

## Раздел 1. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИ КОМПЛЕКСНОМ АНАЛИЗЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕСУРСОВ ПРЕДПРИЯТИЯ

В числе экономико-математических моделей планирования сельского хозяйства ЭММ оптимизации специализации и сочетания отраслей с.х. предприятий является одной из важнейших. Обоснование сочетания отраслей в сельскохозяйственных предприятиях должно учитывать использование земельных угодий, трудовых ресурсов, обеспечение животноводства кормами и соблюдение зоотехнических требований скота к кормлению, расчет рационов кормления животных, выполнение планов продажи продукции государству, соблюдение технологических и других ограничений на площади отдельных сельскохозяйственных культур и размеры отраслей. Поскольку решение задачи по сочетанию отраслей дает ответ на вопрос какое количество товарной продукции нам целесообразнее продать, то получается, что рассчитав сочетание отраслей мы одновременно определяем и специализацию хозяйства.

Исходя из изложенных факторов, определяющих сочетание отраслей и специализацию предприятий составим структурную ЭММ.

Введем условные обозначения:

### **Индексация:**

$J$  – номер сельскохозяйственных культур и отраслей;

$J_0$  – множество сельскохозяйственных культур и отраслей;

$J_1$  – множество отраслей растениеводства,  $J_1 \subset J_0$ ;

$J_2$  – множество отраслей животноводства,  $J_2 \subset J_0$ ;

$J^0$  – номер сельскохозяйственных культур однородной группы,  $j^0 \in j$ ;

$J_3$  – множество сельскохозяйственных культур однородной группы,  $J_3 \subset J_1$ ;

$J_4$  – множество групп однородных сельскохозяйственных культур,  $J_4 \subset J_1$ ;

$J_5$  – множество сельскохозяйственных культур, групп культур, отраслей сельского хозяйства, находящихся между собой в пропорциональной связи;

$J_6$  – множество видов маточного поголовья,  $J_6 \subset J_2$ ;

$i$  – номер ограничений – видов земельных угодий, труда, питательных веществ, видов продукции;

$I_1$  – множество видов земельных угодий;

$I_2$  – множество видов труда;

$I_3$  – множество видов питательных веществ;

$I_4$  – множество видов товарной продукции;

$I_5$  – множество видов привлеченного труда;

$h$  – номер вида корма;

$H_0$  – множество видов кормов;

$H_1$  – множество покупных кормов,  $H_1 \subset H_0$ ;

$H_2$  – множество кормов животного происхождения, покупных и побочных кормов,  $H_2 \subset H_0$ ;

$H_3$  – множество побочных кормов,  $H_3 \subset H_2$ ;

$H_4$  – множество собственных основных кормов,  $H_4 \subset H_0$ .

### **Неизвестные величины:**

$X_j$  – размер отрасли  $j$ ;

$\tilde{x}_j$  – количество приплода вида  $j$ ;

$X_h$  – количество покупных кормов  $h$ , которые одновременно являются видами продукции  $i$ ;

$\tilde{x}_h$  – количество кормов  $h$  животного происхождения и побочных, покупных;

$\hat{x}_i$  – объем рыночного фонда по  $i$ -й продукции;

$X_i$  – количество привлеченного труда  $i$ ;

$X_{hj}$  – скользящая переменная по корму  $h$  для вида или половозрастной группы скота  $j$ ;  
 $\tilde{x}_j$  – маточное поголовье скота вида  $j$ ;

**Известные величины:**

$A_i$  – ресурсы земельного угодья  $i$ ;

$B_i$  – ресурсы труда  $i$ ;

$P_i$  – план продажи продукции  $i$ ;

$W_h$  – расход корма  $h$  на внутривладельческие нужды;

$R_i$  – ограничения на привлеченный труд  $i$ ;

$\tilde{D}_j, D_j$  – соответственно минимальный и максимальный размеры отрасли  $j$ ;

$E_h$  – максимальное количество покупки корма  $h$ ;

$a_{ij}$  – расход земельного угодья на единицу отрасли растениеводства  $j$ ;

$b_{ij}$  – расход труда  $i$  на единицу отрасли  $j$ ;

$d_{hj}$  – выход корма  $h$  от единицы отрасли (растениеводства)  $j$ ;

$w_{hj}^{\min}, w_{hj}^{\max}$  – соответственно минимальный и максимальный расход корма на единицу отрасли животноводства  $j$ ;

$e_j$  – количество приплода телят в расчете на маточную голову вида  $j$ ;

$d_{ij}$  – выход товарной продукции  $i$  от единицы отрасли  $j$ ;

$w_{ij}$  – расход питательного вещества  $i$  на единицу отрасли животноводства  $j$ ;

$k_{ih}$  – содержание питательного вещества  $i$  в единице корма  $h$ ;

$\tilde{r}_{ij}, r_{ij}$  – соответственно минимальная и максимальная доли  $j$ -х культур по земельному угодью  $i$ ;

$c_j^0$  – прибыль в расчете на единицу отрасли растениеводства;

$\tilde{c}_j$  – прибыль и стоимость кормов на единицу отрасли животноводства  $j$ ;

$C_h$  – себестоимость (цена) единицы корма  $h$ ;

$c_i$  – дополнительные затраты на единицу привлеченного труда  $i$ .

Требуется найти:  $x_j, x_h, \tilde{x}_h, x_i, x_{hj}, \tilde{x}_j, x_h$ , при которых

$$F_{\max} = \sum_{j \in J_1} c_j x_j + \sum_{j \in J_2} \tilde{c}_j x_j - \sum_{j \in J_1} \sum_{h \in H_4} d_{hj} x_j c_h - \sum_{h \in H_1} x_h c_h - \sum_{h \in H_2} \tilde{x}_h c_h - \sum_{i \in I_3} c_i x_i.$$

При условиях:

1. По использованию земельных угодий –

$$\sum_{j \in J_1} a_{ij} x_j \leq A_i, i \in I_1;$$

2. По использованию труда –

$$a) \sum_{j \in J_0} b_{ij} x_j \leq B_i + x_i, i \in I_2; \quad б) x_i \leq R_i, i \in I_3;$$

3. По балансу отдельных видов кормов и формированию рационов –

а) по балансу основных видов кормов

$$\sum_{j \in J_2} w_{hj}^{\min} x_j + \sum_{j \in J_2} x_{hj} \leq \sum_{j \in J_1} d_{hj} x_j - W_h + x_h, h \in H_0;$$

б) по балансу покупных кормов, кормов побочных и животного происхождения

$$\sum_{j \in J_2} W_{hj}^{\min} x_j + \sum_{j \in J_2} x_{hj} = \tilde{x}_h, h \in H_2;$$

в) по производству побочных кормов

$$\tilde{x}_h \leq \sum_{j \in J_1} d_{hj} x_j - W_h, h \in H_3;$$

г) по покупке кормов  $x_h \leq E_h, h \in H_1$ ;

4. По величине скользящей переменной –

$$x_{hj} \leq (w_{hj}^{\max} - w_{hj}^{\min}) x_j, h \in H, j \in J_2;$$

5. По балансу питательных веществ –

$$\sum_{j \in J_2} w_{ij} x_j \leq \sum_{j \in J_1} \sum_{h \in H_4} d_{hj} x_j k_{ih} + \sum_{h \in H_1} k_{ih} x_h + \sum_{h \in H_2} k_{ih} \tilde{x}_h + \sum_{h \in H_3} k_{ih} \bar{x}_h - \sum_{h \in H_0} k_{ih} W_h, i \in I_3;$$

6. По содержанию питательных веществ в дополнительных кормах, обозначенных скользящими переменными –

$$\left( w_{ij} - \sum_{h \in H_0} w_{hj}^{\min} k_{ih} \right) x_j \leq \sum_{h \in H_0} k_{ih} x_{hj}, j \in J_2, i \in I_3;$$

7. Технологические ограничения по площади отдельных сельскохозяйственных культур и размерам отраслей –

$$\tilde{D}_j \leq x_j \leq D_j, j \in J_0;$$

8. Технологические ограничения по площади посева однородных сельскохозяйственных культур –

$$\bar{r}_{ij} A_i \leq \sum_{j_0 \in J_3} a_{ijj_0} x_{j_0} \leq r_{ji} A_i, i = 1, j \in J_5;$$

9. По продаже продукции государству –

$$\sum_{j \in J_0} d_{ij} x_j - \bar{x}_i = P_i, i \in I_4;$$

10. По поголовью приплода –

$$e_j \bar{x}_j = \tilde{x}_j, j \in J_6;$$

11. Неотрицательность переменных –

$$x_j, \{ \bar{x}_j \}, x_h, \tilde{x}_h, x_j, x_{hj}, \bar{x}_i, \tilde{x}_j \geq 0.$$

**Пример.** По данным фактических показателей предприятия в отчетном году составить условия задачи с целью определения размеров отраслей при оптимальном их сочетании и использовании ресурсов.

**Исходная информация.**

1. Предприятие возделывает озимые и яровые зерновые, зернобобовые, корнеплоды, многолетние и однолетние травы, имеет пастбища и сенокосы.

2. Наличие ресурсов (га): пашня – 2800, сенокосы – 280, пастбища – 420. Объем трудовых ресурсов составляет 780000 чел.-ч. Имеется возможность дополнительно привлечь сезонных работников в количестве до 20000 чел.-ч, неся затраты 0,5 уд.е. за 1 чел.-ч.

3. Информация о развитии растениеводства приведена в табл. 37. Выход соломы с 1 га озимых и яровых зерновых культур составляет 35 и 38 ц/га соответственно. Себестоимость 1 ц соломы – 2 уд.е.

Т а б л и ц а 1. Показатели растениеводческой отрасли

Культуры (угодя)	Урожайность, ц/га	В том числе		Затраты труда на 1 га, чел.-ч	Себестоимость 1 ц, уд.е.
		на корм скоту	товарная продукция		
Озимые					

продовольственные	35	3,5	28,5	20	4,0
Яровые фуражные	40	37	–	35	5,0
Зернобобовые:					
продовольственные	30	2,5	24,5	25	5,5
фуражные	30	27	–	25	5,5
Корнеплоды	300	300	–	340	2,0
Многолетние травы на:					
травяную муку	45	45	–	22	3,5
сено	55	55	–	16	1,2
сенаж	120	120	–	14	0,7
зеленый корм	260	260	–	10	0,5
Однолетние травы на зеленый корм	240	240	–	15	0,8
Сенокосы на сено	45	45	–	14	1,0
Пастбища на зеленый корм	220	220	–	8	0,2

4. Данные о состоянии отрасли животноводства характеризует табл. 2.

Т а б л и ц а 2. **Информация по животноводству**

Животные	Продуктивность, ц	Расход на 1 гол.		Затраты труда на 1 гол., чел.-ч	Себестоимость 1 ц (без учета стоимости кормов), у.д.е.
		ц к.ед.	ц п.п.		
Коровы	35	42	410	110	4,0
Молодняк КРС	2,5	23	240	70	40,0

5. Технологические ограничения на размеры отраслей:

а) площадь посева зерновых и зернобобовых составляет не менее 40% и не более 60% от пашни;

б) площадь посева озимых должна быть не более 500 га, зернобобовых – не менее 150 га;

в) поголовье коров – не менее 100 и не более 500 гол.;

г) поголовье молодняка КРС должно составлять от 600 до 1000 гол.

6. Расход кормов на внутрихозяйственные нужды для развития личного подсобного хозяйства населения, ц:

концентраты – 1500 ц, сено – 2200 ц, солома – 2000 ц.

7. Нормы кормления для поголовья животных в расчете на 1 среднегодовую голову отражены в табл. 3.

Т а б л и ц а 3. **Питательность кормов и нормы скармливания, ц**

Корма	Коровы		Молодняк КРС		Содержание в 1 ц корма	
	не менее	не более	не менее	не более	ц к.ед.	ц п.п.
Концентраты	8	12	5,5	7,5	1,0	0,125

Травяная мука	0	0,2	0	0,2	0,68	0,091
Корнеплоды	20	26	3,0	5,0	0,13	0,01
Зеленый корм	65	75	23,0	32,0	0,19	0,022
Сено	6	9	3,0	4,5	0,45	0,049
Сенаж	14	18	10,0	15,0	0,28	0,029
ЗЦМ	–	–	0,2	0,3	2,02	0,221
Обрат	–	–	1,2	1,8	0,13	0,0035
Солома	2,0	6,0	3,0	4,5	0,25	0,011
Молоко	–	–	2,0	3,0	0,30	0,033

8. Маркетинговый отдел предусматривает покупку кормов для предприятия: концентратов из комбикормового завода – до 250 ц; заменителей цельного молока (ЗЦМ) из молочного комбината – до 400 ц; обрат из маслосырзавода – до 3800 ц.

9. Цена единицы покупных кормов (у.д.е. за 1 ц): концентраты из комбикормового завода – 10; ЗЦМ из молочного комбината – 17; обрат из молочного завода – 5.

10. Сельхозорганизация будет реализовывать зерно, молоко и говядину в счет договорных поставок не менее 23000, 16000 и 1600 ц соответственно. Кроме того, служба маркетинга управления сельского хозяйства и продовольствия предлагает для сельхозорганизации сбыт зерна на товарной бирже – до 300 ц и молока на рынке – до 800 ц.

11. Цены реализации каждого вида продукции (у.д.е. за 1 ц): зерно в счет договорных поставок – 6 ; зерно на товарной бирже – 6,5; зерно за пределами региона – 6,6; молоко в счет договорных поставок – 10; молоко на рынок – 12; говядина в счет договорных поставок – 100; говядина соседнему мясокомбинату – 140.

**Решение.** Введем неизвестные величины задачи.

1. Оптимальные размеры в растениеводстве и животноводстве:

$x_1$  – площадь озимых продовольственных, га;

$x_2$  – площадь яровых фуражных, га;

$x_3$  – площадь зернобобовых продовольственных, га;

$x_4$  – площадь зернобобовых фуражных, га;

$x_5$  – площадь корнеплодов, га;

$x_6$  – площадь многолетних трав на травяную муку, га;

$x_7$  – площадь многолетних трав на сено, га;

$x_8$  – площадь многолетних трав на сенаж, га;

$x_9$  – площадь многолетних трав на зеленый корм, га;

$x_{10}$  – площадь однолетних трав на зеленый корм, га;

$x_{11}$  – площадь сенокосов для получения сена, га;

$x_{12}$  – площадь пастбищ на зеленый корм, га;

$x_{13}$  – поголовье коров, гол.;

$x_{14}$  – поголовье молодняка КРС, гол.

2. Оптимальное количество покупных ресурсов (кормов, труда):

$x_{15}$  – объем сезонных работников, чел.-ч;

$x_{16}$  – поставка концентратов из комбикормового завода, ц;

$x_{17}$  – поставка ЗЦМ из молочного комбината, ц;

$x_{18}$  – поставка обрат из маслосырзавода, ц.

3. Скользящая переменная по кормам вводится на всё поголовье коров или молодняка КРС к минимальной норме скармливания, за счет которой (скользящей переменной – добавки) норма скармливания корма животному может быть увеличена до оптимальной величины, но не выше максимальной:

- $x_{19}$  – скользящая переменная или добавка концентратов для поголовья коров, ц;
- $x_{20}$  – добавка травяной муки для коров, ц;
- $x_{21}$  – добавка корнеплодов для коров, ц;
- $x_{22}$  – добавка зеленого корма для коров, ц;
- $x_{23}$  – добавка сена для коров, ц;
- $x_{24}$  – добавка сенажа для коров, ц;
- $x_{25}$  – добавка соломы для коров, ц;
- $x_{26}$  – добавка концентратов для молодняка КРС, ц;
- $x_{27}$  – добавка травяной муки для молодняка КРС, ц;
- $x_{28}$  – добавка корнеплодов для молодняка КРС, ц;
- $x_{29}$  – добавка зеленого корма для молодняка КРС, ц;
- $x_{30}$  – добавка сена для молодняка КРС, ц;
- $x_{31}$  – добавка сенажа для молодняка КРС, ц;
- $x_{32}$  – добавка ЗЦМ для молодняка КРС, ц;
- $x_{33}$  – добавка обрата для молодняка КРС, ц;
- $x_{34}$  – добавка соломы для молодняка КРС, ц;
- $x_{35}$  – добавка молока для молодняка КРС, ц.

4. Оптимальные объемы сбыта продукции потребителям с учетом предполагаемых каналов:

- $x_{36}$  – сбыт зерна в счет договорных поставок, ц;
- $x_{37}$  – сбыт зерна на товарной бирже, ц;
- $x_{38}$  – сбыт зерна за пределами региона, ц;
- $x_{39}$  – сбыт молока в счет договорных поставок, ц;
- $x_{40}$  – сбыт молока на рынок, ц;
- $x_{41}$  – сбыт говядины в счет договорных поставок, ц;
- $x_{42}$  – сбыт говядины соседнему мясокомбинату, ц.

5. Оптимальное количество побочных кормов и кормов животного происхождения:

- $x_{43}$  – молоко на корм скоту, ц;
- $x_{44}$  – солома на корм скоту, ц.

Далее записываются ограничения экономико-математической задачи, первая группа которых описывает использование сельхозугодий.

I. Сумма площадей сельскохозяйственных культур, возделываемых на данном виде сельхозугодий, не должна превышать площади этих угодий.

По пашне

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \leq 2800.$$

Аналогично нужно записать условия 2 и 3 (по сенокосам и пастбищам).

II. Вторая группа ограничений включает использование трудовых ресурсов. Затраты труда на развитие отраслей растениеводства и животноводства не должны превышать наличие труда в организации с учетом его привлечения.

4. По труду

$$20,0x_1 + 35,0x_2 + 25,0x_3 + 25,0x_4 + 340x_5 + 220x_6 + 16,0x_7 + 14,0x_8 + 10,0x_9 + 15,0x_{10} + 14,0x_{11} + 8,0x_{12} + 110,0x_{13} + 70,0x_{14} \leq 780000 + x_{15}.$$

5. Привлеченный труд должен быть ограничен.

Ограничение на привлеченный труд

$$x_{15} \leq 20000.$$

III. Третья группа ограничений включает балансы основных кормов. Нормы расхода отдельного вида корма по минимальной норме, умноженные на поголовье

соответствующих групп животных по всем видам и половозрастным группам животных с учетом скользящих переменных (добавок корма), не должны превышать объема собственного производства корма с учетом возможной покупки и расхода его для развития личного подсобного хозяйства населения.

6. По балансу концентратов

$$8,0x_{13} + x_{19} + 5,5x_{14} + x_{26} \leq 3,5x_1 + 37x_2 + 2,5x_3 + 27x_4 + x_{16} - 1500.$$

Далее аналогично студент записывает условия 7 – 11 по балансу травяной муки, корнеплодов, зеленого корма, сена и сенажа.

IV. Четвертая группа ограничений включает балансы кормов животного происхождения, покупных и побочных кормов. Баланс кормов животного происхождения (молока, ЗЦМ, обрат), являющихся покупными ресурсами, побочных кормов (соломы) записывается со знаком равно.

12. По балансу молока

$$2,0x_{14} + x_{35} = x_{43}.$$

Таким образом, записываются условия 13, 14 и 15 по балансу обрат, ЗЦМ и соломы.

V. Ограничение по производству побочных кормов. Количество побочных кормов (соломы), предназначенных на корм скоту, не должно превышать объема собственного производства побочного корма с учетом его расхода для развития личного подсобного хозяйства населения.

16. Ограничение по производству соломы на корм скоту

$$x_{44} \leq 35x_1 + 38x_2 - 2000.$$

VI. Ограничивают объем покупки кормов.

17. Ограничение по максимальному количеству покупки концентратов

$$x_{16} \leq 250.$$

Аналогично ограничиваем количество покупки других кормов (ЗЦМ, обрат), записывая условия 18 – 19.

VII. Седьмую группу составляют ограничения на скользящие переменные, т.е. добавка корма для животных не должна превышать разности между максимальной и минимальной нормами кормления на голову, умноженной на поголовье.

20. Ограничение на добавку концентратов для поголовья коров

$$x_{19} \leq (12 - 8) \cdot x_{13}.$$

Такие же условия нужно записать по каждой добавке других кормов (21 – 36).

VIII. В восьмую группу входят ограничения по балансу питательных веществ, где в левой части находится расход питательных веществ для всего поголовья каждого вида скота, а в правой – наличие питательных веществ в кормах предприятия, с учетом их покупки и расхода для развития личного подсобного хозяйства населения.

37. По балансу кормовых единиц

$$42 \cdot x_{13} + 23x_{14} \leq (3,5x_1 + 37x_2 + 2,5x_3 + 27x_4 + x_{16} - 1500) \cdot 1,0 + 45x_6 \cdot 0,68 + 300x_5 \cdot 0,13 + (260x_9 + 240x_{10} + 220x_{12}) \cdot 0,19 + (55x_7 + 45x_{11} - 2200) \cdot 0,45 + 120x_8 \cdot 0,28 + 2,02x_{17} + 0,13x_{18} + 0,30x_{43} + 0,25x_{44}.$$

Ограничение 38 (по балансу переваримого протеина) нужно записать аналогичным образом.

IX. Девятая группа включает ограничения по содержанию питательных веществ в добавках кормов для отдельных видов животных. В левой части – разность между потребностью в питательном веществе на 1 голову животного и содержанием этого вещества в рационе по минимальной норме, умноженная на поголовье животного, в правой – содержание питательного вещества в добавках кормов для данного вида животного.

39. По содержанию кормовых единиц в добавках кормов для коров

$$[42 - (8 \cdot 1 + 20 \cdot 0,13 + 65 \cdot 0,19 + 6 \cdot 0,45 + 14 \cdot 0,28 + 2,0 \cdot 0,25)] \cdot x_{13} \leq x_{19} \cdot 1,0 + x_{20} \cdot 0,68 + x_{21} \cdot 0,13 + x_{22} \cdot 0,19 + x_{23} \cdot 0,45 + x_{24} \cdot 0,28 + x_{25} \cdot 0,25.$$

Таким образом

записывают ограничение 40 – по содержанию переваримого протеина в добавках кормов для поголовья коров.

Аналогичных два ограничения (41 – 42) записывают и для поголовья молодняка КРС.

X. Десятая группа включает ограничения на размеры отраслей растениеводства и животноводства.

43. По площади посева зерновых и зернобобовых (нижняя граница)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0,4 \cdot 2800.$$

Далее нужно записать условия 44 – 50, где учитываются минимальные и максимальные размеры площадей сельскохозяйственных культур и поголовья животных (зерновых и бобовых, озимых зерновых, зернобобовых, коров, молодняка КРС).

XI. В одиннадцатую группу входят ограничения по сбыту продукции, где производство товарной продукции распределяется по различным каналам реализации.

51. По сбыту молока

$$42x_{13} - x_{41} = x_{39} + x_{40}.$$

Аналогичным образом нужно записать ограничения по сбыту зерна и говядины (52–53).

XII. По предельным объемам сбыта продукции по различным каналам реализации.

54. По количеству сбываемого зерна в счет возможных договорных поставок

$$x_{36} \geq 23000.$$

Следующие ограничения (55–60) описывают предельные объемы сбыта зерна на товарной бирже и за пределами региона, сбыта молока в счет договорных поставок и на рынке, сбыта говядины в счет договорных поставок и соседнему мясокомбинату.

Цель решения задачи – получение максимума прибыли, т. е. выручки от реализации продукции без учета себестоимости продукции и издержек на приобретение ресурсов:

$$\begin{aligned} F_{\max} = & 6x_{36} + 6,5x_{37} + 6,6x_{38} + 10x_{39} + 12x_{40} + 100x_{41} + 140x_{42} - 35 \cdot 4x_1 - 40 \cdot 5x_2 - 30 \cdot 5,5x_3 - \\ & - 30 \cdot 5,5x_4 - 300 \cdot 2x_5 - 45 \cdot 3,5x_6 - 55 \cdot 1,2x_7 - 120 \cdot 0,7x_8 - 260 \cdot 0,5x_9 - 240 \cdot 0,8x_{10} - 45 \cdot 1,0x_{11} - \\ & - 220 \cdot 0,2x_{12} - 35 \cdot 4x_{13} - 2,5 \cdot 40x_{14} - 0,5x_{15} - 10x_{16} - 17x_{17} - 5x_{18} - 2x_{44}. \end{aligned}$$