относительно плоскости (b || c) (рис. 13) установлена с помощью специальных лучей, которые проводят через конкурирующие точки.

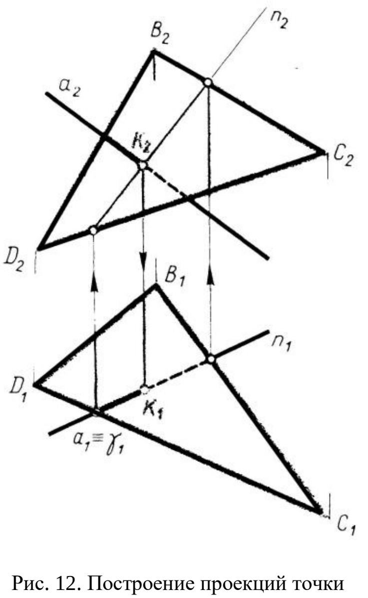


Рис. 12. Построение проекций точки пересечения прямой с плоскостью треугольника

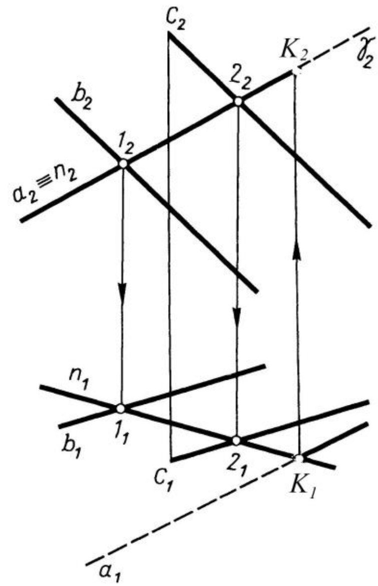


Рис. 13. Построение проекций точки пересечения прямой с плоскостью (b || c)

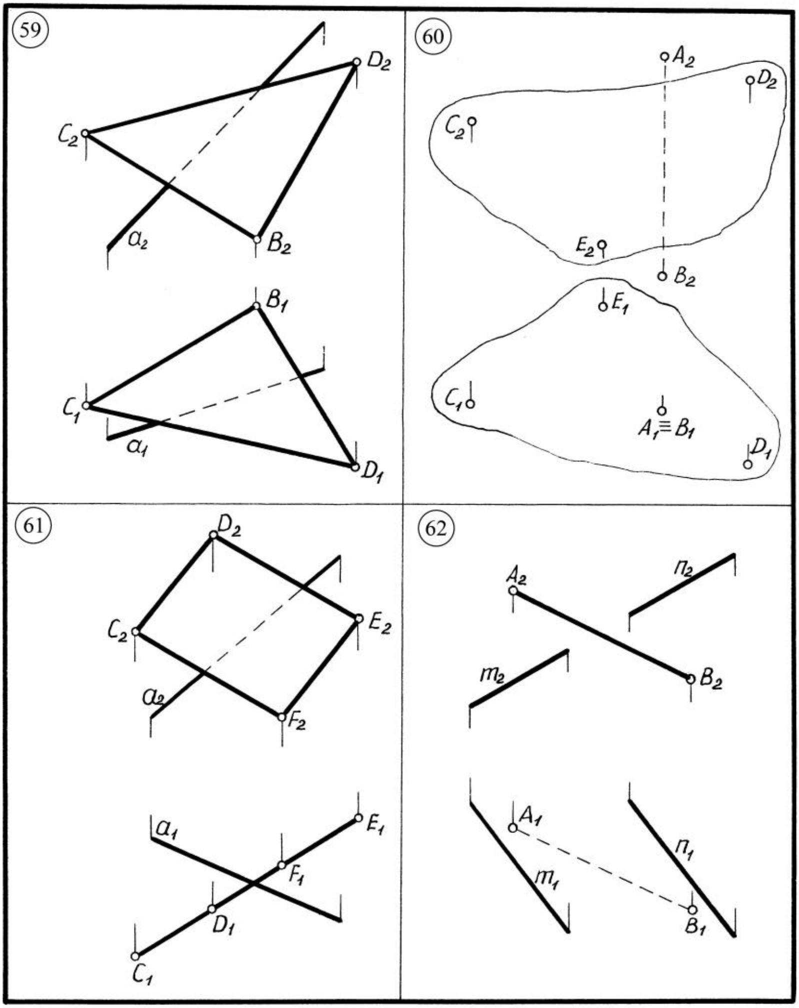
Задачи.

59. Найти точку пересечения прямой а с плоскостью γ (Δ BCD). Определить видимость.

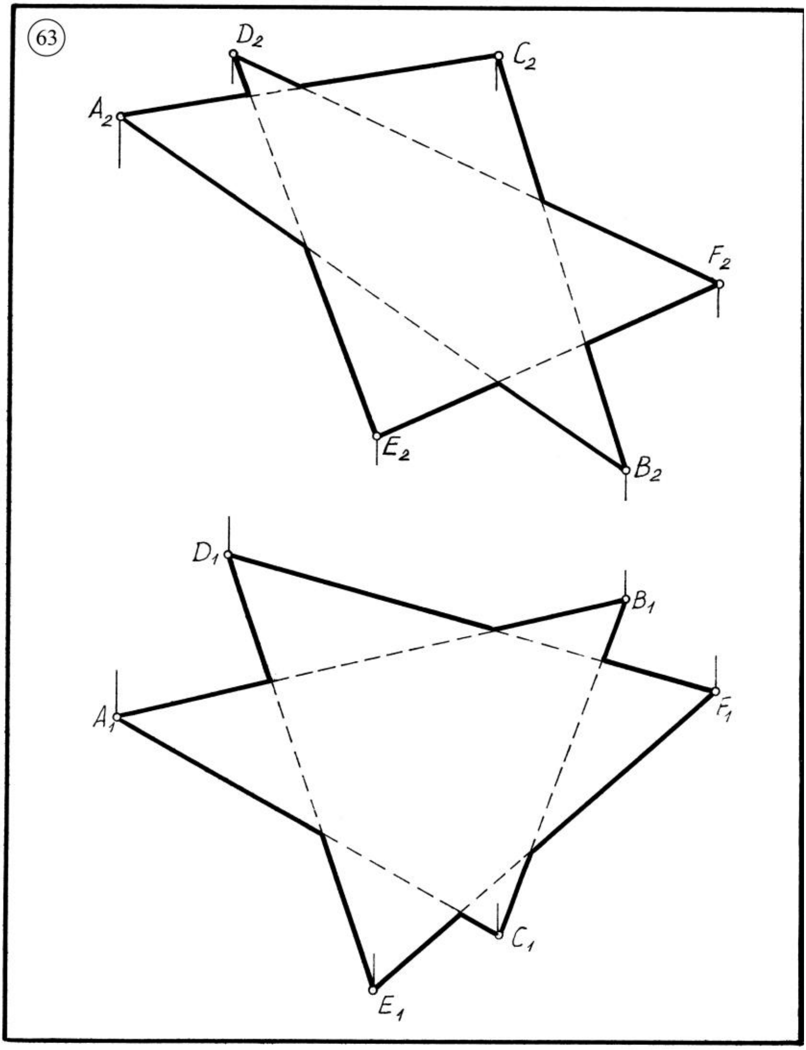
60. Найти точку пересечения прямой AB с плоскостью γ (CDE).

61. Найти точку пересечения прямой a с плоскостью четырехугольника CDEF.

62. Найти точку пересечения прямой с плоскостью β (m ∥ n).



63. Построить линию пересечения плоскостей γ (Δ ABC) и δ (Δ DEF). Определить видимость плоскостей, считая их непрозрачными.



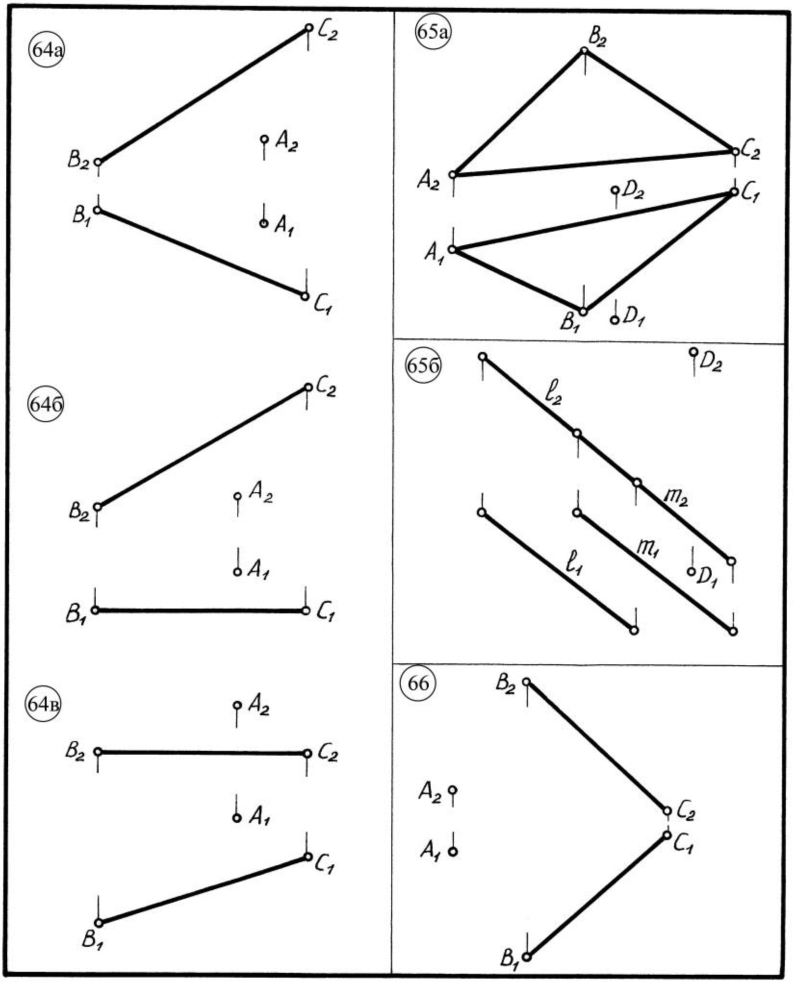
64 (а, б, в). Через точку А провести плоскость, перпендикулярную прямой ВС.

65. Определить расстояние от точки D:

а) до плоскости α (Δ АВС);

б) до плоскости β ($l \parallel m$).

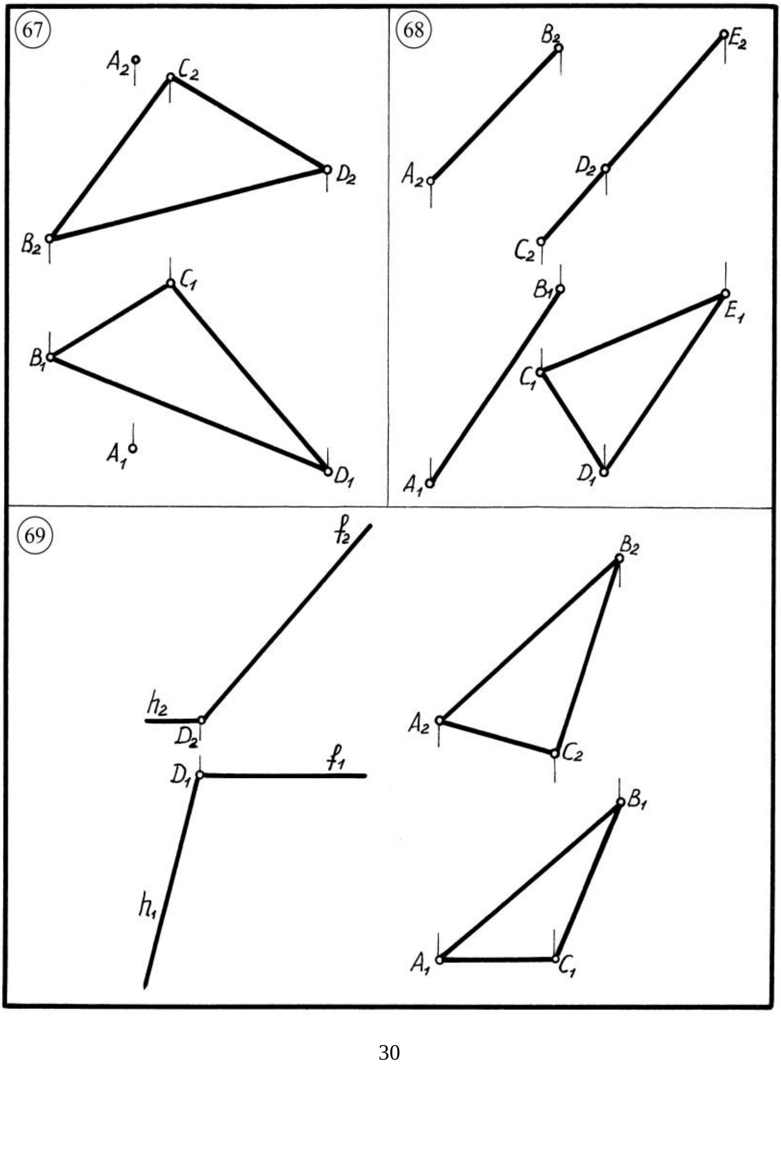
66. Определить расстояние от точки А до прямой ВС.



67. Через точку A провести горизонтально-проецирующую плоскость, перпендикулярную плоскости треугольника BCD.

68. Через прямую AB провести плоскость, перпендикулярную плоскости треугольника CDE.

69. Установить, перпендикулярны ли заданные плоскости?



Т е м а 5. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ

5.1. Способ вращения

1. Сущность способа вращения и его практическое применение.

2. Как перемещаются проекции точки при вращении ее вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций $П_1$, плоскости проекций $П_2$?

3. Какая проекция отображаемого объекта не изменяет своей величины при вращении его вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций $П_1$, плоскости проекций $П_2$?

4. Сущность способа совмещения и его практическое применение.

5. В чем состоит сущность способа вращения вокруг линии уровня? Практическое применение способа.

Пример 5.1. Преобразовать чертеж так, чтобы прямая общего положения после поворота оказалась параллельной фронтальной плоскости проекций.

Если прямая параллельна плоскости $П_1$ или $П_2$, то одна из ее проекций должна быть параллельна оси x_{12}, а если этой оси на эпюре нет, то одна из проекций прямой должна пересекать линии проекционной связи под прямым углом. Следовательно, решая задачу – расположить прямую a параллельно $П_2$, нам придется повернуть горизонтальную проекцию a_1 так, чтобы она стала перпендикулярна линиям связи (рис. 14).

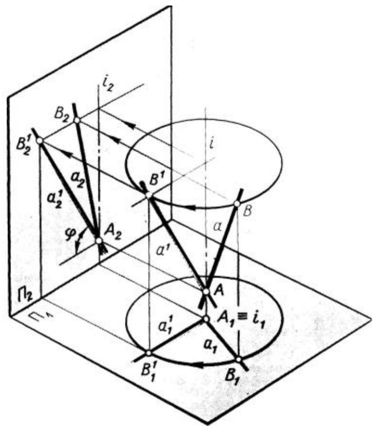


Рис. 14. Вращение прямой вокруг оси, перпендикулярной $П_1$

Для реализации такого поворота ось вращения *i* следует выбрать перпендикулярно плоскости $П_1$. На рис. 14 и 15 ось *i* проведена через точку A $\in$ a, которая при вращении прямой будет неподвижна. Что касается любой другой точки B (B$\in$a), то она и ее горизонтальная проекция опишут дуги окружности. Угол поворота точки B определяется условием перпендикулярности новой проекции a_1^1 прямой a к линии проекционной связи. В результате такого поворота на плоскость $П_2$ без искажения проецируется и отрезок AB и угол φ, который прямая a составляет с плоскостью $П_1$.

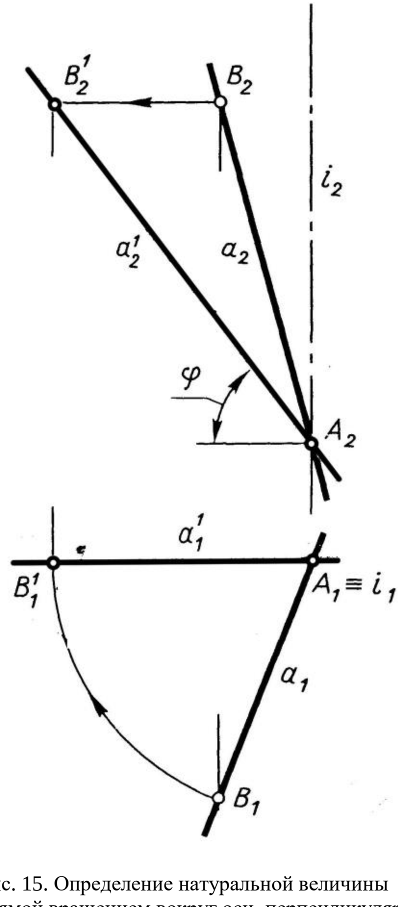


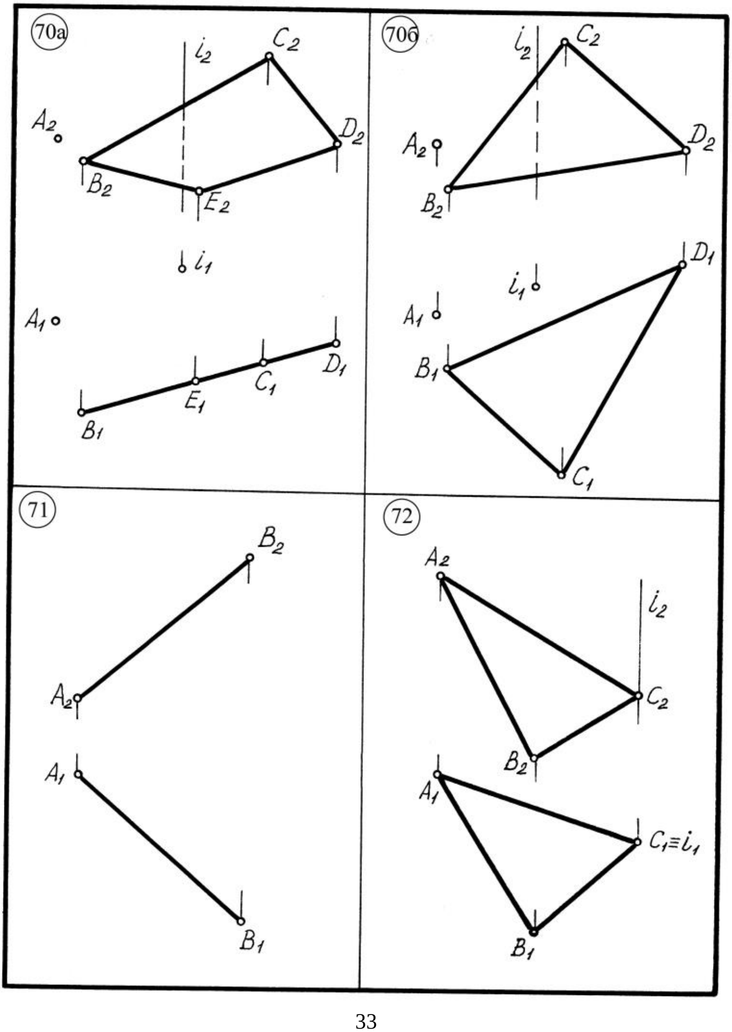
Рис. 15. Определение натуральной величины
отрезка прямой вращением вокруг оси, перпендикулярной $П_1$

Задачи.

70. Вращением вокруг оси *i* ввести точку A: а) в плоскость четырехугольника BCDE; б) в плоскость треугольника BCD.

71. Вращением определить угол наклона прямой AB к плоскости $П_2$.

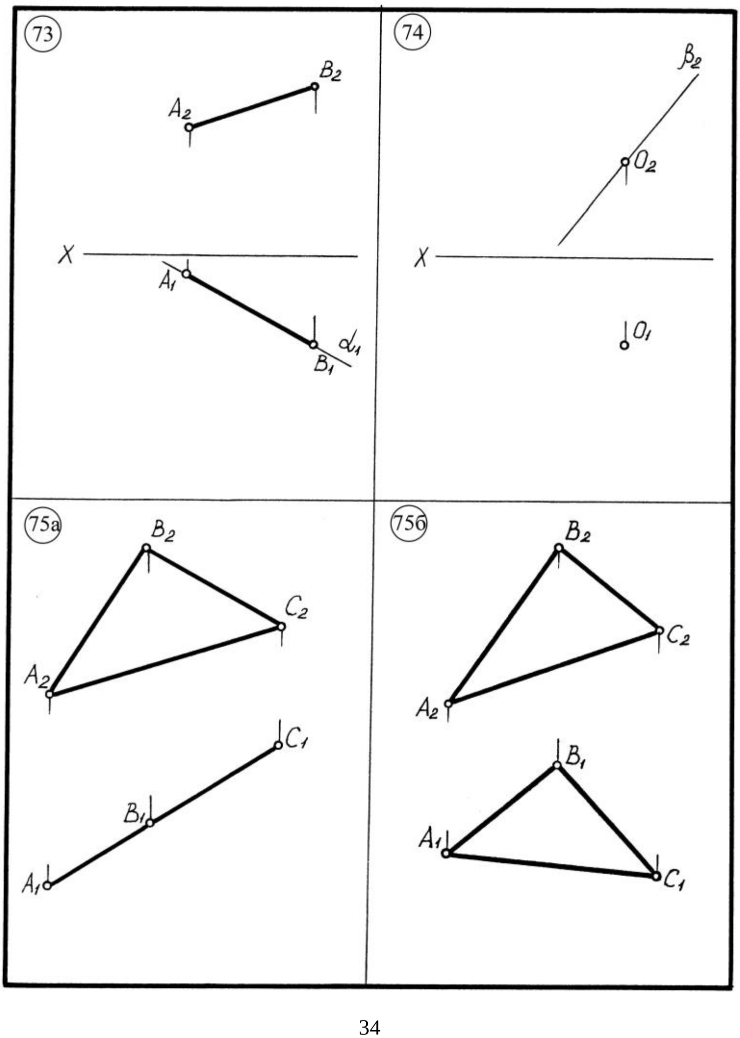
72. Вращением вокруг оси *i* определить угол наклона плоскости треугольника ABC к плоскости $П_1$.



73. Построить проекции равностороннего треугольника ABC, принадлежащего заданной плоскости α. Сторона AB задана.

74. Построить проекции окружности, расположенной в плоскости β, с центром в точке O. Радиус окружности равен 15 мм.

75 (а, б). Определить натуральную величину треугольника ABC (вращением вокруг горизонтали).



5.2. Способ перемены плоскостей проекций

1. Сущность способа перемены плоскостей проекций и его практическое применение.

2. Какая проекция точки сохраняется, какая координата точки не изменяется при замене горизонтальной плоскости проекций? То же при замене фронтальной плоскости проекций?

Пример 5.2.1. Преобразовать чертеж так, чтобы прямая общего положения оказалась параллельной одной из плоскостей проекций новой системы.

На рис. 16 показана прямая a, которая в системе $П_1/П_2$ является прямой общего положения.

Для решения задачи взята новая плоскость $П_4$, отвечающая двум условиям: $П_4 \perp П_1$ и $П_4 \parallel a$. В системе $П_4/П_1$ прямая a стала фронталью, а потому $x_{14} \parallel a_1$. На плоскость $П_4$ без искажения проецируется и отрезок AB прямой и угол φ. Решение этой задачи на эпюре дано на рис. 17, где параллельно a_1 проведена ось x_{14} и построена новая фронтальная проекция отрезка A_4B_4.

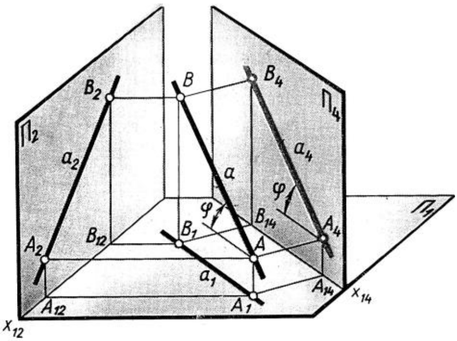


Рис. 16. Замена фронтальной плоскости проекций

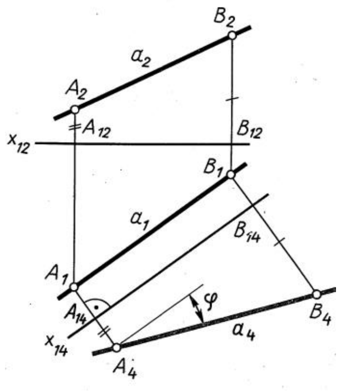


Рис. 17. Определение натуральной величины прямой заменой плоскости проекций

Пример 5.2.2. Преобразовать чертеж так, чтобы плоскость общего положения в новой системе плоскостей проекций стала проецирующей.

Пусть плоскость общего положения задана треугольником ABC (рис. 18).

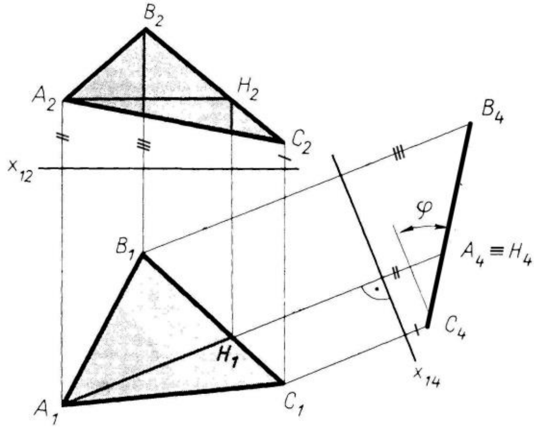


Рис. 18. Преобразование плоскости общего положения в проецирующую

Для решения поставленной задачи новую плоскость проекций следует расположить перпендикулярно треугольнику ABC и одной из плоскостей проекций. Значит, новая плоскость должна быть перпендикулярна линии пересечения заданной плоскости с одной из плоскостей проекций. При этом нет необходимости строить такую линию, так как ее направление можно установить с помощью главной линии плоскости.

Вот почему в заданной плоскости, прежде всего, необходимо провести одну из главных линий, например горизонталь AH. Эта горизонталь необходима для ориентировки новой плоскости проекций Π_4.

Расположив $\Pi_4 \perp AH$, мы обеспечиваем выполнение сразу двух условий: новая плоскость Π_4 будет перпендикулярна и Π_1, и плоскости треугольника. Новую ось x_{14} проводят под прямым углом к A_1H_1. Проведя через горизонтальные проекции вершин треугольника прямые, перпендикулярные новой оси, откладывают на этих прямых от x_{14} отрезки, равные z_A, z_B и z_C. Так получается новая фронтальная проекция $A_4B_4C_4$ треугольника ABC, представляющая собой прямую линию. Заметим, что на плоскость Π_4, которая перпендикулярна треугольнику и Π_1, без искажения проецируется угол φ, образованный треугольником с плоскостью Π_1.

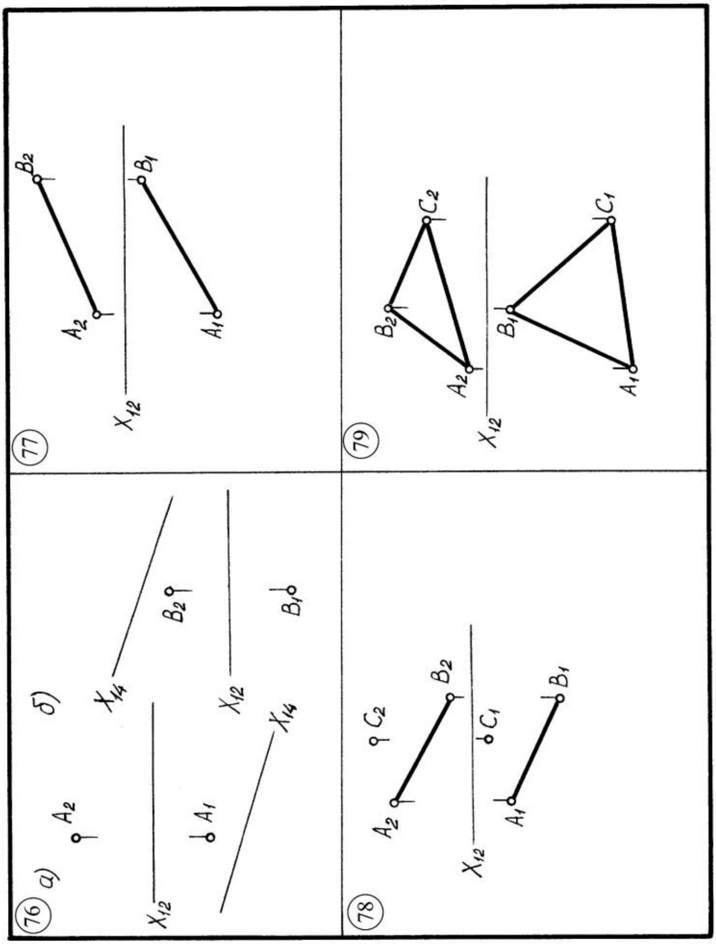
Задачи.

76 (а, б). Построить проекции точек A и B в новой системе плоскостей проекций.

77. Определить натуральную величину отрезка AB прямой линии и угол его наклона к горизонтальной плоскости проекций.

78. Опустить перпендикуляр из точки C на прямую AB.

79. Определить угол наклона плоскости, заданной треугольником ABC, к горизонтальной плоскости проекций.



Т е м а 6. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ЛИНИИ И ТОЧКИ НА ПОВЕРХНОСТИ

1. На какие основные группы делятся все поверхности?
2. Какие существуют способы задания поверхностей?
3. В каком случае поверхность считается заданной?
4. Какие поверхности называются развертываемыми?
5. Что называется геодезической (кратчайшей на поверхности) линией?

Пример 6. Найти недостающие проекции точки на заданных поверхностях (пирамида, цилиндр, конус).

При решении задач необходимо приобрести навыки построения недостающих проекций точки поверхности геометрического тела, заданной на одной из его проекций. Для решения этой задачи рекомендуется сначала найти все проекции поверхности, на которой расположена заданная проекция точки, после чего тем или иным способом найти недостающие проекции этой точки.

На рис. 19 даны проекции правильной четырехугольной пирамиды и точек, расположенных на ее поверхностях. При указанном расположении квадратного основания пирамиду (а также призму с квадратным основанием) рекомендуется строить в диметрической, а не изометрической проекции.

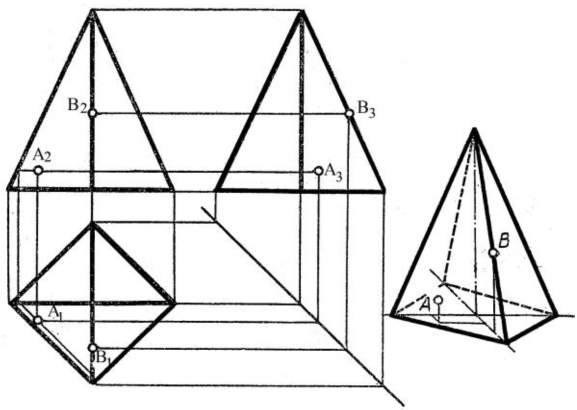


Рис. 19. Построение недостающих проекций точек на пирамиде

На рис. 20 в качестве примера показано выполнение проекций цилиндра и заданных на его поверхности точек, а также изображена построенная по ним аксонометрическая проекция.

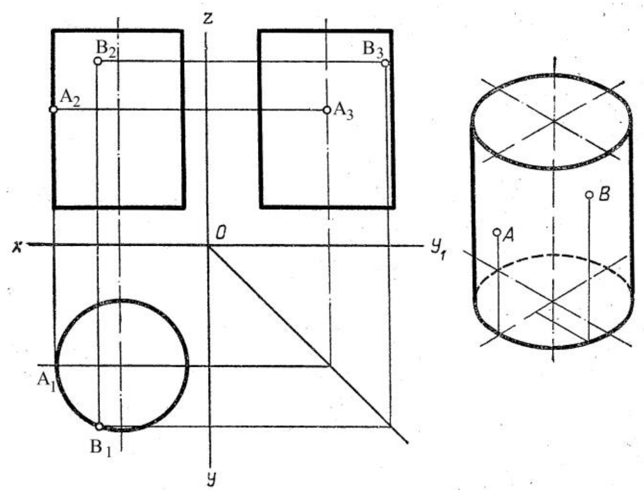


Рис. 20. Построение недостающих проекций точек на цилиндре

На рис. 21 приведены примеры нахождения недостающей проекции точек, заданных на поверхности конуса.

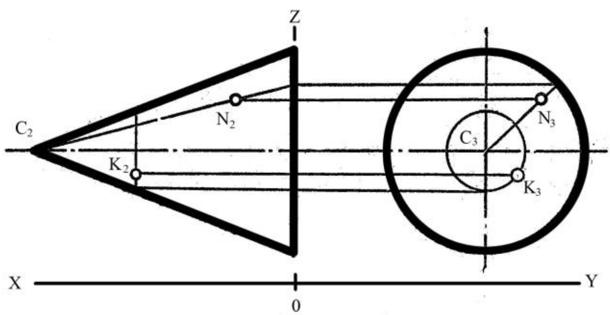
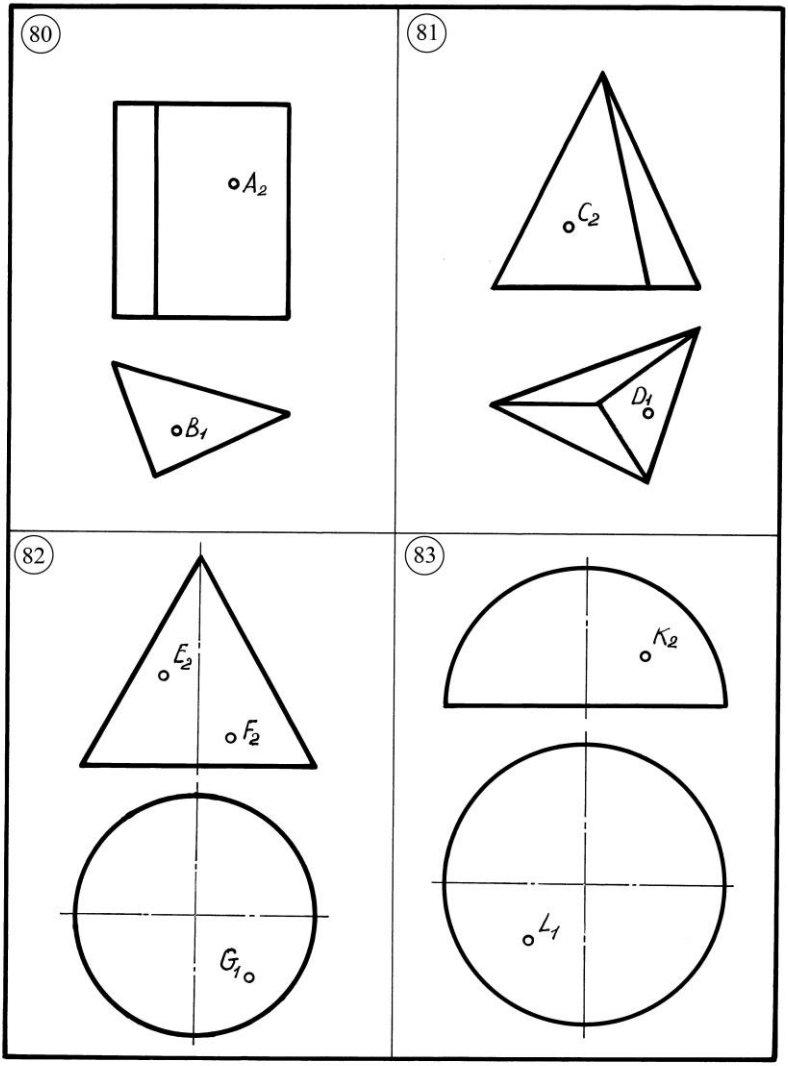


Рис. 21. Построение недостающих проекций точек на конусе
(используются фронтальная и профильная проекции)

Задачи.

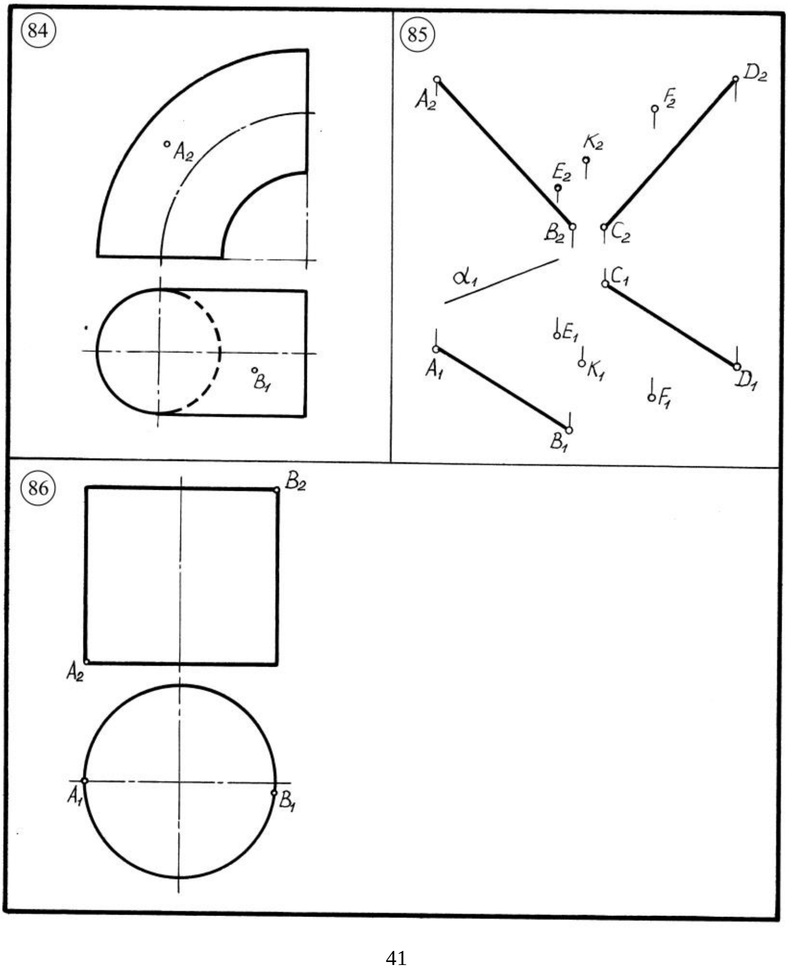
80–83. Построить недостающие проекции для точек A, B, C, D, E, P, K, L, которые принадлежат поверхностям призмы, пирамиды, конуса и полусферы.



84. Построить недостающие проекции для точек A, B, которые принадлежат поверхности тора.

85. Построить каркас из образующих гиперболического параболоида, заданного направляющими AB и CD и плоскостью параллелизма α. Определить взаимное положение точек E, F, K и поверхности параболоида.

86. Построить фронтальную проекцию геодезической линии на поверхности цилиндра между точками A и B.



Т е м а 7. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ, РАЗВЕРТЫВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. Что представляет собой фигура пересечения поверхности многогранника плоскостью?

2. Как построить проекции сечения многогранника проецирующей плоскостью?

3. Какие фигуры получаются при пересечении различными плоскостями шара, цилиндра, конуса?

4. Как построить проекции сечения кривой поверхности проецирующей плоскостью?

5. Как построить проекции сечения проецирующей поверхности цилиндра или призмы плоскостью общего положения?

6. Какими способами можно построить натуральную величину сечения?

7. Что называется развертками поверхностей?

8. Какие поверхности развертываются приближенно и какие точно?

Пример 7.1. Построить линию пересечения пирамиды плоскостью, определить натуральную величину сечения, построить развертку и аксонометрию.

На рис. 22 приведен пример для случая пересечения четырехугольной пирамиды фронтально проецирующей плоскостью. Для построения развертки необходимо знать натуральную величину каждого ребра пирамиды. По комплексному чертежу пирамиды, приведенному на рис. 22, можно определить натуральную величину всех ее ребер, кроме ребер S_2 и S_4. Натуральная величина последних определена путем их вращения вокруг оси (высоты пирамиды) до положения, параллельного фронтальной плоскости проекций. В результате такого вращения каждое из ребер S_2 и S_4 спроецируется на фронтальную плоскость проекций в натуральную величину.

Натуральная величина контура сечения, необходимая для построения развертки, может быть найдена различными способами (на рис. 22 она найдена способом совмещения).

Положение аксонометрических осей относительно геометрического тела следует выбирать так, чтобы максимально упрощалось построение аксонометрической проекции. На рис. 22 по соответствующим координатам построена аксонометрическая проекция каждой вершины усеченной пирамиды. Соединяя аксонометрические проекции вершин, получают аксонометрическую проекцию усеченной пирамиды.

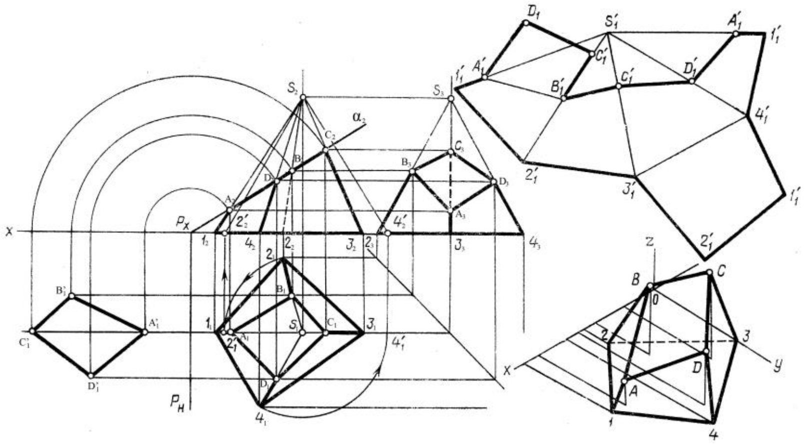


Рис. 22. Проекции сечения пирамиды плоскостью, натуральная величина сечения, аксонометрия и развертка поверхности

Пример 7.2. Построить развертку наклонного конуса с нанесением на нее линии сечения конуса плоскостью. Для построения разверток поверхностей наклонных или прямых, но не круговых конусов и цилиндров рекомендуется поступать следующим образом:

1) в заданный конус или цилиндр вписывают n-угольную пирамиду или призму; число n зависит от размеров чертежа, но во всех случаях его не следует брать меньше шести;

2) строят развертку n-угольной пирамиды или призмы;

3) концы ребер на развертке соединяют плавными кривыми.

Таким образом, получена развертка конуса, представленная на рис. 23. На развертке конуса показана линия пересечения его плоскостью α.

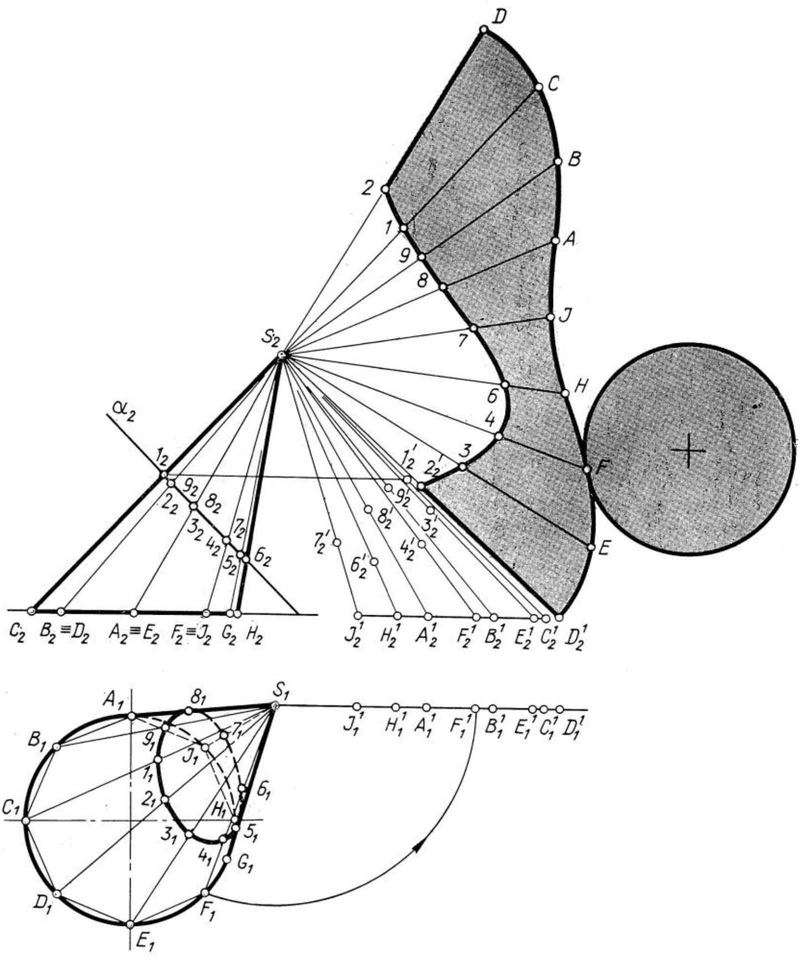
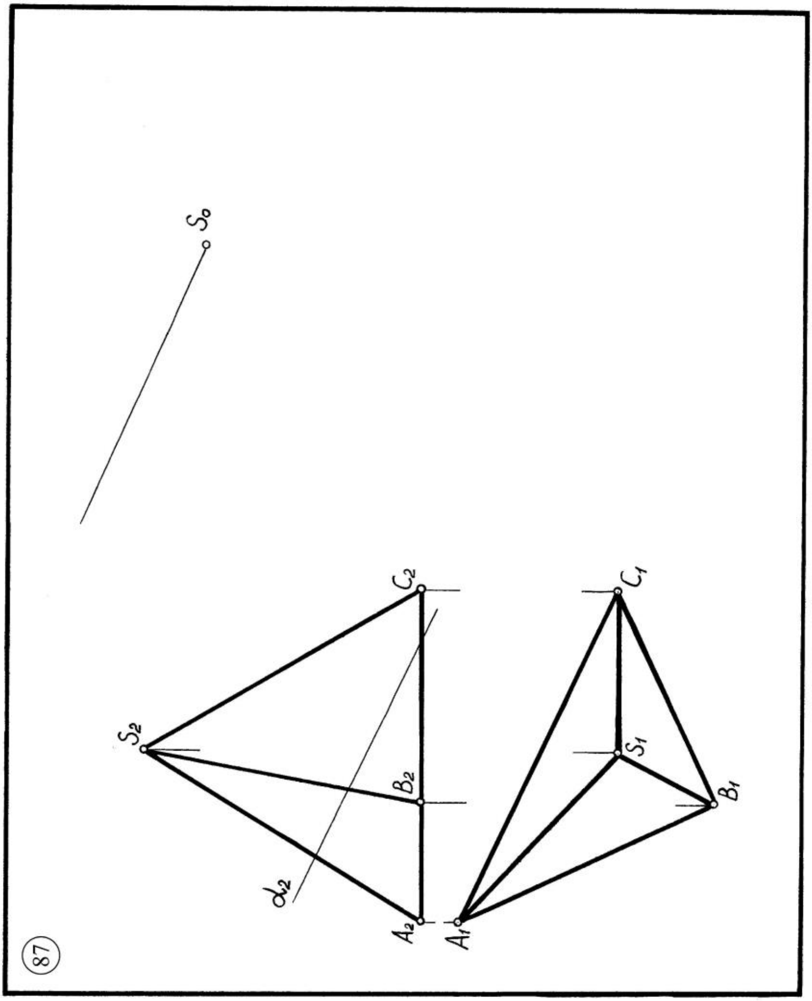


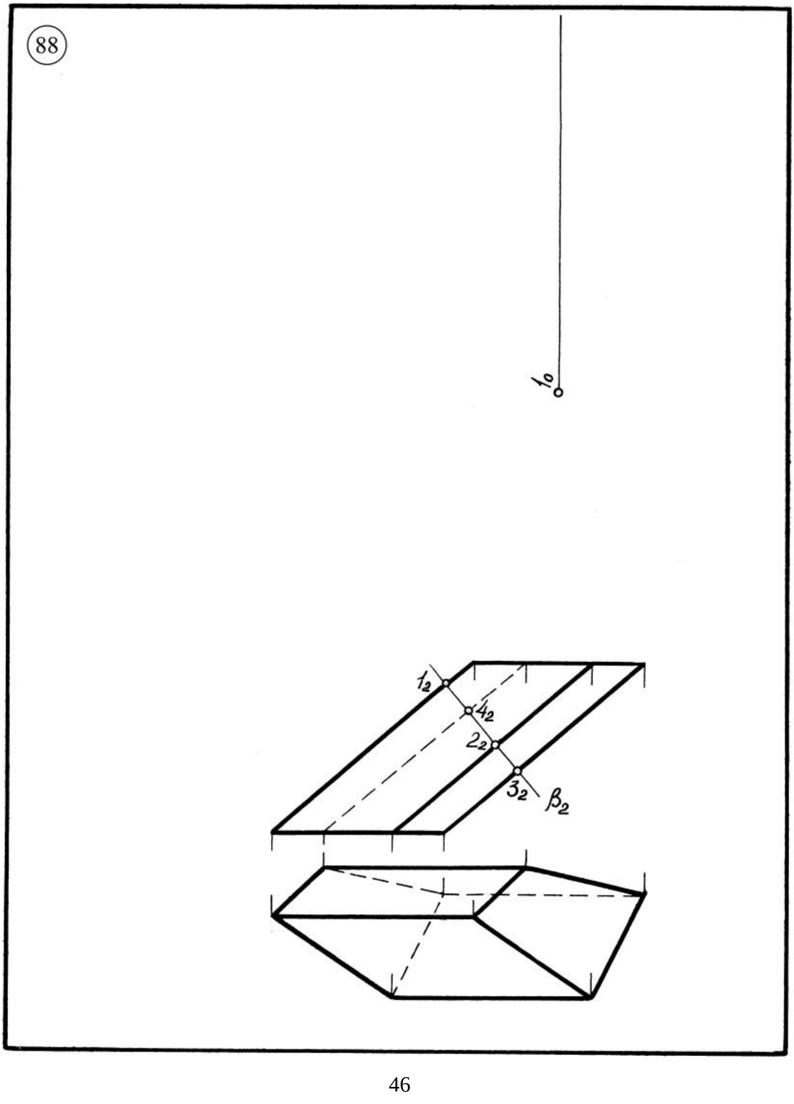
Рис. 23. Построение линии пересечения конуса плоскостью и развертки конуса

Задачи.

87. Определить проекции и натуральную величину сечения пирамиды плоскостью β. Сделать развертку пирамиды и нанести на ней линию сечения.

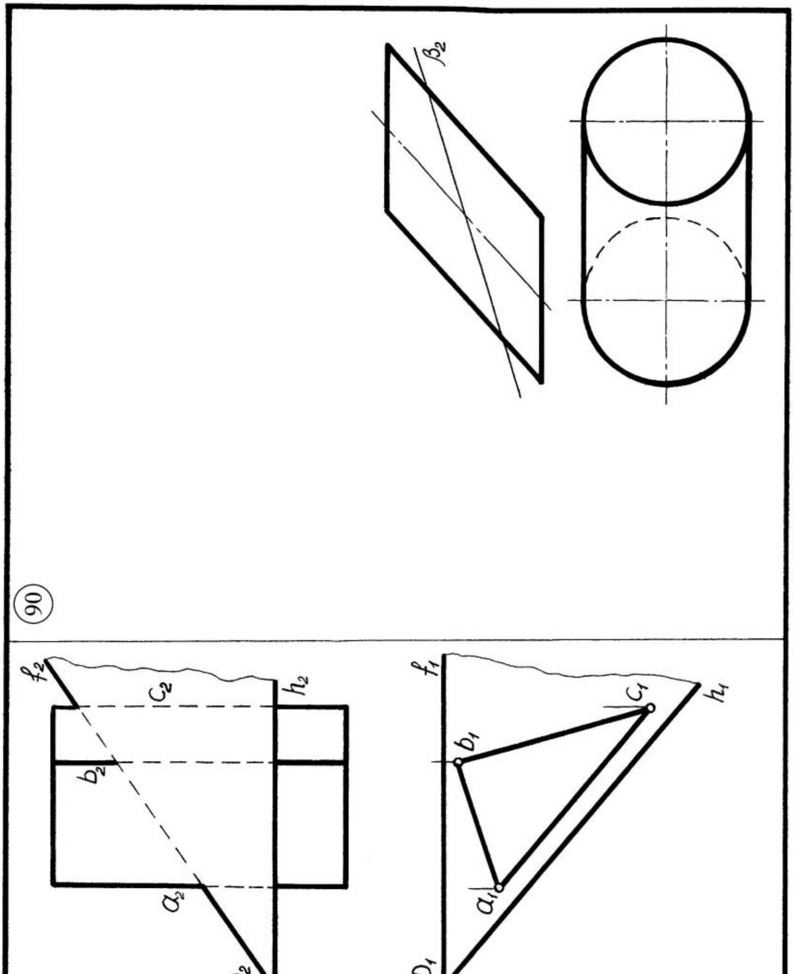


88. Определить проекции линии пересечения призмы плоскостью β, сделать развертку боковой поверхности призмы с использованием нормального сечения и методом раскатки. На развертку нанести линию сечения.

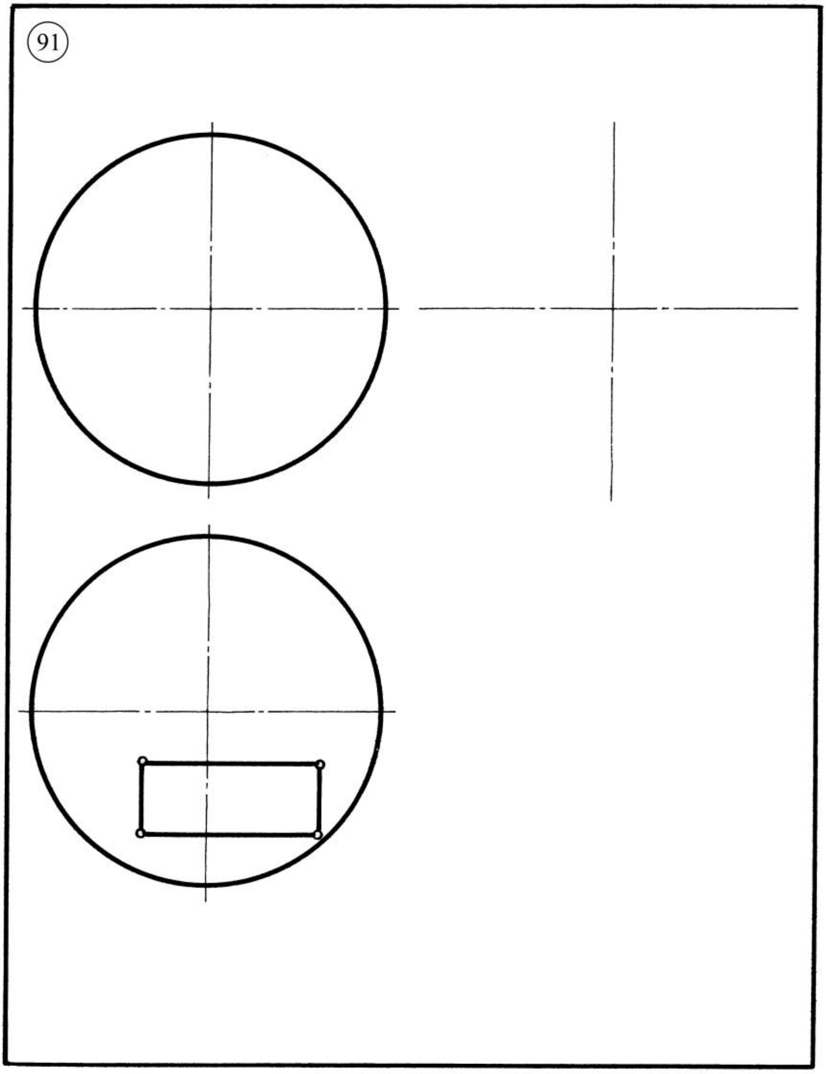


89. Определить проекции линии пересечения призмы плоскостью (h ∩ f).

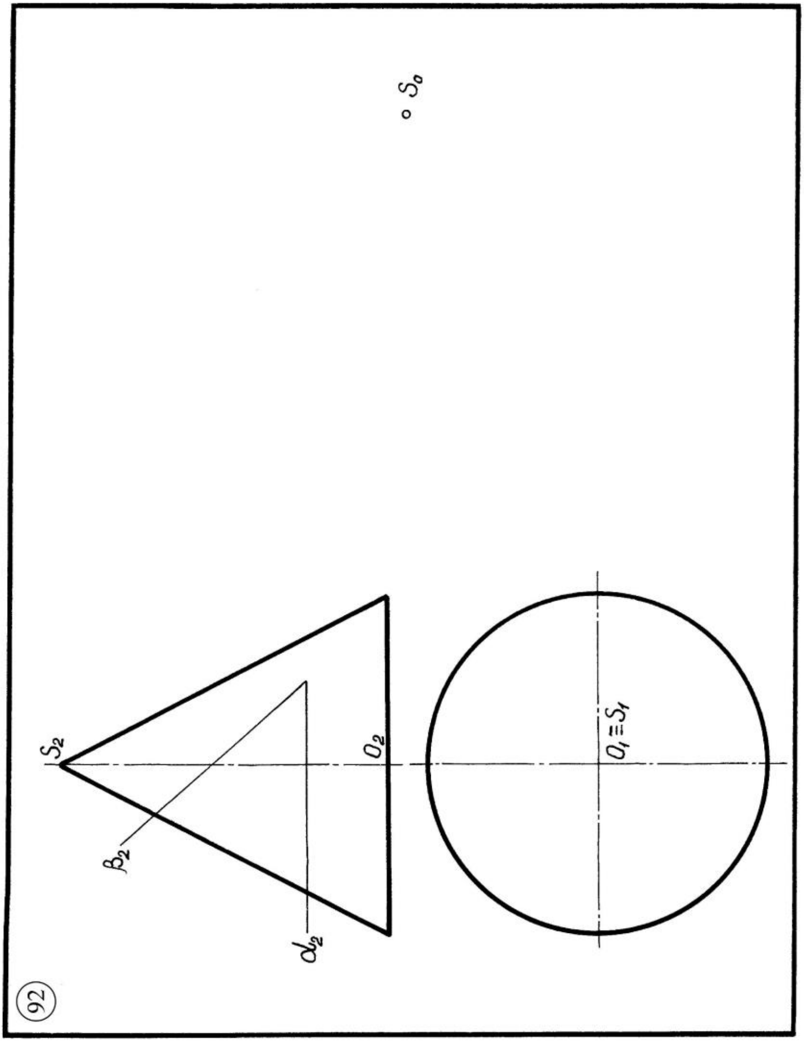
90. Определить проекции линии пересечения цилиндра плоскостью β, сделать развертку боковой поверхности с нанесением на ней линии сечения.



91. На сферической поверхности построить недостающую проекцию сквозного призматического отверстия и достроить профильную проекцию сферы с отверстием.



92. Определить проекции линии пересечения конуса плоскостями α и β. Построить развертку боковой поверхности с нанесением на ней линии сечения.



Тема 8. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ

1. В какой последовательности решается задача по определению точек пересечения (точек входа и выхода) прямой линии с поверхностью?

2. Как определяется видимость линии, пересекающейся с непрозрачной поверхностью?

Пример 8.1. Определить точку пересечения прямой с пирамидой. Задача определения точек пересечения прямой с поверхностью многогранника решается аналогично задаче нахождения точки пересечения прямой и плоскости. И в данном случае решение распадается на три этапа:

1) через данную прямую l проводят вспомогательную плоскость γ;

2) строят сечение многогранника плоскостью γ;

3) определяют точки пересечения прямой l с контуром сечения.

На рис. 24 искомые точки K и L найдены как точки пересечения прямой l с контуром плоского сечения 1–2–3.

Построение точек пересечения прямой с поверхностью многогранника на эпюре показано на рис. 25.

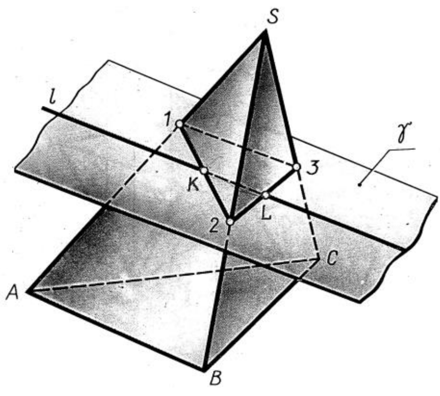


Рис. 24. Пересечение прямой линии с пирамидой

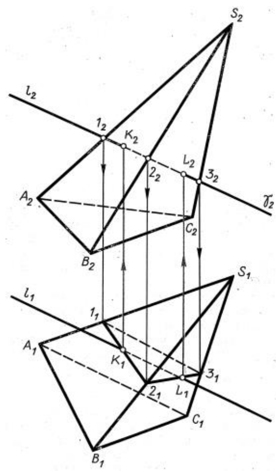


Рис. 25. Построение проекций точек пересечения прямой с пирамидой

Пример 8.2. Определить точки пересечения прямой с пирамидой. На рис. 26 показано построение точек пересечения прямой линии с поверхностью пирамиды. Через прямую AB проведена вспомогательная фронтально-проецирующая плоскость α. Фронтальная проекция фигуры сечения пирамиды этой плоскостью сливается с фронтальной проекцией плоскости; горизонтальная проекция сечения найдена построением. Точки пересечения горизонтальной проекции прямой AB с горизонтальной проекцией фигуры сечения представляют собой горизонтальные проекции искомых точек; по найденным горизонтальным проекциям точек (K_1 и M_1) построены фронтальные проекции (K_2 и M_2) точек пересечения.

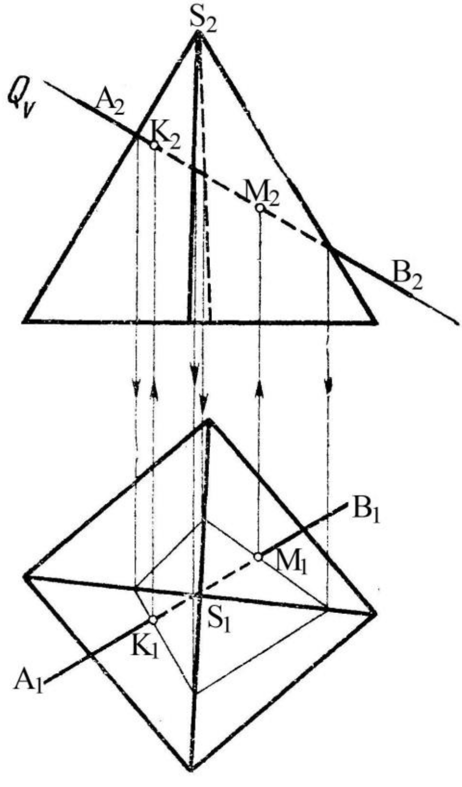


Рис. 26. Построение проекций точек пересечения прямой линии с пирамидой

На рис. 27 представлен прямой круговой цилиндр, ось которого перпендикулярна к плоскости Π_1, и построены точки пересечения прямой AB с цилиндром, а на рис. 28 – конус при таком же положении оси. Горизонтальная проекция точки пересечения K_1 прямой AB, перпендикулярной к плоскости Π_1, с боковой поверхностью прямого кругового конуса совпадает с горизонтальной проекцией A_1B_1 самой прямой. Проведя горизонтальную проекцию образующей S_1T_1 и построив ее фронтальную проекцию S_2T_2, находим фронтальную проекцию K_2 искомой точки.

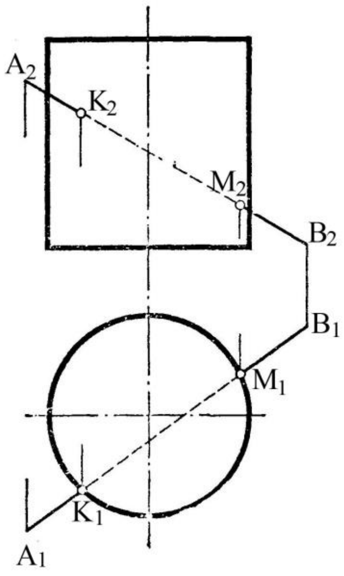


Рис. 27. Построение проекций точек пересечения прямой линии с цилиндром

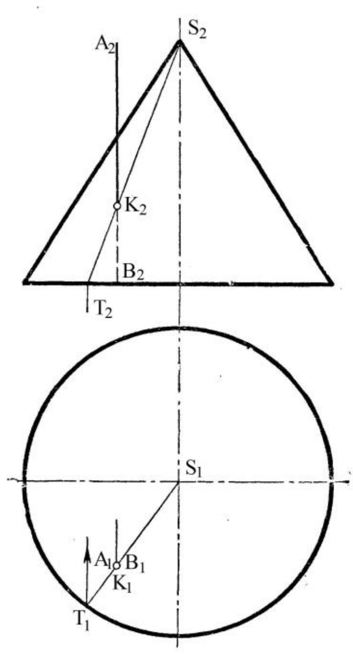
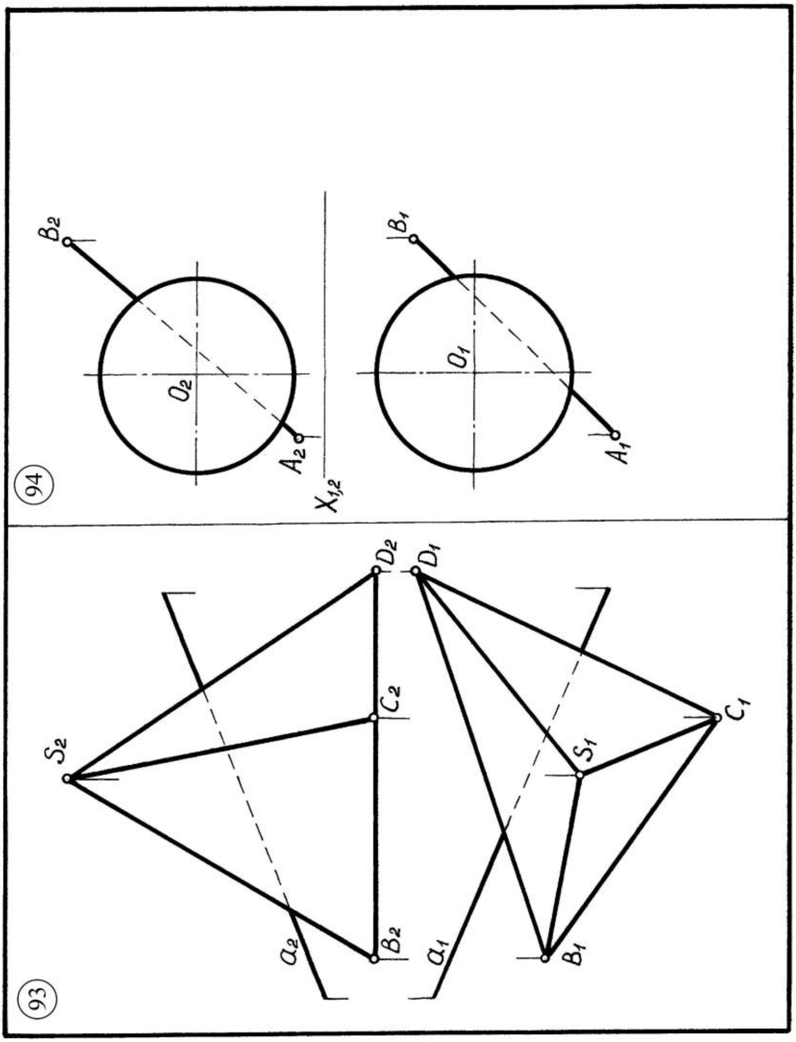


Рис. 28. Построение проекций точек пересечения прямой линии с конусом

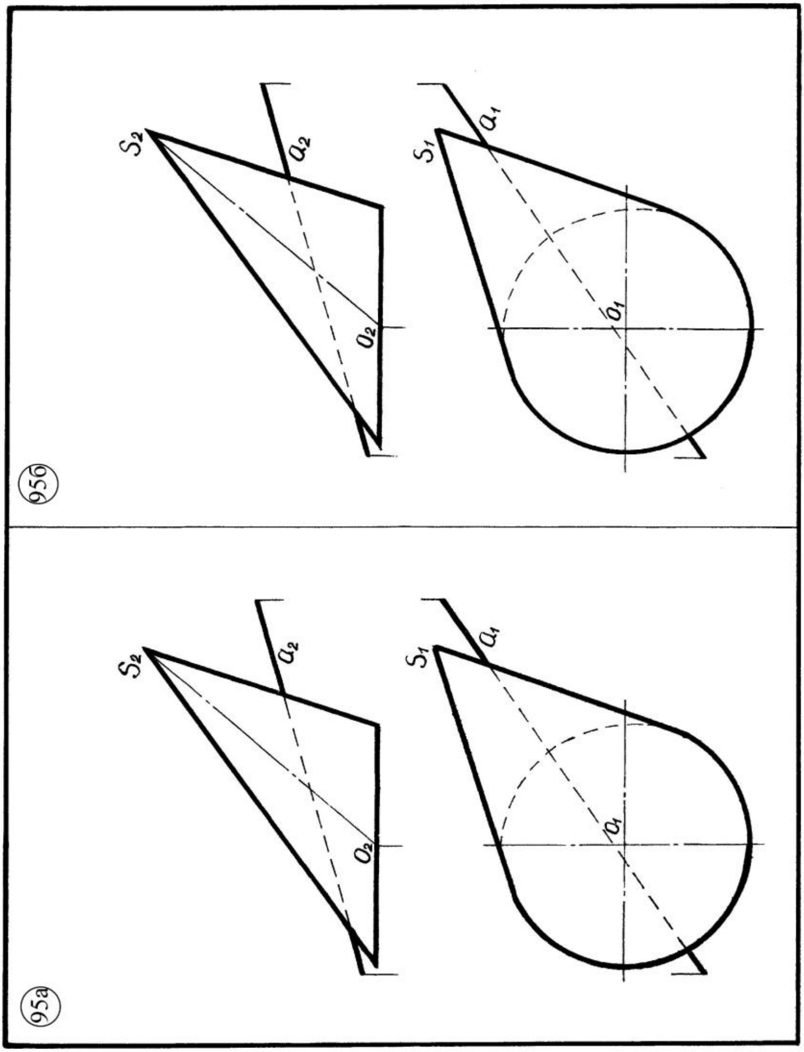
Задачи.

93. Построить точки пересечения прямой a с поверхностью пирамиды.

94. Построить точки пересечения прямой AB с поверхностью сферы.



95 (а, б). Построить точки пересечения прямой а с поверхностью наклонного конуса (двумя способами).



Т е м а 9. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. К каким двум задачам начертательной геометрии может быть сведена задача на построение линии пересечения двух гранных поверхностей?

2. Как определяется линия пересечения двух кривых поверхностей?

3. Чем следует руководствоваться при выборе вспомогательных плоскостей-посредников, определяя линию пересечения кривых поверхностей?

4. В каком случае при определении линии пересечения двух поверхностей могут быть применены вспомогательные сферические поверхности?

5. Как определяется видимость линий пересечения двух непрозрачных поверхностей?

Пример 9. Построить линию взаимного пересечения поверхностей.

Линии пересечения поверхностей вращения обычно строят при помощи вспомогательных секущих плоскостей. На рис. 29, *а* представлено построение линии пересечения цилиндра и усеченного конуса: каждая вспомогательная плоскость (рис. 29, *б*) пересекает одновременно обе заданные поверхности по соответствующим линиям: цилиндр – по прямолинейным образующим, усеченный конус – по окружностям.

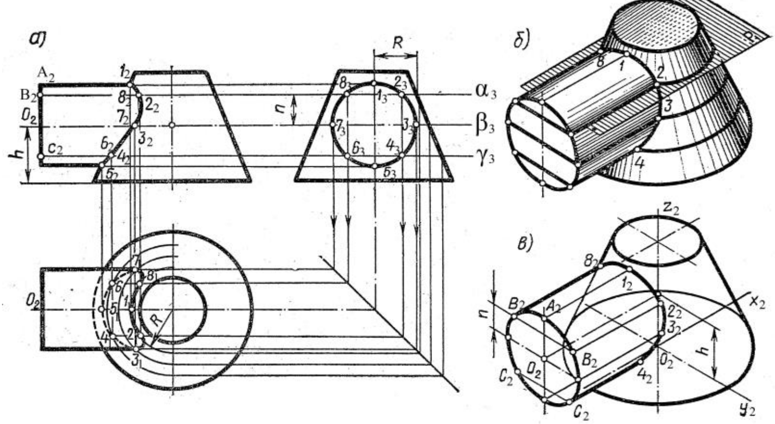


Рис. 29. Построение линии пересечения усеченного конуса с цилиндром

Эти линии пересекаются между собой в точках, определяющих линию пересечения заданных поверхностей. Количество вспомогательных плоскостей берется из условия получения достаточного числа точек искомой линии пересечения поверхностей. На рис. 29, *в* показано построение изометрической проекции пересекающихся цилиндра и усеченного конуса.

Два многогранника могут пересекаться по одной или двум замкнутым ломаным линиям, для построения которых находят сначала точки пересечения ребер одного многогранника с гранями другого, а затем – ребер второго с гранями первого. Соединяя определенным образом полученные точки, строят искомую ломаную, каждое звено которой представляет собой прямую пересечения двух граней – грани первого многогранника с гранью второго (рис. 30).

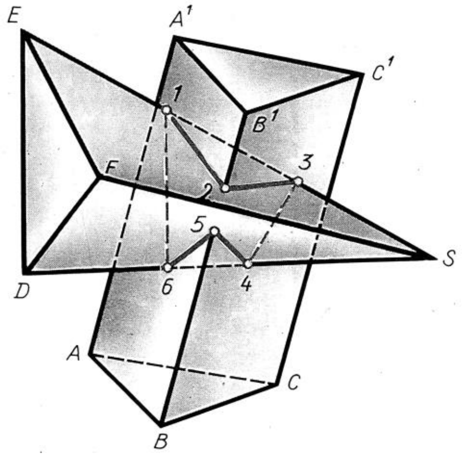


Рис. 30. Пересечение многогранников

Итак, построение линии пересечения двух многогранников сводится к решению задачи на пересечение прямой линии с многогранником (или на взаимное пересечение двух плоскостей – граней многогранников).

Так как каждое звено искомой пространственной ломаной является линией пересечения граней двух различных многогранников, то соединять следует лишь те точки, которые одновременно принадлежат одним и тем же граням пересекающихся многогранников.

На рис. 31 приведен пример построения проекций замкнутой линии пересечения многогранников 1–2–3–4–5–6, когда грани одного из них перпендикулярны какой-либо плоскости проекции (в данном случае Π_1). Так как грани треугольной призмы, изображенной на рис. 31, перпендикулярны Π_1, то горизонтальные проекции точек (1, 2, 3, 4) пересечения ребер пирамиды отмечаем на эпюре без вспомогательных построений. Фронтальные проекции этих точек находим, проводя линии проекционной связи. Вспомогательную горизонтально проецирующую плоскость γ пришлось провести только через одно ребро призмы BB^1 для определения точек 5 и 6.

Остается отметить видимость звеньев построенной ломаной. Видимыми будут те звенья, по которым пересекаются две видимые грани. Если хотя бы одна из граней невидима, то и звено искомой линии, расположенное на этой грани, будет невидимым. В связи с этим звенья 3_2–5_2–4_2 и 1_2–6_2–2_2 показаны видимыми, а звенья 1_2–3_2 и 4_2–2_2 – невидимыми.

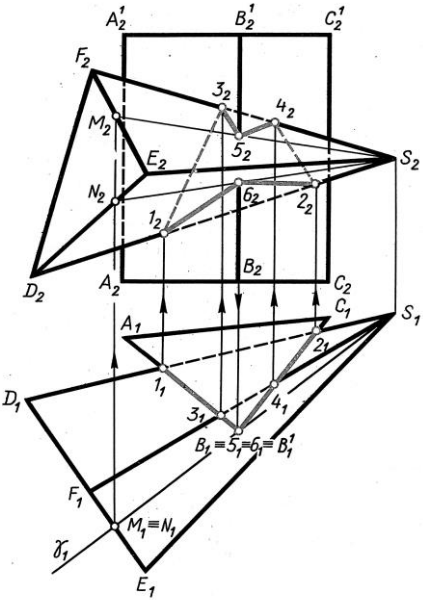
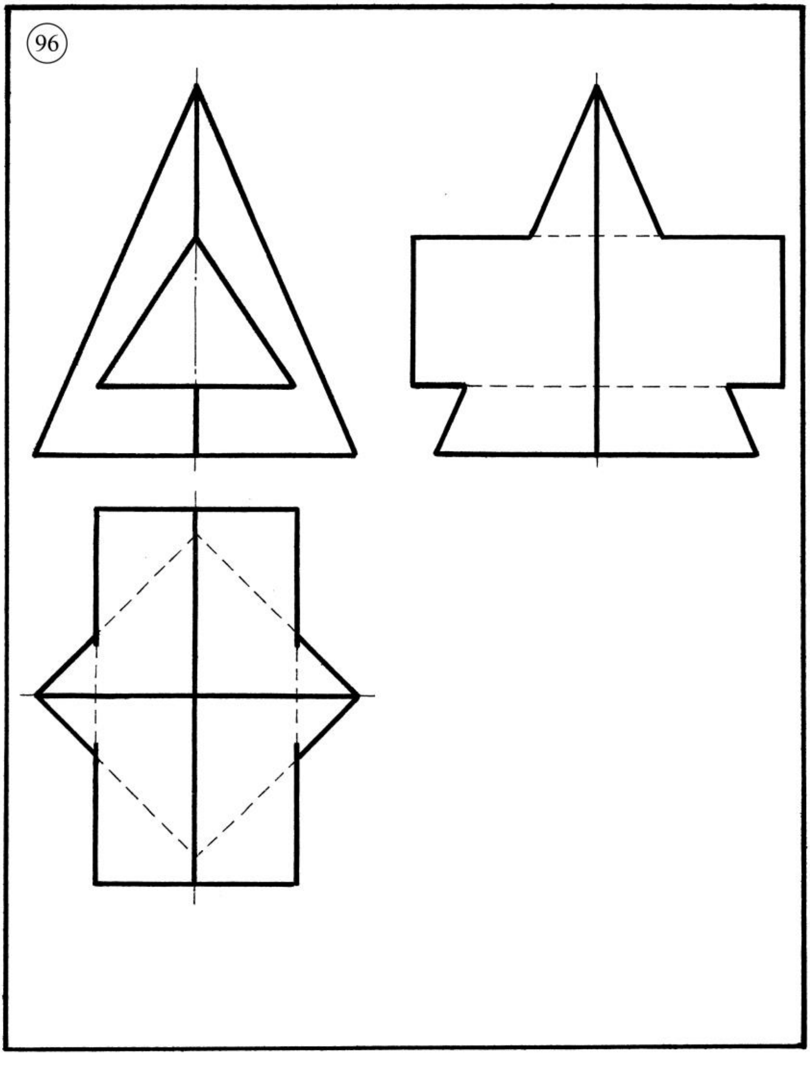


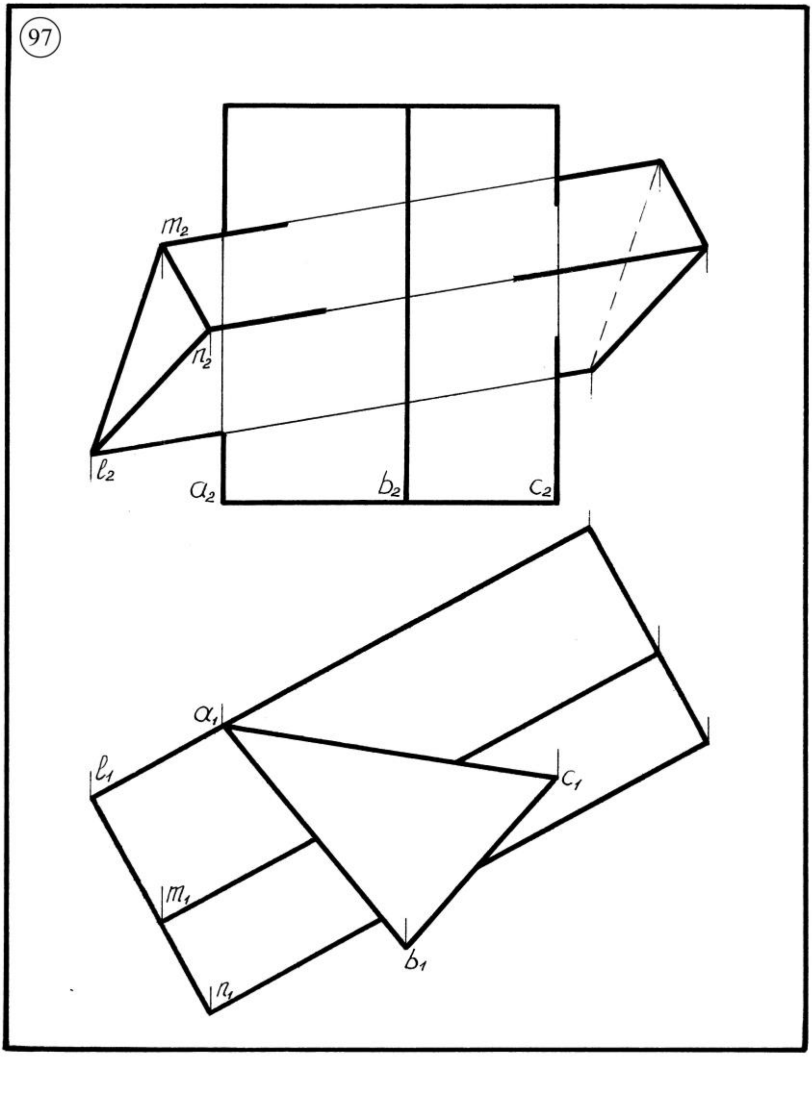
Рис. 31. Построение проекций линии пересечения многогранников

Задачи.

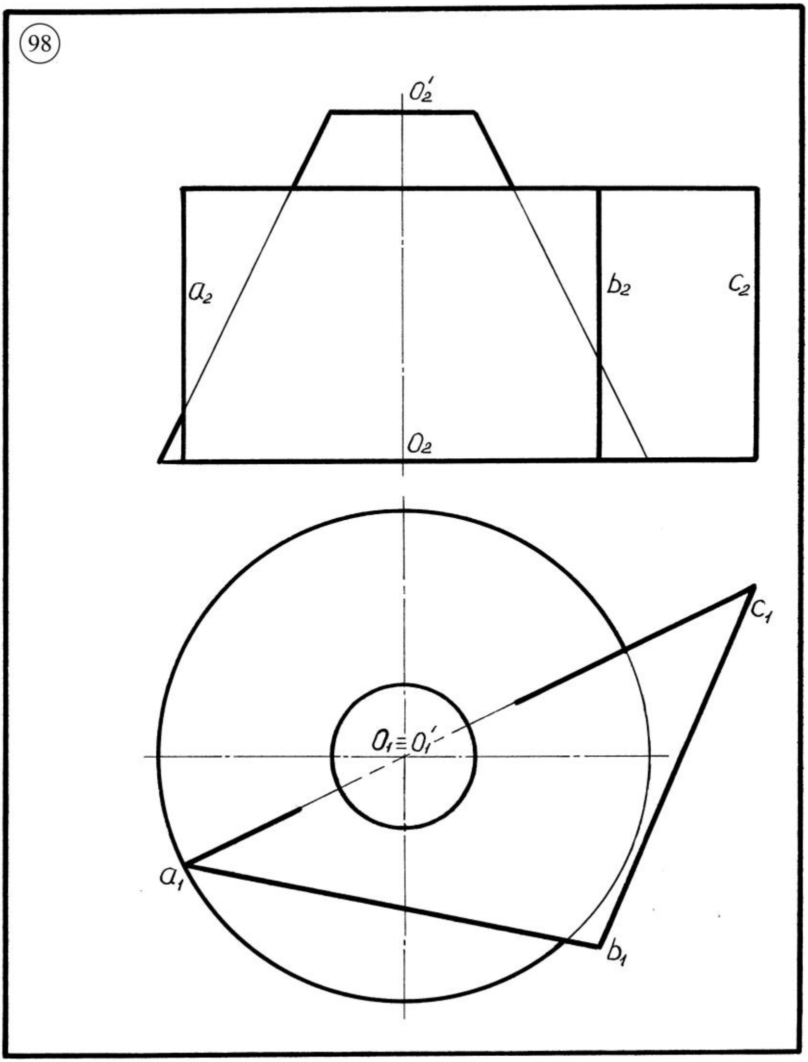
96. Построить проекции линии взаимного пересечения поверхностей. Определить видимость линий пересечения и самих поверхностей, считая поверхности непрозрачными.



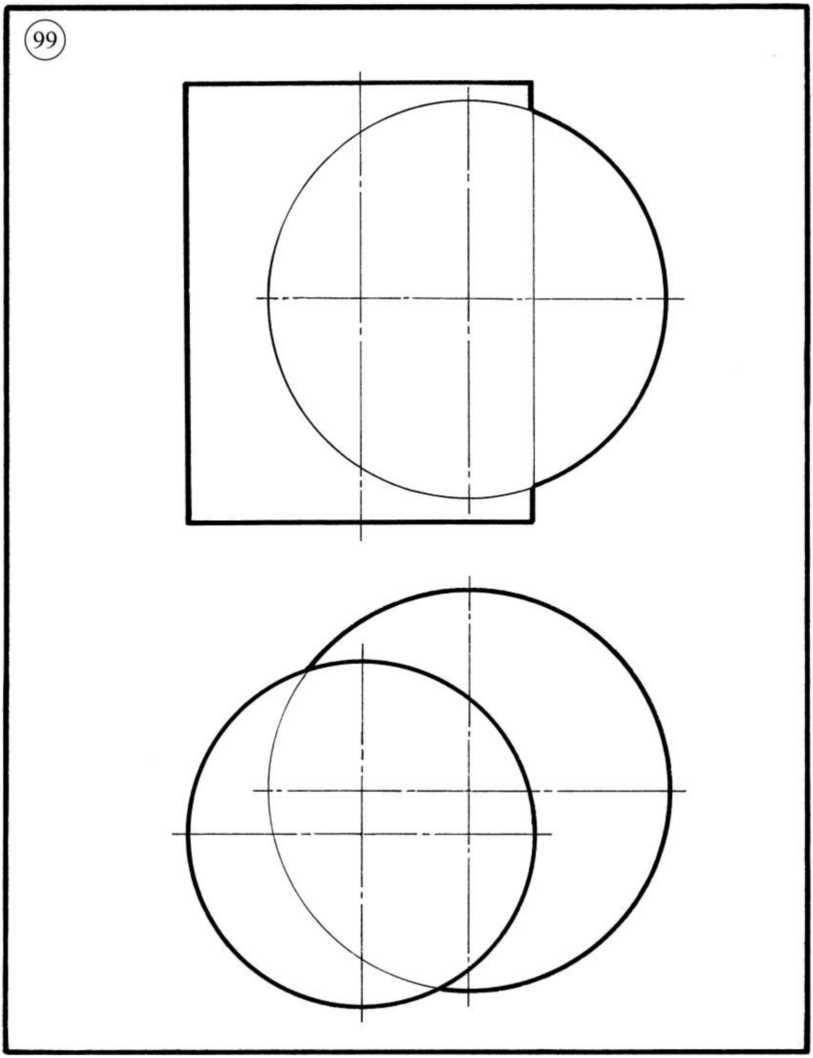
97. Построить проекции линии взаимного пересечения поверхностей. Определить видимость линий пересечения и самих поверхностей, считая поверхности непрозрачными.



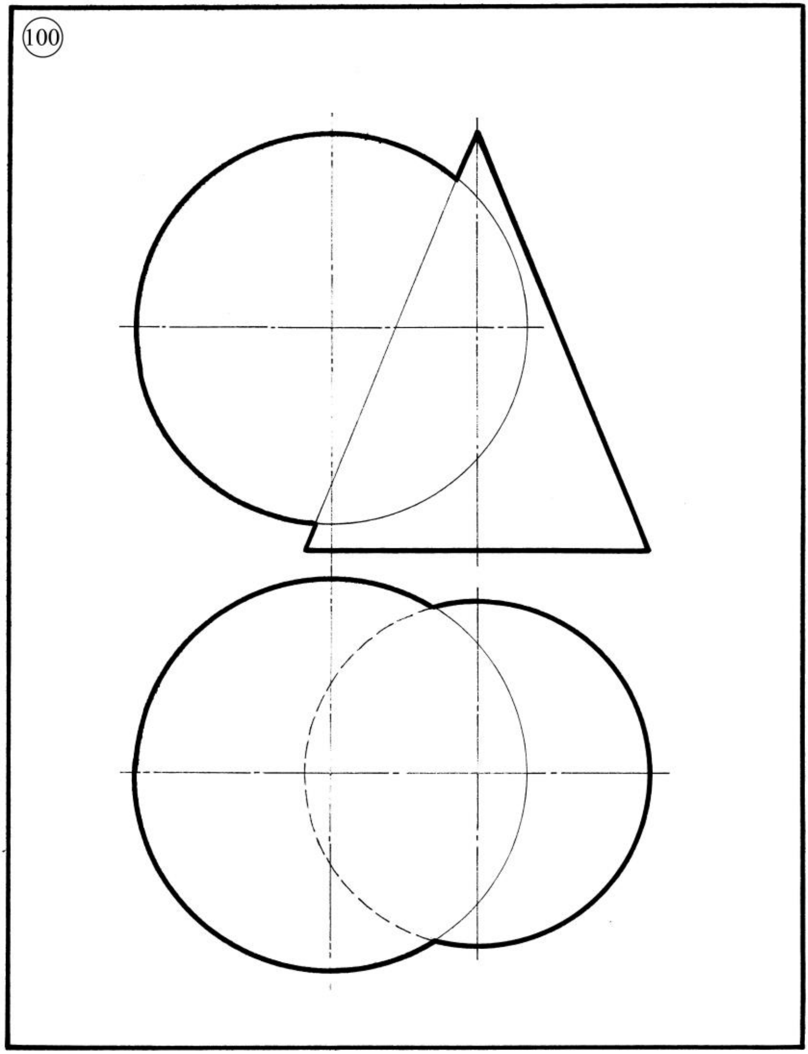
98. Построить проекции линии взаимного пересечения поверхностей. Определить видимость линий пересечения и самих поверхностей, считая поверхности непрозрачными.



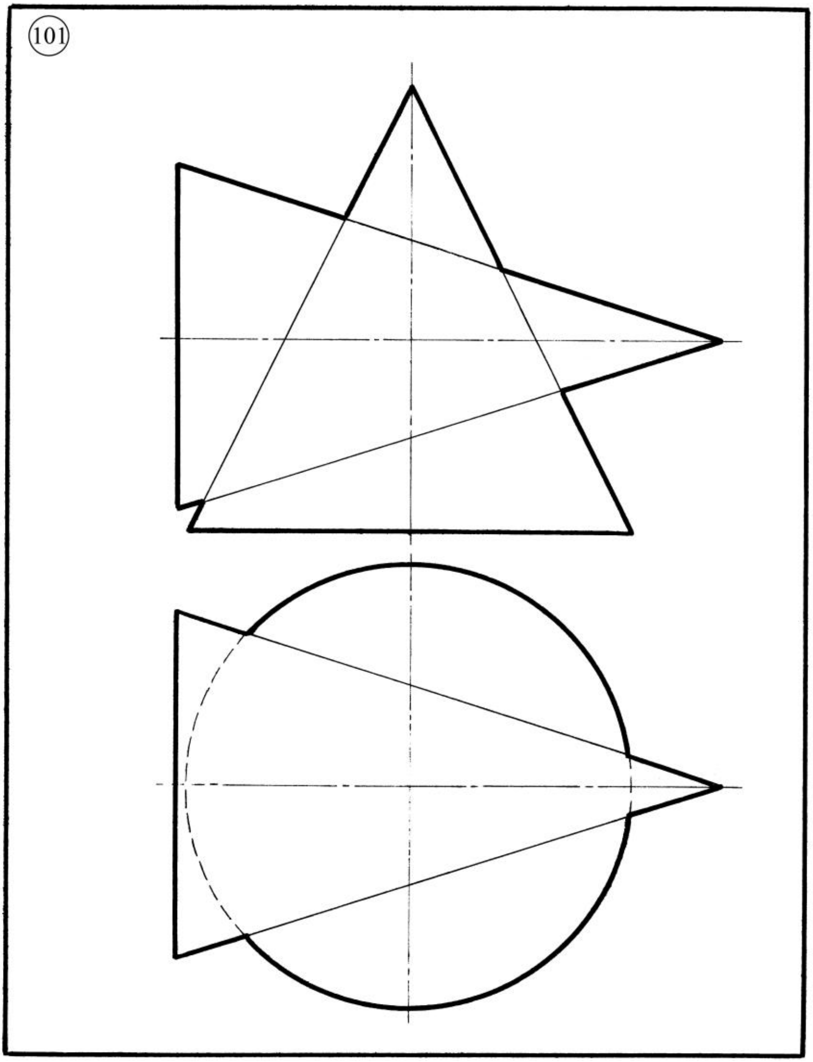
99. Построить проекции линии взаимного пересечения поверхностей. Определить видимость линий пересечения и самих поверхностей, считая поверхности непрозрачными.



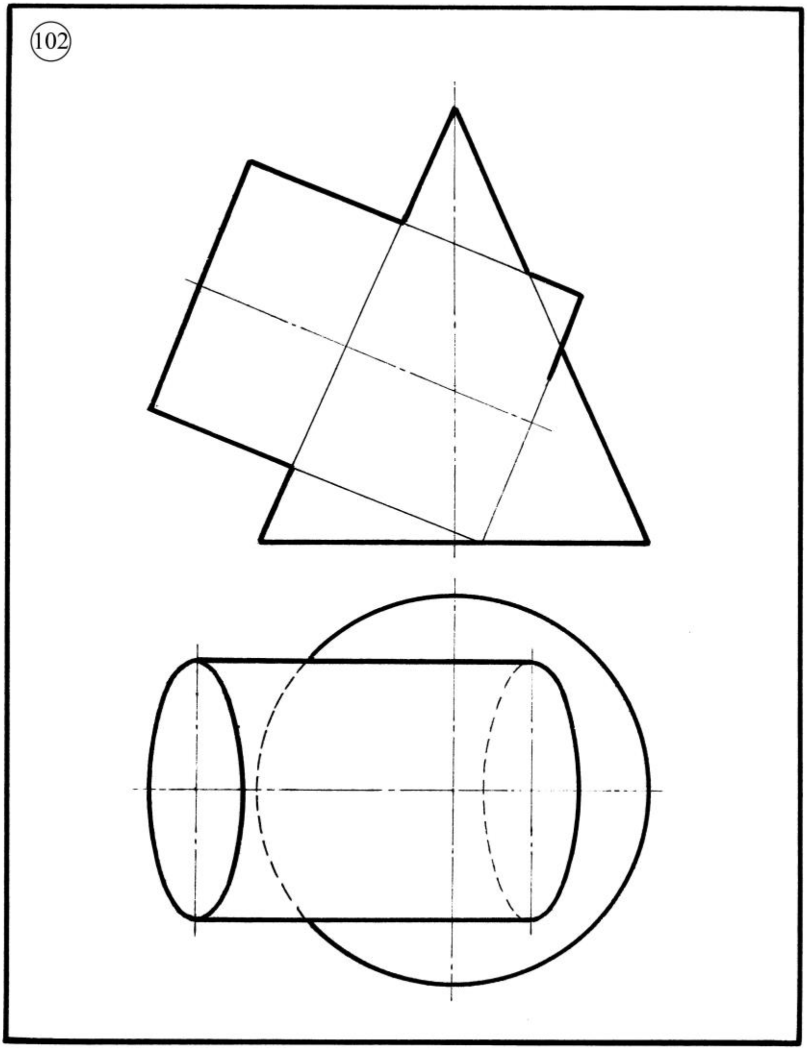
100. Построить проекции линии взаимного пересечения поверхностей. Определить видимость линий пересечения и самих поверхностей, считая поверхности непрозрачными.



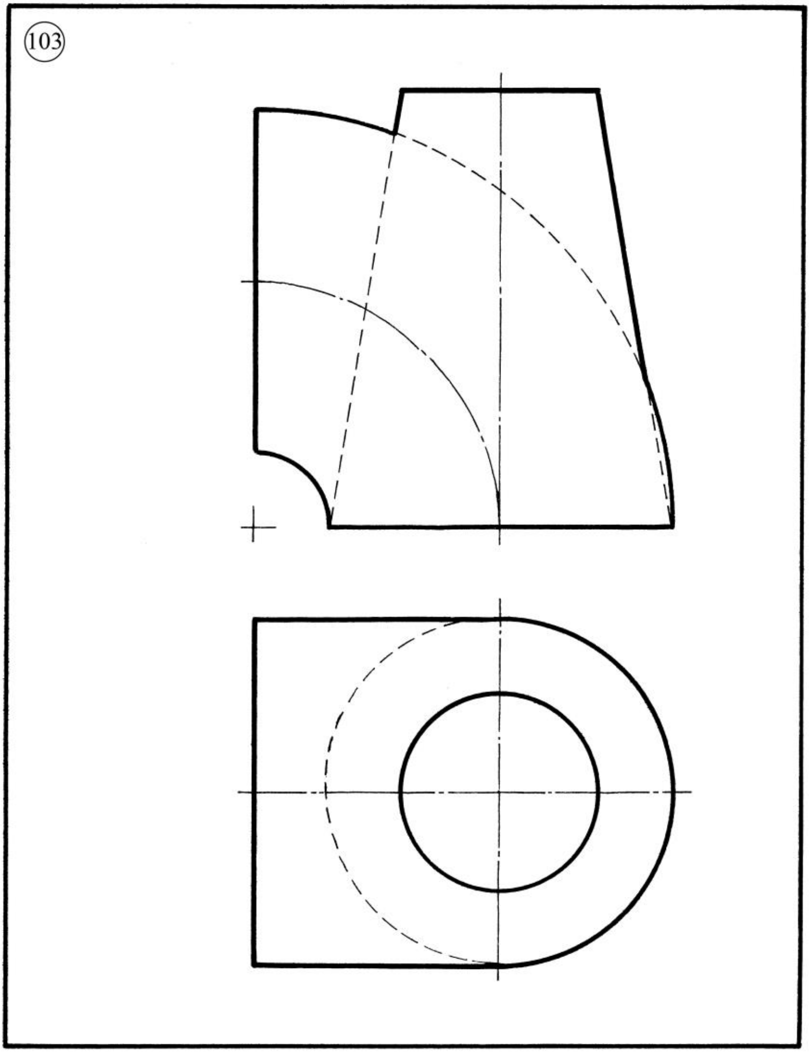
101. Построить проекции линии взаимного пересечения поверхностей. Определить видимость линий пересечения и самих поверхностей, считая поверхности непрозрачными.



102. Построить проекции линии взаимного пересечения поверхностей. Определить видимость линий пересечения и самих поверхностей, считая поверхности непрозрачными.



103. Построить проекции линии взаимного пересечения поверхностей. Определить видимость линий пересечения и самих поверхностей, считая поверхности непрозрачными.



Т е м а 10. ПРОЕКЦИИ С ЧИСЛОВЫМИ ОТМЕТКАМИ

10.1. Точка, прямая, плоскость

1. В чем заключается сущность метода проекций с числовыми отметками? Его достоинства и недостатки. Область применения этого метода.

2. Что такое плоскость нулевого уровня, или основная плоскость?

3. Каким образом можно задать прямую в проекциях с числовыми отметками?

4. Что называется заложением прямой линии?

5. Как определить натуральную величину прямой линии и угол наклона ее к плоскости нулевого уровня?

6. Как определить уклон прямой линии?

7. Что такое интервал прямой линии?

8. Какова зависимость между интервалом прямой и ее уклоном?

9. Что значит проградуировать отрезок прямой?

10. Каковы признаки параллельности двух прямых линий?

11. Что является признаком пересечения двух прямых в проекциях с числовыми отметками?

12. Каким образом может быть задана плоскость в проекциях с числовыми отметками?

13. Что называется линией масштаба уклона? Как она обозначается на чертеже?

14. Что такое уклон плоскости, интервал плоскости?

15. Что называется углом падения плоскости?

16. Как определить направление простирания плоскости?

17. Что называется углом простирания плоскости?

18. Как построить линию пересечения двух плоскостей?

19. Как определить точку пересечения прямой линии с плоскостью или поверхностью?

Пример 10.1.1. Проградуировать отрезок прямой.

На рис. 32 найдена натуральная длина отрезка AB, для чего с плоскостью чертежа совмещена трапеция $AA_{3,4}B_{7,9}B$, основаниями которой служат проецирующие лучи $AA_{3,4}$ и $BB_{7,9}$, а боковыми сторонами – отрезок AB и его проекция $A_{3,4}B_{7,9}$; последняя принята за ось вращения. В совмещенном положении трапеция заняла положение $\overline{A}A_{3,4}B_{7,9}\overline{B}$. При этом точки $\overline{A}$ и $\overline{B}$ окажутся на перпендикулярах к оси вращения, первая – на расстоянии h_A = 3,4 м от проекции $A_{3,4}B_{7,9}$, а вторая – на расстоянии h_B = 7,9 м. Оба отрезка, изображающие параллельные стороны трапеции, строят в масштабе чертежа. Для упрощения работы обычно вычерчивают не трапецию, а выделенный на рис. 32 прямоугольный треугольник, катетами которого являются проекция данного отрезка и Δh (превышение точки B над A). Гипотенуза треугольника определяет искомую длину отрезка AB, а угол между $\overline{A}\overline{B}$ и горизонтальным катетом (угол φ) представляет собой угол между AB и плоскостью Π_0.

На рис. 32 также показано графическое градуирование проекции отрезка с помощью двух пучков параллельных прямых.

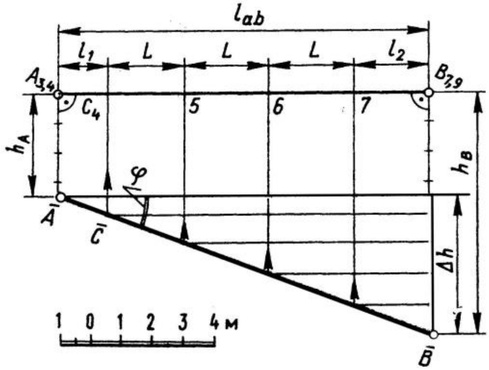


Рис. 32. Градуирование прямой

Пример 10.1.2. Определить углы падения φ и простирания ψ плоскости α, заданной тремя точками A, B и C (рис. 33).

Проградуировав отрезки AB и CB, соединяем прямыми точки с одинаковыми отметками. Это будут горизонтали заданной плоскости α, перпендикулярно к которым проводим масштаб падения α_i плоскости. Для определения угла φ на масштабе падения взяты две точки E_{13} и F_{14}, разность отметок которых равна единице. С помощью прямоугольного треугольника, одним катетом которого является $E_{13}F_{14}$, а другим – отрезок, равный единице длины, определяем угол наклона линии наибольшего ската плоскости α к Π_0. Этот угол φ и будет искомым углом падения. Затем устанавливаем направление простирания. Оно показано стрелкой на горизонтали 14. Также построен и угол простирания ψ.

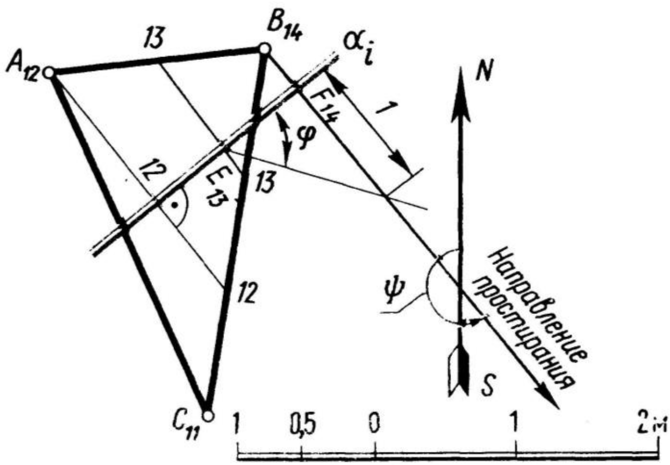


Рис. 33. Определение углов падения и простирания плоскости

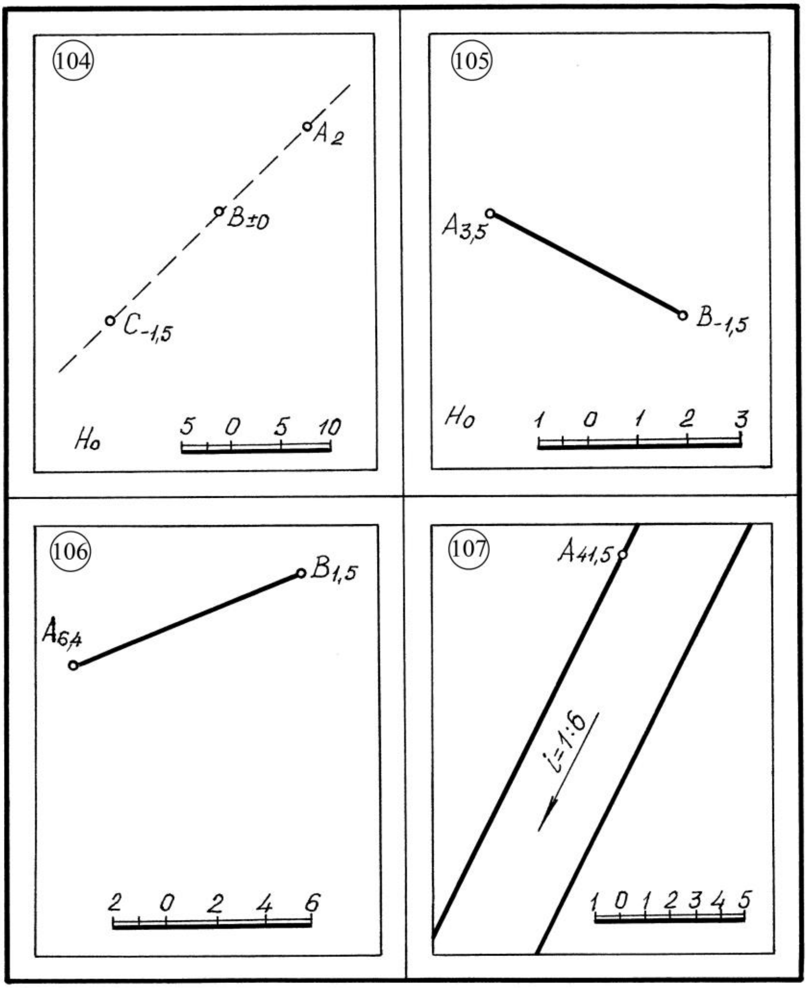
Задачи.

104. Определить глубину смотровых колодцев водопровода А, В и С, отметки крышек которых соответственно равны 3,5; 3,0; 1,5 м; на плане указаны отметки дна колодцев. Задача решается путем вычислений.

105. Определить длину прямой между точками А и В и угол наклона ее к основной плоскости.

106. Определить положение смотрового колодца, установленного на трубопроводе АВ с отметкой 3,5.

107. Построить горизонтали полотна дороги с бровкой, проходящей через точку А с уклоном 1:6.

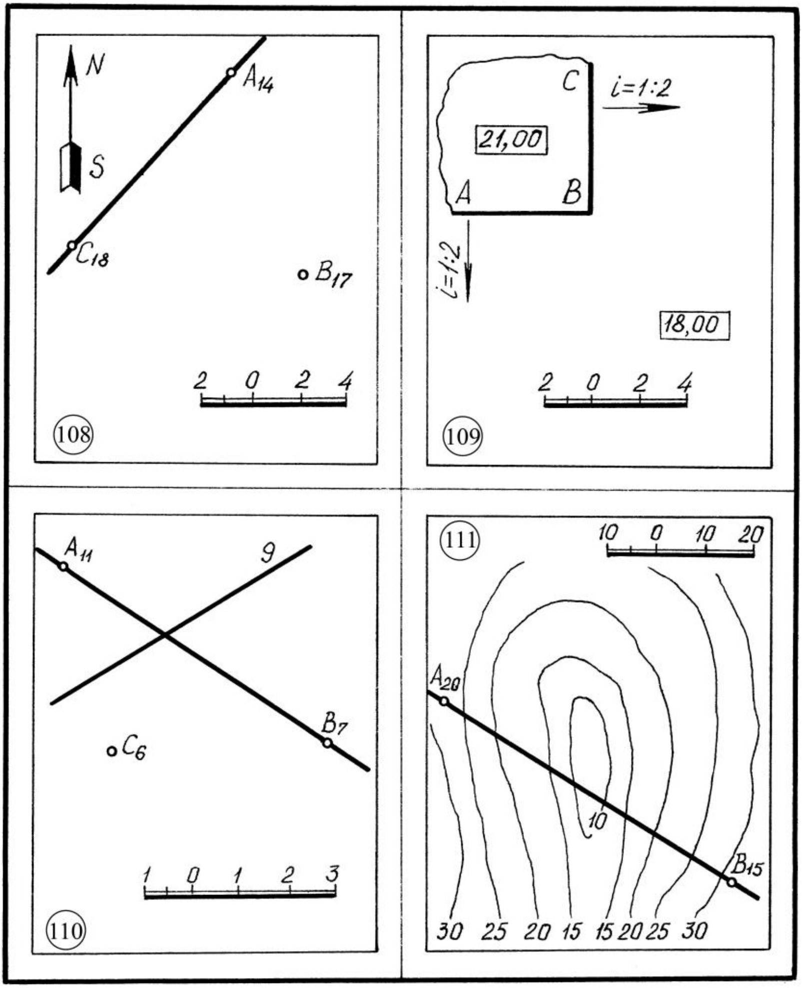


108. Определить уклон, углы падения и простирания плоскости откоса, проходящего через бровку АС и точку В.

109. Построить линию пересечения плоскостей откосов горизонтальной площадки с бровками АВ и CD. Отметка площадки и уклоны откосов заданы на чертеже.

110. Определить точку пересечения бровки открылка АВ с плоскостью откоса, заданного горизонталью с отметкой 9 и точкой С.

111. Определить точки выхода трубопровода на поверхность земли.



10.2. Поверхности в проекциях с числовыми отметками. Пересечение поверхностей плоскостью. Взаимное пересечение поверхностей

1. В чем заключается особенность изображения поверхностей в проекциях с числовыми отметками?
2. Что называется поверхностью одинакового ската?
3. Что представляет собой кривая пересечения поверхности одинакового ската горизонтальной плоскостью?
4. Как построить линию наибольшего уклона на топографической поверхности?
5. Как обозначается на чертеже направление наибольшего уклона поверхности?
6. Как построить линию взаимного пересечения поверхностей?

Пример 10.2.1. Найти точку пересечения прямой АВ с топографической поверхностью.

Проградуировав заданную прямую АВ (рис. 34), проводят через нее вспомогательную плоскость. Далее определяют точки пересечения одноименных горизонталей плоскости и топографической поверхности. Множество найденных точек является линией пересечения плоскости и поверхности, а точка К, в которой пересекаются заданная прямая АВ с найденной линией сечения, и является точкой, общей для заданной прямой и топографической поверхности.

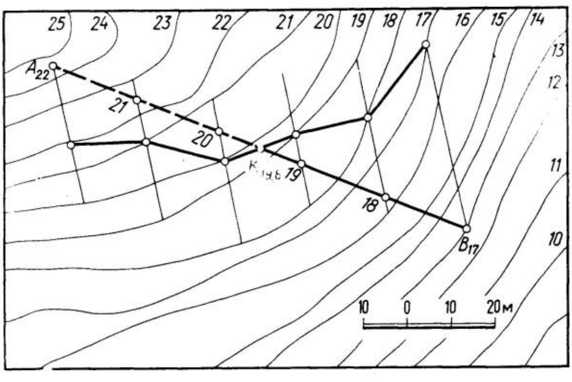


Рис. 34. Определение точки пересечения прямой с топографической поверхностью

Пример 10.2.2. Построить пересечение откосов насыпи полотна дороги с плоским косогором.

Пусть ось полотна прямолинейна и горизонтальна (рис. 35). Земляное полотно в данном случае представляет собой призму, основаниями которой служат нормальные поперечные сечения (профили) насыпи ABCD и $A^1B^1C^1D^1$ (рис. 35, *а*). Наклонные грани α и β призмы образуют с плоскостью $П_0$ угол φ, тангенс которого равен 1,0:1,5.

Значит, интервал масштаба падения плоскостей α и β – граней откосов – будет составлять 1,5 м. Учитывая, что в данном случае бровки горизонтальны, строим масштабы падения α_i и β_i, а затем и горизонтали (рис. 35) откосов насыпи и определяем точки пересечения горизонталей откосов с одноименными горизонталями плоского косогора (здесь достаточно определить две точки, например M и N, так как линия пересечения будет прямая). Найденные прямые являются границами насыпи, от которых начинают ее отсыпку.

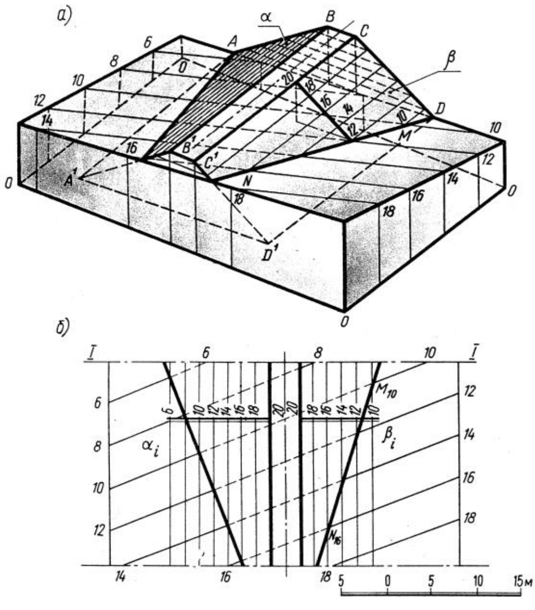
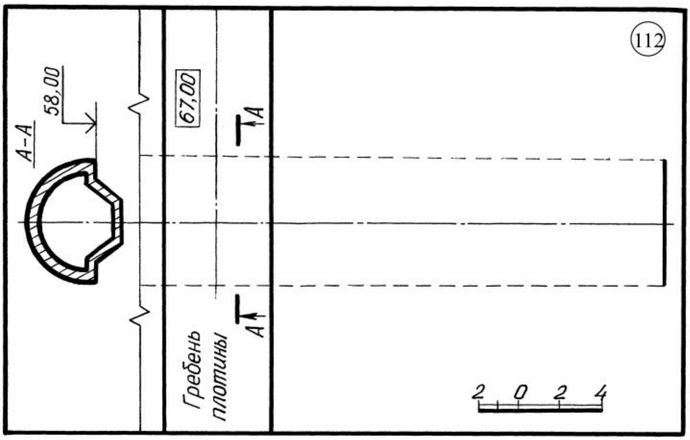


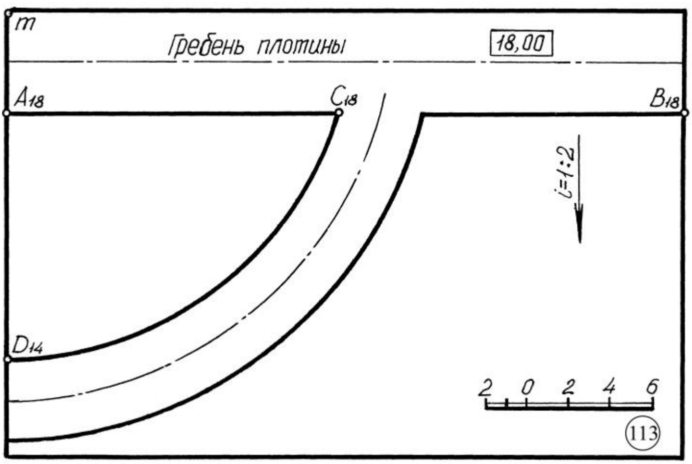
Рис. 35. Построение откосов насыпи полотна дороги с плоским косогором: *а* – аксонометрическая проекция; *б* – ортогональная проекция на основную плоскость

Задачи.

112. Построить линию пересечения донного водовыпуска с плоскостью откоса плотины. Отметка гребня плотины – 67,00, уклон плоскости откоса i = 1:2. Сечение водовыпуска задано на чертеже.

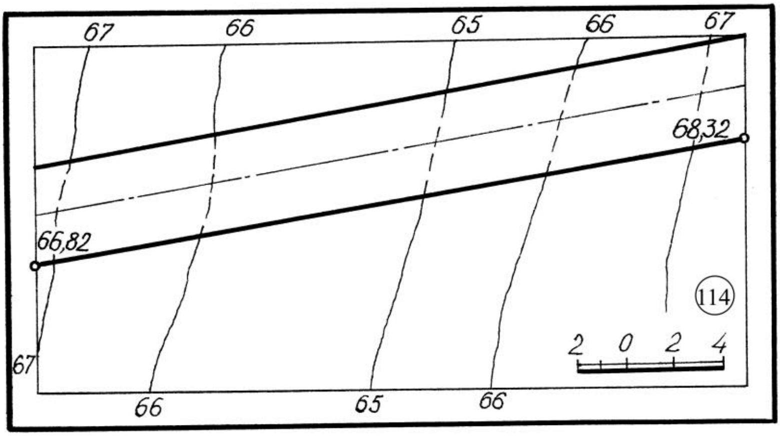
113. На откосе плотины с бровкой AB запроектировать аппарель. Полотно аппарели представляет собой поверхность коноида, заданного направляющими: винтовой линией CD, горизонтально-проецирующей прямой m и горизонтальной плоскостью параллелизма. Уклон поверхности откоса i = 1:2.

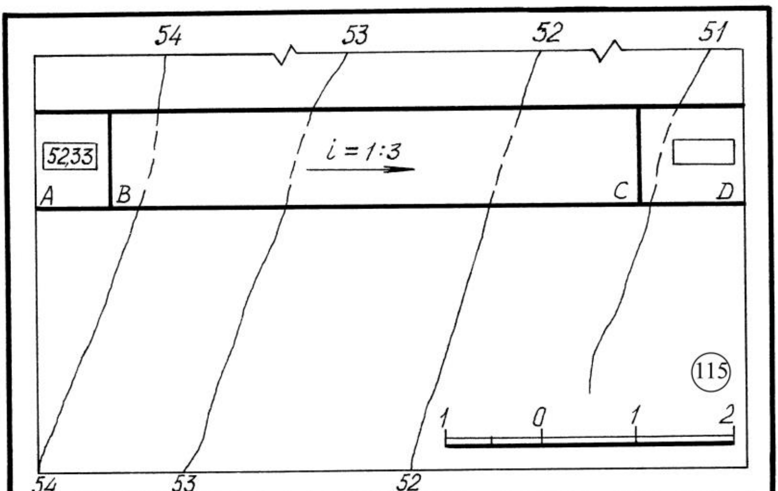




114. Определить линию пересечения плоскости откоса дороги с топографической поверхностью. Бровка дороги задана отметками двух точек (66,82 и 68,32), уклон откоса i = 1,0:1,5.

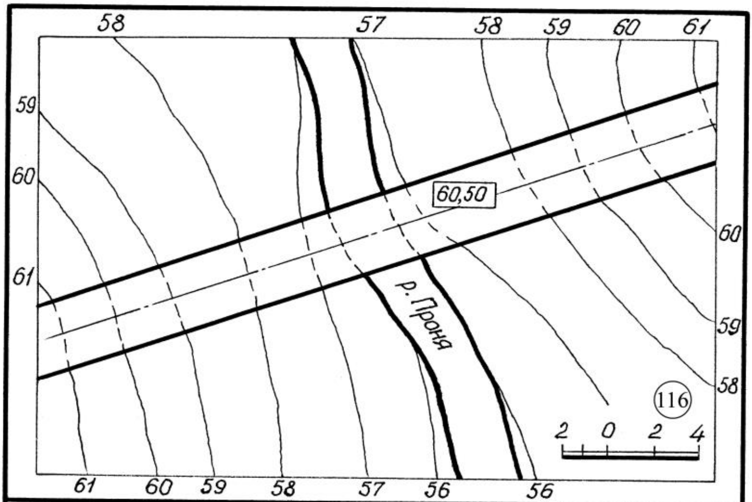
115. Выполнить привязку участка бермы быстротока на заданной топографической поверхности. Отметка бермы на участке АВ равна 52,33, уклон бермы на наклонном участке ВС i = 1:3. Определить отметку бермы на горизонтальном участке CD. В зоне выемки запроектировать кювет шириной 1 м.

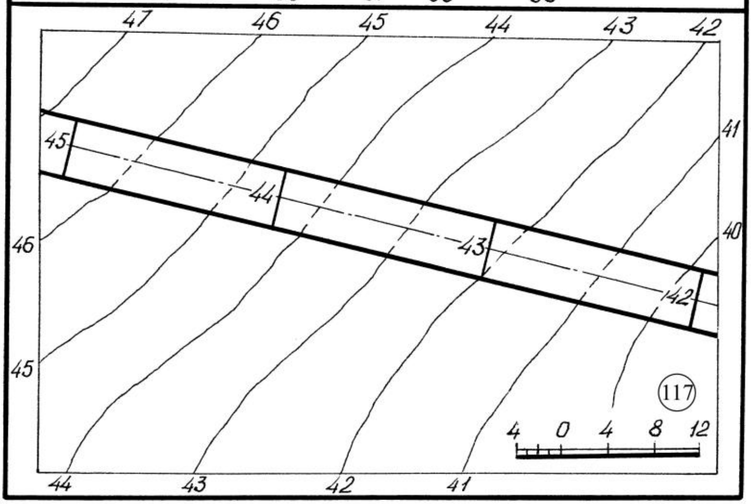




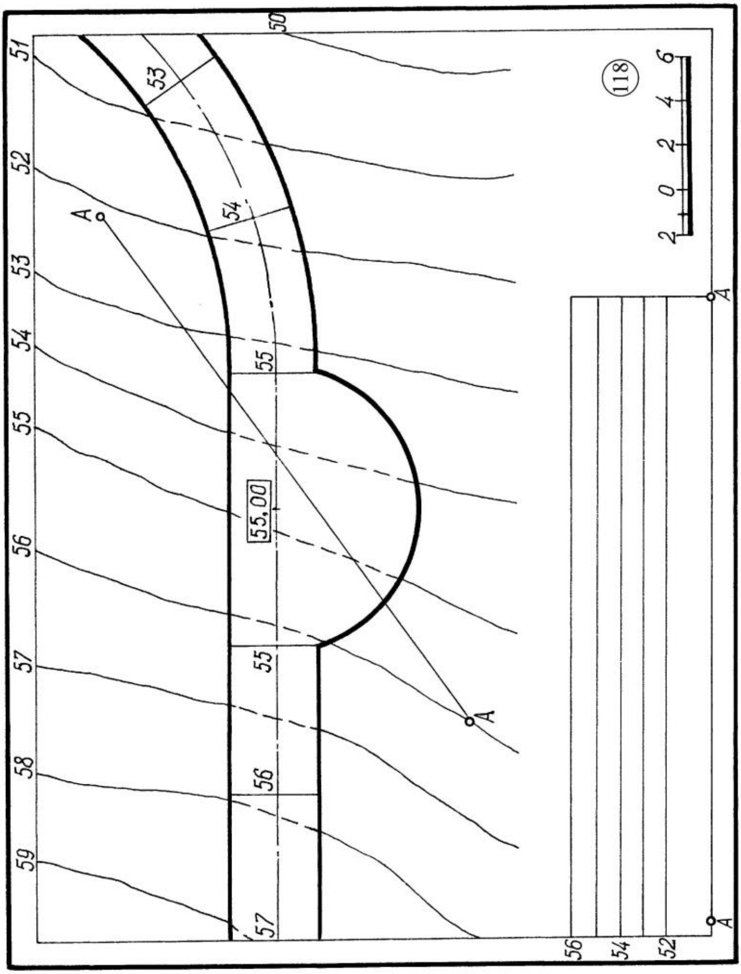
116. Запроектировать откосы плотины, уклон которых i = 1,0:1,5, и определить границу земляных работ. Отметка гребня плотины – 60,50; глубина реки – 1,5 м.

117. На заданной топографической поверхности запроектировать дорожное полотно, заданное на чертеже горизонталями. Уклон откосов i = 1:2.





118. На топографической поверхности задан план проезжей части дороги с полукруглой площадкой. Отметка площадки – 55,00, уклон дороги задан на чертеже горизонталями. Уклон поверхностей откосов i = 1,0:1,5. Построить линии взаимного пересечения поверхностей откосов и линию пересечения откосов с поверхностью земли. В зоне выемки площадку и дорогу расширить на 1 м для устройства водоотводных кюветов.



СОДЕРЖАНИЕ