

# ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ И РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

---

## Изучение принципов построения многомерной и специализированной научной графики

*Построение графика поверхности.* Графики поверхности могут быть построены с помощью программ Excel, Mathcad и др.

Рассмотрим порядок построения графика поверхности в среде Mathcad.

Перед построением графика поверхности  $Z(X, Y)$  ее необходимо предварительно представить в виде матрицы  $M$  ординаты  $Z$ . Поскольку график строится на основе матрицы, содержащей только координаты высот фигуры, то истинные масштабы по осям  $X$  и  $Y$  неизвестны и на рисунках не проставляются. Однако могут вводиться порядковые номера элементов матриц в заданном направлении (по  $X$  и  $Y$ ). Необходимо также следить за тем, как направить векторы  $X$  и  $Y$ , чтобы фигура выглядела более наглядно.

Заданные по умолчанию параметры графика можно изменить. Для этого следует выделить график и, установив в его области курсор мыши, дважды быстро щелкнуть по нему левой клавишей. Появится диалоговое окно, содержащее пять закладок, с помощью которых можно изменять параметры графика.

Для построения поверхности необходимо установить курсор в верхнем левом углу экрана и набрать на клавиатуре масштабы осей  $X$  и  $Y$ :

$$i := 0..40; j := 0..20. \quad (2.1)$$

Затем следует ввести значения заданных коэффициентов:

$$a1 := 0; a2 := 5; b1 := 0; b2 := 10. \quad (2.2)$$

Знак присвоения «:=» набирается двоеточием (комбинация клавиш *Shift* + «:»). Для указания интервала в виде двух точек после набора нуля нужно нажать клавишу «;».

После чего следует набрать на клавиатуре форму представления величин по осям  $X$  и  $Y$ :

$$x_i := a1 + (a2 - a1) \cdot i / 40; y_j := b1 + (b2 - b1) \cdot j / 20. \quad (2.3)$$

Далее необходимо ввести функцию:

$$M_{i,j} := \cos(x_i + y_j). \quad (2.4)$$

Нижний индекс набирается после нажатия клавиши «[». Знак умножения – «\*», деления – «/».

Необходимо установить курсор мыши ниже набранного текста. В меню *Insert* (Вставка) выбрать команду *Graph* (График) и далее *Surface Plot* (Поверхности) или нажать сочетание клавиш *Ctrl* + «2». На экране появится шаблон для создания трехмерного графика.

В нижнем левом углу на месте расположения метки следует ввести имя графика –  $M$  и щелкнуть мышью вне графика. На экране отобразится график (рис. 2.1).

$$i := 0..40 \quad j := 0..20 \quad a1 := 0 \quad a2 := 5 \quad b1 := 0 \quad b2 := 10$$

$$x_i := a1 + (a2 - a1) \cdot \frac{i}{40} \quad y_j := b1 + (b2 - b1) \cdot \frac{j}{20} \quad M_{i,j} := \cos(x_i + y_j)$$

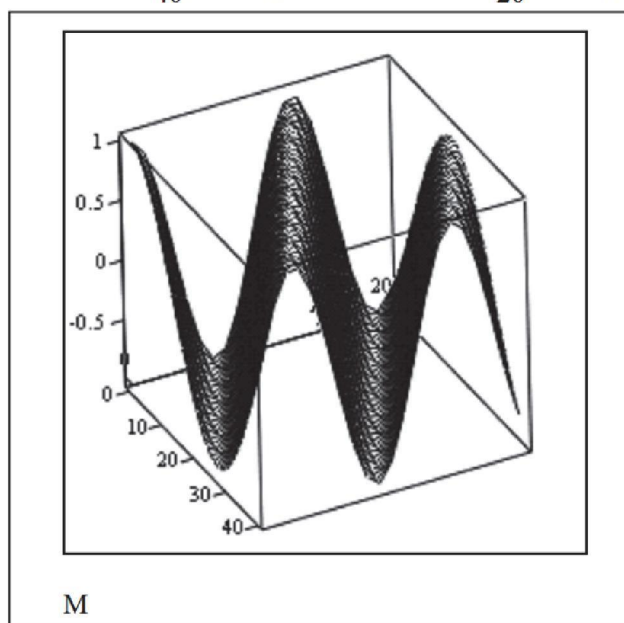


Рис. 2.1. Построение графика поверхности

Нажав левую кнопку мыши и не отпуская ее, можно медленно повернуть график для лучшего восприятия изображения.

Редактирование графика возможно, если 2 раза щелкнуть по нему левой кнопкой мыши. Для облегчения поворачивания графика во

вкладке *General* (Общее) следует установить флажок напротив области *Show Box* (Каркас).

**Построение контурного графика.** Графики этого типа применяются, например, в картографии и удобны для количественных оценок. Последовательность построения графика аналогична приведенной выше и представлена на рис. 2.2. Только в меню *Insert* (Вставка) необходимо выбрать команду *Graph* (График) и затем *Contour Plot* (Контурный).

$n := 20 \quad i := 0..n \quad j := 0..n \quad a1 := 0 \quad a2 := 10 \quad b1 := 0 \quad b2 := 10$

$$x_i := a1 + (a2 - a1) \cdot \frac{i}{n} \quad y_j := b1 + (b2 - b1) \cdot \frac{j}{n} \quad M_{i,j} := \frac{x_i \cdot y_j}{x_i + y_j}$$

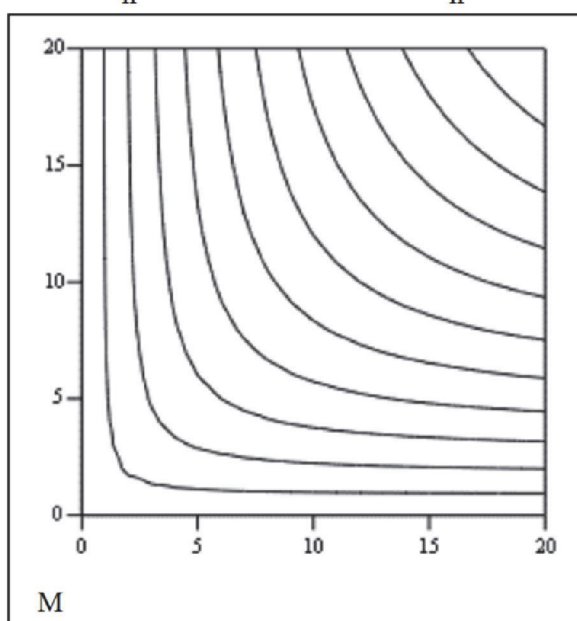


Рис. 2.2. Построение контурного графика

**Построение точечного графика.** Обычно наглядны графики этого типа с малыми фигурами. Однако в целом их наглядность невелика. Эти графики целесообразны для демонстрации расположения на них небольшого числа объектов. Объекты могут быть в виде точек, а также крестиков, окружностей, квадратов и др. Последовательность построения точечных графиков приведена на рис. 2.3 и аналогична описанной выше. В меню *Insert* (Вставка) следует выбрать команду *Graph* (График) и далее *3D Scatter Plot* (3D Точечный).

**Построение трехмерной гистограммы.** Графики такого типа применяются при анализе сложных статистических данных, например, представленных тремя независимыми переменными. Последователь-

ность построения трехмерной гистограммы аналогична приведенной выше и показана на рис. 2.4. В меню *Insert* (Вставка) необходимо выбрать команду *Graph* (График) и затем *3D Bar Plot* (3D Диаграммы).

$i := 0..70$      $j := 0..10$      $a1 := 1$      $a2 := 15$      $b1 := 1$      $b2 := 40$

$$x_i := a1 + (a2 - a1) \cdot \frac{i}{40} \quad y_j := b1 + (b2 - b1) \cdot \frac{j}{20} \quad M_{i,j} := \left(\frac{x_i}{y_j}\right)^4 - (x_i \cdot y_j)^3$$

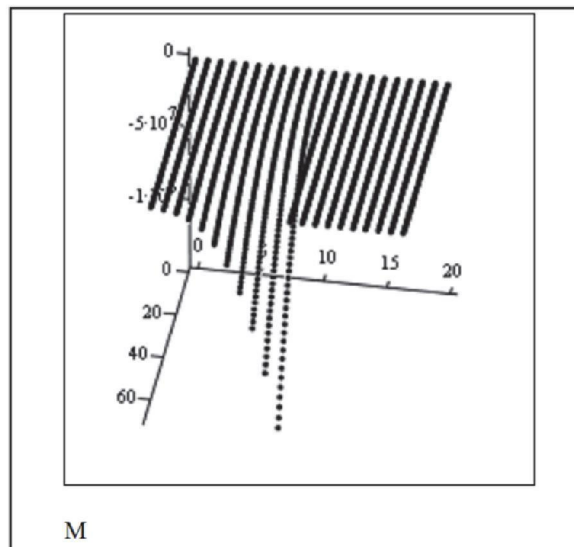


Рис. 2.3. Построение точечного графика

$n := 20$      $i := 0..n$      $j := 0..n$      $a1 := 0$      $a2 := 10$      $b1 := 0$      $b2 := 10$

$$x_i := a1 + (a2 - a1) \cdot \frac{i}{n} \quad y_j := b1 + (b2 - b1) \cdot \frac{j}{n} \quad M_{i,j} := \frac{(x_i \cdot y_j)}{x_i + y_j}$$

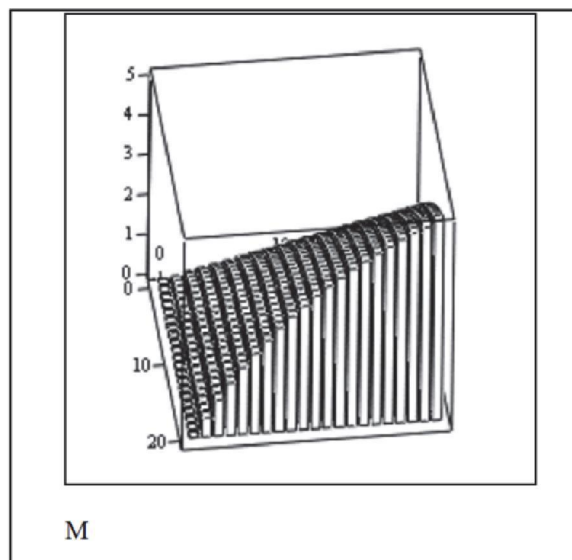
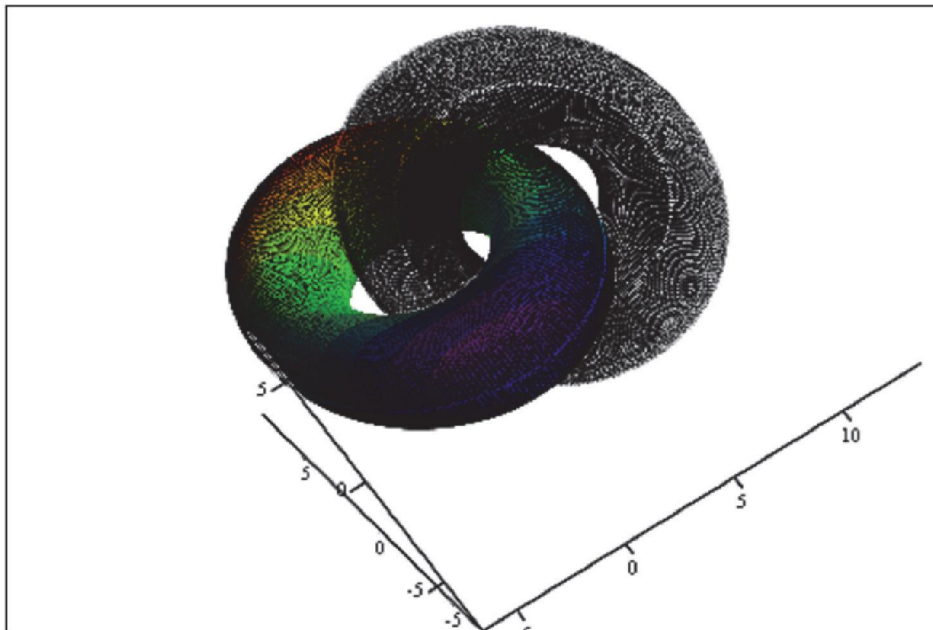


Рис. 2.4. Построение трехмерной диаграммы

**Построение комбинированных трехмерных графиков.** Рис. 2.5 иллюстрирует построение двух пересекающихся в пространстве торов. Здесь интересно то, что математически задается один тор с параметрическим заданием построения, но в месте ввода данные для построения тора указываются дважды. В итоге получается реалистичное изображение двух пересекающихся торов.

Единственное место ввода шаблона трехмерного графика поверхности должно быть заполнено следующим образом:  $(x, y + 6, z)$ ,  $(z, y + 1, x)$ .

$$\begin{aligned}
 N &:= 200 & i &:= 0..N & \phi_i &:= i \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{N} \\
 j &:= 0..N & \theta_j &:= j \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{N} \\
 x_{i,j} &:= (5 + 2 \cdot \cos(\phi_i)) \cos(\theta_j) & y_{i,j} &:= (5 + 2 \cdot \cos(\phi_i)) \sin(\theta_j) \\
 z_{i,j} &:= 2 \cdot \sin(\phi_i)
 \end{aligned}$$



$(x, y + 6, z), (z, y + 1, x)$

Рис. 2.5. Построение двух пересекающихся в пространстве торов

## Решение дифференциальных уравнений

**Решение дифференциальных уравнений с первой производной.** Для того чтобы решить дифференциальное уравнение (2.5), необходимо войти в среду Mathcad и набрать формулу

$$\frac{d}{dx}(x + \ln x) = x. \quad (2.5)$$

Для набора сочетания  $d/dx$  следует выбрать в меню *View* (Вид) команду *Toolbars* (Панели инструментов) и далее *Math* (Математика). В появившемся диалоговом окне *Math* (Матанализ) необходимо нажать на кнопку *Calculus Toolbar* (Производная). Для сокращения времени и затрат можно воспользоваться сочетанием клавиш *Shift* + «\». Кроме того, перед набором знака равенства в формуле необходимо нажать клавишу *Ctrl*.

В формуле следует выделить символ  $x$  слева или справа от знака равенства. Далее необходимо выбрать в меню *Symbolics* (Символы) команду *Variable* (Переменные) и затем *Solve* (Вычислить). Ниже набранной формулы появится результат: 1.

**Задача.** Вычислить самостоятельно выражения:

$$\frac{d}{dx}x^2 = x^2. \quad \text{Результат: 0 и 2.}$$

$$\frac{d}{dx}x^3 = x^3. \quad \text{Результат: 0; 0 и 3.}$$

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x. \quad \text{Результат: } x.$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1) = x. \quad \text{Результат: } -1.$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1) = 1. \quad \text{Результат: 0.}$$

**Решение дифференциальных уравнений со второй производной.**  
Следует решить дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 5\frac{d}{dx}y(x) - 1,7y(x) = 5x^2. \quad (2.6)$$

Дифференциальные уравнения, содержащие производные второго порядка и выше, в системе *Mathcad* не воспринимаются. Для восприятия системой необходимо избавиться от производных выше первого порядка методом замены и представить исходное дифференциальное уравнение в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Вторая производная в исходном уравнении может быть представлена как производная от первой:

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} y(x) \right). \quad (2.7)$$

В соответствии с этим произведем замены:

$$\begin{cases} y_0 = y(x); \\ y_1 = \frac{d}{dx} y(x). \end{cases} \quad (2.8)$$

Тогда исходное дифференциальное уравнение представляется в виде двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} y(x) = y_1; \\ \frac{d}{dx} y_1 = 5x^2 - 5y_1 + 1,7y_0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Эту информацию необходимо зафиксировать в вектор-столбце  $D$ , в котором каждый элемент соответствует правой части определенного дифференциального уравнения в системе:

$$D(x, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ 5 \cdot x^2 - 5 \cdot y_1 + 1,7 \cdot y_0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

После этого вводится вектор начальных приближений  $y$ :

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Затем определяется интервал интегрирования и число шагов:

$$x_1 := 0; x_2 := 20; \quad (2.12)$$

$$n := 100. \quad (2.13)$$

Для того чтобы решить данную систему в программе Mathcad, следует войти в рабочую среду математического пакета и набрать формулу (2.10). Ниже необходимо ввести вектор (2.11), далее – выражения (2.12) и (2.13).

Следует набрать формулу, включающую функцию решения дифференциальных уравнений:

$$Z1 := rkfixed(y, x_1, x_2, n, D). \quad (2.14)$$

Функцию решения дифференциальных уравнений можно вызвать из меню *Insert* (Вставка) командой *Function* (Функция). В появившемся диалоговом окне необходимо выбрать *Function Category* (Категории функций) – *Differential Equation Solving* и *Function Name* (Название функции) – *rkfixed*.

Можно не набирать формулы (2.12) и (2.13), но ввести в (2.14) численные значения  $x_1$ ,  $x_2$  и  $n$  из (2.12) и (2.13):

$$Z1 := rkfixed(y, 0, 20, 100, D). \quad (2.15)$$

Каждое последующее выражение необходимо набирать *правее* и (или) *ниже* предыдущего.

Далее следует набрать « $Z1 =$ », и через некоторое время правее этого выражения появится матрица, состоящая из четырех столбцов (рис. 2.6). В первом столбце приведены значения  $n$ , во втором –  $x$ , в третьем и четвертом – величины  $D$ , т. е. решения дифференциального уравнения.

|    | 0   | 1     | 2      |
|----|-----|-------|--------|
| 0  | 0   | 0     | 1      |
| 1  | 0.2 | 0.127 | 0.406  |
| 2  | 0.4 | 0.187 | 0.254  |
| 3  | 0.6 | 0.24  | 0.313  |
| 4  | 0.8 | 0.319 | 0.504  |
| 5  | 1   | 0.448 | 0.803  |
| 6  | 1.2 | 0.647 | 1.206  |
| 7  | 1.4 | 0.937 | 1.715  |
| 8  | 1.6 | 1.34  | 2.337  |
| 9  | 1.8 | 1.879 | 3.078  |
| 10 | 2   | 2.579 | 3.945  |
| 11 | 2.2 | 3.465 | 4.947  |
| 12 | 2.4 | 4.567 | 6.093  |
| 13 | 2.6 | 5.912 | 7.392  |
| 14 | 2.8 | 7.534 | 8.855  |
| 15 | 3   | 9.465 | 10.492 |

Рис. 2.6. Результат расчета

Пример решения дифференциального уравнения в системе Mathcad представлен на рис. 2.7.

Рассмотрим решение дифференциального уравнения второго порядка, описывающего колебание некоторой системы под воздействием периодической возмущающей силы.

$$m \frac{d^2}{dt^2} \left( x + k \frac{dx}{dt} + c x \right) := \sin(a \cdot t)$$

1. Представим исходное дифференциальное уравнение в виде системы уравнений:

$$\frac{d}{dt} x_1 := x_2 \quad \frac{d}{dt} x_2 := \frac{-k \cdot x_2 - c \cdot x_1 + \sin(a \cdot t)}{m}$$

Параметры исследуемой системы:  $m := 12$     $k := 0.15$     $c := 100$     $a := 60$

2. Сформируем правые части системы уравнений в виде вектора F в символьном виде:

$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$F(t, x) := \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{-k \cdot x_2 - c \cdot x_1 + \sin(a \cdot t)}{m} \end{pmatrix}$$

3. Введем начальное и конечное время интегрирования t1 и t2, фиксированное число шагов интегрирования n, начальные значения искомым параметров y:

$$t1 := 0 \quad t2 := 20 \quad n := 100 \quad y := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad j := 0..20$$

4. Определим матрицу результатов решения системы уравнений Z с использованием встроенной функции rkfixed:

$$Z := \text{rkfixed}(y, t1, t2, n, F)$$

5. Представим результаты решения дифференциального уравнения в табличном виде:

|    | 1   | 2      | 3      |
|----|-----|--------|--------|
| 1  | 0   | 0      | 5      |
| 2  | 0.2 | 0.943  | 4.174  |
| 3  | 0.4 | 1.577  | 1.994  |
| 4  | 0.6 | 1.696  | -0.827 |
| 5  | 0.8 | 1.264  | -3.372 |
| 6  | 1   | 0.422  | -4.814 |
| 7  | 1.2 | -0.554 | -4.687 |
| 8  | 1.4 | -1.348 | -3.037 |
| 9  | 1.6 | -1.702 | -0.405 |
| 10 | 1.8 | -1.501 | 2.352  |
| 11 | 2   | -0.813 | 4.337  |
| 12 | 2.2 | 0.138  | 4.908  |
| 13 | 2.4 | 1.041  | 3.882  |
| 14 | 2.6 | 1.604  | 1.596  |
| 15 | 2.8 | 1.644  | -1.202 |
| 16 | 3   | 1.149  | -3.603 |

Рис. 2.7. Образец выполнения лабораторной работы № 1 (начало; окончание см. на с. 59)

Первый столбец таблицы - это текущие значения времени интегрирования.  
Второй и третий столбцы - искомые значения параметров  $x_1$  и  $x_2$ .

6. Построим графики искомых параметров  $x_1$  ( $Z_{j,2}$ ) и  $x_2$  ( $Z_{j,3}$ ) в функции времени  $t$  ( $Z_{j,1}$ ):

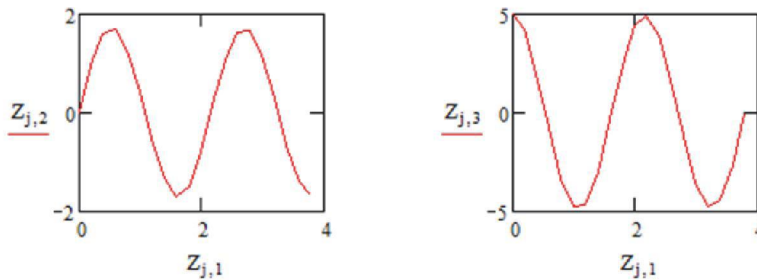


Рис. 2.7. Окончание (начало см. на с. 58)

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В КОЛЬЦЕВОМ ЗАЗОРЕ

Задачей лабораторной работы является создание модели движения частицы в кольцевом зазоре среднеходной мельницы диаметром  $D$  после отрыва ее с вращающейся размольной тарелки диаметром  $d_p$ . В качестве начальных условий для этой задачи принимаются полная скорость на выходе с тарелки и угол ее отрыва.

Исходные данные для решения задачи представлены в табл. 2.1.

Методика составления математической модели рассмотрена в разделе 1. Пример решения данной модели, выполненный в математическом пакете Mathcad для варианта № 1, приведен на рис. 2.8.

Таблица 2.1

Исходные данные к лабораторной работе № 2

| Номер варианта | $D$ , мм | $d_p$ , мм | $d_c$ , мкм | $\rho_0$ , кг/м <sup>3</sup> | $\rho_1$ , кг/м <sup>3</sup> | $W$ , м/с | $\gamma$ , град | $v \cdot 10^{-5}$ , кг/с <sup>-1</sup> | $v_1$ , м/с | $k_\Phi$ |
|----------------|----------|------------|-------------|------------------------------|------------------------------|-----------|-----------------|--|-------------|----------|
| 1              | 250      | 220        | 100         | 1,22                         | 2300                         | 25,0      | 45              | 1,50                                   | 1,0         | 1,0      |
| 2              | 245      | 220        | 95          | 1,21                         | 2420                         | 24,5      | 40              | 1,41                                   | 0,9         | 1,0      |
| 3              | 240      | 215        | 90          | 1,23                         | 2400                         | 25,0      | 45              | 1,42                                   | 1,1         | 1,0      |
| 4              | 235      | 215        | 80          | 1,22                         | 2350                         | 25,5      | 50              | 1,48                                   | 1,2         | 1,0      |
| 5              | 230      | 210        | 80          | 1,26                         | 2320                         | 26,0      | 55              | 1,39                                   | 1,0         | 1,0      |
| 6              | 225      | 205        | 70          | 1,29                         | 2250                         | 21,0      | 60              | 1,52                                   | 1,0         | 1,0      |
| 7              | 250      | 230        | 80          | 1,27                         | 2200                         | 22,0      | 55              | 1,56                                   | 1,2         | 1,0      |
| 8              | 245      | 225        | 85          | 1,28                         | 2150                         | 22,5      | 45              | 1,53                                   | 1,3         | 1,0      |

| Номер варианта | $D$ , мм | $d_p$ , мм | $d_q$ , мкм | $\rho_0$ , кг/м <sup>3</sup> | $\rho_1$ , кг/м <sup>3</sup> | $W$ , м/с | $\gamma$ , град | $\nu \cdot 10^{-5}$ , кг/с <sup>-1</sup> | $v_1$ , м/с | $k_\Phi$ |
|----------------|----------|------------|-------------|------------------------------|------------------------------|-----------|-----------------|--|-------------|----------|
| 9              | 230      | 220        | 60          | 1,22                         | 2550                         | 23,0      | 40              | 1,54                                     | 1,1         | 1,0      |
| 10             | 225      | 200        | 70          | 1,24                         | 2250                         | 24,0      | 50              | 1,50                                     | 1,0         | 1,0      |
| 11             | 255      | 225        | 100         | 1,25                         | 2300                         | 24,5      | 55              | 1,53                                     | 1,3         | 1,0      |
| 12             | 260      | 230        | 95          | 1,26                         | 2350                         | 25,0      | 60              | 1,32                                     | 1,1         | 1,0      |
| 13             | 265      | 235        | 90          | 1,29                         | 2280                         | 25,5      | 45              | 1,39                                     | 1,2         | 1,0      |
| 14             | 270      | 240        | 80          | 1,30                         | 2100                         | 26,0      | 40              | 1,45                                     | 1,5         | 1,0      |
| 15             | 260      | 235        | 105         | 1,22                         | 2050                         | 26,5      | 50              | 1,49                                     | 1,4         | 1,0      |
| 16             | 265      | 240        | 95          | 1,23                         | 2200                         | 27,0      | 55              | 1,52                                     | 1,3         | 1,0      |
| 17             | 270      | 245        | 90          | 1,24                         | 2250                         | 23,0      | 45              | 1,50                                     | 1,2         | 1,0      |

Исходные данные для расчета:

$$\tau := 0 \quad \rho_0 := 1.22$$

$$y_1 := 0.110 \quad \rho_1 := 2300$$

$$v_1 := 1 \quad \nu := 1.5 \cdot 10^{-5}$$

$$v_2 := 0 \quad k := 1$$

$$W := 25 \quad \gamma := 45$$

$$d := 1 \cdot 10^{-4}$$

1. Определим число Рейнольдса:

$$Re := \frac{d \cdot (W - v_2)}{\nu}$$

$$Re = 166.667$$

2. Найдем коэффициент аэродинамического сопротивления:

$$c := \frac{24}{Re} \cdot \left( 1 + 0.17 \cdot Re^{\frac{2}{3}} \right)$$

$$c = 0.885$$

3. Зная полную скорость частицы на выходе с тарелки, вычислим тангенциальную составляющую:

$$v_3 := v_1 \cdot \cos(\gamma \cdot \text{deg})$$

$$v_3 = 0.707$$

4. Для решения системы уравнений необходимо задать временной интервал ( $x_1$ ,  $x_2$ ), шаг ( $Np$ ) и начальные скорости частицы в проекциях  $x$  и  $y$  ( $y_0$  и  $u_2$ ):

$$x_1 := 0 \quad x_2 := 0.1 \quad Np := 20 \quad y_0 := 0.5 \quad u_2 := 0$$

Рис. 2.8. Образец выполнения лабораторной работы № 2  
(начало; продолжение и окончание см. на с. 61–62)

5. Введем вектор начальных приближенных  $y$ :

$$y := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

6. В вектор-столбце  $D$  запишем информацию, соответствующую правой части определенного уравнения в системе:

$$D(x,y) := \begin{bmatrix} 0 \\ y_0 \\ \left[ \frac{6k \cdot c \cdot \rho_0 \cdot (W - y_2)^2}{8 \cdot \rho_1 \cdot d} \right] - 9.81 \end{bmatrix}$$

7. Введем формулу, включающую функцию решения системы дифференциальных уравнений:

$z := \text{rkfixed}(y, x1, x2, Np, D)$        $n := 0..50$

|    | 0                 | 1   | 2     | 3      |
|----|-------------------|-----|-------|--------|
| 0  | 0                 | 0.5 | 0.11  | 0      |
| 1  | $5 \cdot 10^{-3}$ | 0.5 | 0.113 | 7.605  |
| 2  | 0.01              | 0.5 | 0.115 | 11.646 |
| 3  | 0.015             | 0.5 | 0.118 | 14.148 |
| 4  | 0.02              | 0.5 | 0.12  | 15.848 |
| 5  | 0.025             | 0.5 | 0.123 | 17.075 |
| 6  | 0.03              | 0.5 | 0.125 | 18.003 |
| 7  | 0.035             | 0.5 | 0.128 | 18.727 |
| 8  | 0.04              | 0.5 | 0.13  | 19.306 |
| 9  | 0.045             | 0.5 | 0.133 | 19.781 |
| 10 | 0.05              | 0.5 | 0.135 | 20.175 |
| 11 | 0.055             | 0.5 | 0.138 | 20.508 |
| 12 | 0.06              | 0.5 | 0.14  | 20.791 |
| 13 | 0.065             | 0.5 | 0.143 | 21.036 |
| 14 | 0.07              | 0.5 | 0.145 | 21.249 |
| 15 | 0.075             | 0.5 | 0.148 | ...    |

8. По полученным данным построим зависимости изменения осевой и радиальной составляющих скоростей от текущего радиуса:

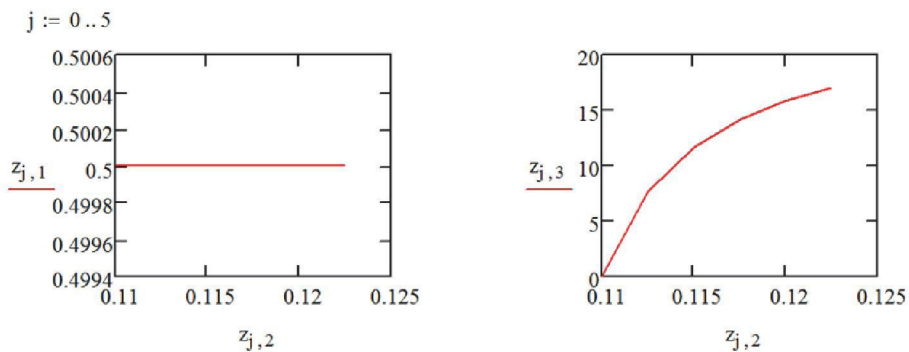


Рис. 2.8. Продолжение (начало см. на с. 60, окончание – на с. 62)

9. Найдем изменение полной скорости частицы во времени:

$$U_{j,0} := \sqrt{(z_{j,1})^2 + (z_{j,3})^2}$$

$$U_{j,0} =$$

|        |
|--------|
| 0.5    |
| 7.622  |
| 11.656 |
| 14.157 |
| 15.855 |
| 17.083 |

10. По полученным значениям построим график зависимости полной скорости от текущего радиуса:

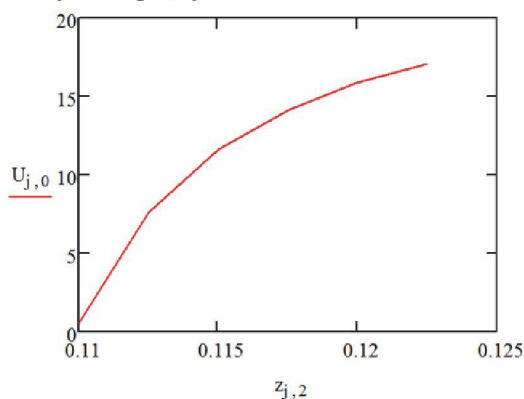


Рис. 2.8. Окончание (начало см. на с. 60–61)

При решении дифференциальных уравнений необходимо провести замену следующих символов:

- $R$  (радиус тарелки) заменяем на  $y_1$ ;
- $U_y$  (проекция скорости частицы на ось  $y$ ) – на  $y_2$ ;
- $U_x$  (проекция скорости частицы на ось  $x$ ) – на  $y_0$ .

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ ПО ВРАЩАЮЩЕМУСЯ ДИСКУ

---

По плоскому стальному диску диаметром  $D$ , вращающемуся с постоянной частотой  $n$ , движется несферическая частица. Составить модель движения материала по диску и полную скорость движения

частицы по диску, если ее начальная радиальная скорость равна  $V_{0r}$ , а начальный радиус положения на диске –  $r_0$ . При расчете учесть, что движение предполагается установившимся, без перекачивания частиц; коэффициенты трения скольжения меньше коэффициентов трения покоя и считаются постоянными, т. е. не зависящими от скорости. Коэффициент трения скольжения частицы по диску принять равным 0,3.

Построить графические зависимости:

- а) изменения составляющих полной скорости от времени;
- б) изменения полной скорости частицы от времени.

Определить угол отрыва частицы с диска.

Исходные данные для решения задачи представлены в табл. 2.2.

Методика составления математической модели рассмотрена в разделе 1. Пример решения данной модели, выполненный в математическом пакете Mathcad для варианта № 10, приведен на рис. 2.9.

Таблица 2.2

**Исходные данные к лабораторной работе № 3**

| Номер варианта | $D$ , м | $n$ , об/мин | $V_{0r}$ , м/с | $r_0$ , м |
|----------------|---------|--------------|----------------|-----------|
| 1              | 0,2     | 100          | 0,70           | 0,030     |
| 2              | 0,3     | 110          | 0,75           | 0,035     |
| 3              | 0,4     | 120          | 0,85           | 0,040     |
| 4              | 0,5     | 130          | 0,70           | 0,045     |
| 5              | 0,6     | 140          | 0,75           | 0,050     |
| 6              | 0,7     | 150          | 0,70           | 0,055     |
| 7              | 0,8     | 160          | 0,75           | 0,060     |
| 8              | 0,9     | 170          | 0,80           | 0,065     |
| 9              | 1,0     | 90           | 0,85           | 0,070     |
| 10             | 0,24    | 100          | 0,70           | 0,025     |
| 11             | 0,35    | 110          | 0,80           | 0,035     |
| 12             | 0,45    | 120          | 0,85           | 0,040     |
| 13             | 0,55    | 130          | 0,75           | 0,045     |
| 14             | 0,65    | 140          | 0,90           | 0,050     |
| 15             | 0,75    | 150          | 0,95           | 0,055     |
| 16             | 0,85    | 160          | 0,80           | 0,060     |
| 17             | 0,95    | 170          | 0,80           | 0,065     |
| 18             | 1,05    | 105          | 0,85           | 0,070     |

При решении задачи необходимо провести замену символов:

- $r_0$  заменяем на  $y_0$ ;
- $V_{0r}$  – на  $y_1$ ;

–  $\varphi$  – на  $y_2$ ;

–  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  – на  $y_3$ .

1. Введем начальные данные, необходимые для расчета:

$$g := 9.81 \quad y_0 := 0.025 \quad y_2 := 0 \quad R_w := 0.11$$

$$n := 100 \quad y_1 := 0.7 \quad y_3 := 0 \quad f := 0.3$$

2. Переведем частоту вращения тарелки в угловую скорость и зададим временной отрезок:

$$x1 := 0 \quad x2 := 0.16$$

$$\omega := \pi \cdot \frac{n}{30} \quad \omega = 10.472$$

3. Введем вектор начальных приближенных  $y$ :

$$y := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

4. В вектор-столбце  $D$  запишем информацию, соответствующую правой части определенного уравнения в системе:

$$D(x, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_0 \cdot (y_3)^2 - f \cdot g \cdot \left[ \frac{y_1}{\sqrt{(y_1)^2 + (\omega \cdot y_0 - y_0 \cdot y_3)^2}} \right] \\ y_3 \\ \frac{-2 \cdot y_1 \cdot y_3}{y_0} - \frac{f \cdot g}{y_0} \cdot \left[ \frac{(\omega - y_3) \cdot y_0}{\sqrt{(y_1)^2 + (\omega \cdot y_0 - y_0 \cdot y_3)^2}} \right] \end{bmatrix}$$

5. Введем формулу, включающую функцию решения системы дифференциальных уравнений:

$$\underline{y} := \text{rkfixed}(y, x1, x2, 100, D)$$

Рис. 2.9. Образец выполнения лабораторной работы № 3 (начало; продолжение и окончание см. на с. 65–66)

|     | время               | r     | $\frac{d}{dt}r$ | $\varphi$              | $\frac{d}{dt}\varphi$ |
|-----|---------------------|-------|-----------------|------------------------|-----------------------|
|     | 0                   | 1     | 2               | 3                      | 4                     |
| V = | 0                   | 0.025 | 0.7             | 0                      | 0                     |
|     | $1.6 \cdot 10^{-3}$ | 0.026 | 0.696           | $-5.137 \cdot 10^{-5}$ | -0.063                |
|     | $3.2 \cdot 10^{-3}$ | 0.027 | 0.691           | $-2.003 \cdot 10^{-4}$ | -0.122                |
|     | $4.8 \cdot 10^{-3}$ | 0.028 | 0.687           | $-4.4 \cdot 10^{-4}$   | -0.177                |
|     | $6.4 \cdot 10^{-3}$ | 0.029 | 0.683           | $-7.648 \cdot 10^{-4}$ | -0.228                |
|     | $8 \cdot 10^{-3}$   | 0.031 | 0.678           | $-1.17 \cdot 10^{-3}$  | -0.277                |
|     | $9.6 \cdot 10^{-3}$ | 0.032 | 0.674           | $-1.651 \cdot 10^{-3}$ | -0.324                |
|     | 0.011               | 0.033 | 0.67            | $-2.204 \cdot 10^{-3}$ | -0.368                |
|     | 0.013               | 0.034 | 0.666           | $-2.826 \cdot 10^{-3}$ | -0.41                 |
|     | 0.014               | 0.035 | 0.662           | $-3.515 \cdot 10^{-3}$ | -0.451                |
|     | 0.016               | 0.036 | 0.658           | $-4.268 \cdot 10^{-3}$ | -0.49                 |
|     | 0.018               | 0.037 | 0.654           | $-5.083 \cdot 10^{-3}$ | -0.528                |
|     | 0.019               | 0.038 | 0.65            | $-5.957 \cdot 10^{-3}$ | ...                   |

6. Определим составляющую относительной скорости по координате  $\varphi$ :

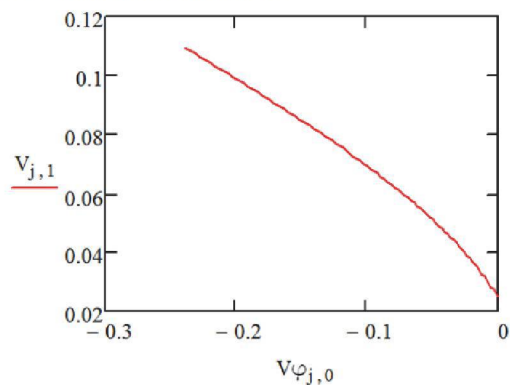
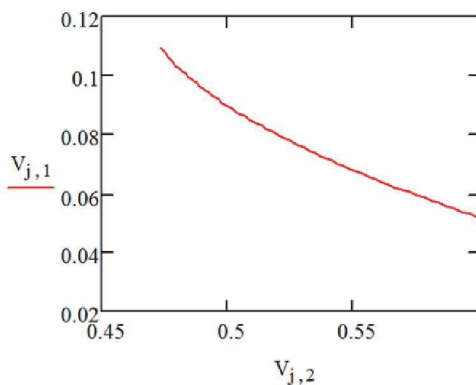
$j := 0..95$

$$V_{\varphi_j,0} := V_{j,1} \cdot V_{j,4}$$

$$V_{\varphi_j,0} =$$

|        |
|--------|
| -0.219 |
| -0.222 |
| -0.225 |
| -0.228 |
| -0.231 |
| -0.233 |
| -0.236 |
| ...    |

7. По полученным данным построим зависимости изменения радиальной и тангенциальной составляющих скоростей от текущего радиуса:



8. Найдем полную скорость движения частицы по диску:

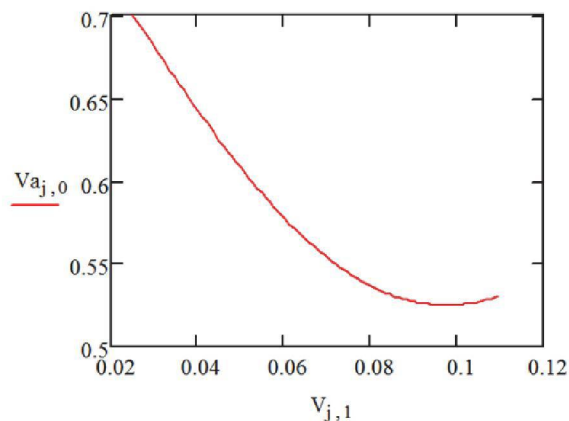
$$V_{a_j,0} := \sqrt{(V_{j,2})^2 + (V_{\varphi_j,0})^2}$$

Рис. 2.9. Продолжение (начало см. на с. 64, окончание – на с. 66)

$$V_{a,j,0} =$$

|    |       |
|----|-------|
|    | 0     |
| 88 | 0.527 |
| 89 | 0.527 |
| 90 | 0.527 |
| 91 | 0.528 |
| 92 | 0.528 |
| 93 | 0.529 |
| 94 | 0.53  |
| 95 | ...   |

9. По полученным значениям построим график зависимости относительной скорости частицы от текущего радиуса:



10. Определим угол отрыва частицы от края диска:

$$\beta := \arccos\left(\frac{-0.239}{0.53}\right) \cdot \frac{360}{2 \cdot \pi}$$

$$\beta = 116.804$$

Ответ: полная скорость частицы на выходе с диска равна 0,53 м/с;

угол отрыва - 116,8°.

Рис. 2.9. Окончание (начало см. на с. 64–65)

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В ЗАКРУЧЕННОМ ПОТОКЕ ГАЗА

При анализе работы некоторых химических аппаратов и оборудования (например, массообменные аппараты, оборудование для очи-

стки воздуха от пыли, помольные агрегаты) рассматривается движение частиц в закрученном газовом потоке.

Задачей лабораторной работы является моделирование движения частицы в закрученном потоке газа. В качестве начальных условий для этой задачи принимаются среднерасходная скорость газа, геометрические размеры аппарата, координаты частицы.

Сферическая частица ( $k_{\Phi} = 1$ ) материала диаметром  $d$  влетает с радиальной скоростью  $V_r$  в центр вертикальной трубы диаметром  $D$ . В трубе со среднерасходной скоростью  $W$  движется закрученный воздушный поток со степенью закрутки  $\gamma$ . Составить математическую модель движения частицы в закрученном потоке газа, определить, с какой скоростью подлетит частица к стенке трубы и на какой высоте произойдет соприкосновение со стенкой.

Построить графические зависимости:

а) изменения радиальной, тангенциальной и осевой составляющих скорости частицы во времени;

б) полной скорости частицы от ее места нахождения.

При расчетах принять плотность и вязкость воздуха, плотность частицы соответственно:  $\rho_1 = 1,29 \text{ кг/м}^3$ ;  $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$ ;  $\rho_2 = 2000 \text{ кг/м}^3$ .

Исходные данные для решения задачи представлены в табл. 2.3.

Методика составления математической модели рассмотрена в разделе 1. Пример решения данной модели, выполненный в математическом пакете Mathcad, приведен на рис. 2.10.

При решении задачи необходимо провести замену следующих символов:

- $V_r$  заменяем на  $y_0$ ;
- $V_{\Phi}$  – на  $y_1$ ;
- $V_z$  – на  $y_2$ ;
- $r$  – на  $y_3$ ;
- $\Phi$  – на  $y_4$ ;
- $z$  – на  $y_5$ .

Таблица 2.3

**Исходные данные к лабораторной работе № 4**

| Номер варианта | $D$ , м | $d$ , мкм | $V_r$ , м/с | $W$ , м/с | $\gamma$ , град |
|----------------|---------|-----------|-------------|-----------|-----------------|
| 1              | 300     | 50        | 0,40        | 10        | 40              |
| 2              | 360     | 60        | 0,50        | 12        | 45              |
| 3              | 380     | 65        | 0,55        | 14        | 50              |
| 4              | 400     | 70        | 0,60        | 15        | 50              |
| 5              | 420     | 75        | 0,65        | 17        | 45              |

| Номер варианта | $D$ , м | $d$ , мкм | $V_r$ , м/с | $W$ , м/с | $\gamma$ , град |
|----------------|---------|-----------|-------------|-----------|-----------------|
| 6              | 440     | 80        | 0,70        | 18        | 40              |
| 7              | 460     | 85        | 0,75        | 19        | 50              |
| 8              | 480     | 90        | 0,80        | 20        | 45              |
| 9              | 500     | 95        | 0,85        | 21        | 40              |
| 10             | 520     | 100       | 0,90        | 22        | 50              |
| 11             | 540     | 105       | 0,95        | 23        | 45              |
| 12             | 560     | 110       | 1,00        | 25        | 40              |
| 13             | 580     | 115       | 1,05        | 27        | 50              |
| 14             | 600     | 120       | 1,10        | 28        | 45              |
| 15             | 620     | 125       | 1,15        | 29        | 40              |
| 16             | 640     | 130       | 1,20        | 30        | 50              |
| 17             | 560     | 135       | 1,25        | 31        | 45              |
| 18             | 680     | 140       | 1,30        | 32        | 40              |

1. Введем начальные данные, необходимые для расчета:

$$\begin{aligned}
 x_1 &:= 0 & x_2 &:= 0.1 & N_p &:= 100 & y_0 &:= 0.9 & y_1 &:= 0 & y_2 &:= 0 \\
 y_3 &:= 0.01 & y_4 &:= 0 & y_5 &:= 0 & d &:= 0.001 & w &:= 25 & W_0 &:= 0 \\
 \rho_1 &:= 1.29 & \rho_2 &:= 2000 & \gamma &:= 45 & \nu &:= 1.5 \cdot 10^{-5} & k &:= 1
 \end{aligned}$$

2. Исходя из угла закрутки воздушного потока, определим тангенциальную скорость воздушного потока:

$$\begin{aligned}
 W_1 &:= w \cdot \tan(\gamma \text{ deg}) & W_2 &:= w \\
 W_1 &= 25 & W_2 &= 25
 \end{aligned}$$

3. Введем вектор начальных приближенных  $y$ :

$$y := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.10. Образец выполнения лабораторной работы № 4 (начало; продолжение и окончание см. на с. 69–70)

4. В вектор-столбце D запишем информацию, соответствующую правой части определенного уравнения в системе:

$$D(x,y) := \begin{bmatrix} 18 \cdot \frac{k \cdot \rho_1 \cdot (W_0 - y_0)}{d^2 \cdot \rho_2} \cdot \left[ 1 + 0.17 \cdot \left[ d \cdot \frac{\sqrt{(W_0 - y_0)^2 + (W_1 - y_1)^2 + (W_2 - y_2)^2}}{\nu} \right]^3 \right]^{\frac{2}{3}} \cdot \nu + \frac{(y_1)^2}{y_3} \\ 18 \cdot \frac{k \cdot \rho_1 \cdot (W_1 - y_1)}{d^2 \cdot \rho_2} \cdot \left[ 1 + 0.17 \cdot \left[ d \cdot \frac{\sqrt{(W_0 - y_0)^2 + (W_1 - y_1)^2 + (W_2 - y_2)^2}}{\nu} \right]^3 \right]^{\frac{2}{3}} \cdot \nu - \frac{2 \cdot (y_0 \cdot y_1)}{y_3} \\ 18 \cdot \frac{k \cdot \rho_1 \cdot (W_2 - y_2)}{d^2 \cdot \rho_2} \cdot \left[ 1 + 0.17 \cdot \left[ d \cdot \frac{\sqrt{(W_0 - y_0)^2 + (W_1 - y_1)^2 + (W_2 - y_2)^2}}{\nu} \right]^3 \right]^{\frac{2}{3}} \cdot \nu - 9.81 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_3 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

5. Введем формулу, включающую функцию решения системы дифференциальных уравнений:

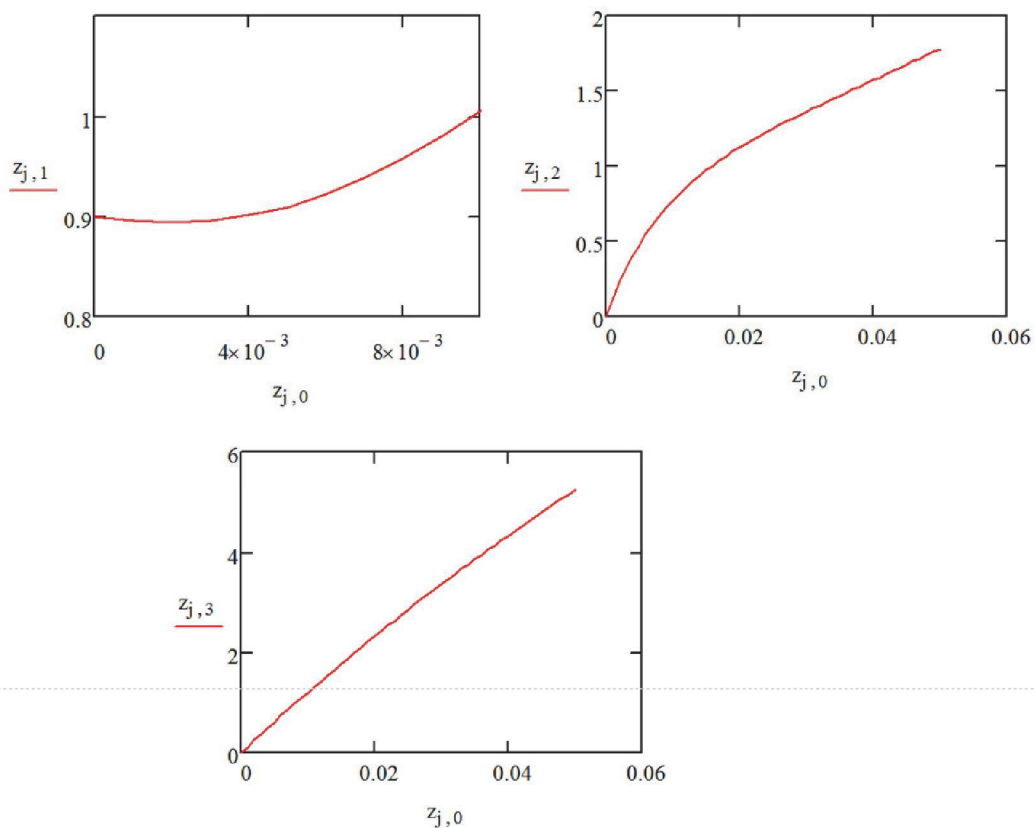
$$z := \text{rkfixed}(y, x1, x2, Np, D)$$

|    | 0                  | 1     | 2     | 3     | 4     | 5                      | 6                      |
|----|--------------------|-------|-------|-------|-------|------------------------|------------------------|
| 0  | 0                  | 0.9   | 0     | 0     | 0.01  | 0                      | 0                      |
| 1  | 1·10 <sup>-3</sup> | 0.896 | 0.124 | 0.125 | 0.011 | 6.028·10 <sup>-3</sup> | 6.264·10 <sup>-5</sup> |
| 2  | 2·10 <sup>-3</sup> | 0.894 | 0.23  | 0.249 | 0.012 | 0.022                  | 2.498·10 <sup>-4</sup> |
| 3  | 3·10 <sup>-3</sup> | 0.895 | 0.322 | 0.372 | 0.013 | 0.044                  | 5.605·10 <sup>-4</sup> |
| 4  | 4·10 <sup>-3</sup> | 0.901 | 0.405 | 0.494 | 0.014 | 0.072                  | 9.936·10 <sup>-4</sup> |
| 5  | 5·10 <sup>-3</sup> | 0.91  | 0.479 | 0.615 | 0.014 | 0.104                  | 1.548·10 <sup>-3</sup> |
| 6  | 6·10 <sup>-3</sup> | 0.922 | 0.547 | 0.735 | 0.015 | 0.138                  | 2.223·10 <sup>-3</sup> |
| 7  | 7·10 <sup>-3</sup> | 0.939 | 0.609 | 0.854 | 0.016 | 0.174                  | 3.018·10 <sup>-3</sup> |
| 8  | 8·10 <sup>-3</sup> | 0.958 | 0.666 | 0.972 | 0.017 | 0.212                  | 3.931·10 <sup>-3</sup> |
| 9  | 9·10 <sup>-3</sup> | 0.98  | 0.72  | 1.089 | 0.018 | 0.251                  | 4.961·10 <sup>-3</sup> |
| 10 | 0.01               | 1.004 | 0.769 | 1.205 | 0.019 | 0.291                  | ...                    |

6. По полученным данным построим зависимости изменения радиальной, тангенциальной и осевой составляющих скоростей частицы во времени:

Рис. 2.10. Продолжение  
(начало см. на с. 68, окончание – на с. 70)

$j := 0..50$



7. Полную скорость частицы вычислим по формуле:

$$V_{j,0} := \sqrt{(z_{j,1})^2 + (z_{j,2})^2 + (z_{j,3})^2}$$

$$V_{j,0} =$$

|       |
|-------|
| 0.9   |
| 0.913 |
| 0.956 |
| 1.022 |
| 1.104 |
| 1.198 |
| 1.3   |
| 1.407 |
| 1.519 |
| 1.632 |
| 1.747 |
| 1.863 |
| 1.979 |
| 2.096 |
| 2.212 |
| ...   |

8. По полученным значениям построим график зависимости полной скорости частицы от радиуса трубы:

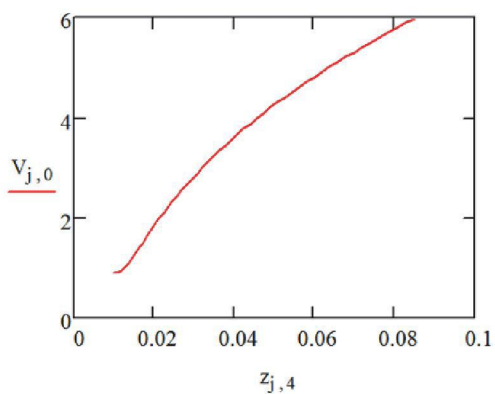


Рис. 2.10. Окончание (начало см. на с. 68–69)

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТОКОВ ЖИДКОСТИ

Задачей лабораторной работы является моделирование движения потоков жидкости в трубопроводной сети, схема которой показана на рис. 2.11. В качестве начальных условий для этой задачи принимаются скорости входных и выходных потоков  $q_1, q_2, \dots, q_5$ .

Необходимо определить скорости промежуточных потоков жидкости:  $x_1, x_2, \dots, x_7$ .

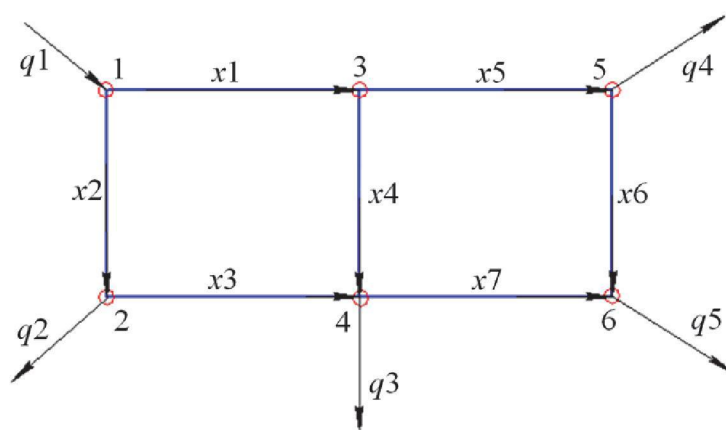


Рис. 2.11. Схема распределения потоков жидкости в трубопроводной сети

Исходные данные для решения задачи представлены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Исходные данные к лабораторной работе № 5

| Номер варианта | $q_1, \text{ м}^3/\text{ч}$ | $q_2, \text{ м}^3/\text{ч}$ | $q_3, \text{ м}^3/\text{ч}$ | $q_4, \text{ м}^3/\text{ч}$ | $q_5, \text{ м}^3/\text{ч}$ | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_5$ | $k_6$ | $k_7$ |
|----------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1              | 138,63                      | 41,59                       | 41,59                       | 13,86                       | 41,59                       | 1,0   | 1,0   | 1,0   | 1,0   | 1,0   | 1,0   | 1,0   |
| 2              | 139,45                      | 42,62                       | 42,62                       | 14,55                       | 40,61                       | 1,2   | 1,1   | 1,0   | 1,2   | 1,1   | 1,0   | 1,0   |
| 3              | 137,35                      | 40,23                       | 41,23                       | 13,69                       | 41,23                       | 1,0   | 1,0   | 1,1   | 1,2   | 1,1   | 1,1   | 1,3   |
| 4              | 136,96                      | 41,62                       | 40,69                       | 15,62                       | 41,62                       | 1,1   | 1,1   | 1,0   | 1,2   | 1,0   | 1,2   | 1,1   |
| 5              | 141,52                      | 43,21                       | 42,25                       | 16,23                       | 43,21                       | 1,3   | 1,0   | 1,2   | 1,1   | 1,1   | 1,3   | 1,1   |
| 6              | 140,89                      | 41,34                       | 41,34                       | 14,82                       | 39,78                       | 1,2   | 1,0   | 1,0   | 1,1   | 1,2   | 1,2   | 1,4   |
| 7              | 139,78                      | 40,18                       | 41,32                       | 13,85                       | 41,23                       | 1,1   | 1,0   | 1,0   | 1,2   | 1,0   | 1,3   | 1,2   |
| 8              | 138,75                      | 39,35                       | 39,78                       | 15,02                       | 40,12                       | 1,0   | 1,1   | 1,1   | 1,3   | 1,1   | 1,0   | 1,4   |

| Номер варианта | $q_1$ , м <sup>3</sup> /ч | $q_2$ , м <sup>3</sup> /ч | $q_3$ , м <sup>3</sup> /ч | $q_4$ , м <sup>3</sup> /ч | $q_5$ , м <sup>3</sup> /ч | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_5$ | $k_6$ | $k_7$ |
|----------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 9              | 142,36                    | 41,56                     | 41,56                     | 15,89                     | 40,65                     | 1,0   | 1,2   | 1,1   | 1,0   | 1,3   | 1,0   | 1,2   |
| 10             | 143,69                    | 42,78                     | 40,12                     | 16,31                     | 41,59                     | 1,1   | 1,1   | 1,2   | 1,0   | 1,4   | 1,1   | 1,3   |
| 11             | 136,42                    | 39,69                     | 40,65                     | 14,87                     | 41,62                     | 1,3   | 1,2   | 1,0   | 1,0   | 1,2   | 1,1   | 1,0   |
| 12             | 138,44                    | 40,25                     | 41,23                     | 12,98                     | 39,69                     | 1,2   | 1,0   | 1,1   | 1,1   | 1,3   | 1,0   | 1,2   |
| 13             | 136,35                    | 40,23                     | 41,23                     | 12,69                     | 41,23                     | 1,1   | 1,0   | 1,2   | 1,2   | 1,1   | 1,0   | 1,3   |
| 14             | 137,96                    | 41,34                     | 39,78                     | 14,62                     | 40,69                     | 1,1   | 1,2   | 1,1   | 1,1   | 1,1   | 1,2   | 1,0   |
| 15             | 139,52                    | 40,18                     | 41,23                     | 15,23                     | 42,25                     | 1,2   | 1,0   | 1,2   | 1,1   | 1,1   | 1,2   | 1,1   |
| 16             | 141,89                    | 41,62                     | 41,62                     | 15,82                     | 41,34                     | 1,2   | 1,1   | 1,0   | 1,2   | 1,1   | 1,2   | 1,2   |
| 17             | 137,78                    | 43,21                     | 43,21                     | 14,65                     | 41,32                     | 1,3   | 1,0   | 1,0   | 1,2   | 1,0   | 1,3   | 1,2   |

Рассмотрим алгоритм решения данной задачи для варианта № 1.

Существует два закона, определяющих скорости потоков в трубопроводной сети:

1. Алгебраическая сумма скоростей потоков в каждом узле сети равна нулю.

2. Алгебраическая сумма падений давлений вокруг любого циклического пути на схеме сети равна нулю.

На основании первого закона можно записать следующие линейные уравнения:

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 &= 138,63; \\
 x_1 - x_4 - x_5 &= 0; \\
 x_2 - x_3 &= 41,59; \\
 x_3 - x_4 - x_7 &= 41,59; \\
 x_5 - x_6 &= 13,86; \\
 x_6 + x_7 &= 41,59.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Исходя из второго закона можно записать два нелинейных уравнения:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= -k_1 \cdot (x_1)^2 + k_2 \cdot (x_2)^2 + k_3 \cdot (x_3)^2 - k_4 \cdot (x_4)^2 = 0; \\
 f_2(x) &= k_4 \cdot (x_4)^2 - k_5 \cdot (x_5)^2 - k_6 \cdot (x_6)^2 + k_7 \cdot (x_7)^2 = 0,
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

где  $k_i$  – заданные коэффициенты трения (примем для примера равными 1).

На рис. 2.12 представлено решение задачи в Mathcad с использованием встроенной функции *Find (var1, var2, ..., varn)*, позволяющей решать системы нелинейных уравнений при наличии ограничений.

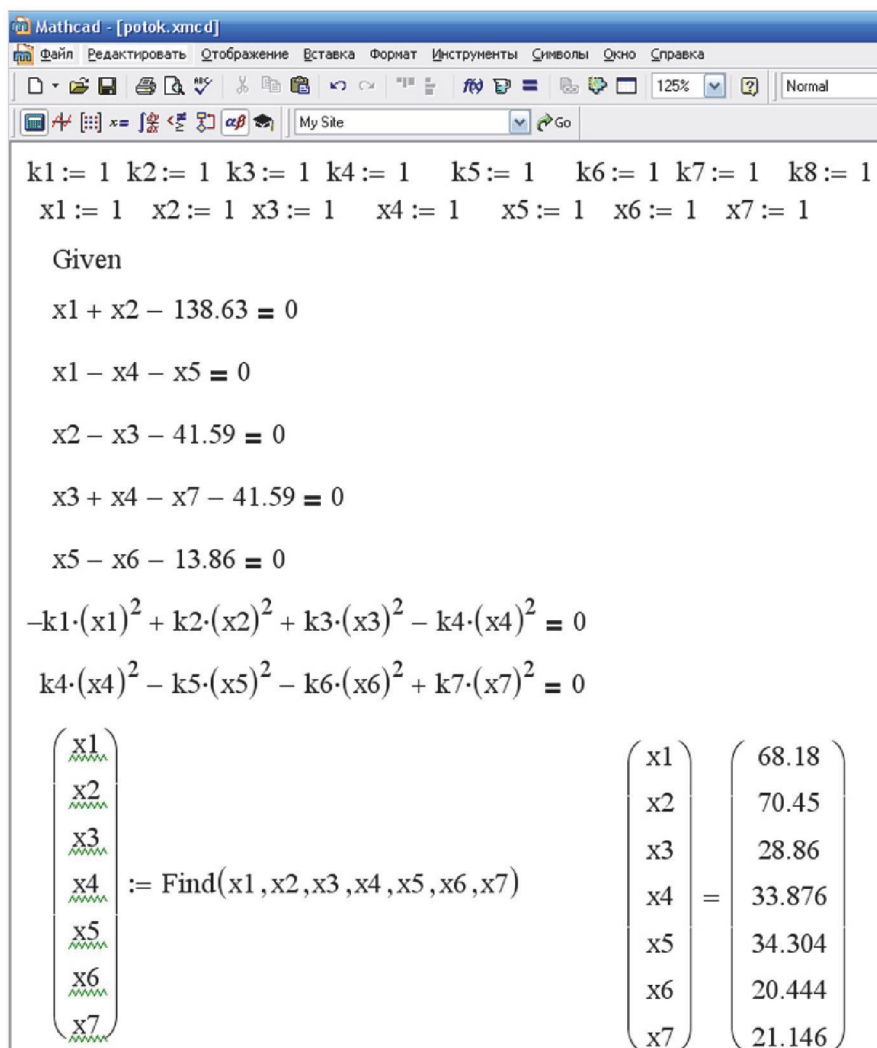


Рис. 2.12. Образец выполнения лабораторной работы № 5

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТЕПЛООБМЕННОГО ПРОЦЕССА

Теплообменные аппараты (ТОА) широко распространены в химических производствах и на предприятиях строительных материалов и представляют собой в общем случае устройства, предназначенные для передачи тепла от одного тела (более нагретого) к другому (менее нагретому).

Теплопередача в теплообменных аппаратах при переменных температурах зависит от взаимного направления движения теплоносителей.

В непрерывных процессах теплообмена возможны следующие варианты направлений движения жидкости друг относительно друга вдоль разделяющих их стенки:

– *параллельный ток*, или *прямоток*, при котором теплоносители движутся в одном и том же направлении;

– *противоток*, при котором теплоносители движутся в противоположных направлениях;

– *перекрестный ток*, при котором теплоносители движутся взаимно перпендикулярно друг другу;

– *смешанный ток*, при котором один из теплоносителей движется в одном направлении, а другой – как прямотоком, так и противотоком к первому.

Как известно, математическое описание теплообменного аппарата можно представить в следующем виде:

$$1) \text{ для прямотока } \begin{cases} \frac{dT_{\Gamma}}{dt} = -v_{\Gamma} \frac{\partial T_{\Gamma}}{\partial t} - \frac{KF}{m_{\Gamma}c_{\Gamma}}(T_{\Gamma} - T_{\text{X}}); \\ \frac{dT_{\text{X}}}{dt} = -v_{\text{X}} \frac{\partial T_{\text{X}}}{\partial t} + \frac{KF}{m_{\text{X}}c_{\text{X}}}(T_{\Gamma} - T_{\text{X}}); \end{cases} \quad (2.18)$$

$$2) \text{ для противотока } \begin{cases} \frac{dT_{\Gamma}}{dt} = -v_{\Gamma} \frac{\partial T_{\Gamma}}{\partial t} + \frac{KF}{m_{\Gamma}c_{\Gamma}}(T_{\Gamma} - T_{\text{X}}); \\ \frac{dT_{\text{X}}}{dt} = -v_{\text{X}} \frac{\partial T_{\text{X}}}{\partial t} + \frac{KF}{m_{\text{X}}c_{\text{X}}}(T_{\Gamma} - T_{\text{X}}), \end{cases} \quad (2.19)$$

где  $T_{\Gamma}$ ,  $T_{\text{X}}$  – температуры соответственно горячего и холодного потоков, °С;  $v_{\Gamma}$ ,  $v_{\text{X}}$  – линейные скорости соответственно горячего и холодного потоков, м/с;  $K$  – коэффициент теплопередачи теплообменника, ккал/(м<sup>2</sup> · с · °С);  $F$  – площадь поверхности теплообмена, м<sup>2</sup>;  $m_{\Gamma}$ ,  $m_{\text{X}}$  – массовый расход соответственно горячего и холодного потоков, кг/с;  $c_{\Gamma}$ ,  $c_{\text{X}}$  – удельная теплоемкость соответственно горячего и холодного потоков, ккал/(кг · °С).

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

**Задача.** Найти значения температур холодной  $T_{\text{X Вых}}$  на выходе из теплообменника и горячей воды  $T_{\Gamma \text{ Вх}}$  на входе, для того чтобы обеспечить температуру  $T_{\Gamma \text{ Вых}} = 31^{\circ}\text{C}$ . Известно, что движение теплоносителей – противоток; температура холодной воды, подаваемой в теплообменник,  $T_{\text{X Вх}} = 20^{\circ}\text{C}$ ; площадь поверхности теплообмена – 17,86 м<sup>2</sup>; коэффициент теплопередачи – 400 ккал/(м<sup>2</sup> · с · °С); массовые расходы –

$m_{\Gamma} = 9236$  кг/с,  $m_{\chi} = 9439$  кг/с; длина теплообменника  $L = 1,4$  м; удельные теплоемкости –  $c_{\Gamma} = 0,6$  ккал/(кг · °С),  $c_{\chi} = 1,0$  ккал/(кг · °С); линейные скорости движения потоков –  $v_{\Gamma} = 0,7$  м/с,  $v_{\chi} = 0,7$  м/с. Температуру рассчитать в трех сечениях теплообменника. Построить графики изменения температур потоков в каждом из сечений во времени и график изменения температур потоков по длине теплообменника.

Для решения задачи необходимо записать уравнения материального баланса с учетом двустороннего определения производной каждой температуры по длине теплообменника:

$$\begin{cases} \frac{dT_{\Gamma,i}}{dt} = -v_{\Gamma} \frac{T_{\Gamma,i+1} - T_{\Gamma,i-1}}{2\Delta l} + \frac{KF}{m_{\Gamma}c_{\Gamma}} (T_{\Gamma,i} - T_{\chi,i}); \\ \frac{dT_{\chi,i}}{dt} = -v_{\chi} \frac{T_{\chi,i+1} - T_{\chi,i-1}}{2\Delta l} + \frac{KF}{m_{\chi}c_{\chi}} (T_{\Gamma,i} - T_{\chi,i}), \end{cases} \quad (2.20)$$

где  $i$  – число сечений ( $i = 3$ ).

Введем математические обозначения для Mathcad (табл. 2.5).

Таблица 2.5

**Обозначения в Mathcad**

| Вход ТОА                    | Номер сечения |       |       | Выход ТОА |
|-----------------------------|---------------|-------|-------|-----------|
|                             | 1             | 2     | 3     |           |
| $T_{\Gamma \text{ ВХ}} = ?$ | $y_0$         | $y_2$ | $y_4$ | $y_6$     |
| $T_{\chi \text{ ВХ}}$       | $y_1$         | $y_3$ | $y_5$ | $y_7$     |

Ниже представлены результаты моделирования теплообменного аппарата в Mathcad (рис. 2.13).

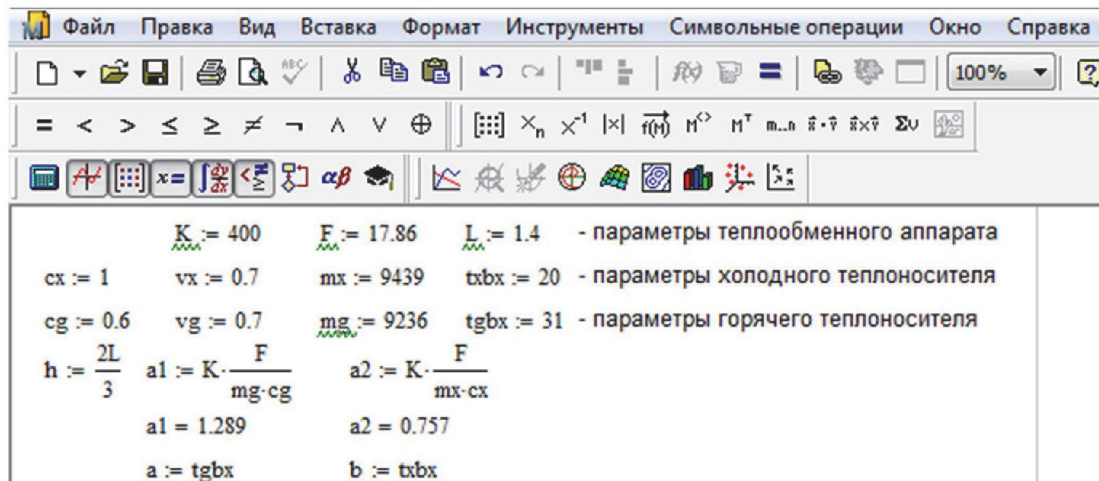


Рис. 2.13. Образец выполнения лабораторной работы № 6 (начало; продолжение и окончание см. на с. 76–77)

$$y := \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ b \\ a \\ b \\ a \\ b \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

$$D(t,y) := \begin{bmatrix} -vg \cdot \frac{y_2 - tgbx}{h} + a1 \cdot (y_0 - y_1) \\ -vx \cdot \frac{y_3 - txbx}{h} + a2 \cdot (y_0 - y_1) \\ -vg \cdot \frac{y_4 - y_0}{h} + a1 \cdot (y_2 - y_3) \\ -vx \cdot \frac{y_5 - y_1}{h} + a2 \cdot (y_2 - y_3) \\ -vg \cdot \frac{y_6 - y_2}{h} + a1 \cdot (y_4 - y_5) \\ -vx \cdot \frac{y_7 - y_3}{h} + a2 \cdot (y_4 - y_5) \\ -vg \cdot \frac{y_6 - y_4}{0.5 \cdot h} + a1 \cdot (y_6 - y_7) \\ -vx \cdot \frac{y_7 - y_5}{0.5 \cdot h} + a2 \cdot (y_6 - y_7) \end{bmatrix}$$

$$tk := \frac{L}{vg} \quad n := 200 \quad Z := \text{rkfixed}(y, 0, tk, n, D)$$

$$nk := n \quad j := 0..200$$

|   |      |        |        |        |        |        |        |        |        |
|---|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|   | 0    | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      |
| 0 | 0    | 31     | 20     | 31     | 20     | 31     | 20     | 31     | 20     |
| 1 | 0.01 | 31.142 | 20.083 | 31.142 | 20.083 | 31.142 | 20.083 | 31.142 | 20.083 |
| 2 | 0.02 | 31.283 | 20.166 | 31.285 | 20.167 | 31.285 | 20.167 | 31.285 | 20.167 |
| 3 | 0.03 | 31.424 | 20.249 | 31.429 | 20.252 | 31.429 | 20.252 | 31.429 | 20.252 |
| 4 | 0.04 | 31.565 | 20.332 | 31.573 | 20.337 | 31.573 | 20.337 | 31.573 | 20.337 |
| 5 | 0.05 | 31.705 | 20.414 | 31.718 | 20.422 | 31.719 | 20.422 | 31.719 | 20.422 |
| 6 | 0.06 | 31.845 | 20.496 | 31.864 | 20.507 | 31.865 | 20.508 | 31.865 | 20.508 |
| 7 | 0.07 | 31.985 | 20.578 | 32.011 | 20.594 | 32.011 | 20.594 | 32.011 | 20.594 |
| 8 | 0.08 | 32.124 | 20.66  | 32.158 | 20.68  | 32.159 | 20.68  | 32.159 | 20.68  |
| 9 | 0.09 | 32.263 | 20.741 | 32.306 | 20.767 | 32.307 | 20.768 | 32.307 | ...    |

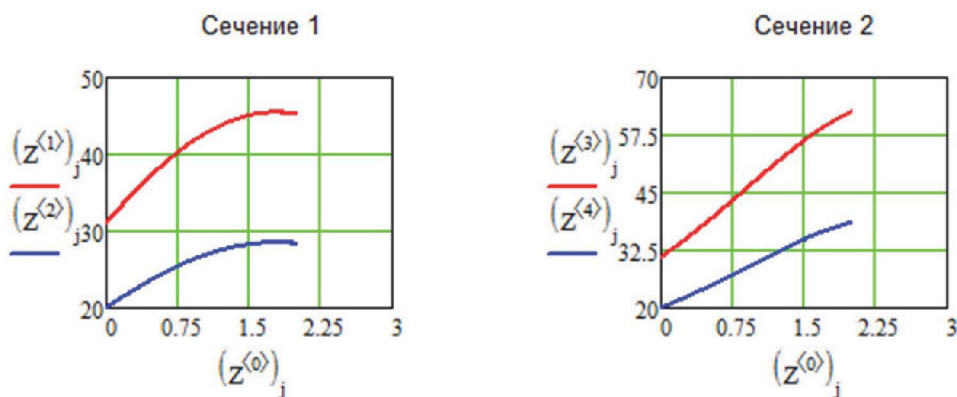


Рис. 2.13. Продолжение (начало см. на с. 75, окончание – на с. 77)

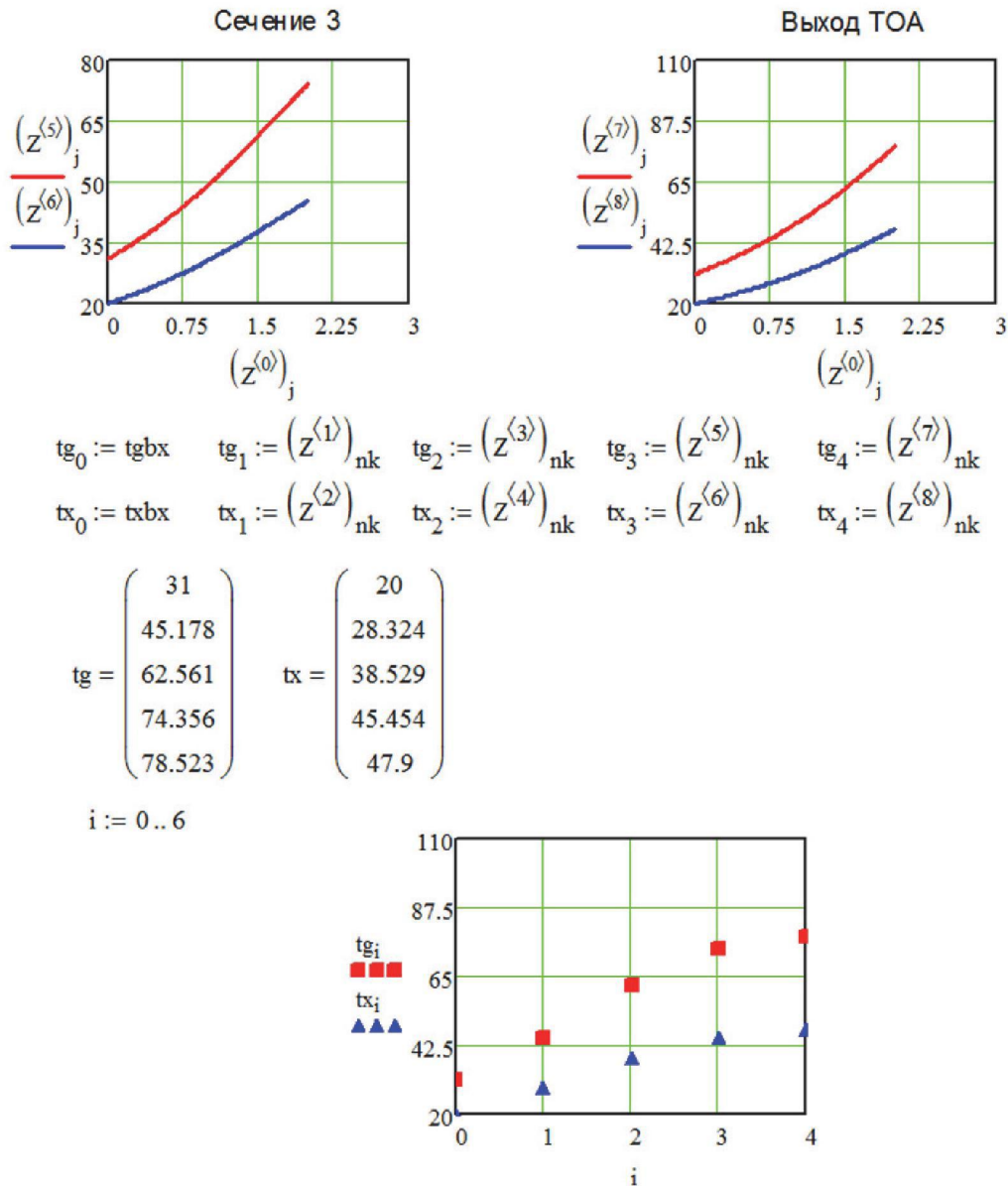


Рис. 2.13. Окончание (начало см. на с. 75–76)

По аналогии с рассмотренным примером необходимо решить самостоятельно следующую задачу.

**Задача.** Найти значения температур холодной  $T_{x \text{ вых}}$  и горячей  $T_{г \text{ вых}}$  воды на выходе из теплообменника, если известно, что движение теплоносителей – прямоток; остальные данные взять из табл. 2.6 (см. на с. 78). Температуру рассчитать в пяти сечениях теплообменника. Построить графики изменения температур потоков в каждом из сечений во времени и график изменения температур потоков по длине теплообменника.

Исходные данные к лабораторной работе № 6

| Номер<br>варианта | $T_{Г\text{ ВХ}},$<br>°С | $T_{Х\text{ ВХ}},$<br>°С | $F, \text{ м}^2$ | $L, \text{ м}$ | $K,$<br>$\frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{°С}}$ | $m_{Г},$<br>кг/с | $m_{Х},$<br>кг/с | $c_{Г},$<br>$\frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{°С}}$ | $c_{Х},$<br>$\frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{°С}}$ | $v_{Г},$<br>м/с | $v_{Х},$<br>м/с |
|-------------------|--------------------------|--------------------------|------------------|----------------|---|------------------|------------------|---|---|-----------------|-----------------|
| 1                 | 150                      | 20                       | 16,5             | 1,0            | 400   | 9121             | 9311             | 0,40  | 1,10  | 1,10            | 0,20            |
| 2                 | 165                      | 30                       | 14,5             | 1,1            | 450   | 9133             | 9315             | 0,45  | 1,05  | 1,00            | 0,25            |
| 3                 | 180                      | 17                       | 12,3             | 1,3            | 410   | 9144             | 9322             | 0,50  | 1,00  | 0,95            | 0,30            |
| 4                 | 190                      | 10                       | 13,3             | 1,2            | 420   | 9156             | 9336             | 0,55  | 0,95  | 0,90            | 0,35            |
| 5                 | 160                      | 25                       | 17,7             | 1,4            | 350   | 9168             | 9338             | 0,60  | 0,90  | 0,85            | 0,40            |
| 6                 | 175                      | 30                       | 17,0             | 1,0            | 360   | 9173             | 9341             | 0,65  | 0,85  | 0,80            | 0,45            |
| 7                 | 145                      | 40                       | 18,7             | 1,6            | 380   | 9186             | 9356             | 0,70  | 0,80  | 0,75            | 0,50            |
| 8                 | 130                      | 20                       | 14,2             | 1,7            | 375   | 9195             | 9358             | 0,75  | 0,75  | 0,70            | 0,55            |
| 9                 | 120                      | 10                       | 13,2             | 0,9            | 395   | 9202             | 9364             | 0,80  | 0,70  | 0,65            | 0,60            |
| 10                | 110                      | 5                        | 15,4             | 0,8            | 412   | 9213             | 9369             | 0,85  | 0,65  | 0,60            | 0,65            |
| 11                | 100                      | 10                       | 16,4             | 0,9            | 415   | 9214             | 9372             | 0,90  | 0,60  | 0,55            | 0,70            |
| 12                | 120                      | 20                       | 15,3             | 1,2            | 435   | 9226             | 9384             | 0,95  | 0,55  | 0,50            | 0,75            |
| 13                | 180                      | 30                       | 19,8             | 1,3            | 425   | 9224             | 9395             | 1,00  | 0,50  | 0,45            | 0,80            |
| 14                | 185                      | 15                       | 18,5             | 1,8            | 415   | 9236             | 9398             | 1,05  | 0,45  | 0,40            | 0,85            |
| 15                | 165                      | 25                       | 16,7             | 2,0            | 385   | 9232             | 9405             | 1,10  | 0,40  | 0,35            | 0,90            |
| 16                | 125                      | 40                       | 14,8             | 1,4            | 395   | 9242             | 9408             | 0,42  | 0,35  | 0,30            | 0,95            |
| 17                | 150                      | 15                       | 15,2             | 1,2            | 365   | 9241             | 9419             | 0,63  | 0,52  | 0,25            | 1,00            |
| 18                | 135                      | 20                       | 16,3             | 1,5            | 405   | 9235             | 9431             | 0,74  | 0,81  | 0,20            | 1,10            |

## ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

### Решение общей задачи линейного программирования

На предприятии после модернизации производства появился свободный ресурс времени оборудования. Предлагается организовать изготовление новых изделий нескольких наименований. Известно время, требуемое на создание каждого изделия на каждом виде оборудования, свободные резервы времени на каждой машине, а также прибыль, получаемая от продажи каждого изделия. Необходимо

определить, какие изделия и в каком количестве целесообразно производить, чтобы получить максимальную прибыль.

Количество изделий  $j$ -го наименования, которое может произвести предприятие, обозначим через  $x_j$ , количество каждого  $i$ -го ресурса для изготовления каждого  $j$ -го изделия – через норму  $c_{ij}$ , количество  $i$ -го ресурса, имеющегося на предприятии, – через  $a_i$ . Система неравенств, характеризующая вышеназванные ограничения, имеет вид

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1j}x_j + \dots + c_{1n}x_n \leq a_1; \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2j}x_j + \dots + c_{2n}x_n \leq a_2; \\ \dots \\ c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + c_{i3}x_3 + \dots + c_{ij}x_j + \dots + c_{in}x_n \leq a_i; \\ \dots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + c_{m3}x_3 + \dots + c_{mj}x_j + \dots + c_{mn}x_n \leq a_m. \end{cases} \quad (2.21)$$

Критерий оптимизации – максимальная прибыль – записывается так:

$$f(x) = P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + \dots + P_nx_n. \quad (2.22)$$

В конкретном выражении данная задача может иметь следующий вид. Система ограничений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 \leq 15; \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 9; \\ 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 \leq 30. \end{cases} \quad (2.23)$$

Критерий оптимизации:

$$f(x) = 40x_1 + 50x_2 + 30x_3 + 20x_4. \quad (2.24)$$

Для решения данной задачи в Mathcad необходимо вначале записать целевую функцию (2.24) в несколько измененном виде:

$$f(x) = 40x_0 + 50x_1 + 30x_2 + 20x_3. \quad (2.25)$$

Вместо знака « $=$ » следует набрать знак присваивания « $:=$ » (комбинация клавиш *Shift* + « $:$ »). Обязательный знак умножения вводится клавишей « $*$ », нижний индекс – после нажатия клавиши « $[$ ». После набора нижнего индекса необходимо нажать клавишу со стрелкой направо.

Следует задать имя матрицы, например  $M$ , и знак присваивания « $:=$ ». После чего нажать комбинацию клавиш *Ctrl* + « $M$ ». Появится диалоговое окно, в котором необходимо указать количество строк (*Rows*) – 3, количество столбцов (*Columns*) – 4 и нажать клавишу *OK*. Следует заполнить матрицу, вводя соответствующие коэффициенты системы неравенств (2.23).

Необходимо ввести имя вектора правой части системы неравенств (2.23), например  $v$ , и знак присвоения «:=». Затем нажать комбинацию клавиш *Ctrl* + «M». Появится диалоговое окно, в котором следует указать количество строк (*Rows*) – 3, количество столбцов (*Columns*) – 1 и нажать клавишу *OK*. Заполнить вектор коэффициентов правой части системы неравенств (2,23), вводя соответствующие коэффициенты.

Необходимо задать начальное значение хотя бы одного искомого параметра, например  $x_3 := 0$ . Далее следует ввести ключевое слово *Given* (Дано) и записать систему неравенств в матричном виде:  $M \cdot x \leq 0$ .

Необходимо задать граничное условие  $x \geq 0$  и имя вектора оптимальных параметров, например  $x_{opt}$ , знак присвоения и имя встроенной функции, обеспечивающей максимизацию целевой функции (*Maximize*). После чего набрать на клавиатуре имя вектора оптимальных параметров и знак равенства. На экране появятся искомые оптимальные значения.

Следует набрать на клавиатуре максимальную прибыль в виде  $f(x_{opt})$  и «=». На экране появится:  $f(x_{opt}) = 150$ .

Анализ результатов расчета показывает, что предприятие в данных условиях должно выпускать только второе изделие в количестве трех единиц. При этом будет получена максимальная прибыль, равная 150 единицам.

Решение задачи в Mathcad приведено на рис. 2.14.

|  |   |  |  |
|--|---|--|--|
| Целевая функция  | $f(x) := 40 \cdot x_0 + 50 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + 20 \cdot x_3$ |  |  |
| Коэффициенты системы ограничений   |   |  |  |
| матрица  | вектор  | Начальное приближение                                      |  |
| $M := \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ | $v := \begin{bmatrix} 15 \\ 9 \\ 30 \end{bmatrix}$                  | $x_3 := 0$   |  |
| Given  |   |  |  |
| $M \cdot x \leq v$   | $x \geq 0$  | $x_{opt} := \text{Maximize}(f, x)$                         |  |
|  | $f(x_{opt}) = 150$  | $x_{opt} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ |  |

Рис. 2.14. Пример решения задачи линейного программирования

Рассмотрим задачу о смесях.

**Задача.** Стандартом требуется, чтобы октановое число бензина А-76 было не ниже 76, а содержание серы – не более 0,3%. Для изготовления

бензина используется смесь из четырех компонентов. Требуется определить, сколько тонн каждого компонента следует использовать для получения 1000 т автомобильного бензина А-76, чтобы его себестоимость была минимальной. Цена каждого компонента равна соответственно 40, 45, 60 и 90 условных единиц за тонну. Содержание серы в каждом компоненте составляет соответственно 0,35; 0,35; 0,3 и 0,2%. Октановое число принять 68, 72, 80 и 90 соответственно для каждого компонента. Учесть, что на складе в наличии первого компонента 700 т, второго – 600 т, третьего – 500 т и четвертого – 300 т.

Решение задачи в Mathcad приведено на рис. 2.15.

$f(x) := 40 \cdot x_1 + 45 \cdot x_2 + 60 \cdot x_3 + 90 \cdot x_4$  Целевая функция  
 $x_1 := 10 \quad x_2 := 10 \quad x_3 := 10 \quad x_4 := 10$  Произвольные начальные решения  
 Given  
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000$  Условия получения заданного количества бензина  
 $68 \cdot x_1 + 72 \cdot x_2 + 80 \cdot x_3 + 90 \cdot x_4 \geq 76 \cdot 1000$  Ограничение по октановому числу  
 $0.35 \cdot x_1 + 0.35 \cdot x_2 + 0.3 \cdot x_3 + 0.2 \cdot x_4 \leq 0.3 \cdot 1000$  Ограничение по содержанию серы  
 $0 \leq x_1 \leq 700 \quad 0 \leq x_2 \leq 600$   
 $0 \leq x_3 \leq 500 \quad 0 \leq x_4 \leq 300$  Ограничения по количеству компонентов  
 $R := \text{Minimize}(f, x)$   
 $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 571.429 \\ -2.842 \times 10^{-14} \\ 142.857 \\ 285.714 \end{pmatrix}$   
 $f(R) = 5.714 \times 10^4$  Минимальная себестоимость

Рис. 2.15. Пример решения задачи о смесях

По аналогии с рассмотренным примером необходимо решить следующую задачу.

**Задача.** Пусть цех должен изготовить 100 штук изделий трех типов, причем не менее 20 штук каждого типа. На изделия уходит соответственно

4; 3,4 и 2 кг металла при его общем запасе в 340 кг. Кроме того, на изделия расходуется соответственно 4,75; 11 и 2 кг пластмассы при ее общем запасе в 700 кг. Сколько изделий каждого типа ( $x_1, x_2, x_3$ ) надо выпустить для получения максимальной прибыли, если цена изделий каждого типа составляет соответственно 4, 3 и 2 условных единицы?

### Решение задач нелинейного программирования

#### *Идентификация параметров экспериментальной зависимости.*

В результате проведенного эксперимента были получены следующие данные (табл. 2.7).

Таблица 2.7

Экспериментальные данные

| Параметр | Номер опыта |      |      |      |      |      |       |
|----------|-------------|------|------|------|------|------|-------|
|          | 1           | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7     |
| $x$      | 0,32        | 0,53 | 0,74 | 0,81 | 0,93 | 1,04 | 1,28  |
| $y$      | 0,12        | 0,92 | 2,81 | 3,73 | 5,82 | 8,39 | 16,07 |

Известен предполагаемый вид зависимости:

$$F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d. \quad (2.26)$$

Требуется определить коэффициенты зависимости  $y = F(x)$ .

В качестве критерия оптимальности обычно выбирается сумма квадратов отклонений экспериментальных и расчетных значений:

$$G = \sum_{i=1}^n (y_i - F(x_i, a_1, \dots, a_m))^2, \quad (2.27)$$

где  $n$  – количество опытов;  $m$  – количество коэффициентов расчетной зависимости.

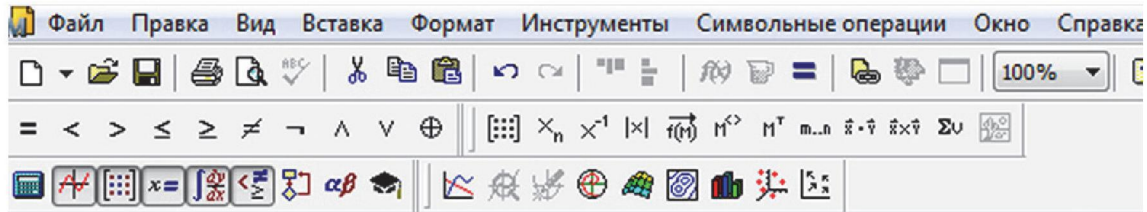
После расчетов необходимо провести проверку на возможность использования полученной расчетной зависимости.

С этой целью строятся графики экспериментальной и расчетной зависимости  $y = F(x)$  и определяются корреляционное отношение  $\eta$  и средняя оценка  $\varepsilon$ :

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_{r_i})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}; \quad \varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - y_{r_i}|}{n}, \quad (2.28)$$

где  $y_i, y_{r_i}$  – соответственно экспериментальное и расчетное значение параметра.

Пример решения задачи, выполненный в математическом пакете Mathcad, представлен на рис. 2.16.



1. Введем исходные данные:

$$x := \begin{pmatrix} 0.32 \\ 0.53 \\ 0.74 \\ 0.81 \\ 0.93 \\ 1.04 \\ 1.28 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 0.12 \\ 0.92 \\ 2.81 \\ 3.73 \\ 5.82 \\ 8.39 \\ 16.07 \end{pmatrix} \quad n := 7$$

2. Зададим расчетную зависимость F и функцию цели G:

$$F(x, a, b, c, d) := a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

$$G1(a, b, c, d) := (y - F(x, a, b, c, d))^2$$

3. Введем стартовую точку и решим задачу с использованием блока Given...Minimize:

$$a := 1 \quad b := -2 \quad c := 1 \quad d := 1$$

$$G1(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} 1.057 \\ 0.039 \\ 3.098 \\ 7.294 \\ 23.188 \\ 54.588 \\ 224.09 \end{pmatrix} \quad v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$G(a, b, c, d) := G1(a, b, c, d) \cdot v \quad G(a, b, c, d) = 313.354$$

Given

$$\frac{d}{da} G(a, b, c, d) = 0 \quad \frac{d}{db} G(a, b, c, d) = 0 \quad \frac{d}{dc} G(a, b, c, d) = 0 \quad \frac{d}{dd} G(a, b, c, d) = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} := \text{Minimize}(G, a, b, c, d)$$

Рис. 2.16. Идентификация параметров экспериментальной зависимости (начало; окончание см. на с. 84)

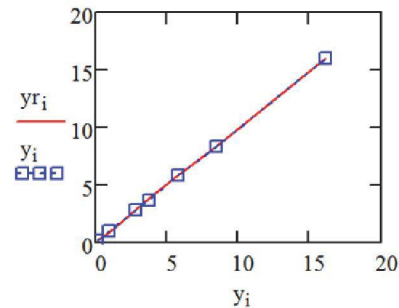
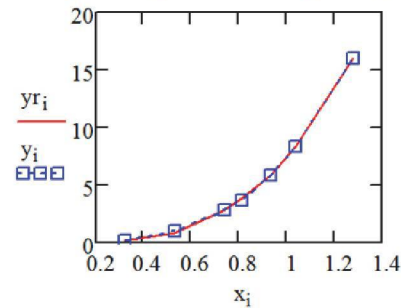
4. Получим искомые коэффициенты зависимости  $y = F(x)$ , проверим правильность решения и определим расчетные значения функции:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.725 \\ -1.421 \\ 0.127 \\ -0.057 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \underline{GN} := G(a, b, c, d) \\ GN = 3.102 \times 10^{-3} \\ i := 0..7 \end{array}$$

$$\underline{yr} := F(x, a, b, c, d)$$

5. Проведем анализ полученного решения:

$$yr = \begin{pmatrix} 0.124 \\ 0.91 \\ 2.795 \\ 3.751 \\ 5.851 \\ 8.353 \\ 16.076 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 0.12 \\ 0.92 \\ 2.81 \\ 3.73 \\ 5.82 \\ 8.39 \\ 16.07 \end{pmatrix}$$



$$\eta_1 := \sqrt{1 - \frac{(y - yr)^2}{(y - \text{mean}(y))^2}}$$

$$\epsilon_1 := \frac{(y - yr)}{y}$$

$$\eta := \eta_1 \cdot \frac{v}{n}$$

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0.997 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \epsilon_1 = \begin{pmatrix} -0.033 \\ 0.011 \\ 5.426 \times 10^{-3} \\ -5.574 \times 10^{-3} \\ -5.27 \times 10^{-3} \\ 4.374 \times 10^{-3} \\ -3.875 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\epsilon} := \frac{100 \cdot (|\epsilon_1 \cdot v_1| + |\epsilon_2 \cdot v_2| + |\epsilon_3 \cdot v_3| + |\epsilon_4 \cdot v_4| + |\epsilon_5 \cdot v_5| + |\epsilon_6 \cdot v_6| + |\epsilon_0 \cdot v_0|)}{n}$$

$$\epsilon = 0.93 \quad \eta = 1$$

Рис. 2.16. Окончание  
(начало см. на с. 83)

Результаты проверки  $\eta = 1$  и  $\epsilon = 0,93$  и анализ графиков приводят к выводу об адекватности предложенной зависимости экспериментальным данным. Аналогично примеру необходимо решить задачу самостоятельно, согласно данным, приведенным в табл. 2.8.

Таблица 2.8

**Исходные данные для идентификации параметров  
экспериментальной зависимости**

| Номер варианта | Параметр | Номер опыта |      |      |      |      |      |       |
|----------------|----------|-------------|------|------|------|------|------|-------|
|                |          | 1           | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7     |
| 1              | $x$      | 0,32        | 0,53 | 0,74 | 0,81 | 0,93 | 1,04 | 1,28  |
|                | $y$      | 0,12        | 0,92 | 2,81 | 3,73 | 5,82 | 8,39 | 16,07 |
| 2              | $x$      | 0,45        | 0,59 | 0,82 | 0,86 | 1,02 | 1,12 | 1,36  |
|                | $y$      | 0,14        | 0,85 | 3,09 | 3,68 | 5,92 | 8,52 | 14,21 |
| 3              | $x$      | 0,36        | 0,62 | 0,68 | 0,81 | 0,91 | 1,14 | 1,32  |
|                | $y$      | 0,17        | 0,83 | 2,92 | 3,71 | 4,23 | 7,35 | 12,35 |
| 4              | $x$      | 0,33        | 0,54 | 0,75 | 0,82 | 0,94 | 1,05 | 1,29  |
|                | $y$      | 0,11        | 0,82 | 2,93 | 3,63 | 5,68 | 8,49 | 15,60 |
| 5              | $x$      | 0,35        | 0,51 | 0,70 | 0,80 | 0,92 | 0,99 | 1,19  |
|                | $y$      | 0,12        | 0,88 | 2,91 | 3,25 | 4,56 | 7,65 | 14,32 |
| 6              | $x$      | 0,36        | 0,52 | 0,71 | 0,81 | 0,90 | 1,00 | 1,21  |
|                | $y$      | 0,11        | 0,89 | 3,05 | 3,42 | 4,82 | 7,02 | 15,04 |
| 7              | $x$      | 0,37        | 0,53 | 0,72 | 0,85 | 0,91 | 1,01 | 1,22  |
|                | $y$      | 0,13        | 0,90 | 3,21 | 3,82 | 5,26 | 8,21 | 16,01 |
| 8              | $x$      | 0,38        | 0,54 | 0,73 | 0,82 | 0,92 | 1,02 | 1,23  |
|                | $y$      | 0,16        | 0,91 | 3,02 | 3,56 | 5,83 | 7,26 | 14,31 |
| 9              | $x$      | 0,39        | 0,55 | 0,74 | 0,83 | 0,93 | 1,03 | 1,24  |
|                | $y$      | 0,18        | 0,92 | 3,03 | 3,50 | 5,23 | 7,85 | 15,03 |
| 10             | $x$      | 0,40        | 0,56 | 0,75 | 0,84 | 0,94 | 1,04 | 1,25  |
|                | $y$      | 0,15        | 0,93 | 3,21 | 3,58 | 5,99 | 8,46 | 15,23 |
| 11             | $x$      | 0,41        | 0,57 | 0,76 | 0,85 | 0,95 | 1,05 | 1,45  |
|                | $y$      | 0,16        | 0,94 | 2,91 | 3,15 | 4,87 | 7,99 | 14,26 |
| 12             | $x$      | 0,42        | 0,58 | 0,77 | 0,82 | 0,96 | 1,06 | 1,36  |
|                | $y$      | 0,19        | 0,95 | 2,65 | 3,28 | 5,01 | 8,13 | 14,58 |
| 13             | $x$      | 0,43        | 0,59 | 0,78 | 0,86 | 0,95 | 1,07 | 1,28  |
|                | $y$      | 0,14        | 0,86 | 2,48 | 3,05 | 5,40 | 8,47 | 15,63 |
| 14             | $x$      | 0,44        | 0,60 | 0,79 | 0,87 | 0,94 | 1,08 | 1,29  |
|                | $y$      | 0,18        | 0,84 | 2,98 | 3,45 | 5,60 | 8,65 | 16,14 |
| 15             | $x$      | 0,45        | 0,61 | 0,80 | 0,89 | 0,95 | 1,09 | 1,30  |
|                | $y$      | 0,19        | 0,85 | 2,65 | 2,89 | 4,58 | 7,12 | 15,57 |
| 16             | $x$      | 0,48        | 0,62 | 0,81 | 0,88 | 0,96 | 1,10 | 1,31  |
|                | $y$      | 0,20        | 0,88 | 2,78 | 2,98 | 5,02 | 7,68 | 15,89 |
| 17             | $x$      | 0,26        | 0,48 | 0,82 | 0,74 | 0,95 | 1,11 | 1,21  |
|                | $y$      | 0,10        | 0,87 | 2,92 | 3,06 | 5,14 | 8,25 | 16,26 |

***Определение оптимальных параметров эрлифтного аппарата.***  
Требуется найти оптимальные конструктивные параметры эрлифтного аппарата, при которых капитальные затраты будут минимальными.

Капитальные затраты эрлифтного аппарата могут быть определены по формуле

$$K = 248\,314 + 13\,378v + 2622d - 6727\varphi - 773d + 95v\varphi - 1588d\varphi + 1226v^2 + 339d^2 - 1072\varphi^2, \quad (2.29)$$

где  $v$  – объем аппарата,  $\text{м}^3$ ;  $d$  – диаметр аппарата, м;  $\varphi$  – угол раскрытия конического днища, рад.

В соответствии с вариантом № 1 (табл. 2.9) конструктивные параметры эрлифтного аппарата могут находиться в диапазонах:  $v = 4\text{--}6 \text{ м}^3$ ,  $d = 0,3\text{--}0,5$  м,  $\varphi = 20\text{--}50$  рад.

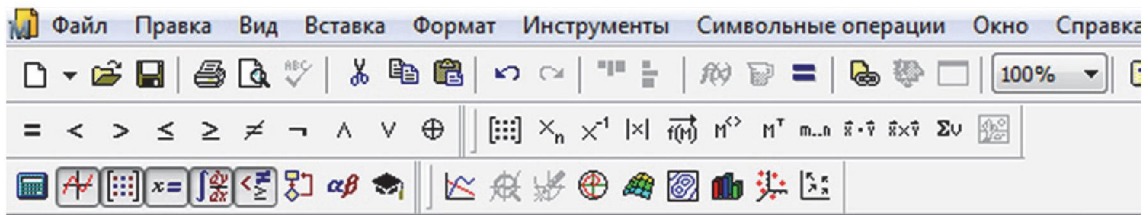
Таблица 2.9

**Исходные данные для определения оптимальных параметров эрлифтного аппарата**

| Номер варианта | $v, \text{м}^3$ |     | $d, \text{м}$ |     | $\varphi, \text{рад}$ |     |
|----------------|-----------------|-----|---------------|-----|-----------------------|-----|
|                | min             | max | min           | max | min                   | max |
| 1              | 4               | 6   | 0,3           | 0,5 | 20                    | 50  |
| 2              | 3               | 6   | 0,2           | 0,6 | 19                    | 55  |
| 3              | 2               | 7   | 0,1           | 0,4 | 18                    | 54  |
| 4              | 3               | 5   | 0,4           | 0,7 | 17                    | 53  |
| 5              | 4               | 8   | 0,3           | 0,5 | 15                    | 52  |
| 6              | 5               | 7   | 0,2           | 0,5 | 16                    | 51  |
| 7              | 4               | 6   | 0,1           | 0,4 | 21                    | 51  |
| 8              | 2               | 4   | 0,2           | 0,4 | 22                    | 52  |
| 9              | 3               | 5   | 0,3           | 0,6 | 23                    | 52  |
| 10             | 2               | 4   | 0,4           | 0,6 | 15                    | 52  |
| 11             | 3               | 5   | 0,5           | 0,8 | 16                    | 53  |
| 12             | 4               | 6   | 0,4           | 0,7 | 17                    | 54  |
| 13             | 5               | 7   | 0,3           | 0,4 | 18                    | 55  |
| 14             | 6               | 8   | 0,2           | 0,6 | 19                    | 56  |
| 15             | 4               | 6   | 0,1           | 0,4 | 20                    | 57  |
| 16             | 3               | 5   | 0,2           | 0,5 | 21                    | 56  |
| 17             | 2               | 5   | 0,3           | 0,7 | 22                    | 55  |
| 18             | 4               | 7   | 0,4           | 0,6 | 23                    | 54  |

Задача оптимизации с ограничениями требует предварительной подготовки для задания функции. Также при решении ее следует использовать блоки *Given...Minerr* или *Given...Minimize*, в которых должны быть учтены ограничения на конструктивные параметры (управляющие переменные).

Пример решения задачи, выполненный в математическом пакете Mathcad, представлен на рис. 2.17.



1. Введем целевую функцию:

$$k1(v,d,f) := 248340 + 13378 \cdot v + 2622 \cdot d - 6727 \cdot f - 773 \cdot v \cdot d$$

$$k2(v,d,f) := 95 \cdot v \cdot f - 1588 \cdot d \cdot f + 1226 \cdot v^2 + 339 \cdot d^2 - 1072 \cdot f^2$$

$$k(v,d,f) := k1(v,d,f) + k2(v,d,f)$$

2. Зададим ограничения на управляющие воздействия:

$$vmin := 4 \quad vmax := 16 \quad vcp := \frac{vmin + vmax}{2}$$

$$dmin := 0.3 \quad dmax := 0.6 \quad dcp := \frac{dmin + dmax}{2}$$

$$fmin := 20 \quad fmax := 50 \quad per(x) := \frac{\pi \cdot x}{180}$$

$$\underline{fmin} := per(fmin) \quad fcp := \frac{fmin + fmax}{2}$$

$$\underline{fmax} := per(fmax)$$

3. Решим задачу оптимизации для левой границы диапазона:

$$v := vmin \quad d := dmin \quad f := fmin$$

$$k(v,d,f) = 3.188 \times 10^5$$

Given

$$v \geq vmin \quad d \geq dmin \quad f \geq fmin$$

$$v \leq vmax \quad d \leq dmax \quad f \leq fmax$$

$$x1 := \text{Minimize}(k,v,d,f)$$

4. Решим задачу оптимизации для правой границы диапазона:

$$\underline{v} := vmax \quad \underline{d} := dmax \quad \underline{f} := fmax$$

$$k(v,d,f) = 7.643 \times 10^5$$

Given

$$v \geq vmin \quad d \geq dmin \quad f \geq fmin$$

$$v \leq vmax \quad d \leq dmax \quad f \leq fmax$$

$$x2 := \text{Minimize}(k,v,d,f)$$

5. Решим задачу оптимизации для середины диапазона:

$$\underline{v} := vcp \quad \underline{d} := dcp \quad \underline{f} := fcp$$

$$k(v,d,f) = -3.403 \times 10^5$$

Рис. 2.17. Определение оптимальных параметров эрлифтного аппарата (начало; окончание см. на с. 88)

Given  
 $v \geq v_{\min}$      $d \geq d_{\min}$      $f \geq f_{\min}$   
 $v \leq v_{\max}$      $d \leq d_{\max}$      $f \leq f_{\max}$   
 $x3 := \text{Minimize}(k, v, d, f)$

6. Получим результаты решения задачи оптимизации:

$$x1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0.6 \\ 0.873 \end{pmatrix} \quad x2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0.6 \\ 0.873 \end{pmatrix} \quad x3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0.6 \\ 0.873 \end{pmatrix}$$

7. Найдем значение целевой функции в оптимальной точке:

$$k(x1_0, x1_1, x1_2) = 3.141 \times 10^5$$

Рис. 2.17. Окончание (начало см. на с. 87)

## ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Рассмотрим влияние на гидравлическое сопротивление мокрой насадки  $\Delta p$  трех факторов: скорости газа  $V = 1,33\text{--}3,03$  м/с, плотности орошения жидкости  $q = 4,34 \cdot 10^{-3}\text{--}1,5 \cdot 10^{-2}$  м<sup>3</sup>/(м<sup>2</sup> · с) и зазора между пластинами насадки  $\delta = 0,010\text{--}0,015$  м.

Верхний уровень по скорости газа  $z_1^{\max} = 3,03$  м/с, нижний  $z_1^{\min} = 1,33$  м/с, тогда:

$$z_1^0 = \frac{z_1^{\max} + z_1^{\min}}{2} = \frac{3,03 + 1,33}{2} = 2,18; \quad (2.30)$$

$$\Delta z_1 = \frac{z_1^{\max} - z_1^{\min}}{2} = \frac{3,03 - 1,33}{2} = 0,85.$$

Верхний уровень по плотности орошения  $z_2^{\max} = 1,5 \cdot 10^{-2}$  м<sup>3</sup>/(м<sup>2</sup> · с), нижний  $z_2^{\min} = 4,34 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>/(м<sup>2</sup> · с), тогда:

$$z_2^0 = \frac{z_2^{\max} + z_2^{\min}}{2} = \frac{1,5 \cdot 10^{-2} + 4,34 \cdot 10^{-3}}{2} = 9,67 \cdot 10^{-3}; \quad (2.31)$$

$$\Delta z_2 = \frac{z_2^{\max} - z_2^{\min}}{2} = \frac{1,5 \cdot 10^{-2} - 4,34 \cdot 10^{-3}}{2} = 5,33 \cdot 10^{-3}.$$

Верхний уровень по зазору  $z_3^{\max} = 0,015$  м, нижний  $z_3^{\min} = 0,01$  м, тогда:

$$z_3^0 = \frac{z_3^{\max} + z_3^{\min}}{2} = \frac{0,015 + 0,01}{2} = 0,0125;$$

$$\Delta z_3 = \frac{z_3^{\max} - z_3^{\min}}{2} = \frac{0,015 - 0,01}{2} = 0,0025. \quad (2.32)$$

Точка с координатами  $(z_1^0, z_2^0, \dots, z_k^0)$  носит название **центра плана**, иногда ее называют основным уровнем,  $\Delta z_j$  – единица варьирования, или **интервал варьирования** по оси  $z_j$ .

От системы координат  $z_1^0, z_2^0, \dots, z_k^0$  перейдем к новой безразмерной системе координат  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0$ . Формула перехода, или кодирования, имеет вид

$$x_j = \frac{z_j - z_j^0}{\Delta z_j}, \quad (2.33)$$

где  $j = 1, 2, \dots, k$ .

В безразмерной системе координат верхний уровень равен +1, нижний равен –1, координаты центра плана равны нулю и совпадают с началом координат. В нашей задаче  $k = 3$ . Число возможных комбинаций  $N$  из трех факторов на двух уровнях равно:  $N = 2^k = 2^3 = 8$ .

Запишем план проведения экспериментов (матрица планирования) в виде табл. 2.10.

Значения гидравлического сопротивления орошаемой насадки, полученные в ходе реализации плана эксперимента, приведены в последнем столбце табл. 2.10.

Таблица 2.10

**План проведения экспериментов**

| Номер опыта | Значение факторов      |                      |       |                                  |       |       | Гидравлическое сопротивление $\Delta p$ |
|-------------|------------------------|----------------------|-------|----------------------------------|-------|-------|---|
|             | в натуральном масштабе |                      |       | в безразмерной системе координат |       |       |   |
|             | $z_1$                  | $z_2$                | $z_3$ | $x_1$                            | $x_2$ | $x_3$ |   |
| 1           | 1,33                   | $4,34 \cdot 10^{-3}$ | 0,01  | –1                               | –1    | –1    | 78,48                                   |
| 2           | 3,03                   | $4,34 \cdot 10^{-3}$ | 0,01  | +1                               | –1    | –1    | 323,73                                  |
| 3           | 1,33                   | $1,5 \cdot 10^{-2}$  | 0,01  | –1                               | +1    | –1    | 127,53                                  |
| 4           | 3,03                   | $1,5 \cdot 10^{-2}$  | 0,01  | +1                               | +1    | –1    | 578,79                                  |
| 5           | 1,33                   | $4,34 \cdot 10^{-3}$ | 0,015 | –1                               | –1    | +1    | 88,29                                   |
| 6           | 3,03                   | $4,34 \cdot 10^{-3}$ | 0,015 | +1                               | –1    | +1    | 588,6                                   |
| 7           | 1,33                   | $1,5 \cdot 10^{-2}$  | 0,015 | –1                               | +1    | +1    | 98,1                                    |
| 8           | 3,03                   | $1,5 \cdot 10^{-2}$  | 0,015 | +1                               | +1    | +1    | 1049,67                                 |

Линейное уравнение регрессии имеет следующий вид:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3. \quad (2.34)$$

Любой коэффициент уравнения регрессии  $b_j$  определяется скалярным произведением столбца  $\Delta p$  на соответствующий столбец  $x_j$ , деленным на число опытов в матрице планирования  $N$ :

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ji} \Delta p_i. \quad (2.35)$$

Для примера рассмотрим нахождение коэффициента  $b_1$ . Расчетные данные представлены в табл. 2.11.

Таблица 2.11

**Таблица для нахождения коэффициента  $b_1$**

| $x_1$ | $\Delta p$ | $x_1 \Delta p$ | $\Sigma x_1 \Delta p$ |
|-------|------------|----------------|-----------------------|
| -1    | 78,48      | -78,48         | 2148,36               |
| +1    | 323,73     | 323,73         |                       |
| -1    | 127,53     | -127,53        |                       |
| +1    | 578,79     | 578,79         |                       |
| -1    | 88,29      | -88,29         |                       |
| +1    | 588,6      | 588,6          |                       |
| -1    | 98,1       | -98,1          |                       |
| +1    | 1049,67    | 1049,67        |                       |

Тогда коэффициент уравнения регрессии  $b_1$  равен:

$$b_1 = \frac{21486}{8} = 268,545.$$

Аналогично для коэффициента  $b_2$  расчетные данные приведены в табл. 2.12.

Таблица 2.12

**Таблица для определения коэффициента  $b_2$**

| $x_2$ | $\Delta p$ | $x_2 \Delta p$ | $\Sigma x_2 \Delta p$ |
|-------|------------|----------------|-----------------------|
| -1    | 78,48      | -78,48         | 774,99                |
| -1    | 323,73     | -323,73        |                       |
| +1    | 127,53     | 127,53         |                       |
| +1    | 578,79     | 578,79         |                       |
| -1    | 88,29      | -88,29         |                       |
| -1    | 588,6      | -588,6         |                       |
| +1    | 98,1       | 98,1           |                       |
| +1    | 1049,67    | 1049,67        |                       |

Следовательно, коэффициент уравнения регрессии  $b_2$  равен:

$$b_2 = \frac{774,49}{8} = 96,87.$$

Для коэффициента  $b_3$  расчетные данные представлены в табл. 2.13.

Таблица 2.13

Таблица для нахождения коэффициента  $b_3$

| $x_3$ | $\Delta p$ | $x_3 \Delta p$ | $\Sigma x_3 \Delta p$ |
|-------|------------|----------------|-----------------------|
| -1    | 78,48      | -78,48         | 716,13                |
| -1    | 323,73     | -323,73        |                       |
| -1    | 127,53     | -127,53        |                       |
| -1    | 578,79     | -578,79        |                       |
| +1    | 88,29      | 88,29          |                       |
| +1    | 588,6      | 588,6          |                       |
| +1    | 98,1       | 98,1           |                       |
| +1    | 1049,67    | 1049,67        |                       |

Тогда коэффициент уравнения регрессии  $b_3$  равен:

$$b_3 = \frac{716,13}{8} = 89,52.$$

Для вычисления коэффициента  $b_0$  используем формулу

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta p_i}{N} = \frac{2933,19}{8} = 366,65. \quad (2.36)$$

Таким образом, линейное уравнение регрессии для определения влияния трех факторов (скорости газа, плотности орошения жидкости, зазора между пластинами насадки) имеет вид

$$\hat{y} = 366,65 + 268,545x_1 + 96,87x_2 + 89,52x_3.$$

**Задача.** Найти линейное уравнение регрессии для оценки влияния скорости газа, плотности орошения жидкости, зазора между пластинами насадки на эффективность массообмена. Интервалы изменения факторов: скорость газа  $V = 1,33-3,03$  м/с, плотность орошения жидкости  $q = 5,2 \cdot 10^{-3}-1,5 \cdot 10^{-2}$  м<sup>3</sup>/(м<sup>2</sup> · с) и зазор между пластинами насадки  $\delta = 0,010-0,015$  м.

Значения эффективности массообмена приведены в табл. 2.14.

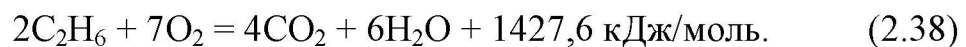
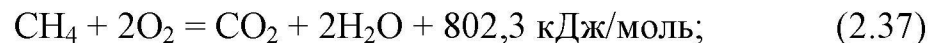
Значения эффективности массообмена

| Номер опыта | Значение факторов |                     |       | Эффективность массообмена $E$ |
|-------------|-------------------|---------------------|-------|-------------------------------|
|             | $z_1$             | $z_2$               | $z_3$ |                               |
| 1           | 1,33              | $4,1 \cdot 10^{-3}$ | 0,01  | 0,653                         |
| 2           | 3,03              | $4,1 \cdot 10^{-3}$ | 0,01  | 0,805                         |
| 3           | 1,33              | $9 \cdot 10^{-3}$   | 0,01  | 0,573                         |
| 4           | 3,03              | $9 \cdot 10^{-3}$   | 0,01  | 0,814                         |
| 5           | 1,33              | $4,1 \cdot 10^{-3}$ | 0,015 | 0,593                         |
| 6           | 3,03              | $4,1 \cdot 10^{-3}$ | 0,015 | 0,865                         |
| 7           | 1,33              | $9 \cdot 10^{-3}$   | 0,015 | 0,628                         |
| 8           | 3,03              | $9 \cdot 10^{-3}$   | 0,015 | 0,890                         |

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ПЛАМЕНИ

Необходимо определить максимальную температуру пламени при горении природного газа в случае двукратного избытка воздуха ( $\alpha = 2$ ). Начальная температура газов составляет  $25^\circ\text{C}$ . Природный газ состоит из 90 мол. % метана и 10 мол. % этана. Максимальная температура достигается, если вся выделившаяся теплота переходит на нагрев продуктов горения ( $\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O}$ ), а также азота и избытка кислорода. Потери в окружающую среду пренебречь.

При горении газа осуществляются следующие процессы:



В конечной смеси содержится:

а) диоксид углерода:  $m_{\text{y}} = 0,9 + 2 \cdot 0,1 = 1,1$  моль;

б) пары воды:  $m_{\text{в}} = 2 \cdot 0,9 + 3 \cdot 0,1 = 2,1$  моль;

в) кислород:  $m_{\text{к}} = 2 \cdot (\alpha - 1) \cdot 0,9 + \frac{7}{2} \cdot (\alpha - 1) \cdot 0,1 = 2,15 \cdot (\alpha - 1)$  моль;

г) азот:  $m_{\text{а}} = 2,15 \cdot \alpha \cdot 0,79/0,21 = 8,09 \cdot \alpha$  моль,

где  $\alpha$  – отношение расходов кислорода и горючего газа, моль/моль; 0,79 – мольная доля азота в атмосферном воздухе; 0,21 – мольная доля кислорода в атмосферном воздухе.

Уравнение молярной теплоемкости имеет вид

$$C_p = a_i + b_i T + \frac{c_i}{T^2}, \quad (2.39)$$

где  $T$  – абсолютная температура газа, К.

Параметры уравнения молярной теплоемкости приведены в табл. 2.15.

Таблица 2.15

Параметры молярной теплоемкости

| Газ              | $a_i$ , Дж/(К · моль) | $b_i \cdot 10^3$ ,<br>Дж/(К <sup>2</sup> · моль) | $c_i \cdot 10^{-5}$ ,<br>Дж · К/моль |
|------------------|-----------------------|--|--------------------------------------|
| Диоксид углерода | 44,14                 | 9,04   | -8,54                                |
| Водяной пар      | 30,00                 | 10,71  | 0,33                                 |
| Кислород         | 31,46                 | 3,39   | -3,77                                |
| Азот             | 27,88                 | 4,27   | 0,00                                 |

Тепловой эффект сгорания 1 моль природного газа равен:

$$Q = 0,9 \cdot 802,3 + 0,1 \cdot 1427,6 = 864,8 \text{ кДж/моль.}$$

Эта теплота расходуется на нагревание продуктов горения до температуры  $T$  в соответствии с уравнением

$$Q = \sum m_i \left[ a_i (T - 298) + \frac{b_i}{2} (T^2 - 298^2) - c_i \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{298} \right) \right]. \quad (2.40)$$

Необходимо перенести исходные данные из табл. 2.15 в ячейки рабочего листа Excel или Mathcad, согласно рис. 2.18.

|    | A                | B      | C                                      | D                                     | E                       | F        |
|----|------------------|--------|--|---------------------------------------|-------------------------|----------|
| 1  |                  | $m$    | $a_i$                                  | $b_i \times 10^3$                     | $c_i' \times 10^{-5}$   |          |
|    |                  |        | Дж×К <sup>-1</sup> ×моль <sup>-1</sup> | Дж×К <sup>2</sup> ×моль <sup>-1</sup> | Дж×К×моль <sup>-1</sup> |          |
| 2  |                  | моль   |  |                                       |                         |          |
| 3  | CO <sub>2</sub>  | 1.1    | 44.14                                  | 9.04                                  | -8.54                   |          |
| 4  | H <sub>2</sub> O | 2.1    | 30                                     | 10.71                                 | 0.33                    | $\alpha$ |
| 5  | O <sub>2</sub>   | 2.15   | 31.46                                  | 3.39                                  | -3.77                   | 2        |
| 6  | N <sub>2</sub>   | 16.18  | 27.88                                  | 4.27                                  | 0                       |          |
| 7  |                  |        |  |                                       |                         |          |
| 8  | T / К            | 1000.0 |  |                                       |                         |          |
| 9  |                  |        | 48.554                                 |                                       |                         |          |
| 10 |                  |        |  |                                       |                         |          |

Рис. 2.18. Ввод исходных данных в Excel

Затем следует ввести основные формулы из уравнения (2.40) (рис. 2.19). После чего выполнить команду *Сервис/Подбор параметра*, выбрать параметры в появившемся диалоговом окне, указанные на рис. 2.20, и щелкнуть на клавише *ОК*, затем еще раз нажать эту клавишу в следующем диалоговом окне. В ячейке «B8» появится искомый результат – 1494 К.

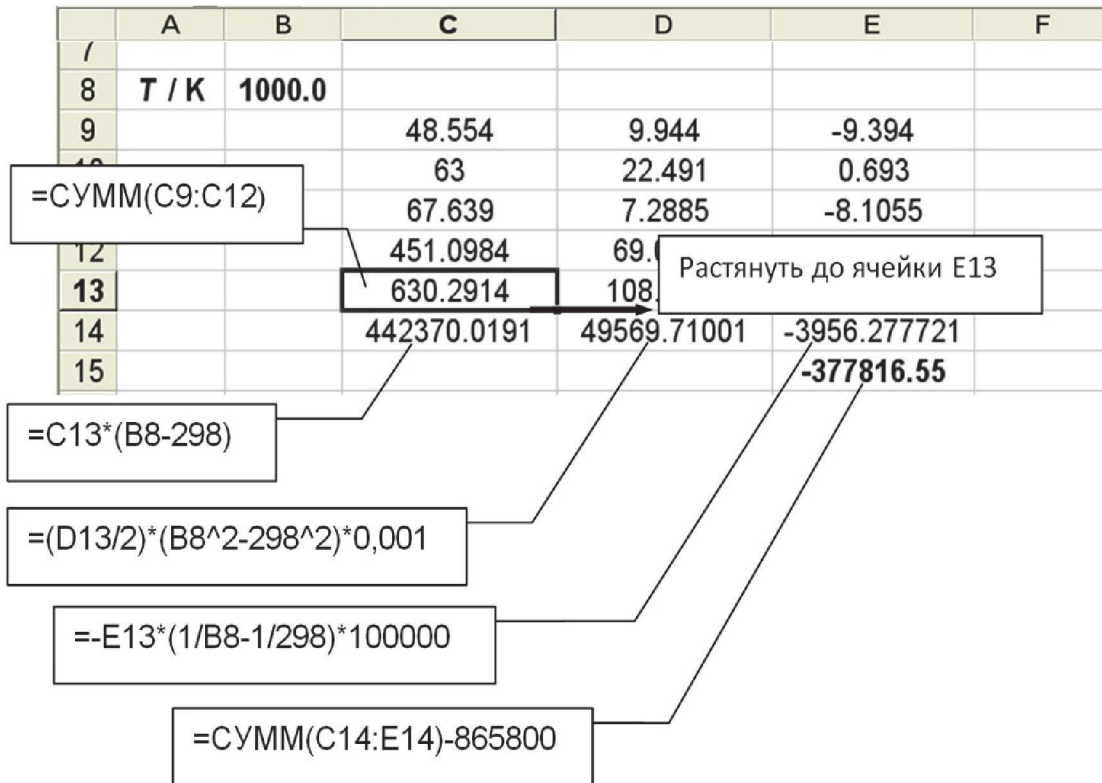


Рис. 2.19. Пример решения в Excel

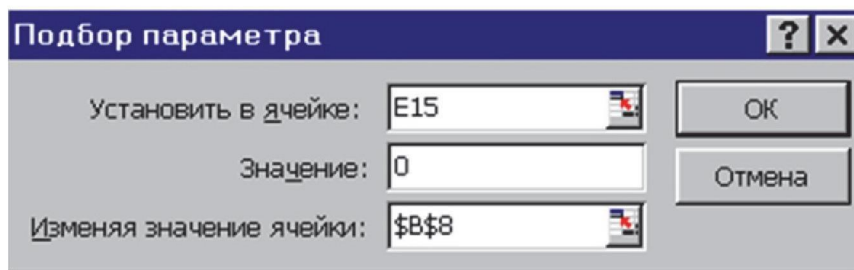


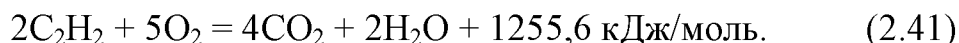
Рис. 2.20. Диалоговое окно «Подбор параметра»

Аналогично рассмотренному примеру необходимо решить самостоятельно следующие задачи.

**Задача 1.** Определить максимальную температуру пламени сварочной горелки при горении ацетилен в случае избытка кислорода,

равном 0,1 ( $\alpha = 1,1$ ). Начальная температура газов составляет  $25^\circ\text{C}$ . Максимальная температура достигается, если вся выделившаяся теплота переходит на нагрев продуктов горения ( $\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O}$ ), а также избытка кислорода. Потери на нагрев свариваемого металла и в окружающую среду не учитывать.

При горении ацетилена осуществляется следующий процесс:

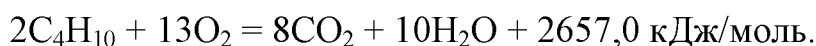
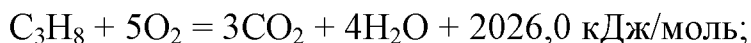


В конечной смеси содержится 4 моль диоксида углерода, 1 моль паров воды и  $5 \cdot (\alpha - 1) = 0,5$  моль кислорода.

Сопоставить полученный результат ( $T = 4136,9 \text{ К}$ ) с действительной температурой пламени газовой горелки, равной  $3000 \text{ К}$ .

**Задача 2.** Определить максимальную температуру пламени при горении пропан-бутановой смеси в случае избытка воздуха, равном 0,2 ( $\alpha = 1,2$ ). Начальная температура газов составляет  $25^\circ\text{C}$ . Пропан-бутановая смесь состоит из 60 мол. % пропана и 40 мол. % бутана. Максимальная температура достигается, если вся выделившаяся теплота переходит на нагрев продуктов горения ( $\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O}$ ), а также азота и избытка кислорода. Потерями в окружающую среду пренебречь.

При горении газа осуществляются следующие процессы:



В конечной смеси содержится:

а) диоксид углерода:  $m_{\text{y}} = 3 \cdot 0,6 + 8 \cdot 0,4 = 5,0$  моль;

б) пары воды:  $m_{\text{в}} = 4 \cdot 0,6 + 10/2 \cdot 0,4 = 4,4$  моль;

в) кислород:  $m_{\text{к}} = 5 \cdot (\alpha - 1) \cdot 0,6 + 13/2 \cdot (\alpha - 1) \cdot 0,4 = 5,6 \cdot (\alpha - 1)$  моль;

г) азот:  $m_{\text{а}} = 5,6 \cdot \alpha \cdot 0,79/0,21 = 21,1 \cdot \alpha$  моль.

Тепловой эффект сгорания 1 моль природного газа равен:

$$Q = 0,6 \cdot 2026,0 + 0,4 \cdot 2657,0 = 2278,4 \text{ кДж/моль.}$$

Провести анализ температуры пламени от  $\alpha$ .

Сравнить полученный результат с действительной температурой пламени  $T = 2025 \text{ К}$ .