МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УО «Белорусский государственный экономический университет»

Бородина Т.А., Денисейко И.В., Кашникова И.В., Юферева О.Д.

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Лабораторный практикум

(для студентов экономических специальностей)

Минск – 2012

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

При решении задач по дисциплине «Экономико-математические методы и модели» возникает необходимость использования компьютерных программ для проведения расчетов. Самой известной программой является Microsoft Office Excel, имеющая достаточно большой диапазон различных функций и команд. С помощью данного лабораторного практикума студенты экономических специальностей получат навыки решения оптимизационных, балансовых, инвестиционных, сетевых и других видов моделей в электронных таблицах Excel.

В современном мире идет стремительное развитие компьютерных технологий, программы совершенствуются, выходят новые версии. В нашем практикуме описаны этапы решения задач для Microsoft Office Excel 2003, хотя уже имеется версия 2007 и 2010 года. И в них имеются отличия по сравнению с версией 2003 года. Меню 2007 версии представлено закладками. Имеется закладка **Формулы** для ввода различных функций, **Вставка** поможет построить график. А чтобы установить надстройку **Поиск решения**, необходимо выполнить следующую последовательность действий: нажать **кнопку Office – Параметры Excel – Надстройки – Надстройки Excel – Перейти**. В диалоговом окне **Надстройки** выбрать **Поиск решения – ОК**. Надстройка **Поиск решения** будет установлена в меню закладки **Данные**. В 2003 версии для этого используют меню **Сервис**.

Каждая из 20 лабораторных работ содержит варианты заданий, указания по их выполнению, рассмотренные на примерах. В конце каждой лабораторной работы представлен список вопросов для оформления отчета о проделанной работе. Важно уметь не только провести необходимые расчеты, но и проанализировать их. Поэтому при подготовке следует изучить рекомендуемую литературу. Каждая работа рассчитана на 1 пару.

Тема 1. Оптимизационные модели в экономике

Лабораторная работа № 1. Задача о планировании оптимальной производственной программы

Литература: [1], [2], [3], [5].

Постановка задачи 1. Предприятие выпускает три вида продукции, используя при этом три вида ресурсов: оборудование (станко-ч.), сырье (т), электроэнергию (кВт-ч). Известны нормы затрат i-го ресурса на единицу j-той продукции a_{ij}, запасы ресурсов b_i и стоимость единицы продукции c_j (табл. 1.1). Предприятие планирует суммарный выпуск продукции не менее K единиц, что продиктовано спросом в предыдущие периоды времени.

Определить оптимальный план производства продукции, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль от реализации с учетом планируемого спроса.

Таблица 1.1

Параметры	Номер варианта												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_{11}	2	8	2	3	1	3	1	3	2	1	3	3	2
a_{12}	3	10	1	4	1	3	1	5	5	2	3	4	3
a_{13}	4	5	2	9	3	2	4	7	2	1	7	2	1
a_{21}	1	4	3	10	6	4	2	1	2	2	1	2	1
a_{22}	4	2	7	5	4	8	3	4	3	1	3	7	6
a_{23}	5	4	5	8	8	5	2	2	1	3	2	5	4
a_{31}	25	37	4	21	12	11	5	6	10	4	3	16	14
a_{32}	35	34	9	20	7	15	4	2	8	6	5	15	12
a_{33}	20	26	16	25	10	14	7	9	6	5	4	14	10
b_1	620	4290	64	280	28	38	25	255	80	60	100	190	80
b_2	800	1260	280	425	95	85	65	150	63	90	50	263	140
b_3	6250	17000	488	1320	140	178	111	200	330	225	80	920	420
c_1	5	7	10	24	12	10	3	6	30	22	15	36	16
c_2	7	11	7	23	37	15	3	16	16	23	25	35	14
c_3	8	9	15	27	25	12	2	25	25	24	30	30	10
K	220	430	44	60	16	14	20	45	30	40	20	60	35

Постановка задачи 2. Производственное подразделение сельскохозяйственного предприятия (бригада) специализируется на производстве продовольственного зерна и свинины. Для этой цели используется три вида ресурсов: пашня, труд и корма (концентрированные и картофель). В плановом периоде бригада располагает первым из указанных ресурсов в количестве b_1 га, вторым – b_2 чел.-ч. Для производства свинины используются корма собственного производства, а также покупные концентраты в количестве b_3 ц к.ед. и покупной картофель – b_4 ц к.ед. Выход зерноотходов с 1 га продовольственных зерновых составляет b_5 ц к.ед. Урожайность фуражных зерновых – b_6 ц к.ед. и картофеля – b_7 ц к.ед. На производство 1 ц свинины бригада расходует b_8 ц к.ед. концентрированных кормов и b_9 ц к.ед. картофеля. Нормативы расхода других видов ресурсов на единицу измерения j-ой переменной величины составляют: пашни – a_{1j} га ($j = \overline{1,3}$), труда – a_{2j} чел.-ч. ($j = \overline{1,4}$). Плановая прибыль от реализации продовольственного зерна составляет c_1 ден.ед./га и свинины – c_4 ден.ед./ц (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Пара-метры	Номер варианта											
	13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
b_1	207	225	200	210	205	240	220	215	212	208	216	230
b_2	21120	23200	21000	22700	21100	25100	23100	20900	19200	18300	18600	20000
b_3	550	490	500	480	540	450	470	350	460	490	475	400
b_4	215	200	200	150	210	180	190	120	170	160	184	170
b_5	3,7	3,6	3,1	3,3	3,5	2,9	3,2	4,5	3,6	3,4	3,7	3,5
b_6	35	32	32	31	33	30,5	31,8	39	35	33,8	32,5	34
b_7	45	49	45	43	42	41	48	51	49	47	46	50
b_8	5,7	5,8	5	5,3	5,5	5,2	5,6	5,1	5,4	5,3	5,2	5,1
b_9	1,5	1,8	1,6	1,5	1,4	1,3	1,7	1,7	1,8	1,4	1,5	1,6
a_{11}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a_{12}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a_{13}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a_{21}	24	28	26	25	28	25	27	29	27,5	26,6	26,1	27,1
a_{22}	22	24	24	23	25	23,7	23,9	27,5	26	25	24,6	25,2
a_{23}	76	6	80	78	76	75	5	92	84	86	83	87
a_{24}	13	13	12	14	15	13	12,8	12,4	12,5	12,3	12,4	12,1
c_1	1240	1500	1300	1260	1400	1350	1480	1640	1590	1420	1390	1500
c_4	535	510	510	540	530	520	500	560	550	525	534	600

Требуется:

1) составить экономико-математическую модель задачи, позволяющую найти сбалансированный ресурсами план производства товарной продукции, обеспечивающий бригаде максимальную прибыль (*указания: при записи ограничений по балансированию кормовых ресурсов необходимо учесть, что расход кормов на производство свинины не может превышать их наличия (производства и покупки), например, условие, балансирующее производство и потребление картофеля при урожайности 46 ц к.ед. с 1 га, покупке 198 ц к.ед. и расходе на 1 ц свинины 1,45 ц к.ед., нужно записать так:* $1{,}45x_1 \le 46x_2 + 198$, *где* x_1 *– производство свинины (ц),* x_2 *– посевная площадь картофеля (га)*);
2) найти оптимальную отраслевую структуру бригады и дать оценку сложившейся специализации производства;
3) пояснить экономическую суть двойственной задачи и построить ее модель на основе исходной задачи;
4) с помощью двойственных оценок выявить степень полезности производственных ресурсов в сложившихся условиях производства, величину потерь в расчете на единицу измерения j-ой переменной величины в случае, если бригада отойдет от оптимального плана и приступит к производству невыгодных ей видов товарной продукции, при необходимости их производства обосновать цены на эту товарную продукцию.

Порядок выполнения работы (на примере варианта 0)

1. Составление модели:

Пусть x_1, x_2, x_3 – количество продукции 1-го, 2-го, 3-го вида, которое необходимо производить, тогда модель задачи примет вид:

$$f = 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 (\max)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 620 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 800 \\ 25x_1 + 35x_2 + 20x_3 \le 6250 \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 220 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,3}.$$

2. Ввод условия задачи в электронные таблицы Excel (рис. 2.1).

	A	B	C	D	E	F	G	H
2		x_1	x_2	x_3				
3								
4								
5			Коэффициенты		Значение			
6	Целевая функция	5	7	8	0	max		
7					Левая часть	Знак	Правая часть	
8	Оборудование	2	3	4	0	<=	620	станко-ч
9	Сырье	1	4	5	0	<=	800	т
10	Электроэнергия	25	35	20	0	<=	6250	кВт ч
11	Количество продукции	1	1	1	0	>=	220	

Рис. 1.1. Исходные данные задачи

Значение целевой функции в ячейке E6 введем, воспользовавшись математической функцией СУММПРОИЗВ. Для этого поместим курсор в ячейку E6, с помощью меню ВСТАВКА – ФУНКЦИЯ вызовем математическую функцию СУММПРОИЗВ. На экране появится диалоговое окно. В массив 1 вводим строку со значениями переменных B$3:D$3 (знак $ ставим для того, чтобы адрес не менялся при копировании формул). В массив 2 введем адрес строки коэффициентов целевой функции B6:D6. Далее копируем формулу из ячейки E6 в столбец «Левые части ограничений»: ячейки E8:E11.

Итак, каждое выражение модели записано в отдельной ячейке в виде формулы. В этих ячейках появились значения 0, т.к. исходно значения переменных не заданы.

3. Поиск оптимального решения.

Вызовем команду ПОИСК РЕШЕНИЯ из меню СЕРВИС. Появится диалоговое окно «Поиск решения» (рис. 1.4).

Установить целевую ячейку: E6;

Равной: максимальному значению;

Изменяя ячейки: $B$3:$D$3;

Ограничения: ДОБАВИТЬ. Появится меню «Добавление ограничения» (рис. 1.2).

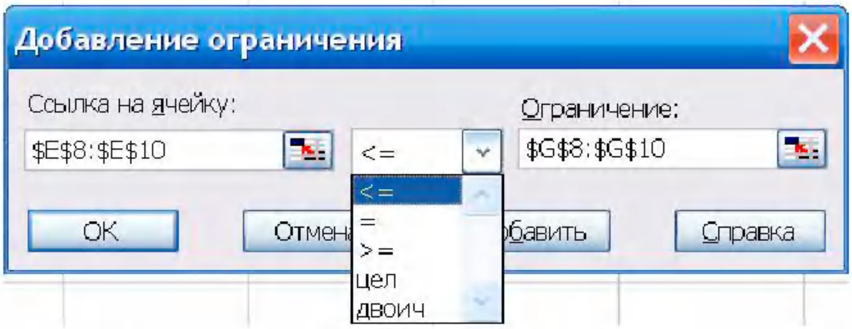


Рис. 1.2. Добавление ограничений

Ограничения с одинаковыми знаками, стоящие рядом, можно вводить вместе (рис. 1.2) по принципу: левая часть ограничения – знак – правая часть. Если нужно добавить еще одно или несколько ограничений, то нажимаем кнопку ДОБАВИТЬ, если ввод ограничений закончен – ОК. Возвращаемся в меню «Поиск решения» и нажимаем кнопку ПАРАМЕТРЫ (рис. 1.3).

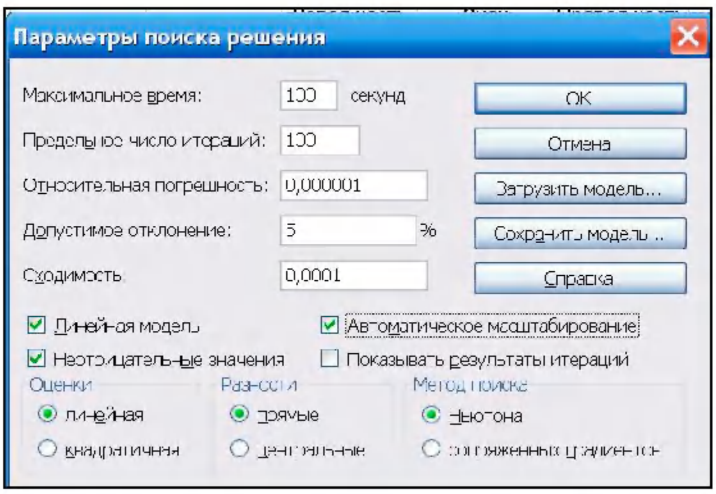


Рис. 1.3. Параметры поиска решения

В меню «Параметры поиска решения» установим **метки**: «Линейная модель», «Неотрицательные значения» (условие неотрицательности переменных), «Автоматическое масштабирование». Нажимаем кнопку ОК и возвращаемся в меню «Поиск решения» (рис. 1.4).

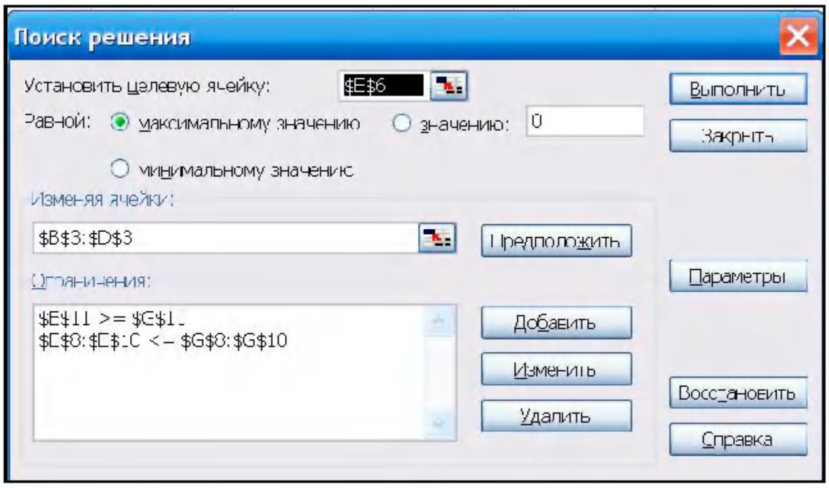


Рис. 1.4. Меню «Поиск решения»

Модель полностью введена. Нажимаем кнопку ВЫПОЛНИТЬ. Если все подготовительные действия выполнены верно, то появится окно (рис. 1.5).

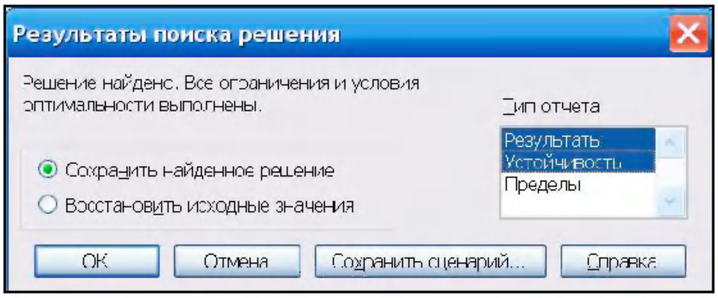


Рис. 1.5. Результаты поиска решения

Отметим для вывода два отчета «По результатам» и «По устойчивости» и нажмем кнопку ОК. Оба отчета будут выведены на новых электронных листах Excel. Описание содержания отчетов см. в Приложении А.

4. Изучение полученных данных и составление отчета о проделанной работе.

План отчета для задачи 1.

1. Укажите фамилию, имя, название группы (подгруппы), номер варианта.
2. Запишите модель, по которой производились расчеты.
3. В каком количестве следует производить продукцию каждого вида? Какая при этом будет максимальная выручка?
4. Запишите значения всех балансовых переменных, опишите их экономический смысл.
5. Постройте модель двойственной задачи и поясните ее экономическое содержание.
6. Предложите собственные рекомендации по улучшению деятельности предприятия: как изменить правые части ограничений, чтобы увеличить максимальную выручку, как при этом изменится $f_{\max}$?

План отчета для задачи 2.

1. Укажите фамилию, имя, название группы (подгруппы), номер варианта.
2. Запишите экономико-математическую модель задачи.
3. Какова оптимальная отраслевая структура бригады и оценка сложившейся специализации производства?
4. Постройте модель двойственной задачи и поясните ее экономическое содержание.
5. С помощью двойственных оценок выявите степень полезности производственных ресурсов в сложившихся условиях производства, величину потерь в расчете на единицу измерения j-ой переменной величины в случае, если бригада отойдет от оптимального плана и приступит к производству невыгодных ей

видов товарной продукции, при необходимости их производства обоснуйте цены на эту товарную продукцию.

Лабораторная работа № 2. Оптимизация деятельности торгового предприятия

Литература: [1], [2].

Постановка задачи. Торговое предприятие (предприятие оптовой торговли), исходя из специализации, может реализовать 4 группы товаров T_j ($j=\overline{1,4}$). Пусть общая площадь торговых залов P (тыс. м^2), P_j (м^2) норматив складских площадей на содержание товаров j-ой группы; R (тыс. чел.-ч.) – фонд рабочего времени работников, r_j (чел.-ч.) – плановый норматив затрат времени работников на единицу товарооборота j-ой товарной группы. Пусть B (тыс. д.е.) – допустимые издержки обращения, b_j (д.е.) – плановый норматив издержек обращения на единицу товарооборота j-ой товарной группы. S (тыс. ед.) – общий объем товарных запасов. S_j (ед.) – норматив товарных запасов на единицу товарооборота j-ой товарной группы. Q (тыс. д.е.) – плановый показатель товарооборота. q_j – параметр товарооборота (средняя цена реализации), по j-ой товарной группе. G_j (тыс. д.е.) – минимально допустимые значения плана товарооборота по j-ой товарной группе. C_j (д.е.) – торговая прибыль в расчете на единицу товарооборота j-й группы (табл. 2.1).

Требуется:

1. определить план хозяйственной деятельности торгового предприятия, обеспечивающий максимум торговой прибыли при заданных ограничениях на складские площади, трудовые ресурсы, издержки обращения, товарные запасы, величину товарооборота и др.;
2. сделать анализ полученного решения;

3. дать экономическую интерпретацию двойственным оценкам и дополнительным двойственным переменным;
4. выявить «узкие места» на торговом предприятии и дать рекомендации по их «расшивке».

Таблица 2.1

	Номер варианта												
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
C_1	120	40	60	50	100	80	130	90	110	70	110	60	75
C_2	50	15	25	70	30	40	30	35	50	60	45	75	45
C_3	30	10	15	20	80	20	10	20	10	15	28	25	30
C_4	100	35	50	80	50	120	80	100	40	60	95	90	70
P	110	60	50	65	75	80	100	160	95	110	120	76	90
R	950	400	350	480	550	500	650	250	320	640	980	500	850
B	1200	600	720	850	800	850	1100	330	770	900	1300	890	950
S	180	90	110	150	180	180	220	96	160	220	195	170	150
Q	150	300	510	500	450	420	710	320	350	330	165	520	650
P_1	18	9	15	12	13	15	20	10	14	25	19	15	20
P_2	26	13	16	20	21	20	27	30	20	32	27	23	14
P_3	16	8	10	10	11	13	18	20	10	23	19	11	16
P_4	10	5	1	12	14	11	12	15	15	15	12	14	5
r_1	150	75	100	120	115	110	160	25	35	165	155	135	110
r_2	140	70	90	100	95	90	150	70	80	155	150	120	95
r_3	50	25	30	40	45	40	50	30	40	65	60	46	34
r_4	80	40	60	50	60	55	90	40	50	85	95	60	65
b_1	170	85	120	150	140	130	170	58	135	176	180	160	115
b_2	230	115	200	190	180	170	200	92	185	205	235	190	195
b_3	280	140	220	200	190	185	270	96	190	275	295	210	230
b_4	120	60	90	110	100	105	130	55	110	134	125	120	100
S_1	31	15	20	18	20	19	33	14	10	35	30	20	25
S_2	42	21	35	30	30	32	45	20	30	48	40	34	33
S_3	30	15	16	20	15	17	31	10	20	33	35	23	18
S_4	20	10	18	12	10	11	22	16	15	24	21	15	20
q_1	200	100	160	120	115	117	210	70	75	120	210	125	155
q_2	150	75	110	90	85	80	165	80	85	90	160	98	115
q_3	170	85	100	130	125	120	180	120	125	60	165	140	110
q_4	50	25	80	60	50	45	60	50	50	45	55	70	85
G_1	1200	600	1000	1100	1050	1000	1000	800	1020	500	1255	1150	1100
G_2	1000	500	800	850	800	900	1100	950	850	700	950	900	750
G_3	1500	750	1200	1050	1000	750	1400	800	950	450	1560	11500	1150
G_4	1200	1100	1300	950	900	1100	1600	1000	800	600	1300	800	1200

Порядок выполнения работы (на примере варианта 0)

1. Составление математической модели задачи.

Введем переменные: x_j (ед.) – величина товарооборота j-й товарной группы. Тогда математическая модель задачи примет вид:

$$f = 120x_1 + 50x_2 + 30x_3 + 100x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 18x_1 + 28x_2 + 16x_3 + 10x_4 \le 110\,000; \\ 150x_1 + 140x_2 + 50x_3 + 80x_4 \le 95\,000; \\ 170x_1 + 230x_2 + 280x_3 + 120x_4 \le 120\,000; \\ 31x_1 + 42x_2 + 60x_3 + 20x_4 \le 180\,000; \\ 200x_1 + 150x_2 + 170x_3 + 50x_4 \ge 150\,000; \\ x_1 \ge 1200; \\ x_2 \ge 1000; \\ x_3 \ge 1500; \\ x_4 \ge 1200. \end{cases}$$

2. Ввод условий задачи.

Сделаем форму и введем исходные данные (рис. 2.1).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Переменные					
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	значение							
4	нижн.гр	1200	1000	1500	1200			
5	верхн.гр							
6								
7	коэф.ЦФ	120	50	30	100			
8					Ограничения			
9	вид					лев.ч.	знак	прав.ч.
10	склад	18	26	16	10		<=	110000
11	трудов.	150	140	50	80		<=	950000
12	изд. обр.	170	230	280	120		<=	1200000
13	запасы	31	42	30	20		<=	180000
14	товарооб.	200	150	170	50		>=	150000

Рис. 2.1. Исходные данные модели

Ячейки B3:E3 (под X1 – X4) являются искомыми для значений переменных, ячейка F7 предназначена для значения целевой функции, ячейки F10:F14 предназначены для внесения левой части ограничений задачи.

Чтобы получить значение целевой функции в ячейке F7, воспользуемся функцией СУММПРОИЗВ. Для этого поместим курсор в ячейку F7, с помощью команды МАСТЕР ФУНКЦИЙ вызовем математическую функцию СУММПРОИЗВ. На экране появится диалоговое окно (рис. 2.2).

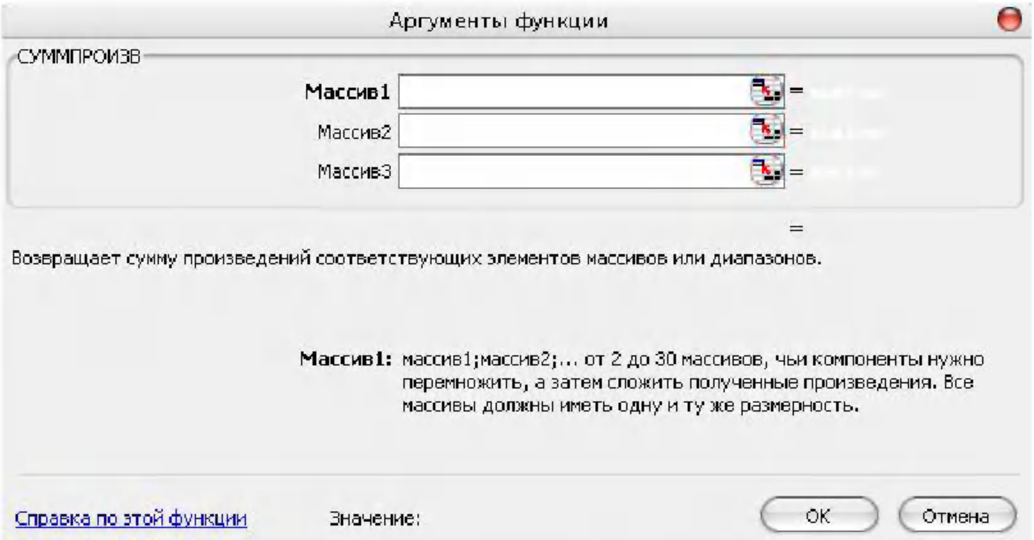


Рис. 2.2. Диалоговое окно функции СУММПРОИЗВ

В массив 1 вводим строку со значениями переменных, т.е. $B$3:$E$3 (знак $ ставим вручную для того, чтобы адрес не менялся при копировании формул). В массив 2 введем адрес строки коэффициентов целевой функции, т.е. B7:E7. Заметим, что во все диалоговые окна адреса ячеек удобно вводить не с клавиатуры, а протаскивая мышь по ячейкам, чьи адреса следует ввести. Далее копируем формулу из ячейки F7 в столбец «Левые части ограничений» (рис. 2.3).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Переменные					
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	значение							
4	нижн.гр	1200	1000	1500	1200			
5	верхн.гр							
6								
7	коэф.ЦФ	120	50	30	100	=СУММПРОИЗВ($B$3:$E$3;B7:E7)		
8						Ограничения		
9	вид					лев.ч.	знак	прав.ч.
10	склад	18	26	16	10	=СУММПРОИЗВ($B$3:$E$3;B10:E10)	<=	110000
11	трудов.	150	140	50	80	=СУММПРОИЗВ($B$3:$E$3;B11:E11)	<=	950000
12	изд. обр.	170	230	280	120	=СУММПРОИЗВ($B$3:$E$3;B12:E12)	<=	1200000
13	запасы	31	42	30	20	=СУММПРОИЗВ($B$3:$E$3;B13:E13)	<=	180000
14	товарооб.	200	150	170	50	=СУММПРОИЗВ($B$3:$E$3;B14:E14)	>=	150000

Рис. 2.3. Ввод формул для расчета целевой функции и левых частей ограничений

Решение задачи осуществляется в следующей последовательности.

Командой **Поиск решения** из меню **Сервис** откроем диалоговое окно **Поиск решения** и занесем в него необходимые данные:

Установить целевую функцию – адрес ячейки, отведенной под значение целевой функции, т.е. F7;

Равной: – максимальному значению;

Изменяя ячейки – адреса изменяемых значений переменных, т.е. B3:E3;

Ограничения – Добавить…

На экране появится диалоговое окно **Добавление ограничения** (рис. 2.4).

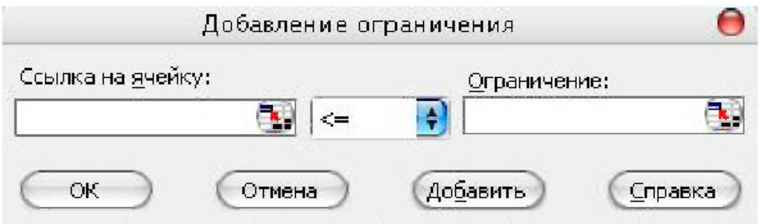


Рис. 2.4. Диалоговое окно «Добавление ограничения»

Здесь вводим граничные условия на переменные: B3:E3 ≥ B4:E4 (выделяя соответствующие ячейки мышкой). **Добавить**: F10:F13 ≤ H10:H13, **Добавить** F14 ≥ H14, **ОК** (рис. 2.5).

Далее командой **Параметры** вызываем диалоговое окно **Параметры поиска решения** (рис. 2.6) и устанавливаем флажки: **Линейная модель**, **Неотрицательные значения**, **Автоматическое масштабирование**. **ОК.**

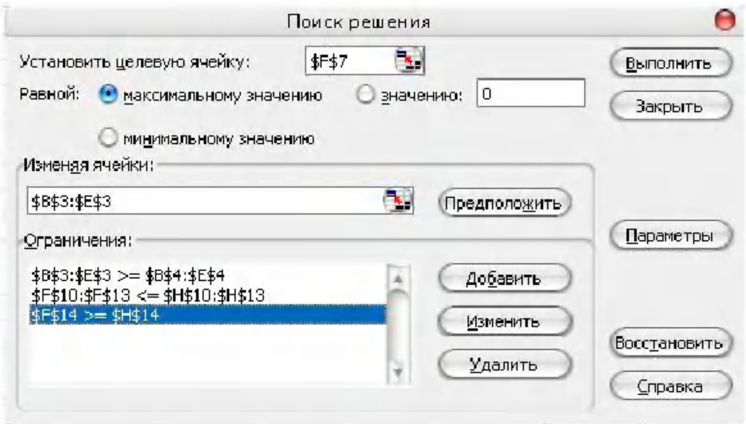


Рис. 2.5. Меню команды **Поиск решения** после введения ограничений

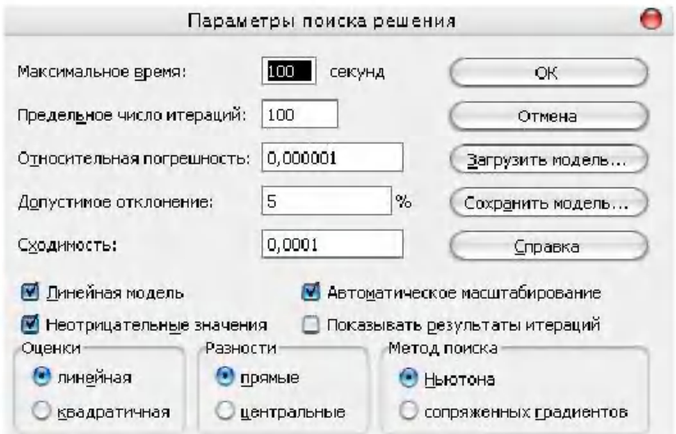


Рис. 2.6. Установка **Параметров поиска решения**

Возвращаемся в диалоговое окно **Поиск решения** (рис. 2.5) и, щелкнув по кнопке **Выполнить**, находим оптимальное решение задачи. Если решение не найдено, окно выведет соответствующее сообщение. В противном случае на экране появляется диалоговое окно **Результаты поиска решения**. Для анализа полученного оптимального решения предусмотрены три типа отчетов. **Помечаем** для вывода два из них: **по результатам, по устойчивости** (рис. 2.7).

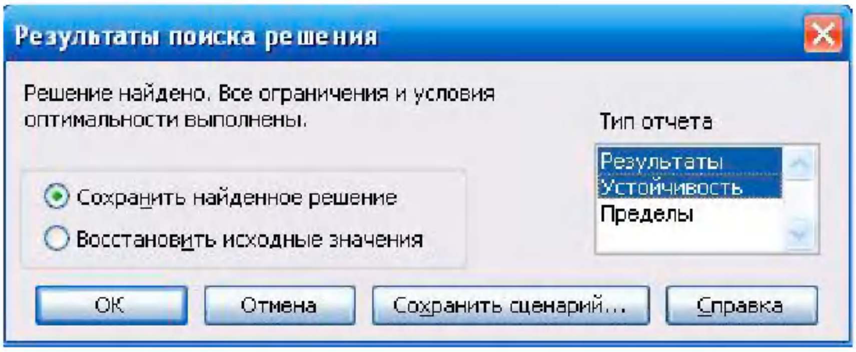


Рис. 2.7. Результаты поиска решения

Нажимаем **ОК**. В результате получим оптимальное решение на рабочем листе (рис. 2.8) и дополнительно два листа отчетов (рис. 2.9 – 2.10).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Переменные					
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	значение	1200	1000	1500	2790			
4	нижн.гр	1200	1000	1500	1200			
5	верхн.гр							
6								
7	коэф.ЦФ	120	50	30	100	518000		
8				Ограничения				
9	вид					лев.ч.	знак	прав.ч.
10	склад	18	26	16	10	99500	<=	110000
11	трудов.	150	140	50	80	618200	<=	950000
12	изд. обр.	170	230	280	120	1188800	<=	1200000
13	запасы	31	42	30	20	180000	<=	180000
14	товарооб.	200	150	170	50	784500	>=	150000

Рис. 2.8. Оптимальное решение

Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам
Рабочий лист:
Отчет создан:

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$F$7	коэф.ЦФ	0	518000

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$3	значение X1	0	1200
$C$3	значение X2	0	1000
$D$3	значение X3	0	1500
$E$3	значение X4	0	2790

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$F$10	склад лев.ч.	99500	$F$10<=$H$10	не связан.	10500
$F$11	трудов. лев.ч.	618200	$F$11<=$H$11	не связан.	331800
$F$12	изд. обр. лев.ч.	1188800	$F$12<=$H$12	не связан.	11200
$F$13	запасы лев.ч.	180000	$F$13<=$H$13	связанное	0
$F$14	товарооб. лев.ч.	784500	$F$14>=$H$14	не связан.	634500
$B$3	значение X1	1200	$B$3>=$B$4	связанное	0
$C$3	значение X2	1000	$C$3>=$C$4	связанное	0
$D$3	значение X3	1500	$D$3>=$D$4	связанное	0
$E$3	значение X4	2790	$E$3>=$E$4	не связан.	1590

Рис. 2.9. Отчет по результатам

Отчет по результатам содержит данные о значении целевой функции (**Результат** – 518 000), значениях переменных (вторая таблица) и данные по всем ограничениям задачи (третья таблица). Для ограничений в столбце **Формула** приведены зависимости ограничений задачи. В столбце **Значение** приведены величины левых частей ограничений. В столбце **Статус** – связанное или не связанное обозначает: обращается ли соответствующее ограничение в строгое равенство или неравенство соответственно при подстановке в него найденных значений переменных оптимального плана (т.е. $X_1^* – X_4^*$); **Разница** – разница левой и правой частей ограничений.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист:
Отчет создан:

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$3	значение X1	1200	-35	120	35	1E+30
$C$3	значение X2	1000	-160	50	160	1E+30
$D$3	значение X3	1500	-120	30	120	1E+30
$E$3	значение X4	2790	0	100	1E+30	22,58064516

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$F$10	склад лев.ч.	99500	0	110000	1E+30	10500
$F$11	трудов. лев.ч.	618200	0	950000	1E+30	331800
$F$12	изд. обр. лев.ч.	1188800	0	1200000	1E+30	11200
$F$13	запасы лев.ч.	180000	5	180000	1866,666667	31800
$F$14	товарооб. лев.ч.	784500	0	150000	634500	1E+30

Рис. 2.10. Отчет по устойчивости

В отчете по устойчивости дан анализ по переменным и ограничениям. В первой таблице приведены следующие данные: результирующие значения основных переменных задачи; нормированная стоимость – значения дополнительных двойственных переменных; коэффициенты целевой функции и допустимые значения приращения коэффициентов целевой функции (границы устойчивости).

Во второй таблице: значения левых частей ограничений задачи; теневые цены – двойственные оценки (значения основных двойственных переменных); значения приращения правых частей ограничений задачи, при которых сохраняется структура оптимального набора переменных, входящих в оптимальное решение задачи (границы устойчивости). См. приложение А.

3. Оформление отчета о проделанной работе.

План отчета:

1. Фамилия, Имя Отчество; группа, факультет, № варианта.
2. Экономико-математическая модель.

3. Полный экономический анализ результатов решения исходной задачи.
4. Экономическая интерпретация двойственных оценок и дополнительных двойственных переменных.
5. Выявление «узких мест» на торговом предприятии и предлагаемые рекомендации по их «расшивке».

Лабораторная работа № 3. Задача о раскрое материала

Литература: [1], [2].

Постановка задачи. На предприятие поступают стальные прутья длиной L (см). Для дальнейшего использования в производственном процессе из них требуется нарезать не менее b_1 заготовок длиной l_1 см, не менее b_2 заготовок длиной l_2 см, не менее b_3 – длиной l_3 см. При этом каждый прут может быть разрезан одним из J способов. Известно количество заготовок, получаемых из прута при каждом способе раскроя (тем самым задана величина отходов для каждого способа раскроя), а именно, при 1-ом способе получается d_{11} заготовок длиной l_1; d_{12} заготовок длиной l_2; d_{13} заготовок длиной l_3 и т.д. При j-ом способе, соответственно, d_{j1}, d_{j2}, d_{j3} заготовок (табл. 3.1). Требуется:

1) составить экономико-математическую модель задачи, решение которой позволит ответить на вопрос: сколько прутьев надо разрезать каждым из способов, чтобы совокупная длина отходов была минимальной;
2) найти минимальное число прутьев, которое требуется разрезать для получения необходимого числа заготовок всех видов, и определить соответствующую величину отходов;
3) составить экономико-математическую модель минимизации числа разрезаемых прутьев, решить ее и сопоставить решения.

Таблица 3.1

Параметры	Номер варианта											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
L	110	115	125	100	120	115	150	100	125	95	120	110
l_1	12	18	23	14	24	33	29	21	12	27	22	9
l_2	23	32	14	26	11	28	12	11	15	23	33	21
l_3	36	20	11	17	42	19	24	31	24	31	25	12
b_1	60	65	125	200	80	60	80	55	65	45	55	46
b_2	45	50	255	85	50	50	60	40	50	40	62	38
b_3	40	105	180	110	45	40	55	35	45	35	47	38
J	5	5	6	6	5	5	5	5	5	6	5	5
d_{11}	1	3	2	4	3	2	4	4	5	3	4	11
d_{12}	1	1	3	1	4	1	2	1	4	0	0	0
d_{13}	2	1	3	1	0	1	0	0	0	0	1	0
d_{21}	5	1	4	2	3	1	2	1	3	1	2	2
d_{22}	2	0	1	2	0	0	1	1	1	2	2	4
d_{23}	0	4	1	1	1	4	3	2	3	0	0	0
d_{31}	0	1	2	3	1	0	2	0	0	1	2	2
d_{32}	0	2	4	0	4	4	7	9	6	0	0	0
d_{33}	3	1	2	3	1	0	0	0	1	2	3	7
d_{41}	2	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
d_{42}	2	1	3	3	3	2	2	4	5	4	3	5
d_{43}	1	3	5	0	2	3	5	1	2	0	0	0
d_{51}	1	2	1	1	0	0	3	0	2	0	0	0
d_{52}	4	1	4	1	7	0	1	0	0	2	2	2
d_{53}	0	2	4	3	1	6	2	3	4	1	2	5
d_{61}	–	–	0	2	–	–	–	–	–	0	–	0
d_{62}	–	–	4	0	–	–	–	–	–	0	–	0
d_{63}	–	–	6	4	–	–	–	–	–	3	–	9
t	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	1	2

Порядок выполнения работы

1. Построение экономико-математической модели.

Решение задачи рассмотрим на примере следующей модели:

$$f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 5x_4 \geq 80; \\ x_1 + 3x_2 + x_4 \geq 70; \\ x_2 + 2x_3 \geq 45; \end{cases}$$

$$x_j \in Z^+,\ j = \overline{1,4}.$$

2. Ввод условия задачи в электронные таблицы Excel.

Ячейки B2:E2 отведем под переменные, оптимальные значения которых должен отыскать компьютер. Коэффициенты целевой функции и каждого из трех ограничений разместим в отдельных строках. Значение целевой функции в ячейке F4 рассчитаем при помощи математической функции СУММПРОИЗВ. Кроме того, левая часть каждого ограничения представляет собой сумму произведений переменных (вторая строка) на коэффициенты, поэтому формулу, введенную в ячейке F4, скопируем вниз в ячейки F6:F8, предварительно проследив, чтобы адрес второй строки не изменялся при копировании (для этого необходимо расставить знаки $ перед адресом 2-ой строки, отведенной под переменные). Первоначально в ячейках с формулами появятся нули (рис. 3.1), поскольку формула ссылается на пустые ячейки (по умолчанию их значения равны нулю).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		x_1	x_2	x_3	x_4			
2								
3						Значение		
4	Целевая функция	1	2	3	4	0	min	
5						Левая часть	Знак	Правая часть
6	1 ограничение	2	0	1	5	0	>=	80
7	2 ограничение	1	3	0	1	0	>=	70
8	3 ограничение	0	1	2	0	0	>=	45

Рис. 3.1. Исходные данные

3. Поиск оптимального решения.

В меню СЕРВИС выберем команду ПОИСК РЕШЕНИЯ. В появившемся диалоговом окне введем данные:

Установить целевую ячейку: F4;

Равной: минимальному значению;

Изменяя ячейки: $B$2:$E$2;

Ограничения: ДОБАВИТЬ. В меню «Добавление ограничения» по принципу: левая часть ограничения – знак – правая часть, введем ограничения модели. Причем, поскольку все три ограничения имеют одинаковый знак, то их можно ввести вместе (рис. 1.2). Снова нажимаем кнопку ДОБАВИТЬ и вводим условие целочисленности переменных: «$B$2:$E$2 = целое». После ввода всех ограничений нажимаем кнопку ОК. Также необходимо установить ПАРАМЕТРЫ поиска решения: «Линейная модель», «Неотрицательные значения», «Автоматическое масштабирование».

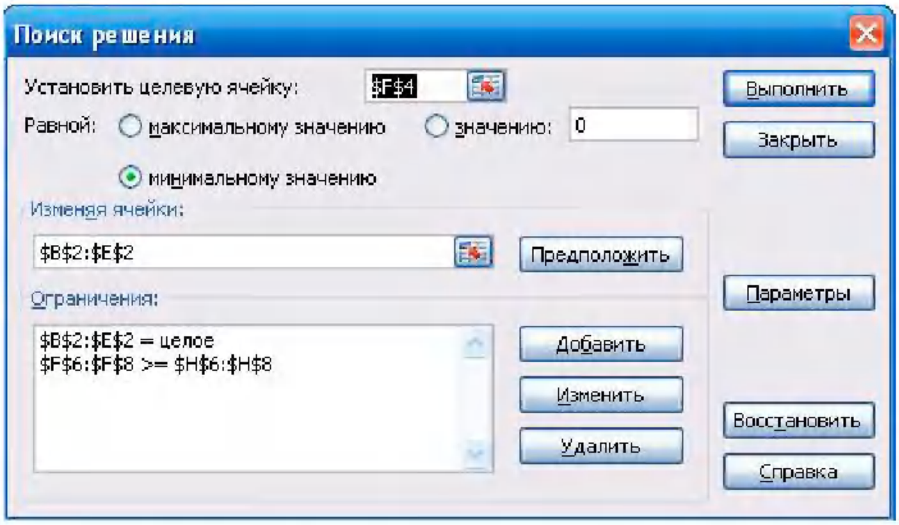


Рис. 3.2. Меню команды «Поиск решения» с введенной моделью

После того, как вся информация введена (рис. 3.2), нажимаем кнопку ВЫПОЛНИТЬ и получаем результаты поиска решения (рис. 3.3). **Отчет по результатам** можно вывести на отдельном электронном листе (рис. 3.4).

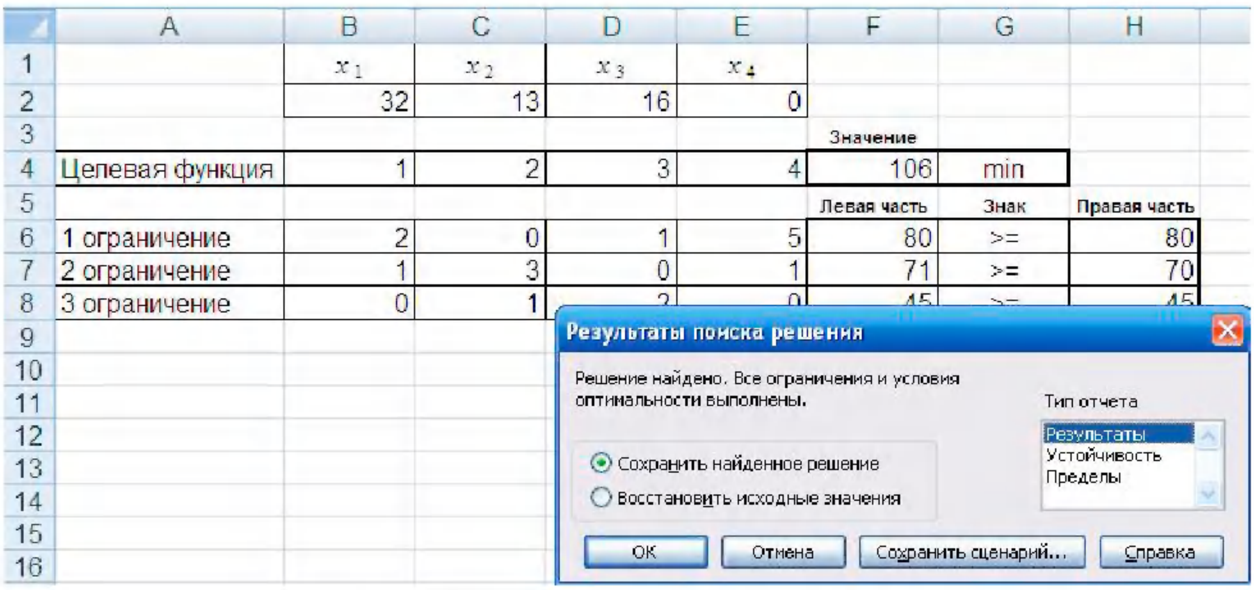


Рис. 3.3. Результаты поиска решения

Содержание отчетов по результатам поиска оптимального решения описано в приложении А.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Microsoft Excel 12.0 Отчет по результатам**						
2	**Рабочий лист: [03.xlsx]пример**						
3	**Отчет создан: 25.02.2012 23:45:58**						
4							
5							
6	Целевая ячейка (Минимум)						
7		**Ячейка**	**Имя**	**Исходное значение**	**Результат**		
8		$F$4	Целевая функция Значение	0	106		
9							
10							
11	Изменяемые ячейки						
12		**Ячейка**	**Имя**	**Исходное значение**	**Результат**		
13		$B$2	x1	0	32		
14		$C$2	x2	0	13		
15		$D$2	x3	0	16		
16		$E$2	x4	0	0		
17							
18							
19	Ограничения						
20		**Ячейка**	**Имя**	**Значение**	**Формула**	**Статус**	**Разница**
21		$F$6	1 ограничение Левая часть	80	$F$6>=$H$6	связанное	0
22		$F$7	2 ограничение Левая часть	71	$F$7>=$H$7	не связан.	1
23		$F$8	3 ограничение Левая часть	45	$F$8>=$H$8	связанное	0
24		$B$2	x1	32	$B$2=целое	связанное	0
25		$C$2	x2	13	$C$2=целое	связанное	0
26		$D$2	x3	16	$D$2=целое	связанное	0
27		$E$2	x4	0	$E$2=целое	связанное	0

Рис. 3.4. Отчет по результатам

4. Оформление отчета о проделанной работе.

План отчета.

1. Запишите фамилию, имя, название группы, номер варианта.
2. Составьте экономико-математическую модель задачи минимизации отходов от раскроя прутьев.
3. Сколько прутьев будет разрезано согласно оптимальному решению каждым из способов раскроя, какова будет совокупная длина отходов при этом и сколько заготовок каждого вида будет получено.
4. Запишите модель минимизации числа разрезаемых прутьев и сравните ее оптимальное решение с полученным выше.

Лабораторная работа № 4. Задача о составлении смеси

Литература: [1], [2], [8].

Постановка задачи 1. Из четырех видов продуктов I, II, III, IV составляется смесь. В состав смеси должно входить b_1 ед. вещества A, не более b_2 ед. вещества B и не менее b_3 ед. вещества C. Известно также содержание i-го химического вещества в ед. j-й продукции a_{ij} и стоимость c_j единицы продукции (табл. 4.1). Составьте наиболее дешевую смесь.

Таблица 4.1

Параметры	Номер варианта											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_{11}	6	3	2	3	3	12	9	10	2	4	2	6
a_{12}	2	7	3	4	2	13	5	7	8	5	3	1
a_{13}	6	5	3	4	6	11	6	4	9	3	2	7
a_{14}	8	4	4	5	4	15	12	9	1	2	1	3
a_{21}	3	1	3	6	10	18	5	8	5	10	5	4
a_{22}	3	2	2	7	9	18	8	6	7	4	2	2
a_{23}	8	4	6	5	8	17	7	5	4	2	1	5
a_{24}	7	3	3	4	5	11	9	6	7	4	2	3
a_{31}	4	8	5	2	1	20	11	6	4	2	1	4
a_{32}	10	7	7	3	5	11	14	12	3	6	3	5
a_{33}	3	6	8	4	3	14	11	9	6	3	2	2
a_{34}	2	10	6	2	4	15	5	8	8	5	3	7
b_1	427	244	165	208	115	1657	393	430	850	73	30	256
b_2	385	195	125	306	429	2449	274	340	770	106	50	250
b_3	361	327	254	195	242	2084	526	420	840	124	75	402
c_1	5	11	5,2	6	3	4	22	24	15	5	15	8
c_2	4	15	4,8	4	5	2	42	18	24	6	17	5
c_3	3	10	5	8	3	1	28	13	17	7	14	7
c_4	8	9	3,5	3	2	5	41	23	18	3	12	6
K	80	1	2	6	102	14	25	52	375	27	42	23
m	2	3	4	1	2	3	2	1	4	5	2	1
P	IV	I	I	IV	III	II	IV	III	I	III	I	II

Постановка задачи 2. Для поддержания нормальной жизнедеятельности человеку необходимо потреблять в сутки в расчете на 1 кг веса не менее 1 г белка, не менее 4 г жиров, не менее 8 г углеводов. Количество питательных веществ, содержащихся в 1 кг каждого вида возможно потребляемых продуктов, а также цена 1 кг каждого из этих продуктов, приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2

№	Продукты	Содержание питательных веществ в 1 кг			Цена, ден.ед.
		белки	жиры	углеводы	
1	Хлеб пшеничный	76	6	524	1000
2	Молоко коровье	28	32	47	480
3	Сок яблочный	6	–	118	1000
4	Печенье	80	120	148	4500
5	Каша	38	59	163	2000
6	Сливки (10%)	30	100	40	1800
7	Творог (9%)	170	90	10	2100
8	Рыба (треска)	220	40	–	3000
9	Мясной бульон	10	20	10	6800
10	Масло сливочное	10	780	10	7800
11	Мясо	150	50	–	9000

Таблица 4.3

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Продукты	1	1	8	3	2	7	1	1	6	3	9	2
	2	8	10	4	3	8	5	10	7	5	10	4
	10	4	5	8	6	9	6	11	8	7	11	5
Дополнительные требования	а	к	е	в	ж	з	б	и	г	м	д	л

Составить экономико-математическую модель задачи нахождения оптимального рациона (вес человека предполагается равным 70 кг), т.е. определить такой ассортимент и количество каждого вида продуктов, который позволит удовлетворить потребность организма в питательных веществах и одновременно будет самым дешевым. При этом следует учесть дополнительные и требования, предъявляемые к рациону, а именно, он должен содержать: а) масла не более 50 г; б) хлеба не более 300 г; в) рыбы не более 200 г; г) молочных продуктов в совокупности (молоко, сливки, творог) не менее 200 г; д) мясных продуктов (бульон, мясо) в совокупности не менее 200 г; е) рыбы не менее 200 г; ж) сока не менее 500 г; з) жидкости (молоко, сок, сливки, бульон) не менее 1 кг; и) жиров в совокупности не более двойной нормы; к) хлеба не менее 100 г; л) печенья не более 100 г; м) каши не более 500 г.

Порядок выполнения работы

1. Составление модели (самостоятельно).

Опишем решение задачи на примере следующей модели:

$$f = 2{,}5x_1 + 3{,}4x_2 + 4{,}1x_3 (\min),$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 6x_3 \ge 425, \\ 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 \ge 348, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

2. Ввод условия задачи в электронные таблицы Excel (рис. 4.1).

	A	B	C	D	E	F	G
1		x_1	x_2	x_3			
2							
3							
4			Коэффициенты		Значение		
5	Целевая функция	2,5	3,4	4,1	0	min	
6					Левая часть	Знак	Правая часть
7	Огр. 1	4	8	6	0	>=	425
8	Огр. 2	7	5	9	0	>=	348

Рис. 4.1. Исходные данные задачи

Значение целевой функции в ячейке E5 введем, воспользовавшись математической функцией СУММПРОИЗВ. Для этого поместим курсор в ячейку E5, с помощью меню ВСТАВКА – ФУНКЦИЯ вызовем математическую функцию СУММПРОИЗВ. На экране появится диалоговое окно. В **массив 1** вводим строку со значениями переменных B$2:D$2 (знак $ ставим для того, чтобы адрес не менялся при копировании формул). В **массив 2** введем адрес строки коэффициентов целевой функции B5:D5. Далее копируем формулу из ячейки E5 в столбец «Левые части ограничений»: ячейки E7:E8.

Итак, каждое выражение модели записано в отдельной ячейке в виде формулы. В этих ячейках появились значения 0, т.к. исходно значения переменных не заданы.

3. Поиск оптимального решения.

Вызовем команду СЕРВИС – ПОИСК РЕШЕНИЯ. В появившемся диалоговом окне «Поиск решения» задаем информацию

Установить целевую ячейку: E5;

Равной: минимальному значению;

Изменяя ячейки: $B$2:$D$2;

Ограничения: ДОБАВИТЬ. Появится меню «Добавление ограничения» (рис. 4.2).

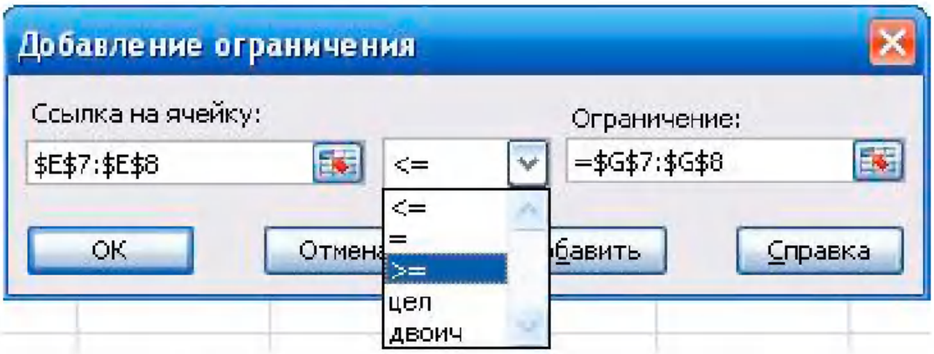


Рис. 4.2. Добавление ограничений

Поскольку в нашем примере оба ограничения имеют знак «≥», то их можно добавить одновременно (рис. 4.2) по принципу: левая часть ограничения (ссылка на ячейку с формулой) – знак – правая часть. Если нужно добавить еще одно или несколько ограничений, то нажмем кнопку ДОБАВИТЬ, если ввод ограничений закончен – ОК. Возвращаемся в меню «Поиск решения» и нажимаем кнопку ПАРАМЕТРЫ (рис. 1.3). В меню «Параметры поиска решения» установим **метки**: «Линейная модель», «Неотрицательные значения» (условие неотрицательности переменных), «Автоматическое масштабирование». Нажимаем кнопку ОК и возвращаемся в меню «Поиск решения» (рис. 4.3).

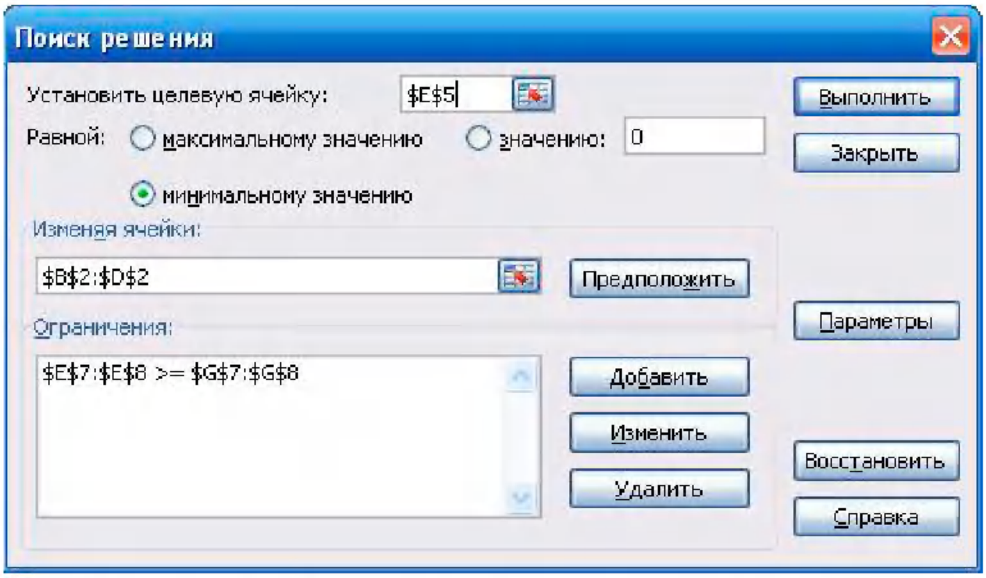


Рис. 4.3. Меню «Поиск решения» с заданной моделью

Модель полностью введена. Нажимаем кнопку ВЫПОЛНИТЬ. Если все подготовительные действия выполнены верно, то появится окно (рис. 1.5).

Отметим для вывода два отчета «По результатам» и «По устойчивости» и нажмем кнопку ОК. Оба отчета будут выведены на новых электронных листах Excel. Описание содержания отчетов см. в Приложении А.

4. Изучение полученных данных и составление отчета о проделанной работе.

План отчета для задачи 1.

1. Указать фамилию, имя, название группы, номер варианта.
2. Записать модель, по которой производились расчеты.
3. Выписать в отчет полученное оптимальное решение. Сколько будет стоить самая дешевая смесь? Какое количество продуктов каждого вида следует купить? Сколько вещества *B* и *C* будет входить в состав данной смеси?

4. Как изменится стоимость смеси, если в ее состав надо включить вещества A на K ед. больше?
5. Как изменится стоимость смеси, если в ее состав включить m ед. продукта P?

План отчета для задачи 2.

1. Укажите фамилию, имя, название группы, номер варианта.
2. Запишите экономико-математическую модель задачи нахождения оптимального рациона питания.
3. Укажите оптимальный суточный рацион. Какова его стоимость?
4. Постройте модель двойственной задачи, укажите ее оптимальное решение, поясните его экономическое содержание.
5. Пользуясь двойственными оценками (считая их устойчивыми), определите, насколько подешевел бы рацион, если бы научно обоснованная потребность в питательных веществах (отдельно в белках, жирах, углеводах) была уменьшена на 0,01 г на 1 кг веса.

Лабораторная работа № 5. Транспортная задача

Литература: [1], [2], [8].

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Постановка задачи 1. В экономическом районе имеются четыре предприятии, выпускающие однородную продукцию и удовлетворяющие потребности пяти потребителей. Объемы производства и потребности, себестоимость производства единицы продукции на предприятиях, а также стоимости перевозок единицы продукции приведены в таблицах 5.1, 5.2.

Требуется:

1. Составить экономико-математическую модель задачи, чтобы суммарные расходы на производство и транспортировку продукции были минимальными;
2. В связи с переходом к выпуску другой продукции уменьшаются объемы поставок второму и третьему потребителям на 20 и 10 ед. соответственно. Определить, на каких предприятиях необходимо провести сокращение выпуска, чтобы суммарные расходы на производство и транспортировку продукции после сокращения были минимальными.
3. Дать полную экономическую интерпретацию полученных решений с учетом решения двойственной задачи.

Таблица 5.1

Вариант	Объем производства поставщиков (сд.)				Потребности потребителей (сд.)					Себестоимость продукции (д.сд.)			
	A_1	A_2	A_3	A_4	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	A_1	A_2	A_3	A_4
1	80	90	60	30	40	70	80	40	30	20	15	10	25
2	50	90	40	30	30	50	70	40	20	30	15	10	10
3	100	50	40	70	10	50	60	100	40	30	25	10	15
4	80	40	50	30	20	80	50	10	40	25	30	25	20
5	70	80	60	20	40	60	40	60	30	12	10	15	25
6	50	100	90	60	30	60	40	70	100	15	10	20	25
7	50	40	30	80	20	40	60	30	50	15	20	10	25
8	70	60	100	90	30	90	80	50	70	10	25	30	15
9	20	40	30	70	60	30	40	10	20	10	15	25	20
10	70	60	40	20	30	60	50	20	30	10	30	25	20
11	85	45	60	70	35	40	80	25	80	15	20	10	20
12	110	40	80	90	60	80	70	30	80	5	15	20	25

Таблица 5.2

Стоимость перевозок (ден. ед.)

Вариант 1					**Вариант 2**					**Вариант 3**					**Вариант 4**				
10	25	15	30	35	80	90	30	50	45	20	80	60	10	30	40	10	20	30	10
10	15	10	40	50	30	60	10	15	35	40	10	20	35	50	30	20	15	20	40
60	30	15	35	20	80	10	25	35	40	45	50	65	20	10	50	20	50	10	30
65	35	30	25	40	40	50	35	60	25	30	25	15	40	10	20	40	20	35	25
Вариант 5					**Вариант 6**					**Вариант 7**					**Вариант 8**				
40	10	25	30	45	45	75	86	48	57	46	67	68	54	38	57	49	57	39	56
15	25	40	10	60	24	56	43	58	76	45	73	86	63	82	48	75	48	67	29
35	70	20	45	50	34	76	58	47	50	46	56	73	79	64	57	49	67	39	57
10	20	30	50	40	56	42	30	56	48	87	54	95	93	76	57	49	67	20	75
Вариант 9					**Вариант 10**					**Вариант 11**					**Вариант 12**				
75	94	67	84	57	50	40	30	60	10	54	67	86	53	56	57	34	85	74	86
45	36	76	56	35	80	30	20	10	60	64	97	45	63	75	56	38	65	73	95
57	48	76	45	36	70	10	15	10	25	65	47	86	34	52	56	47	83	64	84
37	96	85	74	95	65	50	20	35	40	64	57	63	27	85	73	97	84	36	57

Постановка задачи 2. В пунктах A_i, $(i=\overline{1,3})$ производится однородная продукция в количествах a_i единиц. Себестоимость единицы продукции в пункте A_i, $(i=\overline{1,3})$ равна c_i $(i=\overline{1,3})$. Готовая продукция поставляется в пункты B_j $(j=\overline{1,4})$, потребности которых составляют b_j $(j=\overline{1,4})$ единиц. Стоимость c_{ij} перевозки единицы продукции из пункта A_i в пункт B_j также известна (табл. 5.3).

Таблица 5.3

Параметры	Номер варианта											
	13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
a_1	750	240	260	200	180	380	280	270	360	290	560	358
a_2	200	120	220	500	240	290	230	290	150	210	350	245
a_3	550	270	300	300	290	330	300	460	380	140	660	650
c_1	40	20	60	100	20	15	80	90	90	13	50	90
c_2	10	50	80	40	50	20	75	10	40	11	80	80
c_3	30	30	50	80	70	18	95	50	30	16	40	60
b_1	450	150	250	350	280	320	160	380	270	250	390	950
b_2	300	180	240	400	120	370	240	250	190	280	850	450
b_3	350	190	180	200	340	260	290	360	340	170	400	125
b_4	250	280	130	150	160	150	210	210	200	100	160	600
c_{11}	1	7	2	4	8	4	5	5	7	9	3	5
c_{12}	6	1	6	3	6	7	4	8	3	5	5	6
c_{13}	5	6	5	5	4	2	8	2	6	1	8	4
c_{14}	3	9	6	6	5	5	7	8	1	8	1	3
c_{21}	4	2	3	8	1	8	1	9	5	1	4	8
c_{22}	3	3	4	1	9	3	9	1	2	2	6	4
c_{23}	5	4	8	9	2	7	4	7	4	4	8	9
c_{24}	7	8	9	7	1	8	5	4	8	3	1	2
c_{31}	5	4	8	3	7	9	3	1	3	3	6	7
c_{32}	8	5	1	2	3	6	8	6	5	7	9	1
c_{33}	10	2	7	8	8	1	6	2	7	2	7	3
c_{34}	4	3	3	1	6	3	1	3	9	6	4	6

Требуется:

1. составить экономико-математическую модель задачи, позволяющую найти план перевозки готовой продукции из пунктов производства в пункты потребления, при непременном удовлетворении спроса на продукцию в этих пунктах, и обеспечивающий минимальные суммарные затраты, вызванные производством и доставкой продукции;
2. найти оптимальный план перевозки продукции при дополнительном условии, что продукция пункта A_K, в котором себестоимость ее производства наименьшая, должна быть распределена полностью,

вычислить минимальные суммарные затраты на производство и доставку продукции;

3. назвать пункты, в которых остается нераспределенная продукция и указать объем такой продукции;
4. дать полную экономическую интерпретацию полученных решений с учетом решения двойственной задачи.

Постановка задачи 3. Готовая продукция заводов A_i, $(i=\overline{1,3})$ направляется на склады B_j $(j=\overline{1,4})$. Заводы A_i производят a_i тыс. изделий. Пропускная способность складов B_j за это время характеризуется величинами b_j тыс. изделий. Стоимость перевозки с завода A_i на склад B_j одной тысячи изделий равна c_{ij} (табл. 5.4).

Требуется:

1. составить экономико-математическую модель задачи с целью минимизации затрат;
2. найти план перевозки готовой продукции заводов на склады с минимальными затратами;
3. найти план перевозки готовой продукции с заводов на склады, при дополнительном условии, что на складе B_k созданы лучшие условия для хранения готовой продукции, а поэтому он должен быть загружен полностью.
4. указать склады, пропускная способность которых использована не полностью, и величину резерва складских помещений в них;
5. дать полную экономическую интерпретацию полученных решений с учетом решения двойственной задачи.

Таблица 5.4

Параметры	Номер варианта											
	25	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**
a_1	250	240	260	200	180	380	280	270	360	290	680	420
a_2	150	120	220	500	240	290	230	290	150	210	240	300
a_3	400	270	300	300	290	330	300	460	380	140	510	150
b_1	100	150	250	350	280	320	160	380	270	250	200	420
b_2	500	180	240	400	120	370	240	250	190	280	960	540

Окончание таблицы 5.4

Параметры	Номер варианта											
	25	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**
b_3	100	190	180	200	340	260	290	360	340	170	800	350
b_4	300	280	130	150	160	150	210	210	200	100	150	940
c_{11}	2	7	2	4	8	4	5	5	7	9	5	3
c_{12}	1	1	6	3	6	7	4	8	3	5	6	4
c_{13}	3	6	5	5	4	2	8	2	6	1	7	9
c_{14}	6	9	6	6	5	5	7	8	1	8	2	6
c_{21}	1	2	3	8	1	8	1	9	5	1	1	7
c_{22}	4	3	4	1	9	3	9	1	2	2	8	2
c_{23}	7	4	8	9	2	7	4	7	4	4	3	1
c_{24}	9	8	9	7	1	8	5	4	8	3	4	8
c_{31}	6	4	8	3	7	9	3	1	3	3	9	3
c_{32}	2	5	1	2	3	6	8	6	5	7	2	4
c_{33}	4	2	7	8	8	1	6	2	7	2	5	9
c_{34}	5	3	3	1	6	3	1	3	9	6	9	2
k	4	2	1	3	1	2	1	4	3	2	4	3

Постановка задачи 4. Коммерческие банки B_i $(i=\overline{1,4})$ выделяют предприятиям $П_j$ $(j=\overline{1,4})$ кредиты на совершенствование производства с целью увеличения выпуска высококачественной продукции. Процентная ставка c_{ij} $(i=\overline{1,4},\ j=\overline{1,4})$ банка зависит от срока возмещения кредита. Суммы a_i тыс. ден. ед. $(i=\overline{1,4})$ которые банки могут выделить на кредиты, потребность предприятий b_j тыс. ден. ед. $(j=\overline{1,4})$ в кредитах и процентные ставки c_{ij} приведены в таблице 5.5.

Требуется:

1. составить экономико-математическую модель задачи распределения банковских кредитов между предприятиями, максимизирующих общую прибыль, которую могут получить банки за пользование взятыми предприятиями кредитами;
2. найти оптимальное распределение банковских кредитов между предприятиями;
3. найти решение задачи, при условии, что банк B_k предприятию $П_s$ не выделяет кредит;
4. сравнить результаты и дать полную экономическую интерпретацию полученных решений с учетом решения двойственной задачи.

Таблица 5.5

Параметры	Номер варианта											
	37	**38**	**39**	**40**	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**
a_1	250	240	260	200	180	380	280	270	360	290	680	420
a_2	150	120	220	500	240	290	230	290	150	210	240	300
a_3	400	270	300	300	290	330	300	460	380	140	510	150
a_4	256	520	450	152	650	485	150	560	130	580	560	800
b_1	100	150	250	350	280	320	960	380	270	250	200	420
b_2	500	980	840	400	120	370	240	250	990	280	960	540
b_3	800	190	180	200	340	960	290	360	340	870	800	850
b_4	300	280	130	650	760	150	210	810	200	100	950	940
c_{11}	12	17	12	14	18	14	15	15	17	19	15	13
c_{12}	11	14	16	13	16	17	14	18	13	15	16	14
c_{13}	13	16	15	15	14	12	18	12	16	11	17	19
c_{14}	16	19	16	16	15	15	17	18	11	18	12	16
c_{21}	11	12	13	18	11	18	11	19	15	11	24	17
c_{22}	14	13	14	11	19	13	19	11	12	12	18	12
c_{23}	17	11	18	19	12	17	14	17	14	14	13	11
c_{24}	19	18	19	17	11	18	15	14	18	13	14	18
c_{31}	16	14	18	13	17	19	13	11	13	13	19	13
c_{32}	12	15	11	12	13	16	18	16	15	17	12	14
c_{33}	14	12	17	18	18	11	16	12	17	12	15	19
c_{34}	15	13	13	11	16	13	11	13	19	16	19	12
c_{41}	19	21	16	16	18	23	16	14	16	15	11	16
c_{42}	20	15	14	21	14	15	14	19	18	20	15	13
c_{43}	14	13	12	19	12	11	13	20	12	16	17	14
c_{44}	16	17	19	11	16	17	18	12	17	19	13	18
k	1	2	3	2	2	3	2	3	1	2	4	2
s	2	3	2	2	1	3	1	1	4	1	1	3

Порядок выполнения работы

Пример 5. В пунктах A_i, ($i=\overline{1,3}$) производится однородная продукция в количествах 100, 150 и 380 единиц соответственно. Себестоимость единицы продукции в пункте A_1 равна 10 ден.ед., в пункте A_2 равна 12 ден.ед., а в пункте A_3 – 8 ден.ед. Готовая продукция поставляется в пункты B_j ($j=\overline{1,4}$), потребности которых составляют соответственно 160, 260, 50 и 140 единиц. Стоимость c_{ij} перевозки единицы продукции из пункта A_i в пункт B_j известна и приведена в виде матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 6 \\ 9 & 5 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$. Требуется:

1. составить экономико-математическую модель задачи, позволяющую найти план перевозки готовой продукции из пунктов производства в пункты потребления, при непременном удовлетворении спроса на

продукцию в этих пунктах, и обеспечивающий минимальные суммарные затраты, вызванные производством и доставкой продукции;

2. найти оптимальный план перевозки продукции при дополнительном условии, что продукция пункта, в котором себестоимость ее производства наименьшая, должна быть распределена полностью, вычислить минимальные суммарные затраты на производство и доставку продукции;
3. назвать пункты, в которых остается нераспределенная продукция и указать объем этой продукции.

1. Составление математической модели задачи.

Обозначим через x_{ij} количество продукции, перевозимого по пути $A_i \to B_j$. Тогда, исходя из данных таблицы, стоимость перевозки единицы продукции из пунктов A_i в пункты B_j равна тариф плюс себестоимость.

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 14 & 16 \\ 21 & 17 & 19 & 13 \\ 16 & 11 & 15 & 14 \end{pmatrix}$$

Тогда модель задачи будет иметь вид:

$$f = 12x_{11} + 15x_{12} + 14x_{13} + 16x_{14} + 21x_{21} + 17x_{22} + \\ + 19x_{23} + 13x_{24} + 16x_{31} + 11x_{32} + 15x_{33} + 14x_{34} (\min)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 100; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 150; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 380; \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 160; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 260; \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 50; \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 140; \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,4}.$$

2. Решение задачи средствами EXCEL.

Составим форму и введем данные модели (рис. 5.1).

	A	B	C	D	E	F	G
1		Поставки	Потребители				
2			160	260	50	140	
3	Поставщики	100					
4		150					
5		380					
6							
7							
8		Тарифы	Потребители				Себесто-
9			160	260	50	140	имость
10	Поставщики	100	2	5	4	6	10
11		150	9	5	7	1	12
12		380	8	3	7	6	8
13							
14						ЦФ=	
15		Тарифы+	Потребители				
16		себестоимость	160	260	50	140	
17	Поставщики	100					
18		150					
19		380					

Рис. 5.1. Исходные данные

Рассчитаем тарифы с учетом себестоимости. Для этого в ячейку C17 введем формулу: C10 + $G10 и скопируем её вправо и вниз в диапазоне C17:F19 (рис. 5.2, 5.3).

	A	B	C	D	E	F	G
8		Тарифы	Потребители				Себесто-
9			160	260	50	140	имость
10	Поставщики	100	2	5	4	6	10
11		150	9	5	7	1	12
12		380	8	3	7	6	8
13							
14						ЦФ=	
15		Тарифы+	Потребители				
16		себестоимость	160	260	50	140	
17	Поставщики	100	=C10+$G10				
18		150					
19		380					

Рис. 5.2. Расчет тарифов с учетом себестоимости продукции

15	Тарифы+		Потребители			
16	себестоимость		160	260	50	140
17	Поставщики	100	12	15	14	16
18		150	21	17	19	13
19		380	16	11	15	14

Рис. 5.3. Результаты расчета тарифов

Чтобы получить значение целевой функции в ячейке G14, воспользуемся функцией СУММПРОИЗВ. Для этого поместим курсор в ячейку G14, с помощью команды МАСТЕР ФУНКЦИЙ вызовем математическую функцию СУММПРОИЗВ. На экране появится диалоговое окно. В **массив 1** вводим матрицу со значениями переменных, т.е. C3:F5. В **массив 2** введем адрес матрицы коэффициентов целевой функции, т.е. C17:F19 (рис. 5.4). OK. Заметим, что во все диалоговые окна адреса ячеек удобно вводить не с клавиатуры, а протаскивая мышь по нужным ячейкам.

14							=СУММПРОИЗВ(C3:F5;C17:F19)
15	Тарифы+		Потребители				СУММПРОИЗВ(массив1; **[массив2]**; [массив3]; [
16	себестоимость		160	260	50	140	
17	Поставщики	100	12	15	14	16	
18		150	21	17	19	13	
19		380	16	11	15	14	

Рис. 5.4. Ввод выражения для целевой функции

Введем левые части ограничений по поставщикам и потребителям. Для этого в ячейке G3 вводим формулу СУММ и указываем диапазон ячеек C3:F3, затем копируем её вниз по столбцу (рис. 5.5).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Поставки		Потребители				
2			160	260	50	140	
3	Поставщики	100					=СУММ(C3:F3)
4		150					
5		380					
6							

Рис. 5.5. Ввод левых частей ограничений по запасу продукции

В ячейке C6 вводим формулу СУММ и указываем диапазон ячеек C3:C5, затем копируем её вправо по строке (рис. 5.6).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Поставки		Потребители				
2			160	260	50	140	
3	Поставщики	100					0
4		150					0
5		380					0
6			=СУММ(C3:C5)				

Рис. 5.6. Ввод левых частей ограничений по спросу продукции

Решение задачи осуществляется в следующей последовательности.

Командой **Поиск решения** из меню **Сервис** откроем диалоговое окно **Поиск решения** и занесем в него необходимые данные: **Установить целевую ячейку** – адрес ячейки, отведенной под значение целевой функции, т.е. $G$14; **Равной**: – минимальному значению; **Изменяя ячейки** – адреса изменяемых значений переменных, т.е. $C$3:$F$5;

Ограничения – **Добавить…** На экране появится диалоговое окно **Добавление ограничения**. Здесь вводим граничные условия на переменные: $G$3:$G$4 ≤ $B$3:$B$4, **Добавить**, и аналогично вводим ограничения по потребителям и дополнительное ограничение (согласно дополнительному условию п. 2) (рис. 5.7). **ОК.**

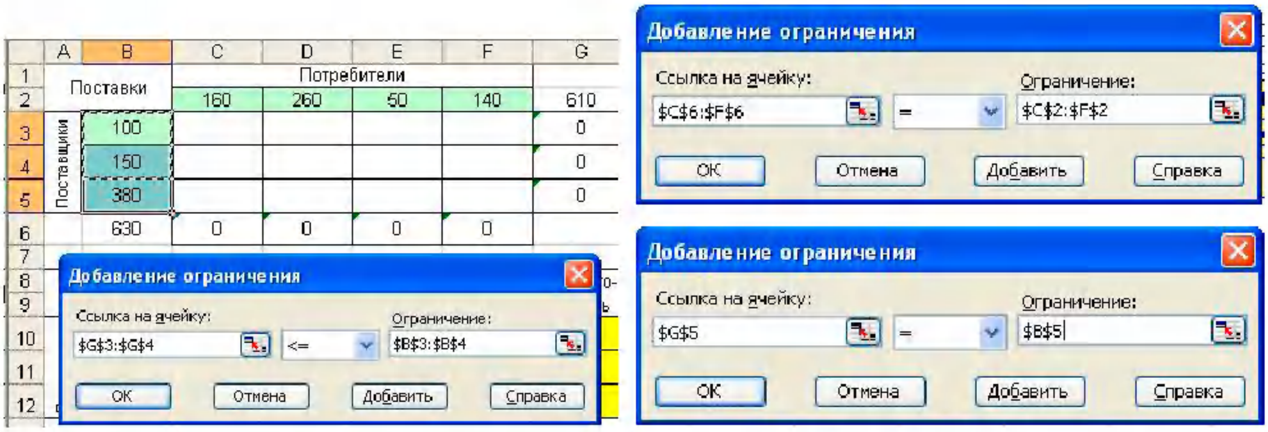


Рис. 5.7. Ввод ограничений задачи

Далее командой **Параметры** вызываем диалоговое окно **Параметры поиска решения** и устанавливаем флажки: **Линейная модель**, **Неотрицательные значения**, **Автоматическое масштабирование**. **ОК**.

Возвращаемся в диалоговое окно **Поиск решения** и, щелкнув по кнопке **Выполнить**, находим оптимальное решение задачи. На экране появляется диалоговое окно **Результаты поиска решения**. **Помечаем** для вывода отчеты **по результатам и по устойчивости**. Результаты расчетов представлены на рис. 5.8.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Поставки		Потребители				
2			160	260	50	140	610
3	Поставщики	100	100	0	0	0	100
4		150	0	0	0	130	130
5		380	60	260	50	10	380
6		630	160	260	50	140	
7							
8	Тарифы		Потребители				Себесто-
9			160	260	50	140	имость
10	Поставщики	100	2	5	4	6	10
11		150	9	5	7	1	12
12		380	8	3	7	6	8
13							
14						ЦФ=	7600

Рис. 5.8. Оптимальное решение задачи

3. Анализ результатов поиска решения.

В итоге мы получили следующее решение: Минимально возможные затраты на производство и доставку продукции составят 7600 ден.ед., если перевозки будут осуществлены согласно плану: $X^* = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 130 \\ 60 & 260 & 50 & 10 \end{pmatrix}$. При таких перевозках у первого поставщика останется 20 единиц продукции.

Дополнительное условие увеличило затраты на 7600 – 7590 = 10 ден.ед. (значение функции равное 7590 получите самостоятельно).

4. Оформление отчета о проделанной работе.

План отчета.

1. Укажите фамилию, имя, название группы, номер варианта.
2. Составьте экономико-математическую модель задачи.
3. Какое получилось оптимальное решение с дополнительным условием и без него? Дайте экономическую интерпретацию полученного оптимального решения.

Лабораторная работа № 6. Двухэтапная транспортная задача.

Литература: [2], [8].

Постановка задачи. В некотором районе имеются m заводов, мощности которых равны a_i единиц $\left(i=\overline{1,m}\right)$. Продукция заводов поступает сначала на склады, пропускная способность которых d_k $\left(k=\overline{1,p}\right)$, а затем n потребителям с потребностями b_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$. Также известны стоимость c_{ik} перевозки единицы продукции от поставщиков на склады и затраты на перевозку z_{kj} со складов к потребителям (табл. 6.1).

Определить оптимальный план перевозки продукции с заводов в пункты потребления через склады, обеспечивающий минимальные суммарные транспортные издержки.

Таблица 6.1

Вариант	Параметры						
	a_i, т	b_j, т	d_k, т	c_{ik}, д.е./т	z_{kj}, д.е./т	s	t
1	220 300 400	230 370 180 220	380 320 400	$\begin{matrix} 16 & 12 & 14 \\ 20 & 10 & 18 \\ 14 & 21 & 16 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6 & 8 & 5 & 2 \\ 5 & 10 & 3 & 1 \\ 8 & 12 & 4 & 2 \end{matrix}$	1	4
2	280 120 320	150 270 180 190	400 200 250	$\begin{matrix} 18 & 16 & 10 \\ 20 & 14 & 12 \\ 16 & 22 & 14 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 12 & 8 & 10 & 6 \\ 14 & 12 & 8 & 10 \\ 6 & 8 & 12 & 4 \end{matrix}$	2	3
3	340 150 110	200 160 130 100	350 450	$\begin{matrix} 14 & 18 \\ 16 & 12 \\ 10 & 14 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 10 & 8 & 6 & 3 \end{matrix}$	3	1
4	200 150 100 250	320 150 180	230 280 200	$\begin{matrix} 4 & 9 & 2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 7 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 20 & 23 & 16 \\ 15 & 10 & 24 \\ 10 & 12 & 18 \end{matrix}$	4	2
5	450 320	220 180 260 140	500 200 300	$\begin{matrix} 16 & 12 & 22 \\ 20 & 14 & 13 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 8 \end{matrix}$	1	3
6	100 200 800	130 170 110 210	240 360 400	$\begin{matrix} 10 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 10 & 12 & 8 & 8 \\ 10 & 14 & 6 & 4 \\ 8 & 12 & 7 & 3 \end{matrix}$	2	4
7	160 240 250 130	200 180 120	390 520	$\begin{matrix} 24 & 15 \\ 22 & 16 \\ 20 & 18 \\ 25 & 21 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6 & 5 & 3 \\ 8 & 4 & 5 \end{matrix}$	3	1
8	180 240 380	350 470	250 350 450	$\begin{matrix} 18 & 20 & 23 \\ 16 & 18 & 25 \\ 20 & 14 & 22 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 16 & 14 \\ 20 & 10 \\ 18 & 12 \end{matrix}$	1	2
9	140 160 220 180	300 400	520 280 100	$\begin{matrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 10 \\ 8 & 5 & 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 26 & 28 \\ 24 & 20 \\ 22 & 18 \end{matrix}$	2	1
10	500 400	330 270 300	200 350 250 300	$\begin{matrix} 16 & 18 & 20 & 24 \\ 14 & 12 & 22 & 18 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 8 & 6 & 4 \\ 10 & 7 & 5 \\ 12 & 8 & 3 \\ 8 & 10 & 3 \end{matrix}$	1	3

Окончание таблицы 6.1

Вариант	Параметры						
	a_i, т	b_j, т	d_k, т	c_{ik}, д.е./т	z_{kj}, д.е./т	s	t
11	170 200 360	300 200 260	290 360 350	23 25 15 20 22 18 18 24 16	6 3 10 8 1 12 5 2 10	2	2
12	245 560 120	250 145 560 450	350 240 160	10 25 15 10 15 10 60 30 15	45 75 86 48 24 56 43 58 34 76 58 47	3	4

Порядок выполнения работы

Пример 6. Имеется 4 предприятия, производящие однородную продукцию в количествах 748, 942, 461 763 единицы, которую необходимо перевезти в 5 магазинов, спрос которых составляет 628, 348, 419, 510 и 128 единиц соответственно. Прямые транспортные коммуникации отсутствуют и поставки осуществляются через 3 склада мощностью 1000 ед. каждый. Известны затраты $c_{ik}, i=\overline{1,4}, k=\overline{1,3}$ на перевозку единицы продукции с предприятий на склады и затраты $z_{kj}, k=\overline{1,3}, j=\overline{1,5}$ на перевозку единицы продукции со складов в магазины (табл. 6.2, 6.3).

Таблица 6.2

Предприятия	Склады		
	S_1	S_2	S_3
A_1	10	12	24
A_2	13	21	18
A_3	15	22	10
A_4	15	19	14

Таблица 6.3

Склады	Магазины				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
S_1	25	26	21	18	19
S_2	15	24	23	20	15
S_3	14	12	18	19	13

Определить оптимальный план перевозок продукции из предприятий в магазины.

1. Подготовительная работа.

Рассчитаем суммарный запас продукции на предприятиях:

748 + 942 + 461 + 763 = 2914 ед.

И суммарный спрос на продукцию:

628 + 348 + 419 + 510 + 128 = 2033 ед.

Т.к. суммарный запас продукции превышает суммарный спрос, то имеем задачу открытого типа. Также заметим, что суммарная мощность складов 3000 ед. позволит перевезти весь объем продукции.

Сформируем сводную транспортную таблицу, объединив два этапа перевозки (рис. 6.1).

	B	C	D	E	F	G	H	I	J
2					Тарифы				
3		S_1	S_2	S_3	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
4	A_1	10	12	24	100	100	100	100	100
5	A_2	13	21	18	100	100	100	100	100
6	A_3	15	22	10	100	100	100	100	100
7	A_4	15	19	14	100	100	100	100	100
8	S_1	0	100	100	25	26	21	18	19
9	S_2	100	0	100	15	24	23	20	15
10	S_3	100	100	0	14	12	18	19	13

Рис. 6.1. Матрица тарифов

В ячейках F4:J7 запишем искусственно завышенные тарифы, т.к. прямых транспортных коммуникаций между предприятиями и магазинами не существует. Также заблокируем завышенными тарифами ячейки, соответствующие перевозкам со склада на склад.

Сформируем таблицу (рис. 6.2) для расчета объемов поставок продукции, также отведем отдельные ячейки для ввода ограничений и целевой функции. В ячейку К14 введем формулу СУММ(C14:J14) и скопируем ее вниз до ячейки К20. Это будут левые части ограничений по запасу продукции на предприятиях. В ячейках C21:J21 запишем формулы суммы поставок по столбцам транспортной таблицы.

В ячейке L22 введем формулу для целевой функции, обозначающей затраты на перевозку продукции.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
12						**Поставки**						
13		S_1	S_2	S_3	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Лев.ч.	Знак	Прав.ч.
14	A_1									0	<=	748
15	A_2									0	<=	942
16	A_3									0	<=	461
17	A_4									0	<=	763
18	S_1									0	<=	1000
19	S_2									0	<=	1000
20	S_3									0	<=	1000
21	Лев.ч	0	0	0	0	0	0	0	0			
22	Знак	=	=	=	=	=	=	=	=	f =	0	min
23	Прав.ч.	1000	1000	1000	628	348	419	510	128			

Рис. 6.2. Матрица поставок продукции

2. Поиск оптимального решения.

Вызываем надстройку ПОИСК РЕШЕНИЯ:

- **Установить целевую ячейку**: L22;
- **Равной**: минимальному значению;
- **Ограничения**: ДОБАВИТЬ K14:K20 <= M14:M20 (т.к. суммарный запас превышает суммарный спрос), ДОБАВИТЬ C21:J21 = C23:J23, **ОК**;
- ПАРАМЕТРЫ: «**Линейная модель**», «**Неотрицательные значения**», «**Автоматическое масштабирование**», ОК.
- ВЫПОЛНИТЬ, вывести «**Отчет по устойчивости**».

В результате получим оптимальное решение (рис. 6.3).

Проанализируем полученное оптимальное решение, отчет по устойчивости и составим отчет о проделанной работе.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
12		Поставки										
13		S_1	S_2	S_3	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Лев.ч.	Знак	Прав.ч.
14	A_1	225	523	0	0	0	0	0	0	748	<=	748
15	A_2	285	0	0	0	0	0	0	0	285	<=	942
16	A_3	0	0	461	0	0	0	0	0	461	<=	461
17	A_4	0	0	539	0	0	0	0	0	539	<=	763
18	S_1	490	0	0	0	0	0	510	0	1000	<=	1000
19	S_2	0	477	0	523	0	0	0	0	1000	<=	1000
20	S_3	0	0	0	105	348	419	0	128	1000	<=	1000
21	Лев.ч	1000	1000	1000	628	348	419	510	128			
22	Знак	=	=	=	=	=	=	=	=	f =	56264	min
23	Прав.ч.	1000	1000	1000	628	348	419	510	128			

Рис. 6.3. Результаты поиска решения

3. Оформление отчета о проделанной работе.

План отчета.

1. Укажите фамилию, имя, название группы, номер варианта.
2. Запишите модель, по которой производились расчеты и полученное оптимальное решение.
3. По каким маршрутам и в каком объеме следует перевозить продукцию? Насколько будут загружены склады? Какие при этом будут суммарные затраты?
4. Как изменятся минимальные затраты, если запас *s*-го поставщика и спрос *t*-го потребителя увеличатся на 1 единицу? (значения *s*, *t* даны в условии вариантов).

Лабораторная работа № 7. Транспортная задача в сетевой постановке

Литература: [7].

Постановка задачи 1. На трех железнодорожных станциях A_1, A_4, A_5 имеются пустые вагоны, которые необходимо перегнать под погрузку к станциям A_2, A_7. Имеется сеть железных дорог. Предполагается, что движение по всем дорогам одностороннее. Железнодорожные станции A_3, A_6 являются промежуточными, в которых меняется стоимость перегона одного вагона. Известно количество вагонов, имеющихся на станциях A_1, A_4, A_5 и необходимых на станциях A_2, A_7 (спрос (?) и предложение (+) в дес. шт.) и стоимость c_{ij} перегона одного вагона между соответствующими железнодорожными станциями (табл. 7.1).

Таблица 7.1

Парамстры	Номер варианта									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A_1 (+)	10	3	4	15	8	10	20	3	4	6
A_2 (?)	5	7	6	4	7	4	2	4	5	7
A_4 (+)	4	10	12	6	10	1	2	3	7	4
A_5 (+)	6	2	4	4	12	3	5	1	4	12
A_7 (?)	15	8	14	21	23	10	25	3	10	15
c_{12}	4	10	5	7	8	5	6	3	3	5
c_{13}	2	9	6	2	7	5	4	2	2	6
c_{25}	4	1	3	4	5	4	3	10	1	7
c_{26}	3	10	8	1	4	3	2	7	1	8
c_{32}	4	2	7	1	3	2	10	6	4	9
c_{36}	2	5	5	5	2	4	8	5	5	3
c_{41}	4	7	7	6	1	3	7	4	6	2
c_{43}	5	2	6	4	6	5	6	4	5	1
c_{56}	2	6	2	8	4	7	4	8	8	1
c_{57}	4	5	1	7	9	10	3	10	10	8
c_{64}	7	4	5	5	1	1	5	1	10	7
c_{67}	3	3	4	3	4	8	3	8	10	6

Окончание таблицы 7.1

Параметры	Номср варианта									
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
A_1 (+)	7	3	11	16	22	9	19	8	13	12
A_2 (?)	3	7	4	8	32	16	20	18	4	12
A_4 (+)	3	1	4	8	11	12	15	20	4	1
A_5 (+)	2	7	9	2	11	3	12	4	2	9
A_7 (?)	9	4	20	18	12	8	26	14	15	10
c_{12}	4	3	10	8	1	4	2	5	6	1
c_{13}	2	9	3	4	2	3	1	2	3	3
c_{25}	3	4	2	4	5	2	4	7	3	1
c_{26}	9	10	2	5	7	2	6	2	5	4
c_{32}	7	2	4	1	1	5	6	4	2	4
c_{36}	8	7	5	4	3	2	1	6	4	9
c_{41}	5	5	4	3	2	4	3	5	7	10
c_{43}	6	4	3	2	10	8	7	6	4	3
c_{56}	3	2	10	7	6	5	4	4	8	10
c_{57}	3	2	1	1	4	5	6	5	8	10
c_{64}	5	6	7	8	9	3	2	1	1	8
c_{67}	10	6	4	4	2	8	4	5	1	2

Требуется:

1. построить графическую интерпретацию (сеть дорог) по данным задачи;
2. составить математическую модель задачи для определения количества и путей перегона вагонов с минимальными издержками;
3. решить задачу и дать полный экономический анализ полученных результатов;
4. решить задачу с условием того, что потребности станции A_7 в вагонах уменьшатся на 2 дес.шт.

Постановка задачи 2. В пунктах A_1, A_4, A_5 хранится уголь (данные приведены в таблице 7.2 в тыс. т). В пунктах A_2, A_7 уголь требуется для работы ТЭЦ. Необходимое количество угля для этих ТЭЦ также приведено в таблице 7.2. Движение по всем дорогам одностороннее. Известна также стоимость перевозки 1 т угля по каждому пути (табл. 7.2).

Таблица 7.2

Парамстры	Номер варианта									
	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
A_1 (+)	8	1	2	13	6	8	18	1	2	4
A_2 (?)	5	7	6	4	7	4	2	4	5	7
A_4 (+)	4	10	12	6	10	1	2	3	7	4
A_5 (+)	6	2	4	4	12	3	5	1	4	12
A_7 (?)	15	8	14	21	23	10	25	3	10	15
c_{12}	4	10	5	7	8	5	6	3	3	5
c_{13}	2	9	6	2	7	5	4	2	2	6
c_{25}	4	1	3	4	5	4	3	10	1	7
c_{26}	3	10	8	1	4	3	2	7	1	8
c_{32}	4	2	7	1	3	2	10	6	4	9
c_{36}	2	5	5	5	2	4	8	5	5	3
c_{41}	4	7	7	6	1	3	7	4	6	2
c_{43}	5	2	6	4	6	5	6	4	5	1
c_{46}	2	6	2	8	4	7	4	8	8	1
c_{56}	4	5	1	7	9	10	3	10	10	8
c_{57}	7	4	5	5	1	1	5	1	10	7
c_{67}	3	3	4	3	4	8	3	8	10	6

Продолжение таблицы 7.2

Парамстры	Номер варианта									
	31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
A_1 (+)	5	1	9	14	20	7	17	6	11	10
A_2 (?)	3	7	4	8	32	16	20	18	4	12
A_1 (+)	3	1	4	8	11	12	15	20	4	1
A_5 (+)	2	7	9	2	11	3	12	4	2	9
A_7 (?)	9	4	20	18	12	8	26	14	15	10

Окончание таблицы 7.2

Параметры	Номер варианта									
	31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
c_{12}	4	3	10	8	1	4	2	5	6	1
c_{13}	2	9	3	4	2	3	1	2	3	3
c_{25}	3	4	2	4	5	2	4	7	3	1
c_{26}	9	10	2	5	7	2	6	2	5	4
c_{32}	7	2	4	1	1	5	6	4	2	4
c_{36}	8	7	5	4	3	2	1	6	4	9
c_{41}	5	5	4	3	2	4	3	5	7	10
c_{43}	6	4	3	2	10	8	7	6	4	3
c_{46}	3	2	10	7	6	5	4	4	8	10
c_{56}	3	2	1	1	4	5	6	5	8	10
c_{57}	5	6	7	8	9	3	2	1	1	8
c_{67}	10	6	4	4	2	8	4	5	1	2

Требуется:

1. построить графическую интерпретацию (сеть дорог) по данным задачи;
2. составить математическую модель задачи для того, чтобы определить пути доставки и количество угля, перевозимого по этим путям с минимальными суммарными затратами на перевозку;
3. решить задачу и дать полный экономический анализ полученных результатов;
4. решить задачу с условием того, что потребности пункта A_7 в угле на 1,5 тыс.т. меньше, чем указано в таблице 7.2.

Порядок выполнения работы

Пример 7. Имеются два пункта A_1 и A_2 производства некоторого товара, причем в пункте A_1 этого товара сосредоточено 10 ед., в пункте A_2 — 5 ед. В пунктах A_3 и A_4 этот товар потребляется. Потребности пунктов A_3 и A_4 составляют соответственно 8 и 7 ед. Доставить этот товар от производителей к потребителям можно различными путями. Имеются ещё два промежуточных пункта A_5 и A_6, в которых возможна смена транспорта. Стоимости перевозок единицы товара из одного пункта в другой указаны в следующей таблице.

Таблица 7.1

Направление пути	$A_1 \to A_2$	$A_1 \to A_5$	$A_2 \to A_3$	$A_2 \to A_6$	$A_3 \to A_4$	$A_5 \to A_2$	$A_5 \to A_3$	$A_6 \to A_3$	$A_6 \to A_4$
Стоимость перевозки (ден.ед.)	5	4	2	1	2	2	3	3	3

Требуется доставить товар от производителей к потребителям с минимальными суммарными транспортными расходами.

1. Построение экономико-математической модели.

Построим сетевой график транспортной задачи, указав на графике все данные (рис. 7.1).

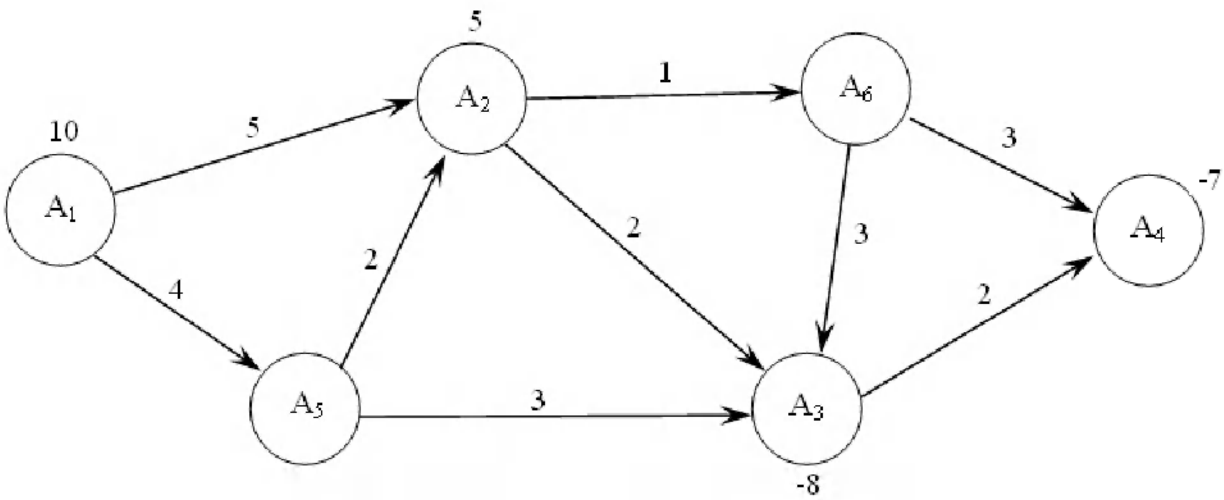


Рис. 7.1. Сеть дорог между пунктами

Составим математическую модель сформулированной задачи. Обозначим через x_{ij} количество товара, перевозимого по пути $A_i \to A_j$. Тогда, исходя из данных таблицы, стоимость перевозки товара из пункта A_1 в пункт A_2 равна $5x_{12}$, из A_1 в A_5 – $4x_{15}$ и т.д. Суммарная стоимость транспортных расходов будет равна

$$f(x) = 5x_{12} + 4x_{15} + 2x_{52} + x_{26} + 2x_{23} + 3x_{53} + 3x_{63} + 3x_{64} + 2x_{34} \text{ (min)}. \qquad (1)$$

В данной функции $x = (x_{12}, x_{15}, x_{52}, x_{26}, x_{23}, x_{53}, x_{63}, x_{64}, x_{34})$. Отразим в модели ограничения на переменные x_{ij}. Поскольку от производителя A_1 весь товар должен быть вывезен, то имеем

$$x_{12} + x_{15} = 10. \qquad (2)$$

Теперь в пунктах A_2 и A_5 будет сосредоточено товара соответственно $5 + x_{12}$ и x_{15}. Но пункт A_5 является промежуточным, в котором товар не требуется, поэтому он должен быть вывезен, т.е. согласно данным таблицы получим

$$x_{52} + x_{53} = x_{15}. \qquad (3)$$

С учетом (2) и (3) в пункте A_2 объем товара увеличится и станет равным $5 + x_{12} + x_{52}$. Весь этот товар должен быть вывезен. Таким образом, с учетом путей, указанных в таблице будем иметь

$$x_{23} + x_{26} = 5 + x_{12} + x_{52}. \qquad (4)$$

Остальные ограничения составьте самостоятельно.

Как следует из составленных выше уравнений, для каждого из пунктов A_i суммарное количество привезенного в этот пункт товара и произведенного в нем соответствует суммарному количеству вывезенного из этого пункта товара и потребленного в нем. Эти условия называют условиями баланса для каждого из пунктов. В нашем случае спрос равен предложению: $10 + 5 = 8 + 7$. В результате получим следующую модель задачи:

$$f = 5x_{12} + 4x_{15} + 2x_{52} + x_{26} + 2x_{23} + 3x_{53} + 3x_{63} + 3x_{64} + 2x_{34} (\min)$$

$$\begin{cases} x_{12} + x_{15} = 10; \\ x_{52} + x_{53} = x_{15}; \\ x_{23} + x_{26} = 5 + x_{12} + x_{52}; \\ x_{26} = x_{63} + x_{64}; \\ x_{63} + x_{23} + x_{53} = x_{34} + 8; \\ x_{64} + x_{34} = 7; \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

2. Решение задачи средствами Excel.

Сделаем форму и введем исходные данные (рис. 7.2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Переменные											
2		x12	x15	x23	x26	x34	x52	x53	x63	x64			
3	значение										лев. часть	знак	прав.часть
4	вершина А1	1	1									=	10
5	вершина А5		1				-1	-1				=	0
6	вершина А2	-1		1	1		-1					=	5
7	вершина А6				1				-1	-1		=	0
8	вершина А3			1		-1		1	1			=	8
9	вершина А4					1				1		=	7
10	коэф. ЦФ	5	4	2	1	2	2	3	3	3			

Рис. 7.2. Исходные данные модели

Чтобы получить значение целевой функции в ячейке К10, воспользуемся функцией СУММПРОИЗВ. Для этого поместим курсор в ячейку К10, с помощью команды МАСТЕР ФУНКЦИЙ вызовем математическую функцию СУММПРОИЗВ. На экране появится диалоговое окно. В массив 1 вводим строку со значениями переменных, т.е. $B$3:$J$3 (знак $ ставим для того, чтобы адрес не менялся при копировании формул). В массив 2 введем адрес строки коэффициентов целевой функции, т.е. B10:J10 (рис. 7.3). ОК. Заметим, что во все диалоговые окна адреса ячеек удобно вводить не с клавиатуры, а протаскивая мышь по ячейкам, чьи адреса следует ввести.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Переменные											
2		x12	x15	x23	x26	x34	x52	x53	x63	x64			
3	значение										лев. часть	знак	прав.часть
4	вершина А1	1	1									=	10
5	вершина А5		1				-1	-1				=	0
6	вершина А2	-1		1	1		-1					=	5
7	вершина А6				1				-1	-1		=	0
8	вершина А3			1		-1		1	1			=	8
9	вершина А4					1				1		=	7
10	коэф. ЦФ	5	4	2	1	2	2	3	3	3	=СУММПРОИЗВ($B$3:$J$3;B10:J10)		

Рис. 7.3. Ввод целевой функции

Далее копируем формулу из ячейки К10 в столбец «Левые части ограничений», протаскивая формулу вверх (рис. 7.4).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Переменные											
2		x12	x15	x23	x26	x34	x52	x53	x63	x64			
3	значение										лев. часть	знак	прав.часть
4	вершина A1	1	1								0	=	10
5	вершина A5		1				-1	-1			0	=	0
6	вершина A2	-1		1	1		-1				0	=	5
7	вершина A6				1				-1	-1	0	=	0
8	вершина A3			1		-1		1	1		0	=	8
9	вершина A4					1				1	0	=	7
10	коэф. ЦФ	5	4	2	1	2	2	3	3	3	0		

Рис. 7.4. Ввод левых частей ограничений

Решение задачи осуществляется в следующей последовательности. Командой **Поиск решения** из меню **Сервис** откроем диалоговое окно **Поиск решения** и занесем в него необходимые данные: **Установить целевую ячейку** – адрес ячейки, отведенной под значение целевой функции, т.е. **К10**; **Равной**: – минимальному значению; **Изменяя ячейки** – адреса изменяемых значений переменных, т.е. $B$3:$J$3 (рис. 7.5).

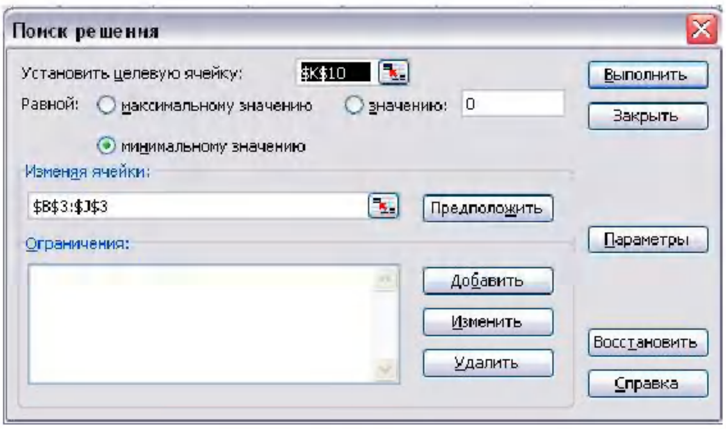


Рис. 7.5. Меню команды ПОИСК РЕШЕНИЯ

Ограничения – Добавить…

На экране появится диалоговое окно **Добавление ограничения** (рис. 7.6).

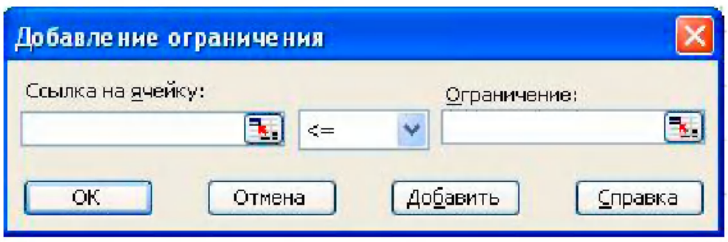


Рис. 7.6. Добавление ограничений

Здесь вводим граничные условия на переменные: $K$4:$K$9 = $M$4:$M$9, ОК.

Далее командой **Параметры** вызываем диалоговое окно **Параметры поиска решения** и устанавливаем флажки: **Линейная модель**, **Неотрицательные значения**, **Автоматическое масштабирование** (рис. 7.7). ОК.

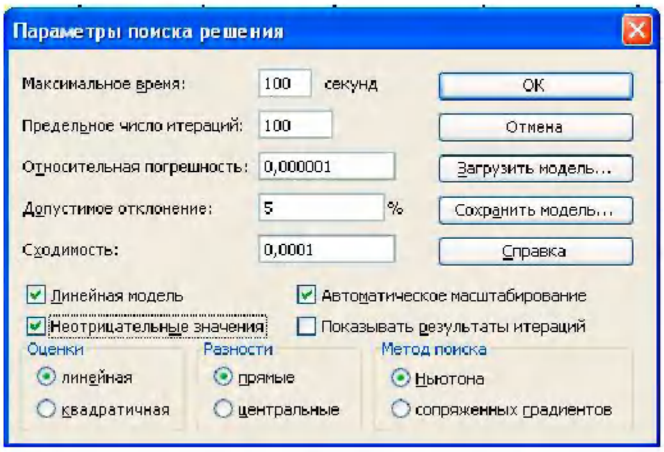


Рис. 7.7. Меню команды ПАРАМЕТРЫ ПОИСКА РЕШЕНИЯ

Возвращаемся в диалоговое окно **Поиск решения** и, щелкнув по кнопке **Выполнить**, находим оптимальное решение задачи. На экране появится диалоговое окно **Результаты поиска решения**. Помечаем для вывода отчеты: **по результатам, по устойчивости** (рис. 7.8).

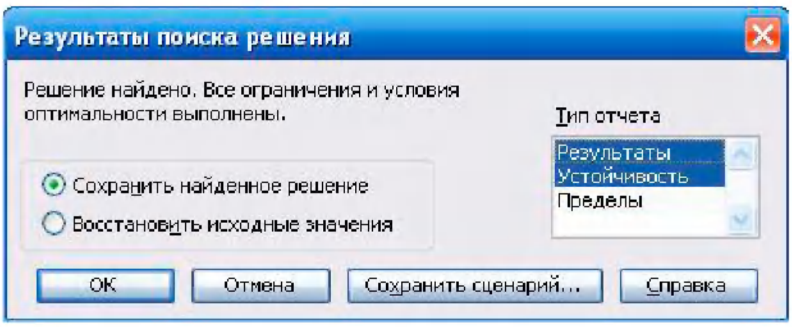


Рис. 7.8. Результаты поиска решения

Результаты оптимального решения представлены на рис. 7.9.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Переменные											
2		x12	x15	x23	x26	x34	x52	x53	x63	x64			
3	значение	10	0	8	7	0	0	0	0	7	лев. часть	знак	прав.часть
4	вершина А1	1	1								10	=	10
5	вершина А5		1				-1	-1			0	=	0
6	вершина А2	-1		1	1		-1				5	=	5
7	вершина А6				1				-1	-1	0	=	0
8	вершина А3			1		-1		1	1		8	=	8
9	вершина А4					1				1	7	=	7
10	коэф. ЦФ	5	4	2	1	2	2	3	3	3	94		

Рис. 7.9. Результаты поиска решения.

Таким образом, минимальные затраты на перевозку составят 94 ден.ед. если товар будем доставлять согласно схемы, представленной на рис. 7.10.

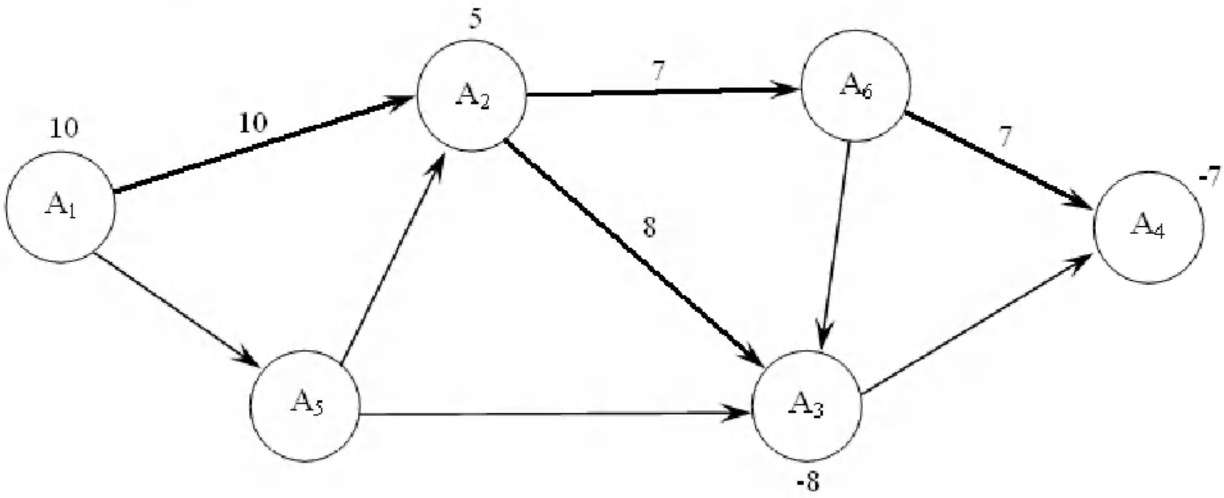


Рис. 7.10. Схема оптимального плана перевозки

3. Оформление отчета о проделанной работе.

План отчета.

1. Укажите фамилию, имя, название группы, номер варианта.
2. Постройте экономико-математическую модель задачи.
3. Укажите полученное оптимальное решение и дайте его экономическую интерпретацию. Постройте схему перевозки груза.
4. Дайте экономическую интерпретацию оптимального плана двойственной задачи. Как изменятся суммарные транспортные издержки при дополнительном условии, что потребность станции A_7 будет на 2 вагона меньше. Изменится ли при этом план перевозки вагонов?

Лабораторная работа № 8. Многокритериальная оптимизация

Литература: [1].

Постановка задачи. Определить план производства продукции двух видов, максимизирующий прибыль и выручку, если известны цена единицы продукции c_1, c_2, затраты на производство единицы продукции z_1, z_2, расход ресурса i-го вида на единицу продукции j-го вида a_{ij}, запасы ресурсов b_j (табл. 8.1).

1. Решить методом равных наименьших относительных отклонений.
2. Решить методом последовательных уступок, если уступка по критерию прибыли составляет P% от ее максимального значения.

Таблица 8.1

Параметры	Номер варианта											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
c_1	25	13	43	112	100	202	43	15	20	30	10	13
c_2	44	18	29	158	123	318	67	47	28	10	25	45
z_1	20	8	35	100	84	144	34	8	15	29	9	8
z_2	42	16	10	150	117	298	60	40	18	8	24	43
a_{11}	3	22	14	27	54	27	34	7	2	7	5	2
a_{12}	2	18	18	34	26	15	11	14	2	18	7	3
a_{21}	4	16	26	51	34	24	22	9	0,4	8	3	11
a_{22}	5	25	15	34	43	34	30	3	0,6	4	2,5	4
b_1	50	396	252	347	512	346	516	437	420	618	350	80
b_2	40	400	350	563	412	453	751	212	90	313	180	360
P	15%	9%	10%	4%	2%	7%	1%	5%	3%	6%	9%	18%

Порядок выполнения работы

Пример 8. Дана модель:

$$F = \{f_1 = x_1 + 3x_2; f_2 = 40x_1 + 10x_2\} \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 90; \\ x_1 + x_2 \le 60; \\ \qquad x_2 \le 50; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$$

1. Решить задачу методом равных наименьших относительных отклонений.

2. Решить методом последовательных уступок, если уступка по первому критерию составляет 10% от его максимального значения.

1. Подготовительная работа.

Составьте модель по условию своего варианта. Введите исходные данные в электронные таблицы Excel (рис. 8.1).

	A	B	C	D	E	F
1		x_1	x_2			
2	Переменные					
3				Значение		
4	f_1 =	1	3	0	*max*	
5	f_2 =	40	10	0	*max*	
6						
7				Левая часть	Знак	Правая часть
8	Ограничение 1	2	1	0	<=	90
9	Ограничение 2	1	1	0	<=	60
10	Ограничение 3	0	1	0	<=	50

Рис. 8.1. Исходная форма

В ячейки D4:D5 запишем формулы для расчета целевых функций, используем встроенную функцию СУММПРОИЗВ. Эту же функцию используем для расчета левых частей ограничений в ячейках D8:D10.

2. Решение задачи методом равных наименьших относительных отклонений.

Вызовем команду ПОИСК РЕШЕНИЯ из меню СЕРВИС (рис. 8.2) и найдем оптимальное решение по первому критерию. Не забудем выставить ПАРАМЕТРЫ: «Линейная модель», «Неотрицательные значения», «Автоматическое масштабирование».

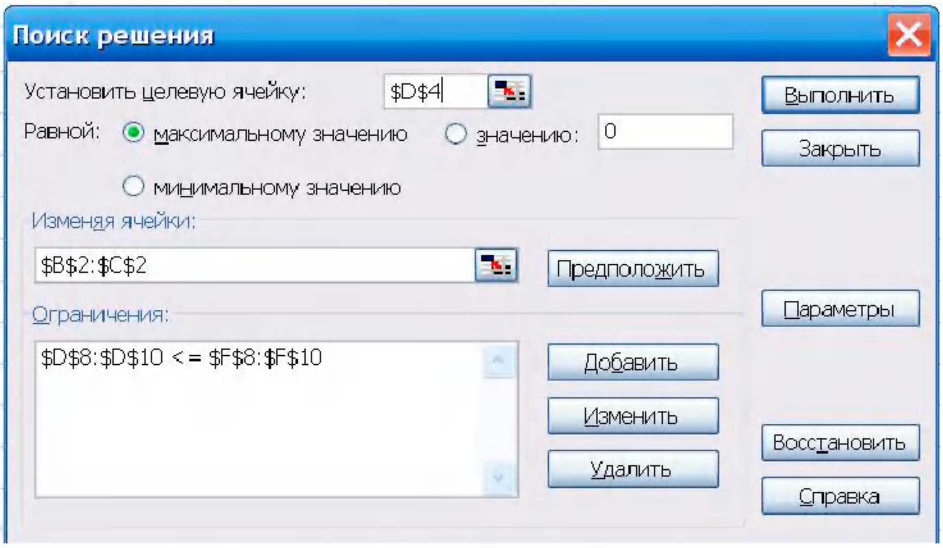


Рис. 8.2. Меню ПОИСК РЕШЕНИЯ

Найденное оптимальное решение скопируем в отдельные ячейки при помощи функции СПЕЦИАЛЬНАЯ ВСТАВКА. Для этого скопируем значение ячейки D4, выделим ячейку H4 и вызовем меню ПРАВКА – СПЕЦИАЛЬНАЯ ВСТАВКА – ЗНАЧЕНИЯ. В ячейки I4:J4 скопируем значения переменных оптимального по первому критерию решения (рис. 8.3).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		x_1	x_2							
2	Переменные	10	50							
3				Значение					x_1	x_2
4	f_1 =	1	3	160	*max*		$f_{1\ max}$ =	160	10	50
5	f_2 =	40	10	900	*max*					
6										
7				Левая часть	Знак	Правая часть				
8	Ограничение 1	2	1	70	<=	90				
9	Ограничение 2	1	1	60	<=	60				
10	Ограничение 3	0	1	50	<=	50				

Рис. 8.3. Оптимальное решение по первому критерию

Далее найдем оптимальное решение по второму критерию. В меню ПОИСК РЕШЕНИЯ установим адрес целевой ячейки D5. Найденное оптимальное решение аналогично скопируем при помощи специальной вставки (рис. 8.4).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		x_1	x_2							
2	Переменные	45	0							
3				Значение					x_1	x_2
4	f_1 =	1	3	45	*max*		$f_{1\,max}$ =	160	10	50
5	f_2 =	40	10	1800	*max*		$f_{2\,max}$ =	1800	45	0
6										
7				Левая часть	Знак	Правая часть				
8	Ограничение 1	2	1	90	<=	90				
9	Ограничение 2	1	1	45	<=	60				
10	Ограничение 3	0	1	0	<=	50				

Рис. 8.4. Оптимальное решение по второму критерию

Добавим в систему новое ограничение, которое в общем виде должно иметь вид:

$$\frac{f_1^* - f_1}{f_1^*} = \frac{f_2^* - f_2}{f_2^*}. \qquad (8.1)$$

Для условий предложенного примера оно будет выглядеть так:

$$\frac{160 - x_1 - 3x_2}{160} = \frac{1800 - 40x_1 - 10x_2}{1800} \text{ или } \frac{160 - x_1 - 3x_2}{160} - \frac{1800 - 40x_1 - 10x_2}{1800} = 0\,.$$

Запишем в ячейке F4 формулу, представляющую собой первую дробь F4 = (H4 – D4)/H4. И в ячейке F5 – формулу для второй дроби: F5 = (H5 – D5)/H5. Разность поместим в ячейку D11 = F4 – F5 (рис. 8.5).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		x_1	x_2							
2	Переменные	45	0							
3				Значение		Функция ρ			x_1	x_2
4	f_1 =	1	3	45	*max*	0,71875	$f_{1\,max}$ =	160	10	50
5	f_2 =	40	10	1800	*max*	0	$f_{2\,max}$ =	1800	45	0
6										
7				Левая часть	Знак	Правая часть				
8	Ограничение 1	2	1	90	<=	90				
9	Ограничение 2	1	1	45	<=	60				
10	Ограничение 3	0	1	0	<=	50				
11	Ограничение 4			0,71875	=	0				

Рис. 8.5 Добавление дополнительного ограничения

Преобразованная модель должна иметь вид:

$$\rho = \frac{160 - x_1 - 3x_2}{160} \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 90; \\ x_1 + x_2 \le 60; \\ \quad x_2 \le 50; \\ \dfrac{160 - x_1 - 3x_2}{160} = \dfrac{1800 - 40x_1 - 10x_2}{1800} \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$$

Теперь снова вызываем функцию ПОИСК РЕШЕНИЯ и в качестве целевой ячейки выставляем либо F4, либо F5, не забудем изменить характер функции (равной: минимальному значению) и добавляем дополнительное ограничение: D11 = 0 (рис. 8.6).

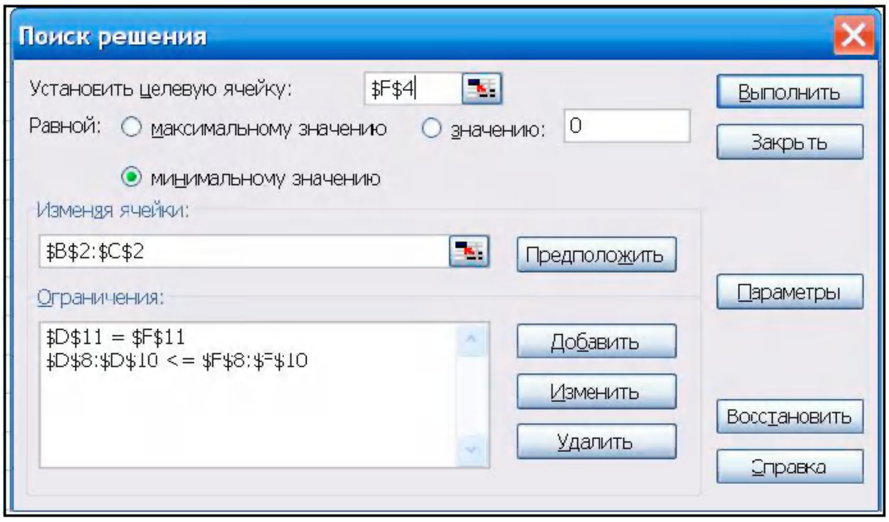


Рис. 8.6. Меню ПОИСК РЕШЕНИЯ

ВЫПОЛНИМ расчеты по модели и получим компромиссное решение, рассчитанное методом равных наименьших относительных отклонений (рис. 8.7).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		x_1	x_2							
2	Переменные	27,14286	32,85714							
3				Значение		Функция ρ			x_1	x_2
4	f_1 =	1	3	125,7143	*max*	0,214286	$f_{1\,max}$ =	160	10	50
5	f_2 =	40	10	1414,286	*max*	0,214286	$f_{2\,max}$ =	1800	45	0
6										
7				Левая часть	Знак	Правая часть				
8	Ограничение 1	2	1	87,14286	<=	90				
9	Ограничение 2	1	1	60	<=	60				
10	Ограничение 3	0	1	32,85714	<=	50				
11	Ограничение 4			1,21E-10	=	0				

Рис. 8.7. Компромиссное решение

Начнем оформлять отчет о проделанной работе. Ответим на вопросы 1 – 4.

3. Решение задачи методом последовательных уступок.

Согласно условиям примера необходимо найти компромиссное решение методом последовательных уступок, если уступка по первому критерию составляет 10% от его максимального значения. Рассчитаем уступку по первому критерию $\Delta f_1 = 160 \cdot 10\% = 16$. Целевая функция f_1 переходит в разряд ограничений, поэтому модель задачи будет иметь вид:

$$f_2 = 40x_1 + 10x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 90; \\ x_1 + x_2 \le 60; \\ \qquad x_2 \le 50; \\ x_1 + 3x_2 \ge 160 - 16 = 144 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$$

В меню ПОИСК РЕШЕНИЯ изменим входные данные, чтобы найти решение по данной модели. Целевая ячейка: D5, равная: максимальному значению, УДАЛИТЬ ограничение: D11 = 0, ДОБАВИТЬ ограничение D4 ≥ 144. ВЫПОЛНИТЬ.

Полученное решение отразим в отчете.

4. Оформление отчета.

План отчета.

1. Запишите фамилию, имя, название группы, номер варианта.
2. Запишите модель задачи. Обязательно прокомментируйте экономический смысл переменных и критериев оптимальности.
3. Запишите оптимальное решение по первому критерию. Дайте его экономическую интерпретацию.
4. Запишите оптимальное решение по второму критерию. Дайте его экономическую интерпретацию.
5. Запишите компромиссное решение, полученное методом равных наименьших относительных отклонений. Сколько следует выпускать продукции каждого вида, чему при этом будут равны прибыль и выручка? На сколько процентов полученная прибыль и выручка оказывается меньше их оптимального значения?
6. Запишите оптимальное решение, полученное методом последовательных уступок. Дайте его экономическую интерпретацию. На сколько процентов выручка оказалась меньше оптимальной?
7. Сравните компромиссные решения, полученные разными методами. Какое из них, по вашему мнению, более предпочтительно?
8. Изобразите графически область компромиссов решенной задачи.

Тема 2. Балансовые модели в экономике

Лабораторная работа № 9. Построение межотраслевого баланса на плановый период

Литература: [1], [2], [3], [8].

Постановка задачи. Для пяти отраслей (промышленность, сельское хозяйство, прочие отрасли материального производства, торговля, прочие отрасли сферы услуг) за отчетный период известны межотраслевые потоки x_{ij} и вектор объемов конечного использования $\vec{y}_{отч}$. Предполагая, что в плановом периоде технология производства останется неизменной, требуется Составить схему планового межотраслевого баланса, если известен вектор конечного использования $\vec{y}_{пл}$.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Вариант 1.

Отрасли	Межотраслевые потоки					$\vec{y}_{отч}$	$\vec{y}_{пл}$
	1	2	3	4	5		
1	57	56	91	75	23	183	246
2	25	28	53	88	37	120	110
3	34	98	75	46	94	55	75
4	65	76	46	60	23	181	192
5	27	30	73	24	36	91	110
$k = 1$	$s = 3$						

Вариант 2.

Отрасли	Межотраслевые потоки					$\vec{y}_{отч}$	$\vec{y}_{пл}$
	1	2	3	4	5		
1	78	68	27	64	47	173	215
2	45	45	36	96	34	88	90
3	56	63	74	28	16	83	156
4	56	27	70	49	48	109	88
5	65	94	54	94	13	100	94
$k = 2$	$s = 5$						

Вариант 3.

Отрасли	Межотраслевые потоки					$\vec{y}_{отч}$	$\vec{y}_{пл}$
	1	2	3	4	5		
1	87	30	32	48	85	189	165
2	55	37	30	20	26	123	112
3	24	80	19	47	96	163	144
4	36	71	88	65	23	97	95
5	70	53	52	96	98	65	71
$k = 5$	$s = 1$						

Вариант 4.

Отрасли	Межотраслевые потоки					$\vec{y}_{отч}$	$\vec{y}_{пл}$
	1	2	3	4	5		
1	82	22	20	65	29	160	140
2	32	82	71	25	88	66	126
3	97	82	58	72	48	137	149
4	69	14	82	55	13	181	203
5	22	94	10	54	45	134	144
$k = 3$	$s = 4$						

Вариант 7.

Отрасли	Межотраслевые потоки					$\vec{y}_{отч}$	$\vec{y}_{пл}$
	1	2	3	4	5		
1	12	66	15	58	22	172	215
2	85	98	59	39	31	147	155
3	53	65	34	66	97	158	168
4	68	42	64	46	18	158	194
5	60	42	58	73	89	65	105
$k = 2$	$s = 4$						

Вариант 8.

Отрасли	Межотраслевые потоки					$\vec{y}_{отч}$	$\vec{y}_{пл}$
	1	2	3	4	5		
1	12	44	40	18	65	80	165
2	45	27	97	15	18	147	124
3	45	22	79	56	87	61	92
4	73	78	73	11	81	64	89
5	32	72	30	70	70	82	115
$k = 4$	$s = 3$						

Вариант 9.

Отрасли	Межотраслевые потоки					$\vec{y}_{отч}$	$\vec{y}_{пл}$
	1	2	3	4	5		
1	29	52	29	25	21	134	121
2	50	20	35	16	49	193	149
3	17	30	31	32	84	193	154
4	87	43	45	41	58	76	94
5	55	39	49	15	54	174	125
$k = 2$	$s = 1$						

Вариант 10.

Отрасли	Межотраслевые потоки					$\vec{y}_{отч}$	$\vec{y}_{пл}$
	1	2	3	4	5		
1	62	53	14	97	69	109	137
2	15	17	90	73	68	142	112
3	39	40	38	36	91	114	96
4	89	74	88	96	34	77	64
5	90	22	67	84	79	72	83
$k = 3$	$s = 5$						

Вариант 5.

Отрасли	Межотраслевые потоки					$\vec{y}_{отч}$	$\vec{y}_{пл}$
	1	2	3	4	5		
1	15	22	16	82	15	150	167
2	12	19	68	56	55	190	184
3	55	89	62	12	16	80	112
4	98	16	78	82	82	107	97
5	66	47	12	21	51	75	86
$k = 4$	$s = 2$						

Вариант 11.

Отрасли	Межотраслевые потоки					$\vec{y}_{отч}$	$\vec{y}_{пл}$
	1	2	3	4	5		
1	68	86	39	51	47	68	98
2	72	94	49	30	57	159	146
3	14	79	27	83	51	57	64
4	68	37	40	42	47	133	124
5	71	87	40	75	92	148	90
$k = 5$	$s = 2$						

Вариант 6.

Отрасли	Межотраслевые потоки					$\vec{y}_{отч}$	$\vec{y}_{пл}$
	1	2	3	4	5		
1	89	30	92	26	14	197	154
2	48	12	93	25	57	177	143
3	58	54	69	49	51	152	116
4	73	64	65	87	94	168	137
5	83	27	89	27	98	161	149
$k = 1$	$s = 5$						

Вариант 12.

Отрасли	Межотраслевые потоки					$\vec{y}_{отч}$	$\vec{y}_{пл}$
	1	2	3	4	5		
1	14	20	57	17	30	186	151
2	40	55	18	67	37	55	79
3	45	85	77	15	51	62	65
4	45	38	35	41	14	111	84
5	79	17	12	71	50	200	142
$k = 2$	$s = 3$						

Порядок выполнения работы

Пример 9. Для пяти отраслей (промышленность, сельское хозяйство, прочие отрасли материального производства, торговля, прочие отрасли сферы услуг) за отчетный период известны межотраслевые потоки x_{ij} и вектор объемов конечного использования $\vec{y}_{отч}$ (табл. 9.1). Предполагая, что в плановом периоде технология производства останется неизменной, требуется составить схему планового межотраслевого баланса, если известен вектор конечного использования $\vec{y}_{пл}$.

Таблица 9.1

Отрасли	Межотраслевые потоки					$\vec{y}_{отч}$	$\vec{y}_{пл}$
	1	2	3	4	5		
1	53	28	91	49	45	189	153
2	35	57	99	78	83	74	95
3	31	72	41	19	65	144	132
4	40	61	44	85	50	133	162
5	63	45	23	32	65	158	94
$k = 4$	$p = 60\%$						

1. Подготовительная работа.

Сформируем рабочую таблицу «Отчетный МОБ» (рис. 9.1) и занесем в нее данные межотраслевых потоков и конечного использования по отраслям.

Элементы столбца ПП (промежуточное потребление) рассчитаем по формуле $\sum_{j=1}^{5} x_{ij}$. Для этого курсор помещаем в ячейку G4 столбца ПП и вызываем функцию СУММ из меню ВСТАВКА – ФУНКЦИЯ – МАТЕМАТИЧЕСКИЕ. В качестве аргумента берем элементы межотраслевых потоков первой строки. Затем копируем эту формулу в остальные ячейки столбца ПП. Далее рассчитываем элементы столбца ВВ (валовой выпуск) по формуле: ВВ = ПП + КИ. В ячейке I4 вводим формулу I4 = G4 + H4. Затем копируем введенную формулу в ячейки I5:I8, аналогично столбцу ПП.

Строка ПЗ (промежуточные затраты) формируется суммированием межотраслевых потоков по столбцам: B9 = СУММ(B4:B8) и т.д.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Отчетный МОБ**								
2	Отрасли-	Отрасли-потребители					ПП	КИ	ВВ
3	производители	1	2	3	4	5			
4	1	53	28	91	49	45	266	189	455
5	2	35	57	99	78	83	352	74	426
6	3	31	72	41	19	65	228	144	372
7	4	40	61	44	85	50	280	133	413
8	5	63	45	23	32	65	228	158	386
9	ПЗ	222	263	298	263	308	1354	698	2052
10	ВДС	233	163	74	150	78	698		
11	ВЗ	455	426	372	413	386	2052		

Рис. 9.1. Отчетный МОБ

Элементы строки ВЗ (валовые затраты) должны соответствовать элементам столбца ВВ (валовой выпуск). Используем СТАТИСТИЧЕСКУЮ функцию ТРАНСП. Выделяем ячейки B11:F11 и вызываем функцию ТРАНСП. В качестве аргумента введем массив I4:I8. Далее нажимаем сочетание клавиш Ctrl + Shift + OK. Если значение появилось только в одной ячейке, то необходимо заново выделить массив B11:F11 нажать кнопку F2 и снова нажать сочетание клавиш Ctrl + Shift + Enter. Причем первые две нужно нажать и удерживать.

В последнюю очередь рассчитываем строку ВДС (валовая добавленная стоимость): B10 = B11 – B9 и т.д.

2. Построение схемы планового межотраслевого баланса.

Построим матрицу прямых затрат A (рис. 9.2). В ячейку B13 введем формулу B13 = B4 / B$11. Знак доллара ставим, чтобы при копировании до ячейки F17 не изменялся адрес строки 11. Главную диагональ массива, отведенного под единичную матрицу, заполним единицами. Матрицы складываются и вычитаются поэлементно, поэтому в ячейку B19 матрицы $(E - A)$ записываем соответствующую формулу и копируем ее до ячейки F23.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
13		0,116484	0,065728	0,244624	0,118644	0,11658		1				
14		0,076923	0,133803	0,266129	0,188862	0,215026			1			
15	*A* =	0,068132	0,169014	0,110215	0,046005	0,168394	*E* =			1		
16		0,087912	0,143192	0,11828	0,205811	0,129534					1	
17		0,138462	0,105634	0,061828	0,077482	0,168394						1
18												
19		0,883516	-0,06573	-0,24462	-0,11864	-0,11658		1,298556	0,307864	0,523293	0,338524	0,420336
20		-0,07692	0,866197	-0,26613	-0,18886	-0,21503		0,32399	1,461458	0,635574	0,494122	0,628969
21	*E - A* =	-0,06813	-0,16901	0,889785	-0,046	-0,16839	*B* =	0,232784	0,379321	1,365195	0,247545	0,445713
22		-0,08791	-0,14319	-0,11828	0,794189	-0,12953		0,285972	0,403442	0,42625	1,467306	0,459271
23		-0,13846	-0,10563	-0,06183	-0,07748	0,831606		0,301314	0,30269	0,309074	0,274245	1,4283

Рис. 9.2. Матрица прямых затрат и матрица полных затрат

Матрица B рассчитывается по формуле $B = (E - A)^{-1}$. Для ее расчета используем встроенную функцию МОБР. Выделяем массив H19:L23, вызываем функцию МОБР, вводим ячейки матрицы $(E - A)$. Не забудем, что при работе с массивами используется сочетание клавиш Ctrl – Shift – OK.

Замечание. Проверяйте все введенные формулы на правильность. Если курсор стоит в строке формулы, и вы не можете из нее выйти, потому что «Нельзя изменять часть массива», то нажмите на кнопку **Esc**.

Составим схему межотраслевого баланса на плановый период (рис. 9.3). В ячейки H28:H32 запишем известные значения конечного спроса, прогнозируемого на плановый период. Валовой выпуск найдем, используя прогнозную модель $\vec{x} = B\vec{y}$. Выделяем ячейки I28:I32, вызываем

МАТЕМАТИЧЕСКУЮ функцию МУМНОЖ. Вводим адреса двух массивов: массив 1 – матрица B, массив 2 – вектор значений конечного использования.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
25	**Плановый МОБ**								
26	Отрасли-	Отрасли-потребители					ПП	КИ	ВВ
27	производители	1	2	3	4	5			
28	1	45,58621	27,04535	81,66917	49,73807	34,3145	238,3533	153	391,3533
29	2	30,1041	55,0566	88,84888	79,17488	63,29119	316,4757	95	411,4757
30	3	26,66363	69,54518	36,796	19,28619	49,56539	201,8564	132	333,8564
31	4	34,40469	58,92022	39,48839	86,28032	38,12722	257,2208	162	419,2208
32	5	54,18738	43,46574	20,64166	32,482	49,56539	200,3422	94	294,3422
33	ПЗ	190,946	254,0331	267,4441	266,9615	234,8637	1214,248	636	1850,248
34	ВДС	200,4073	157,4426	66,41229	152,2594	59,47847	636		
35	ВЗ	391,3533	411,4757	333,8564	419,2208	294,3422	1850,248		

Рис. 9.3. МОБ на плановый период

Строки ВЗ, ПЗ, ВДС формируем аналогично отчетному периоду. Межотраслевые потоки рассчитываем, используя элементы матрицы A по формуле $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$. Проверим правильность расчетов, используя несколько вариантов расчета ВВП.

3. Оформление отчета о проделанной работе.

План отчета.

1. Укажите фамилию имя, название группы (подгруппы), номер варианта.
2. Запишите значения ВВП и ВВ в целом по экономике, рассчитанные для отчетного и для планового периода. На сколько процентов изменился ВВП и валовой выпуск в целом по экономике в плановом периоде по отношению к отчетному?
3. Запишите значение элемента a_{ks} (см. условие) матрицы прямых затрат и опишите его экономический смысл.
4. Запишите значение элемента b_{ss} (см. условие) матрицы полных затрат и опишите его экономический смысл.
5. Чему равны материальные затраты k-той отрасли в отчетном периоде? Чему равна материалоемкость s-той отрасли?

Лабораторная работа № 10. Применение модели межотраслевого баланса в прогнозировании отраслевых цен

Литература: [1], [2], [3], [8].

Постановка задачи. Для условной экономики состоящей из трех отраслей за отчетный период известны межотраслевые потоки $\boldsymbol{x_{ij}}$ и вектор объемов конечного использования $\boldsymbol{Y_{отч}}$. Требуется:

1. Определить какое влияние в условиях рынка оказывает увеличение цены на продукцию отрасли k_1 в k_2 раз на изменение цен в других отраслях. Структуру затрат отчетного периода сформировать самостоятельно, исходя из того, что на заработную плату первой отрасли приходится h_1%, второй отрасли – h_2%, третьей отрасли – h_3% валовой добавленной стоимости. Рост заработной платы отстает от роста цен, коэффициент эластичности заработной платы от цен составляет k_2. Реальная динамика затрат в прогнозном периоде остается неизменной. Рассчитать реальные темпы изменения заработной платы во всех отраслях.
2. Определить какое влияние в условиях рынка оказывает увеличение зарплаты в отрасли s_1 на s_2% на увеличение цены продукции отраслей. Заработная плата в остальных отраслях остается неизменной. Учесть, что реальная динамика прочих элементов добавленной стоимости останется неизменной. Рассчитать реальные темпы изменения заработной платы во всех отраслях.

Все необходимые числовые данные приведены в таблице 10.1.

Таблица 10.1

Параметры	Номер варианта												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_{11}	115	100	500	0	550	600	0	500	600	500	600	420	660
x_{12}	210	300	400	600	450	200	450	450	700	400	300	140	540
x_{13}	312	100	200	200	450	300	250	450	0	300	550	210	540
x_{21}	189	200	200	500	400	250	200	400	450	100	250	175	480
x_{22}	144	100	100	100	0	500	0	0	0	200	400	350	0
x_{23}	220	400	300	400	400	400	400	400	400	400	700	280	480
x_{31}	302	100	100	300	100	350	600	100	300	500	450	245	120
x_{32}	208	200	200	200	350	600	350	350	200	300	600	420	420

Окончание таблицы 10.1

Параметры	Номер варианта												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_{33}	176	300	0	400	200	300	350	200	500	600	650	210	240
y_1	514	1400	1500	1200	1400	1900	1400	3000	1400	1700	1900	1330	1680
y_2	305	2000	2000	1700	2000	1600	2000	2000	1700	1500	1600	1120	2400
y_3	287	900	1000	900	900	2000	900	1000	1300	2000	1800	1400	1080
k_1	3	1	1	1	3	2	3	3	2	2	2	2	2
k_2	3	2	1,5	2,5	2	3	3,5	2	2,2	3,5	2	3	1,5
k_3	0,6	0,75	0,75	0,7	0,75	0,7	0,75	0,75	0,7	0,7	0,7	0,75	0,75
h_1	30	30	30	30	40	40	40	40	30	30	40	40	30
h_2	40	82	32	35	30	30	30	30	35	35	30	30	40
h_3	50	40	35	35	32	32	32	32	40	40	32	40	32
s_1	1	2	1	2	1	2	3	1	1	2	2	2	2
s_2	20	30	50	30	30	50	40	30	40	50	50	45	50

Порядок выполнения работы (на примере варианта 0)

1. Подготовительная работа.

Построим схему межотраслевого баланса на отчетный период (лаб. раб. № 9, рис. 10.1).

	A	B	C	D	E	F	G
1	***Отчетный МОБ***						
2	Отрасли-производители	Отрасли-потребители			ПП	КИ	ВВ
3		1	2	3			
4	1	115	210	312	637	514	1151
5	2	189	144	220	553	305	858
6	3	302	208	176	686	287	973
7	ПЗ	606	562	708	1876	1106	2982
8	Зарплата	163,5	118,4	132,5	414,4		
9	Проч.эл.ВДС	381,5	177,6	132,5	691,6		
10	ВДС	545	296	265	1106		
11	ВЗ	1151	858	973	2982		

Рис. 10.1. Схема отчетного межотраслевого баланса

2. Решение задачи средствами Excel.

Учитывая, что рост цен в 3-й отрасли в 3 раза спровоцирует инфляцию, найдем, как изменятся цены в других отраслях, учитывая, что реальная динамика затрат в прогнозном периоде останется неизменной и заработная плата будет отставать от роста цен на 40%. Для этого составим схему МОБ на плановый период (табл. 10.2).

Таблица 10.2

Схема МОБ на плановый период (1 и 3 квадрант)

Отрасли-производители	Отрасли-потребители		
	1	2	3
1	$115 \times p_1$	$210 \times p_1$	$312 \times p_1$
2	$189 \times p_2$	$144 \times p_2$	$220 \times p_2$
3	302×3	208×3	176×3
Зарплата	$163{,}5 \times 0{,}6 \times p_1$	$118{,}4 \times 0{,}6 \times p_2$	$132{,}5 \times 0{,}6 \times q_3$
Прочие элементы ВДС	$381{,}5 \times p_1$	$177{,}6 \times p_2$	$132{,}5 \times q_3$
ВЗ	$1151 \times p_1$	$858 \times p_2$	973×3

Система уравнений для поиска индексов цен будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} 1151p_1 = 115p_1 + 189p_2 + 302 \cdot 3 + 163{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot p_1 + 381{,}5p_1 \\ 858p_2 = 210p_1 + 144p_2 + 208 \cdot 3 + 118{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot p_2 + 177{,}6p_2 \\ 973 \cdot 3 = 312p_1 + 220p_2 + 176 \cdot 3 + 132{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot q_3 + 132{,}5q_3 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 556{,}4p_1 - 189p_2 = 906 \\ -210p_1 + 465{,}36p_2 = 624 \\ 312p_1 + 220p_2 + 212q_3 = 2740 \end{cases}$$

Построим в Excel расширенную матрицу данной системы уравнений и найдем ее решение при помощи математических функций МОБР и МУМНОЖ (рис. 10.2).

	A	B	C	D
13	p_1	p_2	q_3	св.коэф.
14	556,4	-189	0	906
15	-210	465,36	0	624
16	312	220	212	2740

Рис. 10.2. Матрица системы уравнений

Напомним, что решением системы уравнений $A\vec{x} = B$, является $\vec{x} = A^{-1} \cdot B$. Построим обратную матрицу (рис. 10.3). Для этого выделим ячейки

A18:C20 и вызовем математическую функцию МОБР. В качестве массива зададим матрицу в ячейках A14:C16. Далее нажмем сочетание клавиш Ctrl + Shift + OK, которое всегда используется при работе с массивами. В результате будет найдена обратная матрица (рис. 10.4). Если же значение появилось только в одной ячейке, тогда не убирая выделения нажмем клавишу F2 и повторим сочетание клавиш Ctrl + Shift + Enter.

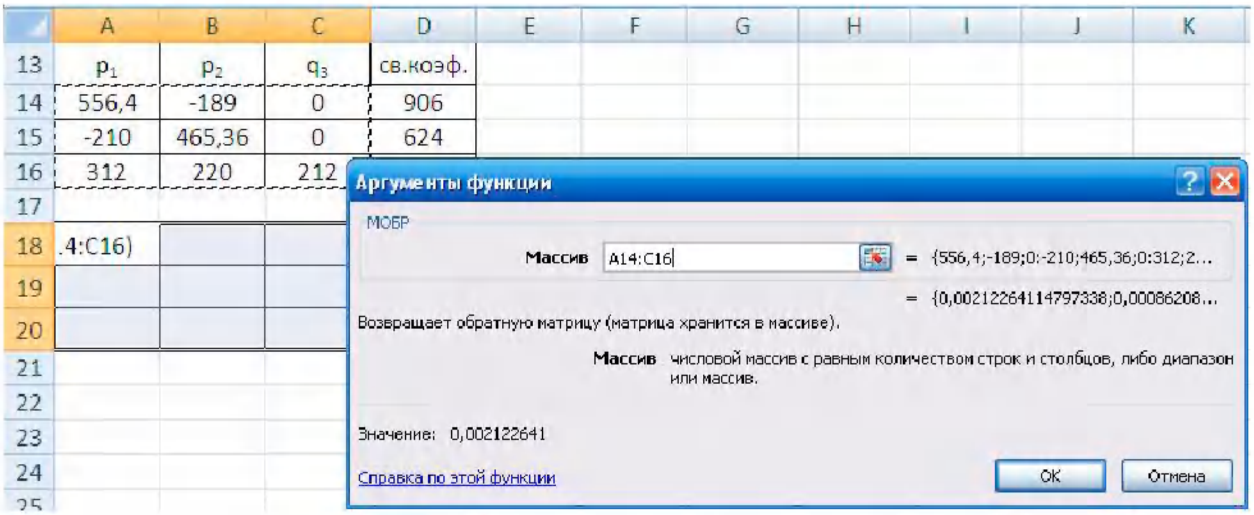


Рис. 10.3. Поиск обратной матрицы

Найдем неизвестные величины (рис. 10.4). Выделим ячейки F18:F20 и вызовем математическую функцию МУМНОЖ. Для получения результата после ввода соответствующих массивов данных снова используем сочетание клавиш Ctrl + Shift + OK (рис. 10.5).

Итак, рост цен в 3-й отрасли в 3 раза вызовет увеличение цен в 1-й отрасли в 2,46 раза и во второй отрасли в 2,45 раза. Однако это номинальные изменения. Найдем дефлятор ВВП:

$$d = \frac{\text{ВВП}_{\text{пл}}}{\text{ВВП}_{\text{отч}}} = \frac{3222{,}68}{1106} = 2{,}914 .$$

Тогда реальный темп роста зарплаты будет равен:

- в 1-й отрасли: 2,46 · 0,6 / 2,914 = 0,507;
- во 2-й отрасли: 2,45 · 0,6 / 2,914 = 0,505;
- в 3-й отрасли: 6,76 · 0,6 / 2,914 = 1,392.

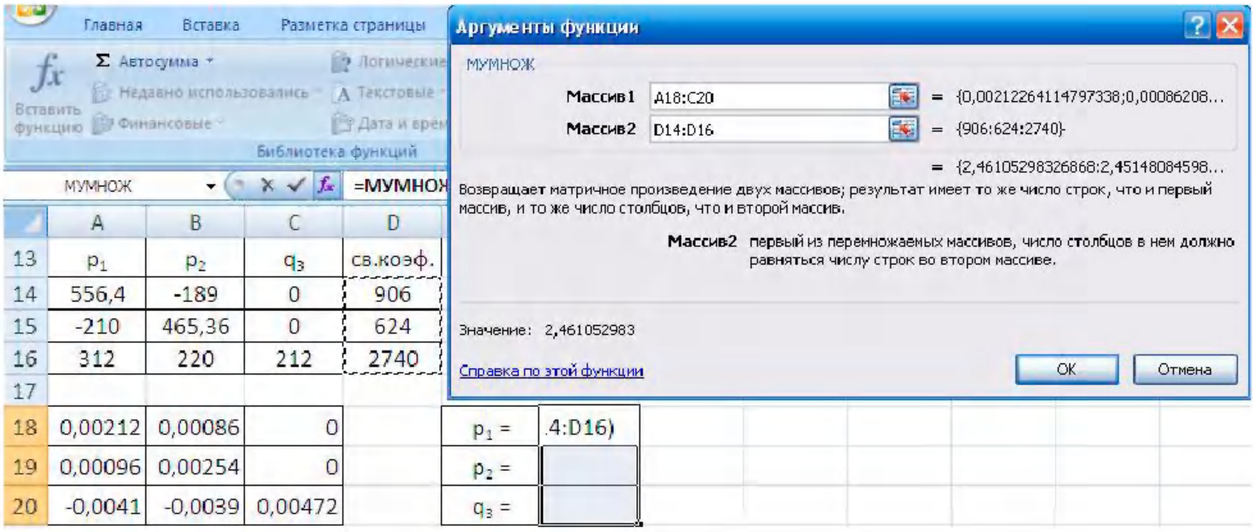


Рис. 10.4. Умножение матриц

	E	F
18	p_1 =	2,46105
19	p_2 =	2,45148
20	q_3 =	6,75861

Рис. 10.5. Результаты решения системы уравнений

Таким образом, реальная заработная плата в 3-й отрасли выросла на 39,2% за счет снижения зарплаты в 1-й и 2-й отраслях на 49,3% и 49,5% соответственно.

Чтобы найти индексы цен в отраслях при увеличении цены 1-й отрасли на 20%, составим таблицу 10.3 и на ее основе систему уравнений.

Таблица 10.3

Схема МОБ на плановый период (1 и 3 квадрант)

Отрасли-производители	Отрасли-потребители		
	1	2	3
1	$115 \times p_1$	$210 \times p_1$	$312 \times p_1$
2	$189 \times p_2$	$144 \times p_2$	$220 \times p_2$
3	$302 \times p_3$	$208 \times p_3$	$176 \times p_3$
Зарплата	$163{,}5 \times 1{,}2$	118,4	132,5
Прочие элементы ВДС	$381{,}5 \times p_1$	$177{,}6 \times p_2$	$132{,}5 \times p_3$
ВЗ	$1151 \times p_1$	$858 \times p_2$	$973 \times p_3$

Постройте систему уравнений и решите ее самостоятельно.

3. Оформление отчета о проделанной работе.

План отчета.

1. Укажите фамилию, имя, название группы, номер варианта.
2. Постройте схему МОБ на отчетный период.
3. При ответе на каждый из двух вопросов задачи постройте схему МОБ на плановый период, систему уравнений, ее решение и дайте содержательный ответ.

Лабораторная работа № 11. Модель межрегионального межотраслевого баланса

Литература: [8], [9].

Постановка задачи. Для условной экономики, представленной двумя регионами и тремя отраслями известны доли g_i^{rs} r-го региона в потреблении продукции i-й отрасли в регионе s, объемы продукции y_i^s (млн. руб.), произведенной в i-й отрасли и направленной в сферу конечного использования региона s, а также матрицы A^s прямых материальных затрат в регионе s.

Рассчитайте значения прямых и полных межрегиональных затрат, валовых выпусков отраслей по регионам. Постройте схему межрегионального межотраслевого баланса.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Вариант 0.

$g_1^{11} = 0{,}25;\quad g_1^{21} = 0{,}75;\qquad g_2^{11} = 0{,}71;\quad g_2^{21} = 0{,}29;\qquad g_3^{11} = 0{,}32;\quad g_3^{21} = 0{,}68;$

$g_1^{12} = 0{,}35;\quad g_1^{22} = 0{,}65;\qquad g_2^{12} = 0{,}42;\quad g_2^{22} = 0{,}58;\qquad g_3^{12} = 0{,}45;\quad g_3^{22} = 0{,}55;$

$$y_1^1 = 450; \quad y_1^2 = 430; \qquad A^1 = \begin{bmatrix} 0{,}21 & 0{,}11 & 0{,}08 \\ 0{,}13 & 0{,}24 & 0{,}2 \\ 0{,}12 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{bmatrix}; \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}16 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}24 & 0{,}12 \\ 0{,}18 & 0{,}21 & 0{,}14 \end{bmatrix}.$$
$$y_2^1 = 340; \quad y_2^2 = 480;$$
$$y_3^1 = 520; \quad y_3^2 = 310;$$

Вариант 1.

$$g_1^{11} = 0{,}31; \quad g_1^{21} = 0{,}69; \qquad g_2^{11} = 0{,}52; \quad g_2^{21} = 0{,}48; \qquad g_3^{11} = 0{,}45; \quad g_3^{21} = 0{,}55;$$
$$g_1^{12} = 0{,}21; \quad g_1^{22} = 0{,}79; \qquad g_2^{12} = 0{,}32; \quad g_2^{22} = 0{,}68; \qquad g_3^{12} = 0{,}78; \quad g_3^{22} = 0{,}22;$$

$$y_1^1 = 520; \quad y_1^2 = 380; \qquad A^1 = \begin{bmatrix} 0{,}15 & 0{,}24 & 0{,}31 \\ 0{,}23 & 0{,}27 & 0{,}19 \\ 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}36 \end{bmatrix}; \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0{,}31 & 0{,}25 & 0{,}16 \\ 0{,}4 & 0{,}14 & 0{,}16 \\ 0{,}17 & 0{,}22 & 0{,}11 \end{bmatrix}.$$
$$y_2^1 = 490; \quad y_2^2 = 510;$$
$$y_3^1 = 420; \quad y_3^2 = 420;$$

$n = 1, m = 3, i = 2, j = 3, r = 2, s = 1.$

Вариант 2.

$$g_1^{11} = 0{,}31; \quad g_1^{21} = 0{,}69; \qquad g_2^{11} = 0{,}42; \quad g_2^{21} = 0{,}58; \qquad g_3^{11} = 0{,}51; \quad g_3^{21} = 0{,}49;$$
$$g_1^{12} = 0{,}18; \quad g_1^{22} = 0{,}82; \qquad g_2^{12} = 0{,}16; \quad g_2^{22} = 0{,}84; \qquad g_3^{12} = 0{,}27; \quad g_3^{22} = 0{,}73;$$

$$y_1^1 = 480; \quad y_1^2 = 160; \qquad A^1 = \begin{bmatrix} 0{,}22 & 0{,}15 & 0{,}19 \\ 0{,}42 & 0{,}15 & 0{,}1 \\ 0{,}18 & 0{,}16 & 0{,}27 \end{bmatrix}; \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0{,}24 & 0{,}29 & 0{,}26 \\ 0{,}31 & 0{,}28 & 0{,}29 \\ 0{,}21 & 0{,}16 & 0{,}34 \end{bmatrix}.$$
$$y_2^1 = 460; \quad y_2^2 = 340;$$
$$y_3^1 = 245; \quad y_3^2 = 270;$$

$n = 2, m = 4, i = 3, j = 1, r = 1, s = 1.$

Вариант 3.

$$g_1^{11} = 0{,}48; \quad g_1^{21} = 0{,}52; \qquad g_2^{11} = 0{,}21; \quad g_2^{21} = 0{,}79; \qquad g_3^{11} = 0{,}34; \quad g_3^{21} = 0{,}66;$$
$$g_1^{12} = 0{,}34; \quad g_1^{22} = 0{,}66; \qquad g_2^{12} = 0{,}18; \quad g_2^{22} = 0{,}82; \qquad g_3^{12} = 0{,}42; \quad g_3^{22} = 0{,}58;$$

$$y_1^1 = 510; \quad y_1^2 = 460; \qquad A^1 = \begin{bmatrix} 0{,}17 & 0{,}11 & 0{,}38 \\ 0{,}39 & 0{,}46 & 0{,}22 \\ 0{,}1 & 0{,}45 & 0{,}41 \end{bmatrix}; \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0{,}43 & 0{,}36 & 0{,}17 \\ 0{,}23 & 0{,}16 & 0{,}48 \\ 0{,}4 & 0{,}09 & 0{,}17 \end{bmatrix}.$$
$$y_2^1 = 210; \quad y_2^2 = 480;$$
$$y_3^1 = 340; \quad y_3^2 = 370;$$

$n = 3, m = 5, i = 1, j = 2, r = 2, s = 2.$

Вариант 4.

$$g_1^{11} = 0{,}23; \quad g_1^{21} = 0{,}77; \qquad g_2^{11} = 0{,}31; \quad g_2^{21} = 0{,}69; \qquad g_3^{11} = 0{,}28; \quad g_3^{21} = 0{,}72;$$
$$g_1^{12} = 0{,}29; \quad g_1^{22} = 0{,}71; \qquad g_2^{12} = 0{,}47; \quad g_2^{22} = 0{,}53; \qquad g_3^{12} = 0{,}33; \quad g_3^{22} = 0{,}67;$$

$$y_1^1 = 481; \quad y_1^2 = 432; \qquad A^1 = \begin{bmatrix} 0,39 & 0,34 & 0,18 \\ 0,08 & 0,33 & 0,18 \\ 0,35 & 0,42 & 0,17 \end{bmatrix}; \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0,33 & 0,22 & 0,27 \\ 0,21 & 0,37 & 0,3 \\ 0,28 & 0,18 & 0,13 \end{bmatrix}.$$
$$y_2^1 = 166; \quad y_2^2 = 504;$$
$$y_3^1 = 205; \quad y_3^2 = 476;$$

$n = 4,\ m = 6,\ i = 2,\ j = 3,\ r = 1,\ s = 2.$

Вариант 5.

$$g_1^{11} = 0,27; \quad g_1^{21} = 0,73; \qquad g_2^{11} = 0,48; \quad g_2^{21} = 0,52; \qquad g_3^{11} = 0,45; \quad g_3^{21} = 0,55;$$
$$g_1^{12} = 0,41; \quad g_1^{22} = 0,59; \qquad g_2^{12} = 0,18; \quad g_2^{22} = 0,82; \qquad g_3^{12} = 0,24; \quad g_3^{22} = 0,76;$$

$$y_1^1 = 345; \quad y_1^2 = 406; \qquad A^1 = \begin{bmatrix} 0,19 & 0,22 & 0,08 \\ 0,15 & 0,45 & 0,48 \\ 0,39 & 0,23 & 0,18 \end{bmatrix}; \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0,11 & 0,12 & 0,35 \\ 0,13 & 0,34 & 0,35 \\ 0,23 & 0,38 & 0,2 \end{bmatrix}.$$
$$y_2^1 = 287; \quad y_2^2 = 241;$$
$$y_3^1 = 332; \quad y_3^2 = 300;$$

$n = 5,\ m = 1,\ i = 3,\ j = 1,\ r = 2,\ s = 1.$

Вариант 6.

$$g_1^{11} = 0,43; \quad g_1^{21} = 0,57; \qquad g_2^{11} = 0,11; \quad g_2^{21} = 0,89; \qquad g_3^{11} = 0,36; \quad g_3^{21} = 0,64;$$
$$g_1^{12} = 0,27; \quad g_1^{22} = 0,73; \qquad g_2^{12} = 0,14; \quad g_2^{22} = 0,86; \qquad g_3^{12} = 0,49; \quad g_3^{22} = 0,51;$$

$$y_1^1 = 270; \quad y_1^2 = 340; \qquad A^1 = \begin{bmatrix} 0,16 & 0,34 & 0,26 \\ 0,36 & 0,14 & 0,17 \\ 0,29 & 0,22 & 0,38 \end{bmatrix}; \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0,26 & 0,39 & 0,34 \\ 0,08 & 0,14 & 0,17 \\ 0,13 & 0,21 & 0,09 \end{bmatrix}.$$
$$y_2^1 = 484; \quad y_2^2 = 447;$$
$$y_3^1 = 540; \quad y_3^2 = 216;$$

$n = 6,\ m = 2,\ i = 1,\ j = 2,\ r = 1,\ s = 1.$

Вариант 7.

$$g_1^{11} = 0,12; \quad g_1^{21} = 0,88; \qquad g_2^{11} = 0,27; \quad g_2^{21} = 0,73; \qquad g_3^{11} = 0,37; \quad g_3^{21} = 0,63;$$
$$g_1^{12} = 0,65; \quad g_1^{22} = 0,35; \qquad g_2^{12} = 0,46; \quad g_2^{22} = 0,54; \qquad g_3^{12} = 0,36; \quad g_3^{22} = 0,64;$$

$$y_1^1 = 410; \quad y_1^2 = 524; \qquad A^1 = \begin{bmatrix} 0,09 & 0,33 & 0,18 \\ 0,31 & 0,08 & 0,2 \\ 0,23 & 0,11 & 0,25 \end{bmatrix}; \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0,27 & 0,12 & 0,1 \\ 0,24 & 0,3 & 0,26 \\ 0,27 & 0,18 & 0,22 \end{bmatrix}.$$
$$y_2^1 = 426; \quad y_2^2 = 265;$$
$$y_3^1 = 375; \quad y_3^2 = 159;$$

$n = 1,\ m = 3,\ i = 2,\ j = 3,\ r = 2,\ s = 2.$

Вариант 8.

$$g_1^{11} = 0,64; \quad g_1^{21} = 0,36; \qquad g_2^{11} = 0,32; \quad g_2^{21} = 0,68; \qquad g_3^{11} = 0,84; \quad g_3^{21} = 0,16;$$
$$g_1^{12} = 0,36; \quad g_1^{22} = 0,64; \qquad g_2^{12} = 0,39; \quad g_2^{22} = 0,61; \qquad g_3^{12} = 0,55; \quad g_3^{22} = 0,45;$$

$$y_1^1 = 289;\quad y_1^2 = 364;\qquad A^1 = \begin{bmatrix} 0{,}37 & 0{,}21 & 0{,}18 \\ 0{,}16 & 0{,}28 & 0{,}33 \\ 0{,}13 & 0{,}14 & 0{,}08 \end{bmatrix};\qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0{,}39 & 0{,}28 & 0{,}4 \\ 0{,}31 & 0{,}11 & 0{,}17 \\ 0{,}27 & 0{,}25 & 0{,}29 \end{bmatrix}.$$
$$y_2^1 = 506;\quad y_2^2 = 455;$$
$$y_3^1 = 478;\quad y_3^2 = 480;$$

$n = 2,\ m = 4,\ i = 3,\ j = 1,\ r = 1,\ s = 2.$

Вариант 9.

$$g_1^{11} = 0{,}34;\quad g_1^{21} = 0{,}66;\qquad g_2^{11} = 0{,}62;\quad g_2^{21} = 0{,}38;\qquad g_3^{11} = 0{,}28;\quad g_3^{21} = 0{,}72;$$
$$g_1^{12} = 0{,}38;\quad g_1^{22} = 0{,}62;\qquad g_2^{12} = 0{,}65;\quad g_2^{22} = 0{,}35;\qquad g_3^{12} = 0{,}42;\quad g_3^{22} = 0{,}58;$$

$$y_1^1 = 382;\quad y_1^2 = 371;\qquad A^1 = \begin{bmatrix} 0{,}31 & 0{,}09 & 0{,}25 \\ 0{,}1 & 0{,}17 & 0{,}21 \\ 0{,}12 & 0{,}26 & 0{,}2 \end{bmatrix};\qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}24 & 0{,}14 \\ 0{,}12 & 0{,}35 & 0{,}22 \\ 0{,}24 & 0{,}12 & 0{,}32 \end{bmatrix}.$$
$$y_2^1 = 518;\quad y_2^2 = 366;$$
$$y_3^1 = 355;\quad y_3^2 = 206;$$

$n = 3,\ m = 5,\ i = 1,\ j = 2,\ r = 2,\ s = 1.$

Вариант 10.

$$g_1^{11} = 0{,}33;\quad g_1^{21} = 0{,}67;\qquad g_2^{11} = 0{,}61;\quad g_2^{21} = 0{,}39;\qquad g_3^{11} = 0{,}43;\quad g_3^{21} = 0{,}57;$$
$$g_1^{12} = 0{,}49;\quad g_1^{22} = 0{,}51;\qquad g_2^{12} = 0{,}72;\quad g_2^{22} = 0{,}28;\qquad g_3^{12} = 0{,}86;\quad g_3^{22} = 0{,}14;$$

$$y_1^1 = 130;\quad y_1^2 = 132;\qquad A^1 = \begin{bmatrix} 0{,}21 & 0{,}15 & 0{,}16 \\ 0{,}14 & 0{,}25 & 0{,}3 \\ 0{,}28 & 0{,}24 & 0{,}17 \end{bmatrix};\qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0{,}11 & 0{,}4 & 0{,}18 \\ 0{,}19 & 0{,}32 & 0{,}4 \\ 0{,}17 & 0{,}27 & 0{,}29 \end{bmatrix}.$$
$$y_2^1 = 225;\quad y_2^2 = 171;$$
$$y_3^1 = 302;\quad y_3^2 = 536;$$

$n = 4,\ m = 6,\ i = 2,\ j = 3,\ r = 1,\ s = 1.$

Вариант 11.

$$g_1^{11} = 0{,}28;\quad g_1^{21} = 0{,}72;\qquad g_2^{11} = 0{,}52;\quad g_2^{21} = 0{,}48;\qquad g_3^{11} = 0{,}37;\quad g_3^{21} = 0{,}63;$$
$$g_1^{12} = 0{,}56;\quad g_1^{22} = 0{,}44;\qquad g_2^{12} = 0{,}48;\quad g_2^{22} = 0{,}52;\qquad g_3^{12} = 0{,}34;\quad g_3^{22} = 0{,}66;$$

$$y_1^1 = 337;\quad y_1^2 = 282;\qquad A^1 = \begin{bmatrix} 0{,}19 & 0{,}18 & 0{,}1 \\ 0{,}33 & 0{,}17 & 0{,}35 \\ 0{,}26 & 0{,}31 & 0{,}3 \end{bmatrix};\qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0{,}23 & 0{,}12 & 0{,}22 \\ 0{,}19 & 0{,}29 & 0{,}31 \\ 0{,}12 & 0{,}22 & 0{,}13 \end{bmatrix}.$$
$$y_2^1 = 178;\quad y_2^2 = 418;$$
$$y_3^1 = 437;\quad y_3^2 = 368;$$

$n = 5,\ m = 1,\ i = 3,\ j = 1,\ r = 2,\ s = 2.$

Вариант 12.

$$g_1^{11} = 0{,}24;\quad g_1^{21} = 0{,}76;\qquad g_2^{11} = 0{,}14;\quad g_2^{21} = 0{,}86;\qquad g_3^{11} = 0{,}82;\quad g_3^{21} = 0{,}18;$$
$$g_1^{12} = 0{,}73;\quad g_1^{22} = 0{,}27;\qquad g_2^{12} = 0{,}41;\quad g_2^{22} = 0{,}59;\qquad g_3^{12} = 0{,}37;\quad g_3^{22} = 0{,}63;$$

$$y_1^1 = 434; \quad y_1^2 = 338; \qquad A^1 = \begin{bmatrix} 0{,}26 & 0{,}19 & 0{,}23 \\ 0{,}08 & 0{,}24 & 0{,}26 \\ 0{,}26 & 0{,}38 & 0{,}17 \end{bmatrix}; \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0{,}08 & 0{,}14 & 0{,}12 \\ 0{,}09 & 0{,}34 & 0{,}22 \\ 0{,}2 & 0{,}31 & 0{,}14 \end{bmatrix}.$$

$$y_2^1 = 175; \quad y_2^2 = 411;$$

$$y_3^1 = 388; \quad y_3^2 = 440;$$

$$n = 6,\ m = 2,\ i = 1,\ j = 2,\ r = 1,\ s = 2.$$

Порядок выполнения работы.

1. Подготовка исходных данных.

Сформируем в Excel блочно-диагональную матрицу **G**, блочную матрицу **A** и вектор-столбец **Y** (рис. 11.1).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1		0,25	0	0	0,35	0	0		0,21	0,11	0,08	0	0	0		450
2		0	0,71	0	0	0,42	0		0,13	0,24	0,2	0	0	0		340
3	G =	0	0	0,32	0	0	0,45	A =	0,12	0,2	0,3	0	0	0	Y =	520
4		0,75	0	0	0,65	0	0		0	0	0	0,1	0,16	0,2		430
5		0	0,29	0	0	0,58	0		0	0	0	0,3	0,24	0,12		480
6		0	0	0,68	0	0	0,55		0	0	0	0,18	0,21	0,14		310

Рис. 11.1. Исходные данные

2. Расчет матриц прямых и полных межрегиональных затрат.

Матрицу прямых межрегиональных затрат **G · A** можно рассчитать при помощи встроенной функции МУМНОЖ. Выделим массив B8:G13 и вызовем ВСТАВКА – ФУНКЦИЯ – МУМНОЖ. Массив 1: B1:G6, массив 2: I1:N6. Далее нажимаем сочетание клавиш Ctrl + Shift + OK. Если значение появилось только в одной ячейке, то необходимо заново выделить массив B8:G13 нажать кнопку F2 и снова нажать сочетание клавиш Ctrl + Shift + Enter. Причем первые две нужно нажать и удерживать (рис. 11.2).

Напомним, что матрица полных межрегиональных затрат рассчитывается по формуле $\mathbf{B} = (\mathbf{G}^{-1} - \mathbf{A})^{-1}$. Для поиска матрицы **B** выделим массив ячеек I8:N13 и воспользуемся функцией МОБР. В качестве аргумента введем формулу $\text{МОБР(B1:G6)} - \text{I1:N6}$. Не забудем сочетание клавиш Ctrl + Shift + OK (рис. 11.2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
8		0,05	0,03	0,02	0,04	0,06	0,07		0,34	0,09	0,1	0,44	0,1	0,1		450	0
9		0,09	0,17	0,14	0,13	0,1	0,05		0,26	1	0,2	0,25	0,7	0,22		340	0
10	GA =	0,04	0,06	0,1	0,08	0,09	0,06	$(G^{-1} - A)^{-1}$	0,16	0,16	0,47	0,16	0,18	0,61	Y' =	520	0
11		0,16	0,08	0,06	0,07	0,1	0,13		0,96	0,21	0,21	0,86	0,22	0,21		0	430
12		0,04	0,07	0,06	0,17	0,14	0,07		0,26	0,5	0,17	0,24	0,81	0,17		0	480
13		0,08	0,14	0,2	0,1	0,12	0,08		0,24	0,28	0,92	0,23	0,28	0,81		0	310

Рис. 11.2. Расчет матриц прямых и полных межрегиональных затрат

3. Построение схемы межрегионального межотраслевого баланса.

Построим таблицу (рис. 11.3). В столбце «Валовой выпуск» расчет произведен по формуле $\mathbf{X} = (\mathbf{G}^{-1} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{Y}$ при помощи функции МУМНОЖ. В ячейках J19:K24 также использована функция МУМНОЖ(B1:G6;P8:Q13), для чего пришлось сформировать блочную матрицу **Y'** (рис. 11.2). Строка «Валовые затраты» сформирована с помощью функции ТРАНСП(L19:L24). В ячейке D19 введена формула D19 = B8*D$25, которая скопирована по всему массиву D19:I24.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
16				Регион 1			Регион 2			Конечное использование		Валовой выпуск
17				Отрасли			Отрасли					
18				1	2	3	1	2	3	Регион 1	Регион 2	
19	Регион 1	Отрасли	1	26,62	29,45	14,33	40,27	51,63	81,73	112,5	150,5	507
20			2	46,8	182,5	101,8	145	92,94	58,85	241,4	201,6	1071
21			3	19,47	68,53	68,79	93,2	87,13	73,56	166,4	139,5	716,6
22	Регион 2	Отрасли	1	79,86	88,34	43	74,79	95,89	151,8	337,5	279,5	1151
23			2	19,12	74,53	41,56	200,2	128,3	81,27	98,6	278,4	922
24			3	41,37	145,6	146,2	113,9	106,5	89,91	353,6	170,5	1168
25	Валовые затраты			507	1071	716,6	1151	922	1168			

Рис. 11.3. Схема межрегионального межотраслевого баланса

4. Оформление отчета.

План отчета.

1. Запишите фамилию, имя, название группы, номер варианта.
2. Опишите экономический смысл элементов n-го столбца матрицы **G** (значение n указано в варианте задания)

3. Запишите значение элемента m-й строки n-го столбца матрицы прямых межрегиональных затрат и дайте его экономическую интерпретацию (значения m и n указаны в варианте задания).
4. Запишите значение элемента m-й строки m-го столбца матрицы полных межрегиональных затрат и дайте его экономическую интерпретацию.
5. Какое количество продукции i-й отрасли r-го региона отправляется для потребления в j-ю отрасль s-го региона (значения i, j, r, s указаны в варианте задания).
6. Запишите значение y_i^{rs} и дайте его экономическую интерпретацию (значения i, r, s указаны в варианте задания).

Тема 3. Модели инвестиционного анализа

Лабораторная работа № 12. Анализ эффективности инвестиционного проекта

Литература: [1], [2], [4], [6].

Постановка задачи. Предприятие рассматривает возможность производства нового вида продукции. Начальные инвестиции в проект составляют $\boldsymbol{I_0}$ млн. д.е., планируемый выпуск продукции – $\boldsymbol{Q}$ в год, ожидаемая цена единицы продукции $\boldsymbol{p}$ д.е., переменные издержки в расчете на единицу – $\boldsymbol{v}$ д.е., постоянные издержки – $\boldsymbol{F}$ млн. д.е. в год. Проект рассчитан на 7 лет. Налог на прибыль равен $\boldsymbol{t}$ **%**. Ставка дисконтирования денежных потоков проекта – $\boldsymbol{r}$ **%**. Уровень инфляции – $\boldsymbol{I}$ **%** в год (табл. 12.1).

Таблица 12.1

Параметры	Вариант										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
начальные инвестиции I_0	2000	2500	3000	40000	70000	3200	1250	3370	2815	1530	2700
выпуск Q	100	100	260	10000	10000	100	135	221	115	120	135
цена p	30	43	112	11	24	27	12	24	35	40	32
перем. издержки v	22	34	103	9	18	13	7	18	23	32	22
постоянные издержки F	200	250	1020	5000	35000	130	200	360	400	320	250
налог t %	24%	24%	24%	24%	24%	24%	22%	22%	22%	21%	22%
Уровень инфляции I %	20%	25%	15%	15%	15%	15%	18%	15%	16%	18%	17%
банковская ставка r % (номин).	35%	35%	35%	35%	35%	35%	37%	28%	30%	33%	37%

Продолжение таблицы 12.1

Параметры	Вариант										
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
начальные инвестиции I_0	2000	2500	3000	40000	70000	3200	1250	3370	2815	1530	2700
выпуск Q	100	100	260	10000	10000	100	135	221	115	120	135
цена p	30	43	112	11	24	27	12	24	35	40	32
перем. издержки v	22	34	103	9	18	13	7	18	23	32	22
постоянные издержки F	200	250	1020	5000	35000	130	200	360	400	320	250
налог t %	24%	24%	24%	24%	24%	24%	22%	22%	22%	21%	22%
Уровень инфляции I %	20%	25%	15%	15%	15%	15%	18%	15%	16%	18%	17%
банковская ставка r % (номин).	35%	35%	35%	35%	35%	35%	37%	28%	30%	33%	37%

Требуется:

- Рассчитать основные показатели эффективности инвестиционного проекта.
- Определить точку безубыточности проекта для следующих переменных параметров: выпуск продукции, цена единицы продукции, переменные издержки, постоянные издержки, налоговая ставка.

Порядок выполнения работы (на примере варианта 0)

Оценка проекта выполняется в несколько этапов:

1. Расчет исходных показателей по годам
2. Расчет показателей эффективности
3. Расчет точек безубыточности.

4. Анализ полученных результатов.

1. Построение таблицы данных (рис. 12.1).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Начальные инвестиции I_0	Выпуск Q	Цена p	Перем. издержки v	Постоянные издержки F	Налог $t\%$	Уровень инфляции $I\%$	Банковская ставка $r\%$ (номин).	n
2	2000	100	30	22	200	24	20	35	7
3									
4		На конец года							
5		0	1	2	3	4	5	6	7
6	выручка Π								
7	переменные издержки V								
8	постоянные издержки Fix								
9	амортизация A								
10	налогообл. прибыль $Н\Pi$								
11	налог $Н$								
12	чистая прибыль $Ч\Pi$								
13	свободные денежные потоки $СД\Pi$								
14	дисконтированные денежные потоки. $ДД\Pi$								

Рис. 12.1. Таблица данных

2. Поиск денежных потоков инвестиционного проекта.

Выручка $\Pi_k = Q \cdot p \cdot (1 + i)^k$, где k – номер соответствующего года, в таблице это номер столбца, $k = \overline{1,7}$.

Переменные издержки $V_k = v \cdot Q \cdot (1 + i)^k$, $k = \overline{1,7}$.

Постоянные издержки $Fix_k = F \cdot (1 + i)^k$, $k = \overline{1,7}$.

Амортизация $A = I_0 / n$, $k = \overline{1,7}$.

Налогооблагаемая прибыль $Н\Pi_k = \Pi_k - V_k - Fix_k - A$, $k = \overline{1,7}$.

Налог $Н_k = \text{МАКС}(Н\Pi_k;0) \cdot t$, $k = \overline{1,7}$.

Чистая прибыль $Ч\Pi_k = Н\Pi_k - Н_k$, $k = \overline{1,7}$.

Свободные денежные потоки $СД\Pi_k = Ч\Pi_k + A$, $k = \overline{1,7}$, $СД\Pi_0 = -I_0$.

Дисконтированные денежные потоки $ДД\Pi_k = \dfrac{СД\Pi_k}{(1+r)^k}$, $k = \overline{1,7}$,

$ДД\Pi_0 = -I_0$.

Записываем эти формулы в таблицу: формулу записываем в соответствующую ячейку первого года, указав адреса ячеек с данными, затем копируем ее в клетки по годам (рис. 12.2). Чтобы сохранялись адреса постоянных ячеек, перед буквами и цифрами в адресе ставим знак $ (можно нажать F4).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Начальные инвестиции I_0	Выпуск Q	Цена p	Перем. издержки v	Постоянные издержки F	Налог $t\%$	Уровень инфляции $I\%$	Банковская ставка $r\%$ (номин.)	n
2	2000	100	30	22	200	24	20	35	7
3									
4		На конец года							
5		0	1	2	3	4	5	6	7
6	выручка *П*		=$B$2*$C$2*(1+$G$2/100)^C5						
7	переменные издержки *V*		=$D$2*$B$2*(1+$G$2/100)^C5						
8	постоянные издержки *Fix*		=$E$2*(1+$G$2/100)^C5						
9	амортизация *A*		=$A$2/$I$2						
10	налогообл. прибыль *НП*		=C6-C7-C8-C9						
11	налог *Н*		=МАКС(C10;0)*($F$2/100)						
12	чистая прибыль *ЧП*		=C10-C11						
13	свободные денежные потоки *СДП*	-2000	=C12+C9						
14	дисконтированные денежные потоки *ДДП*	-2000	=C13/(1+$H$2/100)^C5						

Рис. 12.2. Расчет необходимых показателей

3. Расчет показателей эффективности (рис. 12.3).

а) Чистая приведенная стоимость $NPV = \sum_{k=0}^{n} ДДП_к$.

Для расчета воспользуемся математической формулой **СУММ**. В качестве аргумента выбираем данные строки ***ДДП***, начиная с нулевого года.

б) Внутренняя норма прибыли рассчитывается при помощи финансовой функции **ВСД**.

$$\boldsymbol{IRR = ВСД\ (СДП_0,\ СДП_1,\ ...,\ СДП_n).}$$

Ставим курсор в ячейку для ***IRR***, вызываем функцию ***ВСД*** и выделяем строку ***СДП***.

в) Показатель рентабельности $PI = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} ДПП_k}{I_0}$.

Пишем формулу в ячейку для ***PI*** аналогично предыдущим пунктам, но для функции **СУММ** в качестве аргумента берем данные строки ***ДДП***, начиная с первого года.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Начальные инвестиции I_0	Выпуск ***Q***	Цена ***p***	Перем. издерж	Постоян ные	Налог ***t%***	Уро- вень	Банков- ская	***n***
2	2000	100	30	22	200	24	20	35	7
3									
4		На конец года							
5		0	1	2	3	4	5	6	7
6	выручка ***П***		3600	4320	5184	6220,8	7465	8958	10749,5
7	переменные издержки ***V***		2640	3168	3801,6	4561,9	5474	6569,2	7883
8	постоянные издержки ***Fix***		240	288	345,6	414,72	497,7	597,2	716,636
9	амортизация ***A***		285,714286	285,71	285,714	285,71	285,7	285,71	285,714
10	налогообл. прибыль ***НП***		434,285714	578,29	751,086	958,45	1207	1505,9	1864,19
11	налог ***Н***		104,228571	138,79	180,261	230,03	289,7	361,41	447,407
12	чистая прибыль ***ЧП***		330,057143	439,5	570,825	728,42	917,5	1144,5	1416,79
13	свободные денежные потоки ***СДП***	-2000	615,771429	725,21	856,539	1014,1	1203	1430,2	1702,5
14	дисконтированные денежные потоки. ***ДДП***	-2000	456,126984	397,92	348,134	305,32	268,3	236,26	208,33
15									
16									
17	*NPV* =	=СУММ(B14:I14)							
18	*IRR* =	=ВСД(B13:I13)							
19	*PI* =	=СУММ(C14:I14)/A2							
20									

Рис. 12.3. Расчет показателей эффективности

4. Анализ безубыточности проекта.

Указание. Под точкой безубыточности проекта понимают такое значение параметра A, при котором $NPV(A) = 0$.

Анализ безубыточности проводится с помощью команды **Сервис – Подбор параметра**. Например, для того, чтобы рассчитать точку безубыточности для параметра ***Q***, задаем: установить в ячейке ***NPV*** значение = 0, изменяя значения ячейки «адрес ***Q***».

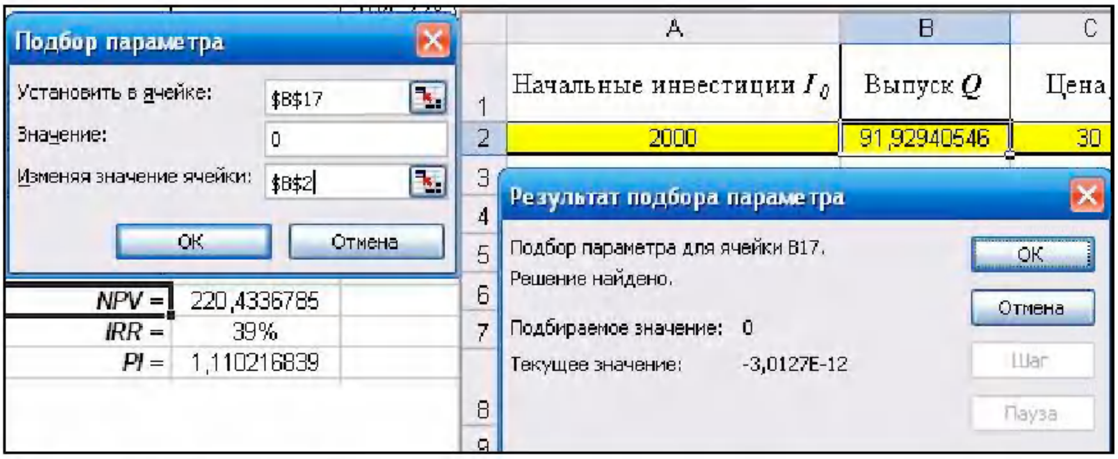


Рис. 12.4. Поиск объема выпуска продукции, при котором $NPV = 0$

Рассчитанное значение выписываем и возвращаем таблицу в исходное состояние (придав $\boldsymbol{Q}$ первичное значение). Далее проводим анализ безубыточности для остальных параметров.

5. Оформление отчета о проделанной работе.

План отчета.

1. Напишите фамилию, имя, название группы, номер варианта.
2. Запишите свободные денежные потоки инвестиционного проекта, чистую текущую ценность, внутреннюю норму прибыли, показатель рентабельности. Сделайте вывод о привлекательности инвестиционного проекта для инвестора.
3. Укажите точку безубыточности для параметров выпуск продукции, цена единицы продукции, переменные издержки, постоянные издержки, налоговая ставка. Опишите, при каких значениях данных параметров проект будет эффективным, а при каких – неэффективным.

Лабораторная работа № 13. Формирование оптимального портфеля инвестиционных проектов

Литература: [1], [2], [3], [6].

Постановка задачи. Инвестор рассматривает возможность финансирования шести проектов на предстоящий пятилетний срок. Размер имеющихся в распоряжении финансовых средств равен I_0 млн. ден. ед. Первоначальные инвестиции, необходимые для реализации i-го инвестиционного проекта I_0^i $\left(i=\overline{1,6}\right)$ и чистые денежные потоки по годам S_t^i $\left(i=\overline{1,6};\ t=\overline{1,5}\right)$ для каждого проекта известны. Одновременные вложения в k-тый и s-тый проекты нецелесообразны. В силу специфических особенностей проекты требуют вложения ресурса R в количестве b_i $\left(i=\overline{1,6}\right)$ каждый. Запас ресурса ограничен величиной B. В результате осуществления проектов будет выпускаться однородная продукция в количестве c_i $\left(i=\overline{1,6}\right)$ ед. соответственно. Спрос на эту продукцию не превышает C ед. Необходимо сформировать оптимальный портфель инвестиционных проектов, если ставка дисконтирования на протяжении всего периода инвестирования будет неизменной и составит r%.

Эффективность i-го инвестиционного проекта характеризуется чистой текущей стоимостью проекта NPV_i $\left(i=\overline{1,6}\right)$. В качестве критерия оптимальности использовать суммарный показатель NPV.

Примечание. В каждом конкретном варианте задачи система ограничений может быть отлична от базового варианта.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 13.1

Вариант 0

Проект	Начальные инвестиции	Чистые денежные потоки по годам, млн д.ед.					b_i	c_i
		1	2	3	4	5		
1	2450	-130	960	1180	1330	1630	120	65
2	1250	280	580	720	580	880	110	180
3	1380	385	440	450	510	650	135	160
4	1400	580	430	380	420	570	100	170
5	2400	-430	1100	1240	1420	1610	90	140
6	1950	150	680	1020	1250	1560	130	140

$I_0 =$	8200		$r =$	20%		$B =$	450
$C =$	520		$k =$	2		$s =$	6

Вариант 1

Проект	Начальные инвестиции	Чистые денежные потоки по годам, млн д.ед.					b_i	c_i
		1	2	3	4	5		
1	2100	-340	1100	940	1400	1400	127	72
2	1550	-170	565	1300	1400	1370	115	185
3	1250	450	730	600	675	650	140	160
4	1300	650	200	470	350	750	98	127
5	2130	-320	1100	1250	1700	2000	105	140
6	1240	480	510	250	520	490	156	135

$I_0 =$	5000		$r =$	15%		$B =$	390
$C =$	500		$k =$	1		$s =$	3

Вариант 2

Проект	Начальные инвестиции	Чистые денежные потоки по годам, млн д.ед.					b_i	c_i
		1	2	3	4	5		
1	2450	-130	730	1180	1330	1630	100	72
2	1250	280	580	730	580	880	90	185
3	1350	450	730	600	675	650	125	160
4	1300	650	200	470	350	750	160	127
5	2100	-340	1100	940	1400	1400	115	140
6	2450	-430	1180	1030	1780	1780	150	135

$I_0 =$	6000		$r =$	18%		$B =$	390
$C =$	440		$k =$	2		$s =$	3

Вариант 3

Проект	Начальные инвестиции	Чистые денежные потоки по годам, млн д.ед.					b_i	c_i
		1	2	3	4	5		
1	1850	-120	610	1100	1200	1430	100	72
2	1470	280	580	730	580	880	90	185
3	1350	450	730	600	675	650	125	160
4	1300	650	200	470	350	750	160	127
5	2100	-340	1100	940	1400	1400	115	140
6	2450	-430	1180	1030	1780	1780	150	135

$I_0 =$	6000		$r =$	18%		$B =$	375
$C =$	370		$k =$	2		$s =$	3

Вариант 4

Проект	Начальные инвестиции	Чистые денежные потоки по годам, млн д.ед.					b_i	c_i
		1	2	3	4	5		
1	1300	100	830	700	570	720	130	85
2	1250	280	580	730	580	880	90	178
3	1350	250	535	610	720	900	125	110
4	1300	290	590	740	590	880	160	115
5	1500	250	610	690	580	850	150	96
6	3200	-450	2500	2050	1450	600	145	140

$I_0 =$	5800		$r =$	17%		$B =$	460
$C =$	350		$k =$	2		$s =$	4

Вариант 5

Проект	Начальные инвестиции	Чистые денежные потоки по годам, млн д.ед.					b_i	c_i
		1	2	3	4	5		
1	1400	500	250	400	320	710	108	97
2	2100	-330	980	1130	1300	1300	95	155
3	1340	480	510	250	520	490	125	110
4	1450	590	440	290	450	600	87	120
5	1420	600	430	295	430	580	150	96
6	2200	-440	1190	1040	1700	1700	145	140

$I_0 =$	4975		$r =$	15%		$B =$	450
$C =$	350		$k =$	2		$s =$	6

Вариант 6

Проект	Начальные инвестиции	Чистые денежные потоки по годам, млн д.ед.					b_i	c_i
		1	2	3	4	5		
1	1860	-200	600	1200	1300	1400	85	100
2	1500	250	610	690	580	850	95	155
3	1340	480	510	250	520	490	115	95
4	2500	-140	740	1190	1340	1640	87	120
5	1420	600	430	295	430	580	90	110
6	2200	-440	1190	1040	1700	1700	145	140

$I_0 =$	6250		$r =$	16%		$B =$	350
$C =$	420		$k =$	1		$s =$	6

Вариант 7

Проект	Начальные инвестиции	Чистые денежные потоки по годам, млн д.ед.					b_i	c_i
		1	2	3	4	5		
1	1500	250	610	690	580	850	190	210
2	2300	-200	940	1080	1210	1500	185	190
3	1340	480	510	250	520	490	250	230
4	2500	-140	870	1180	1340	1640	180	215
5	1420	600	430	295	430	580	90	110
6	2200	-440	1190	1040	1700	1700	245	180

$I_0 =$	6000		$r =$	15%		$B =$	680
$C =$	600		$k =$	1		$s =$	4

Вариант 8

Проект	Начальные инвестиции	Чистые денежные потоки по годам, млн д.ед.					b_i	c_i
		1	2	3	4	5		
1	3800	1250	1610	1690	980	850	100	85
2	2300	-200	940	1080	1210	1500	155	95
3	1340	480	510	250	520	490	95	115
4	2650	-240	1270	1180	1340	1640	120	87
5	1420	600	430	295	430	580	110	90
6	2200	-440	1190	1040	1700	1700	140	145

$I_0 =$	7200		$r =$	14%		$B =$	450
$C =$	330		$k =$	1		$s =$	4

Вариант 9

Проект	Начальные инвестиции	Чистые денежные потоки по годам, млн д.ед.					b_i	c_i
		1	2	3	4	5		
1	2650	-240	1270	1180	1340	1640	72	100
2	1350	450	730	600	675	650	185	90
3	3800	1250	1610	1690	980	850	160	125
4	1850	-120	610	1100	1200	1430	127	160
5	2450	-430	1180	1030	1780	1780	140	115
6	2100	-340	1100	940	1400	1400	135	150

$I_0 =$	6000		$r =$	18%		$B =$	400
$C =$	360		$k =$	2		$s =$	3

Вариант 10

Проект	Начальные инвестиции	Чистые денежные потоки по годам, млн д.ед.					b_i	c_i
		1	2	3	4	5		
1	3700	-330	1960	2180	1330	1630	95	120
2	2250	980	580	720	580	880	180	110
3	1480	585	440	450	510	650	160	135
4	3300	1580	1130	780	720	970	170	100
5	2400	-430	1100	1240	1420	1610	190	190
6	2150	150	680	1020	1250	1560	140	130

$I_0 =$	7900		$r =$	15%		$B =$	520
$C =$	450		$k =$	1		$s =$	6

Вариант 11

Проект	Начальные инвестиции	Чистые денежные потоки по годам, млн д.ед.					b_i	c_i
		1	2	3	4	5		
1	1420	600	430	295	430	580	100	72
2	1350	450	730	600	675	650	90	185
3	3800	1250	1610	1690	980	850	125	160
4	1850	-120	610	1100	1200	1430	160	127
5	3800	1250	1610	1690	980	850	115	140
6	2200	-440	1190	1040	1700	1700	150	135

$I_0 =$	5000		$r =$	18%		$B =$	360
$C =$	400		$k =$	3		$s =$	5

Вариант 12

Проект	Начальные инвестиции	Чистые денежные потоки по годам, млн д.ед.					b_i	c_i
		1	2	3	4	5		
1	2150	150	680	1020	1250	1560	95	120
2	2200	-440	1190	1040	1700	1700	180	110
3	1480	585	440	450	510	650	160	135
4	3300	1580	1130	780	720	970	170	100
5	2400	-430	1100	1240	1420	1610	190	190
6	3700	-330	1960	2180	1330	1630	140	130

$I_0 =$	6900		$r =$	15%		$B =$	490
$C =$	450		$k =$	1		$s =$	6

Порядок выполнения работы (на примере варианта 0)

1. Построение математической модели задачи.

Введем переменные

$$X_j = \begin{cases} 0 - \text{проект отклоняется} \\ 1 - \text{проект принимается} \end{cases} \left(j = \overline{1,6}\right).$$

Целевая функция выражает совокупный NPV портфеля инвестиционных проектов.

$$f = NPV_1 \cdot X_1 + NPV_2 \cdot X_2 + NPV_3 \cdot X_3 + NPV_4 \cdot X_4 + NPV_5 \cdot X_5 + NPV_6 \cdot X_6 \ (\max)$$

Теперь запишем ограничения, которые вытекают из условий задачи.

1. Инвестиционные возможности ограничены I_0:

$$I_0^1 \cdot X_1 + I_0^2 \cdot X_2 + I_0^3 \cdot X_3 + I_0^4 \cdot X_4 + I_0^5 \cdot X_5 + I_0^6 \cdot X_6 \le I_0 .$$

2. В первом году некоторые проекты требуют инвестиций, которые должны быть покрыты доходами от других проектов, т.е.

$$S_1^1 \cdot X_1 + S_1^2 \cdot X_2 + S_1^3 \cdot X_3 + S_1^4 \cdot X_4 + S_1^5 \cdot X_5 + S_1^6 \cdot X_6 \ge 0 .$$

3. Взаимоисключаем проекты k и s:

$$X_k + X_s \le 1 .$$

4. Запасы ресурса ограничены:

$$b_1^1 \cdot X_1 + b_1^2 \cdot X_2 + b_1^3 \cdot X_3 + b_1^4 \cdot X_4 + b_1^5 \cdot X_5 + b_1^6 \cdot X_6 \le B$$

5. По производству продукции:

$$c_1^1 \cdot X_1 + c_1^2 \cdot X_2 + c_1^3 \cdot X_3 + c_1^4 \cdot X_4 + c_1^5 \cdot X_5 + c_1^6 \cdot X_6 \le C$$

6. Ограничения на переменные:

$$X_i = 0 \vee 1 \;\left(i = \overline{1,6}\right).$$

2. Ввод исходных данных (рис. 13.1).

	A	B	C	D	E	F	G
1–4		Объем финансовых средств, млн ден.ед., *I0*	Ставка дисконта, r	Запас ресурса, B	Спрос на продукцию, C	k	s
5		8200	20,00%	450	520	2	6
6							
7	Проект	Начальные инвестиции	Чистые денежные потоки по годам, млн д.ед.				
8			1	2	3	4	5
9	1	2450	-130	960	1180	1330	1630
10	2	1250	280	580	720	580	880
11	3	1380	385	440	450	510	650
12	4	1400	580	430	380	420	570
13	5	2400	-430	1100	1240	1420	1610
14	6	1950	150	680	1020	1250	1560

Рис. 13.1. Исходные данные

3. Расчет показателей эффективности инвестиционных проектов.

Для определения чистой текущей стоимости проекта применим функцию ЧПС(). В ячейку H9 заносим формулу: =ЧПС($C$5;C9:G9)-B9 и копируем ее в ячейки H10:H14 (рис. 13.2).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1–4		Объем финансовых средств, млн ден.ед., *I0*	Ставка дисконта, r	Запас ресурса, B	Спрос на продукцию, C	k	s	
5		8200	20,00%	450	520	2	6	
6								
7	Проект	Начальные инвестиции	Чистые денежные потоки по годам, млн д.ед.					NPV млн д.ед.
8			1	2	3	4	5	
9	1	2450	-130	960	1180	1330	1630	87,66
10	2	1250	280	580	720	580	880	436,14
11	3	1380	385	440	450	510	650	13,98
12	4	1400	580	430	380	420	570	33,47
13	5	2400	-430	1100	1240	1420	1610	54,97
14	6	1950	150	680	1020	1250	1560	467,25

Рис. 13.2. Расчет чистой текущей стоимости проектов

В результате получим искомые значения $NPV_1 = 87{,}66$; $NPV_2 = 436{,}14$; $NPV_3 = 13{,}98$; $NPV_4 = 33{,}47$; $NPV_5 = 54{,}97$; $NPV_6 = 467{,}25$.

4. Решение модели определения оптимального портфеля инвестиционных проектов.

Построенная модель является моделью целочисленного линейного программирования. Для ее решения вводим ограничения и целевую функцию в электронную таблицу (рис.13.3).

Значение целевой функции в ячейке F16 введем, воспользовавшись математической функцией СУММПРОИЗВ. Для этого поместим курсор в ячейку F16, с помощью меню ВСТАВКА – ФУНКЦИЯ вызовем математическую функцию СУММПРОИЗВ. На экране появится диалоговое окно. В массив 1 вводим столбец со значениями переменных J9:J14. В массив 2 введем адрес столбца коэффициентов целевой функции H9:H14. Аналогично укажем левые части ограничений. Итак, каждое ограничение модели записано в отдельной ячейке в виде формулы. В этих ячейках появились значения 0, т.к. исходные значения переменных нулевые.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		Обьем финансовых средств, млн ден.ед., *I0*	Ставка дисконта, r	Запас ресурса, B	Спрос на продукцию, C							
2												
3												
4						k	s					
5		8200	20,00%	450	520	2	6					
6												
7		Начальные	Чистые денежные потоки по годам, млн д.ед.					NPV			b	c
8	Проект	инвестиции	1	2	3	4	5	млн д.ед.	Переменные	Значение		
9	1	2450	-130	960	1180	1330	1630	87,66	x1		120	65
10	2	1250	280	580	720	580	880	436,14	x2		110	180
11	3	1380	385	440	450	510	650	13,98	x3		135	160
12	4	1400	580	430	380	420	570	33,47	x4		100	170
13	5	2400	-430	1100	1240	1420	1610	54,97	x5		90	140
14	6	1950	150	680	1020	1250	1560	467,25	x6		130	140
15												
16		Целевая функция			F=	0						
17												
18						Левая		Правая				
19		ОГРАНИЧЕНИЯ				часть	Знак	часть				
20		1. По финансовым средствам				0	≤	8200				
21		2. По первому году				0	≥	0				
22		3. По ресурсу R				0	≤	450				
23		4. По выпуску продукции				0	≤	520				
24		5. Несовместность проектов				0	≤	1				
25												
26												

Рис. 13.3. Ввод формул модели

Правые части ограничений зададим, указав адреса ячеек с данными ограничений. В ячейку H20 запишем «= B5» и т.д.

Решение введенной задачи осуществляется с помощью функции ПОИСК РЕШЕНИЯ, которая находится в пункте меню СЕРВИС (рис. 13.4 – 13.6).

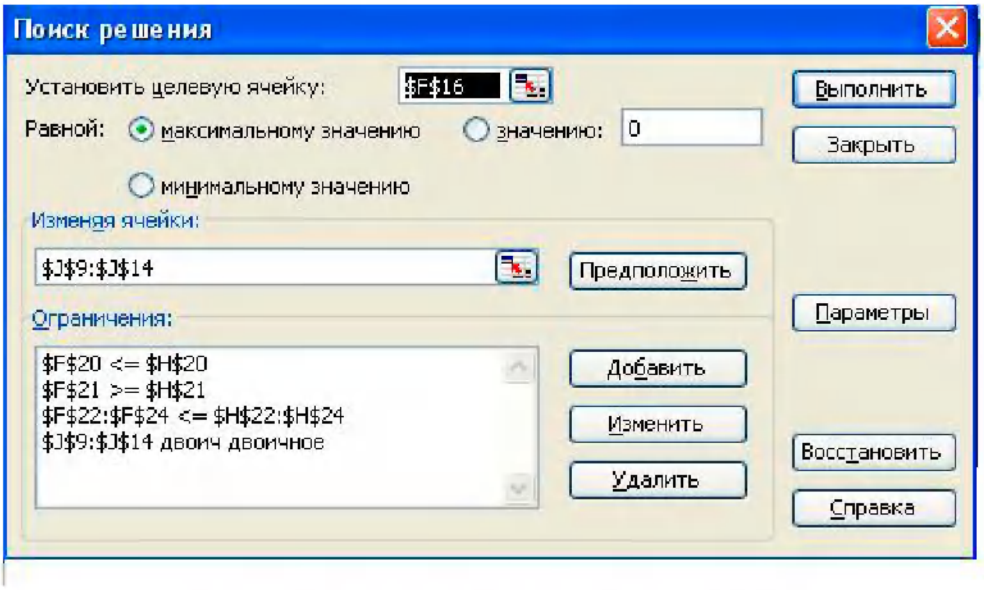


Рис. 13.4 Окно ПОИСК РЕШЕНИЯ

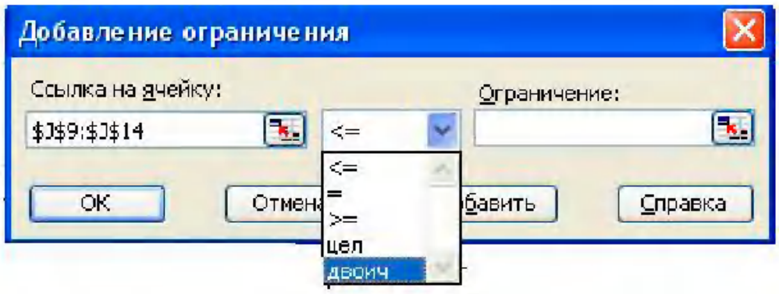


Рис.13.5. Окно ДОБАВЛЕНИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

Если система ограничений и целевая функция построены правильно и модель имеет решение, то на экране появится окно РЕЗУЛЬТАТЫ ПОИСКА РЕШЕНИЯ с сообщением «Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены» (рис. 13.7). Нажмем кнопку ОК. Если решение не найдено, необходимо еще раз проверить все внесенные формулы, значения и ограничения и повторить процесс решения.

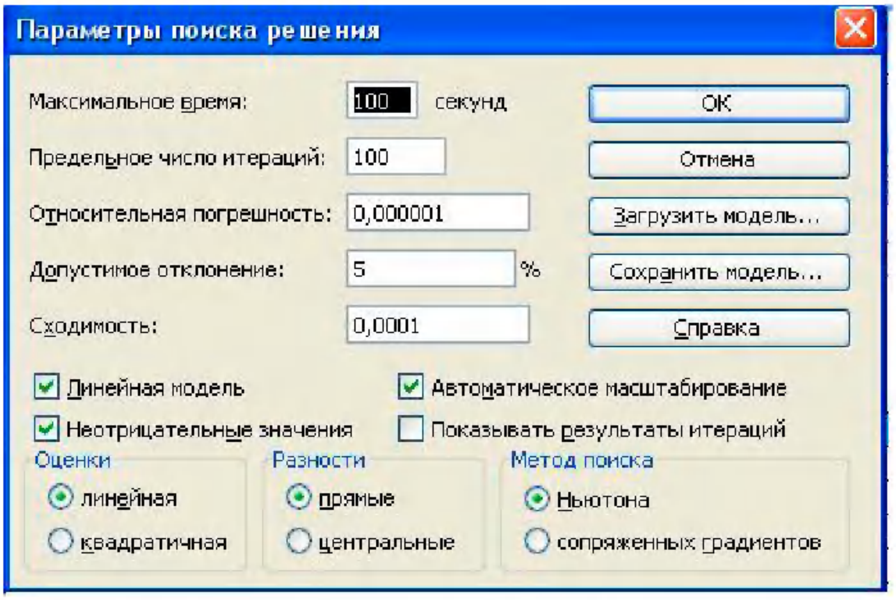


Рис. 13.6. Окно ПАРАМЕТЫ ПОИСКА РЕШЕНИЯ

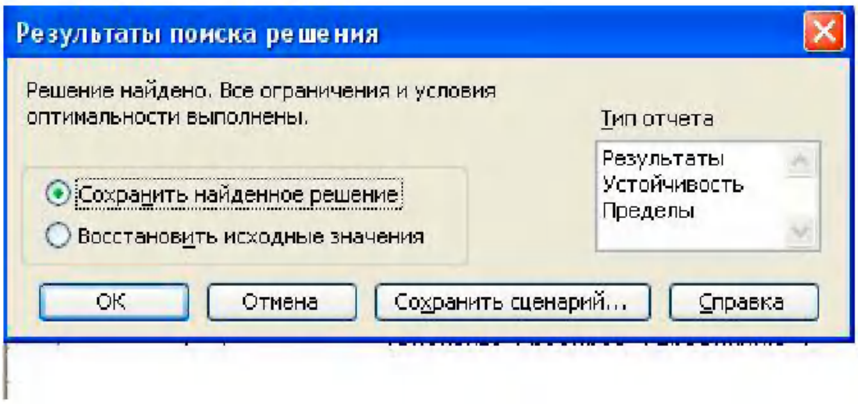


Рис. 13.7. Окно РЕЗУЛЬТАТЫ ПОИСКА РЕШЕНИЯ

Проанализируем полученные результаты (рис. 13.8).

7		Начальные	Чистые денежные потоки по годам, млн д.ед.					NPV		
8	Проект	инвестиции	1	2	3	4	5	млн д.ед.	Переменные	Значение
9	1	2450	-130	960	1180	1330	1630	87,66	x1	1
10	2	1250	280	580	720	580	880	436,14	x2	0
11	3	1380	385	440	450	510	650	13,98	x3	0
12	4	1400	580	430	380	420	570	33,47	x4	1
13	5	2400	-430	1100	1240	1420	1610	54,97	x5	1
14	6	1950	150	680	1020	1250	1560	467,25	x6	1
15										
16		Целевая функция			F=	643,3449				
17										
18						Левая		Правая		
19		ОГРАНИЧЕНИЯ				часть	Знак	часть		
20		1. По финансовым средствам				8200	≤	8200		
21		2. По первому году				170	≥	0		
22		3. По ресурсу R				440	≤	450		
23		4. По выпуску продукции				515	≤	520		
24		5. Несовместность проектов				1	≤	1		
25										

Рис 13.8 Результаты решения задачи

Значения переменных находятся в ячейках J9:J14, а значение целевой функции – в ячейке F16.

Следовательно, решение будет иметь вид $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, т.е. для получения максимальной совокупной чистой текущей стоимости проектов в размере 643,3449 млн. д.ед. предприятию необходимо реализовать проекты 1, 4, 5, 6, а от второго и третьего проектов следует отказаться. Ограничения задачи будут выполнены, при этом финансовые средства будут использованы полностью, из ресурсов использовано лишь 440 ед., а спрос на продукцию удовлетворен в размере 515 ед.

Шаг 3. Оформление отчета.

План отчета.

1. Запишите фамилию, имя, название группы, курс, тему, номер варианта.
2. Запишите модель задачи для своего варианта. Обязательно прокомментируйте экономический смысл переменных и критериев оптимальности.
3. Запишите результаты решения задачи и дайте их экономический анализ.

Лабораторная работа № 14. Структура эффективного портфеля ценных бумаг

Литература: [1], [2], [4].

Постановка задачи. Инвестор формирует портфель из ценных бумаг трех видов А, В и С. Даны доходности ценных бумаг и доходности рынка ценных бумаг М за *n* периодов времени (в процентах).

Требуется:

1. Рассчитать среднюю ожидаемую доходность и риск каждой акции.

2. Рассчитать ковариации доходностей акций друг с другом.
3. Построить ковариацинную матрицу.
4. Построить модель Марковица поиска эффективного портфеля ценных бумаг (уровень доходности и уровень риска задать самостоятельно, исходя из результатов предыдущих вычислений).
5. Определить структуру оптимального портфеля с разрешением и запрещением короткой продажи.
6. Определить чувствительность ценных бумаг к изменениям на рынке.
7. Для эффективного портфеля стоимостью 1000$ найти VaR на один день с доверительным уровнем 95% при условии, что доходности акций имеют нормальное распределение.
8. Провести анализ полученных результатов.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 14.1

$n = 5$		Варианты												
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	1	11	11	11	7	17	11	11	11	25	17	11	11	17
	2	14	14	14	8	19	14	14	14	30	18	14	14	18
	3	15	12	15	11	21	15	15	15	20	19	15	15	19
	4	13	13	13	13	21	13	13	13	23	21	13	13	21
	5	14	14	14	14	23	14	14	14	27	22	14	14	22
B	1	25	16	23	23	23	17	16	17	23	25	25	17	19
	2	30	17	22	22	22	19	18	18	22	30	30	18	17
	3	20	21	21	21	21	19	20	19	21	20	20	19	16
	4	23	22	19	19	19	21	21	21	19	23	23	21	15
	5	27	23	17	17	17	22	23	22	17	27	27	22	12
C	1	19	19	19	19	15	15	19	16	19	23	19	19	19
	2	17	17	17	17	16	16	17	18	17	22	17	17	17
	3	16	16	16	16	17	17	16	20	16	21	16	16	16
	4	15	15	15	15	16	16	15	21	15	19	15	15	15
	5	13	12	12	12	18	18	12	23	14	17	13	13	13
M	1	23	17	17	17	17	23	17	23	21	17	23	23	23
	2	22	18	18	19	19	22	18	22	21	18	22	22	22
	3	21	19	19	19	19	21	19	21	23	19	21	21	21
	4	19	17	21	21	21	19	21	19	23	21	19	19	19
	5	17	18	22	22	22	17	22	17	25	22	17	17	17

Порядок выполнения работы (на примере варианта 0)

1. Ввод условия задачи (рис. 14.1).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	№ п.п.	A	B	C	M		*Модель Марковица*				
2	1	5	10	12	11		Xa	Xb	Xc		№1
3	2	6	8	9	10						
4	3	8	9	8	13						
5	4	7	11	6	14		Rp =	0	*max*		
6	5	9	10	4	15						
7	R	7.000	9.6	7.800	12.600		Vp =	0	=	3	
8	V	2.000	1.040	7.360	3.440						
9		VAB	VBC	VAC				=G3+H3+I3		1	
10		0.200	-0.880	-3.400							
11							Xa	Xb	Xc		№2
12		V1M	V2M	V3M							
13		2.2	1.24	-4.28							
14	β=	0.64	0.36	-1.24			Vp =	0	*min*		
15											
16		2.000	0.200	-3.400			Rp=	0	=	9	
17	V	0.200	1.040	-0.880							
18		-3.400	-0.880	7.360			Сумма	0	=	1	

Рис. 14.1. Исходные данные

2. Расчет ожидаемых доходностей и риска акций.

Доходность акции рассчитаем как среднее арифметическое доходностей. Для этого воспользуемся встроенной функцией СРЗНАЧ(). Поставим курсор в ячейку B7 и вызовем статистическую функцию СРЗНАЧ(), которая возвращает среднее значение массива чисел. Эту функцию скопируем в ячейки C7:E7 (рис. 14.1).

Риск акции рассчитаем при помощи встроенной статистической функции ДИСПР(). Ставим курсор в ячейку B8 и вызываем функцию ДИСПР(). В качестве массива выделяем ячейки B2:B6. Копируем функцию в другие ячейки, чтобы рассчитать риски акций B, C и риск рыночного портфеля.

3. Расчет ковариации доходностей акций друг с другом.

Используем встроенную статистическую функцию КОВАР(). Поставим курсор в ячейку B10 и вызовем функцию КОВАР(). Введем первый массив B2:B6, второй – C2:C6 (рис. 14.1). Результатом будет ковариация доходностей акций А и В. Аналогично определяем ковариации доходностей акций А и С, В и С.

Ковариации доходностей ценных бумаг с доходностями рынка V_{1M}, V_{2M} и V_{3M} рассчитываются аналогичным образом.

4. Построение ковариационной матрицы.

Матрицу V построим, введя в каждой ячейке ссылки. Например, в ячейке В16 должен стоять риск акции А. Тогда, ставим курсор в ячейку В16 и вводим формулу = В8, т.к. именно в ячейке В8 рассчитан риск акции А. В ячейке С16 поставим ковариацию V_{AB}, это будет ссылка на ячейку В10, и так далее (рис. 14.1).

5. Построение модели Марковица.

В нашем случае модель Марковица будет иметь следующий вид:

Модель 1.

$$\overline{R}_p = 7x_A + 9{,}6x_B + 7{,}8x_C (\max)$$

$$\begin{cases} V_p = 2x_A^2 + 1{,}04x_B^2 + 7{,}36x_C^2 + 2\cdot 0{,}2x_A x_B - 2\cdot 0{,}88x_B x_C - 2\cdot 3{,}4x_A x_C = 3 \\ x_A + x_B + x_C = 1 \end{cases}$$

Модель 2.

$$V_p = 2x_A^2 + 1{,}04x_B^2 + 7{,}36x_C^2 + 2\cdot 0{,}2x_A x_B - 2\cdot 0{,}88x_B x_C - 2\cdot 3{,}4x_A x_C (\min)$$

$$\begin{cases} \overline{R}_p = 7x_A + 9{,}6x_B + 7{,}8x_C = 9 \\ x_A + x_B + x_C = 1 \end{cases}$$

Модели с запрещением короткой продажи будут включать условия неотрицательности переменных.

6. Ввод модели.

Отведем ячейки под переменные (G3:I3), не заполняя их. В ячейку Н5 введем формулу для расчета доходности портфеля, т.е. для расчета целевой функции: СУММПРОИЗВ (В7:D7; G3:I3).

Для определения риска портфеля в ячейке H7, необходимо ввести формулу для риска, использующую ссылки на ячейки с рассчитанными вариациями и ковариациями ценных бумаг, например =B8*G3^2+C8*H3^2+D8*I3^2+2*B10*G3*H3+2*C10*H3*I3+2*D10*G3*I3 для данного примера (модель 1).

В строке *Сумма*, ячейка H9, введем формулу для определения суммы долей ценных бумаг в портфеле (можно ввести как сумму ячеек G3, H3, I3 или используя встроенную функцию СУММ()).

Проведем аналогичную подготовительную работу для модели 2.

7. Определение структуры оптимального портфеля.

Решение оптимизационной задачи произведем при помощи команды меню Сервис – Поиск решения. Инструкция по решению оптимизационной задачи находится в приложении. Вводим адрес целевой ячейки (для задачи 1 это ячейка с формулой для доходности портфеля, для задачи 2 – ячейка с формулой для риска портфеля), ее характер (min или max).

В поле ИЗМЕНЯЯ ЯЧЕЙКИ вносим ссылку на массив ячеек, отведенных для переменных модели, например, G3:I3 для модели 1.

В категории ОГРАНИЧЕНИЯ добавим ограничения, нажав кнопку ДОБАВИТЬ. В диалоговом окне ДОБАВЛЕНИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ в поле ССЫЛКА НА ЯЧЕЙКУ введем ссылку на ячейку, содержащую формулу с риском портфеля (модель 1, ограничение 1). Затем выберем характер ограничения (=) и в поле ОГРАНИЧЕНИЕ зададим уровень риска, задав ссылку на ячейку J7, в которой содержится заданный уровень риска. Для завершения ввода первого ограничения выбираем кнопку ДОБАВИТЬ на форме. Аналогично задаем остальные ограничения (сумма долей равна 1 и условия запрещения короткой продажи, если модель содержит таковые). После завершения ввода всех ограничений выбираем кнопку ОК.

Найдем оптимальное решение, нажав кнопку ВЫПОЛНИТЬ на форме «Поиск решения» и сохраним результат.

Аналогично находим оптимальное решение для других моделей.

7. Определение коэффициентов β.

Рассчитываем по формуле на основании данных, полученных на предыдущих шагах.

8. Определить VaR (самостоятельно).

9. Оформление отчета.

План отчета.

1. Запишите фамилию, имя, название группы, курс, тему, номер варианта.
2. Рассчитайте среднюю ожидаемую доходность и риск каждой акции.
3. Рассчитайте ковариации доходностей акций друг с другом.
4. Постройте ковариацинную матрицу.
5. Постройте модель Марковица поиска эффективного портфеля ценных бумаг (уровень доходности и уровень риска задайте самостоятельно, исходя из результатов предыдущих вычислений).
6. Определите структуру оптимального портфеля с разрешением и запрещением короткой продажи.
7. Определите чувствительность ценных бумаг к изменениям на рынке.
8. Для эффективного портфеля стоимостью 1000$ найдите VaR на один день с доверительным уровнем 95% при условии, что доходности акций имеют нормальное распределение.
9. Проведите анализ полученных результатов.

Тема 4. Модели сетевого планирования и управления

Лабораторная работа № 15. Оптимизация сетевого проекта при заданном сроке его выполнения

Литература: [1], [2], [3], [7], [8].

Постановка задачи. Проект представлен сетевым графиком (рис. 15.1 – 15.4).

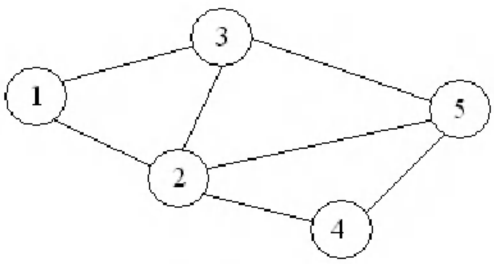


Рис. 15.1. Вариант 0

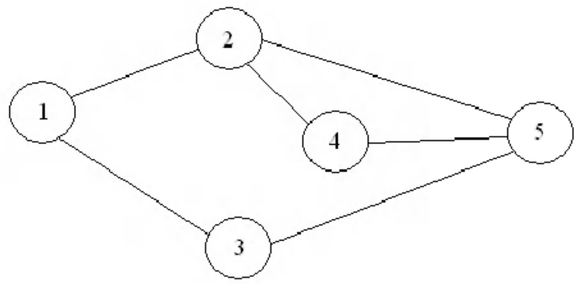


Рис. 15.2. Варианты 1 – 4

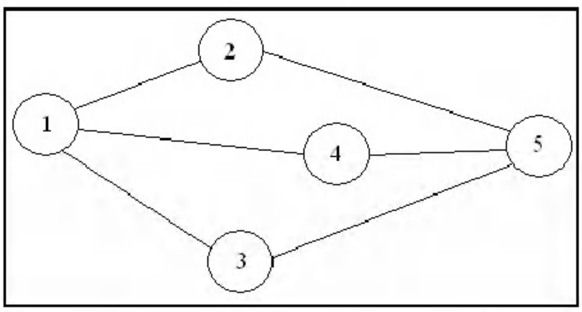


Рис. 15.3. Варианты 5 – 8

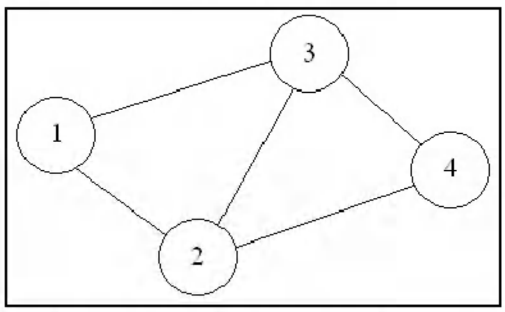


Рис. 15.4. Варианты 9 – 12

Для каждой работы известна ее продолжительность t_{ij} и минимально возможное время ее выполнения d_{ij}. Пусть задан срок выполнения проекта t_0, а расчетное $t_{кр} > t_0$. Продолжительность выполнения работы $(i;\ j)$ линейно зависит от суммы дополнительно вложенных средств x_{ij} и выражается соотношением: $t'_{ij} = t_{ij} - k_{ij} \cdot x_{ij}$. Технологические коэффициенты k_{ij} известны.

Найти такие $t^{н}_{ij}, t^{о}_{ij}, x_{ij}$, чтобы срок выполнения всего комплекса работ не превышал заданной величины t_0; суммарное количество дополнительно вложенных средств было минимальным; продолжительность выполнения каждой работы t'_{ij} была не меньше заданной величины d_{ij}.

Таблица 15.1

Вариант	Параметры	Работы							Срок проекта, t_0
		(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	
0	t_{ij}	6	10	5	3	7	8	5	12
	d_{ij}	4	6	3	2	4	3	3	
	k_{ij}	0,05	0,25	0,1	0,4	0,1	0,2	0,25	

Таблица 15.2

Вариант	Параметры	Работы						Срок проекта, t_0
		(1,2)	(1,3)	(2,4)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	
1	t_{ij}	8	10	9	15	11	4	18
	d_{ij}	6	5	4	8	6	2	
	k_{ij}	0,5	0,2	0,4	0,1	0,05	0,8	
2	t_{ij}	7	9	8	10	12	9	20
	d_{ij}	4	6	5	7	8	5	
	k_{ij}	0,1	0,05	0,25	0,2	0,4	0,5	
3	t_{ij}	10	7	5	6	8	11	16
	d_{ij}	5	5	3	3	6	5	
	k_{ij}	0,01	0,05	0,2	0,4	0,15	0,5	
4	t_{ij}	11	14	6	8	12	8	18
	d_{ij}	6	5	4	5	4	6	
	k_{ij}	0,02	0,25	0,3	0,01	0,24	0,1	

Таблица 15.3

Вариант	Параметры	Работы						Срок проекта, t_0
		(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	
5	t_{ij}	15	21	16	15	10	7	25
	d_{ij}	10	15	10	8	7	4	
	k_{ij}	0,01	0,02	0,04	0,08	0,05	0,08	
6	t_{ij}	15	21	16	15	10	7	30
	d_{ij}	10	15	10	8	7	4	
	k_{ij}	0,01	0,02	0,04	0,08	0,05	0,08	
7	t_{ij}	8	15	6	16	18	12	28
	d_{ij}	5	7	4	12	15	10	
	k_{ij}	0,05	0,2	0,04	0,15	0,4	0,5	
8	t_{ij}	10	5	11	8	8	13	15
	d_{ij}	6	4	3	5	6	7	
	k_{ij}	0,4	0,5	0,2	0,35	0,45	0,08	

Таблица 15.4

Вариант	Параметры	Работы					Срок проекта, t_0
		(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(3,4)	
9	t_{ij}	15	21	28	30	22	50
	d_{ij}	11	14	20	19	12	
	k_{ij}	0,15	0,25	0,4	0,08	0,04	
10	t_{ij}	27	28	26	27	23	35
	d_{ij}	8	12	8	18	11	
	k_{ij}	0,02	0,01	0,08	0,1	0,02	
11	t_{ij}	27	27	18	27	33	58
	d_{ij}	12	12	10	15	20	
	k_{ij}	0,15	0,03	0,05	0,1	0,06	
12	t_{ij}	27	20	16	18	30	62
	d_{ij}	12	7	11	12	20	
	k_{ij}	0,2	0,3	0,01	0,2	0,04	

Порядок выполнения работы (на примере варианта 0).

1. Подготовительная работа.

Построим модель задачи:

$f = x_{12} + x_{13} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{35} + x_{45} (\min)$ – суммарные затраты

$$\begin{cases} t_{25}^{о} \le 12;\ t_{35}^{о} \le 12;\ t_{45}^{о} \le 12 & \text{– срок проекта} \\ t_{12}^{о} - t_{12}^{н} \ge 4;\ t_{13}^{о} - t_{13}^{н} \ge 6;\ \ldots & \text{– минимальная продолжительность работ} \\ t_{12}^{о} - t_{12}^{н} = 6 - 0{,}05x_{12};\ t_{13}^{о} - t_{13}^{н} = 10 - 0{,}25x_{13};\ldots & \text{– зависимость от денежных средств} \\ t_{12}^{о} \le t_{23}^{н};\ t_{12}^{о} \le t_{24}^{н};\ t_{12}^{о} \le t_{25}^{н}; & \text{– последовательность} \\ t_{13}^{о} \le t_{35}^{н};\ t_{23}^{о} \le t_{35}^{н};\ t_{24}^{о} \le t_{45}^{н} & \text{выполнения работ} \end{cases}$$

$t_{ij}^{о} \ge 0;\ t_{ij}^{н} \ge 0;\ x_{ij} \ge 0.$

В ограничениях, выражающих зависимость продолжительности работ от денежных средств, перенесем слагаемые с переменными в правую часть ограничений. Например: $t_{12}^{о} - t_{12}^{н} + 0{,}05x_{12} = 6$, и т.д.

Аналогично преобразуем ограничения, задающие последовательность выполнения работ: $t_{12}^{о} - t_{23}^{н} \le 0;\ t_{12}^{о} - t_{24}^{н} \le 0$, и т.д.

Составим таблицу для ввода исходных данных (рис. 15.5).

Ячейки B3:V3 отведены под переменные. В ячейках B4:V27 и Y5:Y27 записаны коэффициенты при переменных и свободные коэффициенты системы ограничений и коэффициенты целевой функции.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1		Доп. средства							Начало работ							Окончание работ							Лев.ч.огр.	Знак	Пр.ч.огр.
2		x_{12}	x_{13}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{35}	x_{45}	$t^н_{12}$	$t^н_{13}$	$t^н_{23}$	$t^н_{24}$	$t^н_{25}$	$t^н_{35}$	$t^н_{45}$	$t^о_{12}$	$t^о_{13}$	$t^о_{23}$	$t^о_{24}$	$t^о_{25}$	$t^о_{35}$	$t^о_{45}$			
3	Переменные																								
4	ЦФ	1	1	1	1	1	1	1															0	*min*	
5																				1			0	<=	12
6	Срок проекта																				1		0	<=	12
7																						1	0	<=	12
8	Минимальное время выполнения работ								-1							1							0	>=	4
9										-1							1						0	>=	6
10											-1							1					0	>=	3
11												-1							1				0	>=	2
12													-1							1			0	>=	4
13														-1							1		0	>=	3
14															-1							1	0	>=	3
15	Продолжит. работ от вложенных средств	0,05							-1							1							0	=	6
16			0,25							-1							1						0	=	10
17				0,1							-1							1					0	=	5
18					0,4							-1							1				0	=	3
19						0,1							-1							1			0	=	7
20							0,2							-1							1		0	=	8
21								0,25							-1							1	0	=	5
22	Порядок выполнения работ										-1					1							0	<=	0
23												-1				1							0	<=	0
24													-1			1							0	<=	0
25														-1			1						0	<=	0
26														-1				1					0	<=	0
27															-1				1				0	<=	0
28																									
29																							=СУММПРОИЗВ(B$3:V$3;B4:V4)		

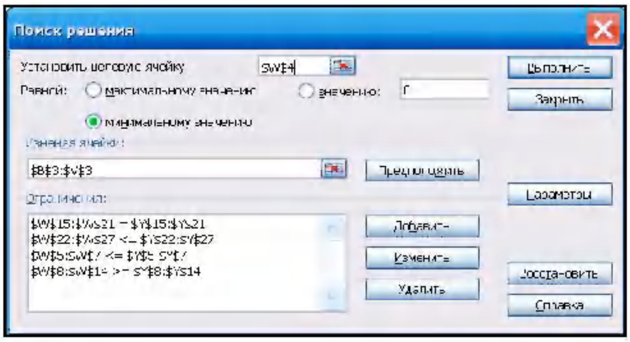
Рис. 15.5. Таблица исходных данных модели

В ячейке W4 введем формулу: W4 = СУММПРОИЗВ(B$3:V$3;B4:V4) и скопируем ее вниз до ячейки W27. Ячейка W4 соответствует значению целевой функции, а W5:W27 – левым частям системы ограничений.

2. Поиск оптимального решения

Вызываем модуль ПОИСК РЕШЕНИЯ меню СЕРВИС. Появится диалоговое окно «Поиск решения» (рис. 15.6).

Установить целевую ячейку: W4; равной: минимальному значению; изменяя ячейки: $B$3:$V$3; ограничения: ДОБАВИТЬ. Появится меню «Добавление ограничения» (рис. 15.7).



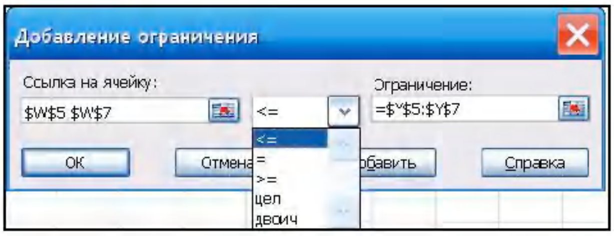
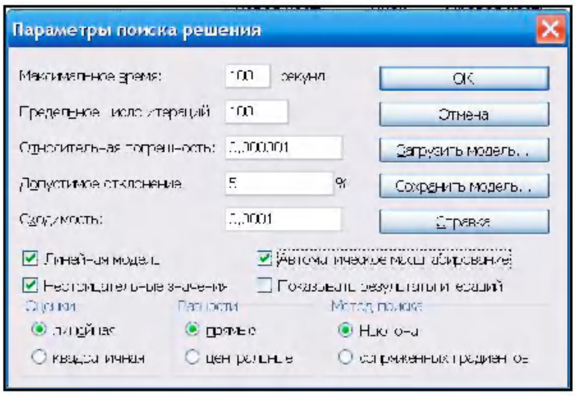


Рис. 15.6. Поиск решения

Рис. 15.7. Добавление ограничения

Ограничения с одинаковыми знаками, стоящие рядом, можно вводить вместе (рис. 15.7) по принципу: левая часть ограничения – знак – правая часть. Если нужно добавить еще одно или несколько ограничений, то нажимаем кнопку ДОБАВИТЬ, если ввод ограничений закончен – ОК. Возвращаемся в меню «Поиск решения» и нажимаем кнопку ПАРАМЕТРЫ (рис. 15.8). В меню «Параметры поиска решения» установим флажки: «Линейная модель», «Неотрицательные значения» (условие неотрицательности переменных), «Автоматическое масштабирование». Нажимаем кнопку ОК и возвращаемся в меню «Поиск решения».



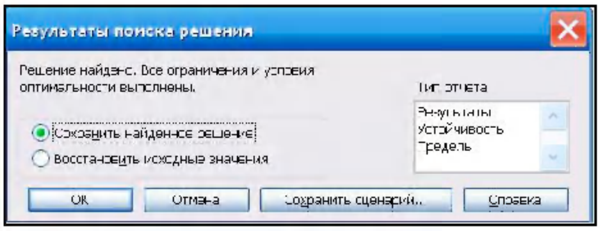


Рис. 15.8. Параметры поиска решения

Рис. 15.9. Результаты поиска решения

Модель полностью введена. Нажимаем кнопку ВЫПОЛНИТЬ. Если все указания выполнены верно, то появится окно (рис. 15.9).

3. Оформление отчета о проделанной работе

План отчета:

1. Запишите фамилию, имя, название группы, номер варианта.
2. Постройте сетевой график до оптимизации, укажите критический путь и критический срок выполнения проекта.
3. Запишите модель задачи и полученное оптимальное решение.
4. Сколько денежных средств придется вложить дополнительно в проект? Как при этом изменится продолжительность работ?
5. Постройте сетевой график, который получился после оптимизации. Какие работы оказались критическими, а какие нет?

Лабораторная работа № 16. Оптимизация сетевого проекта за счет дополнительно вложенных средств

Литература: [1], [2], [3], [7], [8].

Постановка задачи. Проект представлен сетевым графиком. Для каждой работы известна ее продолжительность t_{ij} и минимально возможное время выполнения d_{ij}. Для сокращения срока реализации проекта выделено B ден.ед. Вложение дополнительных средств x_{ij} в работу (i, j) сокращает время ее выполнения до $t'_{ij} = t_{ij} - k_{ij}x_{ij}$. Технологические коэффициенты k_{ij} известны (табл. 16.1).

Требуется найти такие $t^{н}_{ij}$, $t^{о}_{ij}$, x_{ij}, чтобы:

- время выполнения всего комплекса работ было минимальным;
- количество используемых дополнительных средств не превышало $\boldsymbol{B}$ ден. ед.;
- продолжительность выполнения каждой работы была не меньше заданной величины d_{ij}.

Таблица 16.1

Вариант	Пара-метры	Работы (1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(3,4)	(3,5)	(4,5)	Сумма средств *B*, ден.ед.
0	t_{ij}	5	6	2	4	9	7	4	47
	d_{ij}	3	4	1	2	5	4	2	
	k_{ij}	0,5	0,2	0,3	0,25	0,4	0,2	0,1	
1	t_{ij}	24	32	25	36	31	28	20	86
	d_{ij}	14	24	19	26	23	20	18	
	k_{ij}	0,2	0,1	0,32	0,25	0,4	0,5	0,24	
2	t_{ij}	15	20	21	10	14	26	22	54
	d_{ij}	10	12	14	7	9	20	16	
	k_{ij}	0,4	0,1	0,1	0,05	0,8	0,2	0,1	
3	t_{ij}	38	49	34	37	40	29	32	140
	d_{ij}	30	40	27	28	30	20	25	
	k_{ij}	0,04	0,05	0,1	0,16	0,08	0,2	0,1	
4	t_{ij}	25	31	29	20	17	19	30	95
	d_{ij}	20	23	23	16	15	16	18	
	k_{ij}	0,2	0,4	0,5	0,1	0,25	0,12	0,08	
5	t_{ij}	43	54	48	15	36	27	24	124
	d_{ij}	37	46	40	10	28	18	22	
	k_{ij}	0,04	0,1	0,01	0,02	0,32	0,02	0,08	
6	t_{ij}	23	24	31	28	14	10	8	50
	d_{ij}	15	16	22	20	10	6	6	
	k_{ij}	0,2	0,4	0,1	0,75	0,25	0,3	0,1	
7	t_{ij}	42	27	39	26	27	25	20	515
	d_{ij}	32	20	30	18	20	19	15	
	k_{ij}	0,01	0,02	0,4	0,05	0,04	0,1	0,2	
8	t_{ij}	10	18	16	12	7	13	11	42
	d_{ij}	7	14	12	10	5	9	8	
	k_{ij}	0,5	0,1	0,25	0,4	0,2	0,15	0,3	
9	t_{ij}	9	18	21	7	12	19	20	33
	d_{ij}	6	14	18	4	9	15	16	
	k_{ij}	0,2	0,25	0,15	0,4	0,3	0,12	0,2	
10	t_{ij}	15	8	7	5	13	11	7	47
	d_{ij}	12	5	4	3	10	8	4	
	k_{ij}	0,25	0,2	0,15	0,1	0,3	0,4	0,2	
11	t_{ij}	13	22	19	17	10	25	12	49
	d_{ij}	10	18	15	14	7	21	9	
	k_{ij}	0,3	0,1	0,05	0,2	0,4	0,2	0,25	
12	t_{ij}	16	12	10	8	3	9	11	29
	d_{ij}	10	7	6	5	2	7	9	
	k_{ij}	0,2	0,1	0,16	0,3	0,25	0,1	0,4	

Порядок выполнения работы (на примере варианта 0)

1. Составление математической модели задачи.

Запишем все данные на сетевой график (рис. 16.1).

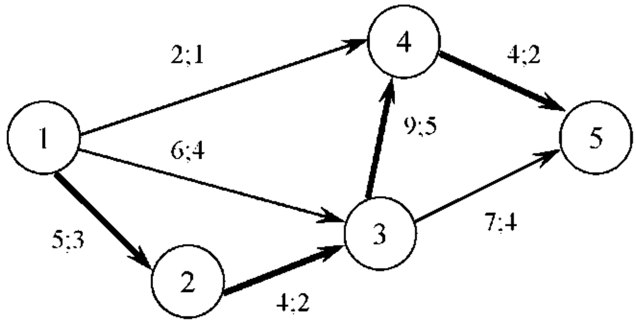


Рис. 16.1. Сетевой график проекта

Если все работы проекта будут выполняться в обычном режиме, то $t_{кр}$ = 22, т.е. проект может быть выполнен за 22 ед. времени.

Чтобы однозначно записать целевую функцию, добавим на сетевом графике фиктивную работу (5; 6) (рис. 16.2).

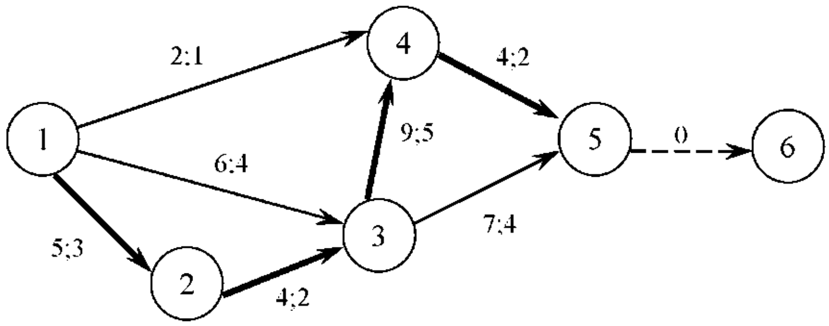


Рис. 16.2. Сетевой график с добавленной фиктивной работой

Тогда целевая функция примет вид:

$$t_{кр} = t^{0}_{56}(\min) .$$

Запишем ограничения задачи:

а) сумма вложенных средств не должна превышать их наличного количества:

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{34} + x_{35} + x_{45} \le 47 ;$$

б) продолжительность выполнения каждой работы должна быть не меньше минимально возможного времени:

$t_{12}^{\text{о}} - t_{12}^{\text{н}} \geq 3$; $t_{34}^{\text{о}} - t_{34}^{\text{н}} \geq 5$;

$t_{13}^{\text{о}} - t_{13}^{\text{н}} \geq 4$; $t_{35}^{\text{о}} - t_{35}^{\text{н}} \geq 4$;

$t_{14}^{\text{о}} - t_{14}^{\text{н}} \geq 1$; $t_{45}^{\text{о}} - t_{45}^{\text{н}} \geq 2$;

$t_{23}^{\text{о}} - t_{23}^{\text{н}} \geq 2$; $t_{56}^{\text{о}} - t_{56}^{\text{н}} \geq 0$;

в) зависимость продолжительности работ от вложенных средств:

$t_{12}^{\text{о}} - t_{12}^{\text{н}} = 5 - 0{,}5x_{12}$; $t_{34}^{\text{о}} - t_{34}^{\text{н}} = 9 - 0{,}4x_{34}$;

$t_{13}^{\text{о}} - t_{13}^{\text{н}} = 6 - 0{,}2x_{13}$; $t_{35}^{\text{о}} - t_{35}^{\text{н}} = 7 - 0{,}2x_{35}$;

$t_{14}^{\text{о}} - t_{14}^{\text{н}} = 2 - 0{,}3x_{14}$; $t_{45}^{\text{о}} - t_{45}^{\text{н}} = 4 - 0{,}1x_{45}$;

$t_{23}^{\text{о}} - t_{23}^{\text{н}} = 4 - 0{,}25x_{23}$;

г) время начала выполнения каждой работы должно быть не меньше времени окончания непосредственно предшествующей ей работы:

$t_{12}^{\text{о}} \leq t_{23}^{\text{н}}$; $t_{14}^{\text{о}} \leq t_{45}^{\text{н}}$;

$t_{13}^{\text{о}} \leq t_{34}^{\text{н}}$; $t_{34}^{\text{о}} \leq t_{45}^{\text{н}}$;

$t_{13}^{\text{о}} \leq t_{35}^{\text{н}}$; $t_{35}^{\text{о}} \leq t_{56}^{\text{н}}$;

$t_{23}^{\text{о}} \leq t_{34}^{\text{н}}$; $t_{45}^{\text{о}} \leq t_{56}^{\text{н}}$;

$t_{23}^{\text{о}} \leq t_{35}^{\text{н}}$;

д) условие неотрицательности неизвестных:

$$t_{ij}^{\text{н}} \geq 0,\ t_{ij}^{\text{о}} \geq 0,\ x_{ij} \geq 0,\ (i, j) \in \vec{e}.$$

2. Численное решение и анализ полученных результатов.

Решив данную задачу средствами EXCEL (см. рис. 16.3 и приложение А), получаем следующие результаты:

$x_{12} = 4$, $x_{13} = 5$, $x_{14} = 0$, $x_{23} = 8$, $x_{34} = 10$, $x_{35} = 0$, $x_{45} = 20$, $x_{56} = 0$,

$t_{12}^{\text{н}} = 0$, $t_{13}^{\text{н}} = 0$, $t_{14}^{\text{н}} = 0$, $t_{23}^{\text{н}} = 3$, $t_{34}^{\text{н}} = 5$, $t_{35}^{\text{н}} = 5$, $t_{45}^{\text{н}} = 10$, $t_{56}^{\text{н}} = 12$,

$t_{12}^{\text{о}} = 3$, $t_{13}^{\text{о}} = 5$, $t_{14}^{\text{о}} = 2$, $t_{23}^{\text{о}} = 5$, $t_{34}^{\text{о}} = 10$, $t_{35}^{\text{о}} = 12$, $t_{45}^{\text{о}} = 12$, $t_{56}^{\text{о}} = 12$, $t_{\text{кр}} = 12$.

Результаты необходимо представить на сетевом графике.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB
1		Доп. средства								Начало работ								Окончание работ								Лев.ч.	Знак	Пр.ч
2		x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{23}	x_{34}	x_{35}	x_{45}	x_{56}	$t^н_{12}$	$t^н_{13}$	$t^н_{14}$	$t^н_{23}$	$t^н_{34}$	$t^н_{35}$	$t^н_{45}$	$t^н_{56}$	$t^к_{12}$	$t^к_{13}$	$t^к_{14}$	$t^к_{23}$	$t^к_{34}$	$t^к_{35}$	$t^к_{45}$	$t^к_{56}$			
3	Переменные	4	5	0	8	10	0	20	0	0	0	0	3	5	5	10	12	3	5	2	5	10	12	12	12			
4	Срок проекта																								1	12	min	
5	Деньги	1	1	1	1	1	1	1	1																	47	<=	47
6	Минималь-ное время выполнения работ									-1								1								3	>=	3
7											-1								1							5	>=	4
8												-1								1						2	>=	1
9													-1								1					2	>=	2
10														-1								1				5	>=	5
11															-1								1			7	>=	4
12																-1								1		2	>=	2
13																	-1								1	0	>=	0
14	Продолжит. работ от вложенных средств	0,5								-1								1								5	=	5
15			0,2								-1								1							8	=	8
16				0,3								-1								1						2	=	2
17					0,3								-1								1					4	=	4
18						0,4								-1								1				9	=	9
19							0,2								-1								1			7	=	7
20								0,1								-1								1		4	=	4
21									100								-1								1	0	=	0
22	Порядок выполнения работ												-1					1								0	<=	0
23														-1					1							0	<=	0
24															-1				1							0	<=	0
25														-1							1					0	<=	0
26															-1						1					0	<=	0
27																-1				1						-8	<=	0
28																-1						1				0	<=	0
29																	-1						1			0	<=	0
30																	-1							1		0	<=	0

Рис. 16.3. Оптимальное решение

Итак, при дополнительном вложении 47 ден.ед., проект может быть выполнен за 12 ед. времени. При этом средства распределятся следующим образом: 4 ден.ед. – в работу (1,2), 5 ден.ед. – в работу (1,3) , 8 ден.ед. – в работу (2,3) , 10 ден.ед. – в работу (3,4) и 20 ден.ед. – в работу (4,5), что приведет к сокращению срока реализации проекта на 10 ед. времени (рис. 16.4).

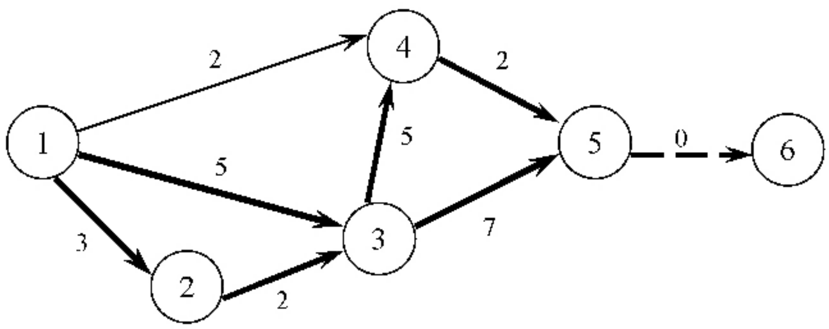


Рис. 16.4. Оптимальное решение

3. Оформление отчета о проделанной работе.

План отчета.

1. Запишите фамилию, имя, название группы, номер варианта.

2. Постройте сетевой график до оптимизации, укажите критический путь и критический срок выполнения проекта.
3. Запишите модель задачи и полученное оптимальное решение.
4. Сколько денежных средств придется вложить дополнительно в каждую работу? Как при этом изменится продолжительность работ и проекта в целом?
5. Постройте сетевой график, который получился после оптимизации. Какие работы оказались критическими, а какие нет?

Тема 5. Модели теории игр

Лабораторная работа № 17. Решение матричной игры в смешанных стратегиях

Литература: [1], [7].

Постановка задачи. На каждой из двух торговых баз ассортиментный минимум составляет один и тот же набор из 4 видов товаров. Магазины, обозначим их A и B, конкурируют между собой. Один и тот же вид товара в обоих магазинах продается по одной и той же цене. Однако товар, поставляемый в магазин B, более высокого качества. Если магазин A завезет с базы товар, отличный от товара, завезенного в магазин B, то товар будет пользоваться спросом и магазин A от его реализации получит прибыль c_j денежных единиц. Если же в магазины A и B завезены товары одинакового вида, то товар в магазине A спросом пользоваться не будет, поскольку такой же товар, по такой же цене, но более высокого качества, можно купить в магазине B, и потому магазин A понесет убытки по хранению и возможно порче товара в размере d_i денежных единиц. Требуется формализовать конфликтную ситуацию, построить матрицу игры и дать рекомендации по выбору оптимальной смешанной стратегии (табл. 17.1).

Таблица 17.1

Пара-метры	Номер варианта												
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
c_1	17	10	137	121	43	68	62	41	52	325	220	280	150
c_2	11	16	223	79	78,3	75	57	45	63	451	324	275	160
c_3	23	23	87	68	53	56	43	38	21	123	156	312	154
c_4	5	7	13	37	48	89	65	44	132	321	235	268	146
d_1	13	8	125	98	38,5	66	23	22	41	112	120	250	138
d_2	12	12	201	67	72	72	32	36	46	320	410	260	197
d_3	20	24	79	57	49	53	31	30	23	110	210	350	164
d_4	7	5	12	43	43	77	34	30	83	220	330	310	184

Порядок выполнения работы (на примере варианта 0)

1. Подготовительная работа.

У руководства магазина ***A*** имеется четыре стратегии: A_i – продавать товар i-го вида $\left(i=\overline{1,4}\right)$. Аналогично у руководства магазина ***B*** стратегии B_j – продавать товар j-го вида $\left(j=\overline{1,4}\right)$. Создадим в Excel форму для платежной матрицы и введем данные задачи (рис. 17.1).

	A	B	C	D	E	F
1		B1	B2	B3	B4	мин
2	A1	-13	17	17	17	-13
3	A2	11	-12	11	11	-12
4	A3	23	23	-20	23	-20
5	A4	5	5	5	-7	-7
6	макс	23	23	17	23	
7						
8		α =	-7			
9		β =	17			

Рис. 17.1. Платежная матрица игры и поиск седловой точки

Определим, имеет ли игра оптимальное решение в чистых стратегиях. Для этого рассчитаем верхнюю и нижнюю чистые цены игры по формулам:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}\,; \quad \beta = \min_j \max_i a_{ij}\,.$$

В ячейке F2 поместим формулу F2 = МИН(B2:E2) и скопируем ее вниз до ячейки F5. В ячейке B6 поместим формулу B6 = МАКС(B2:B5) и скопируем ее вправо до ячейки E6. В ячейках C8 и C9 рассчитаем значения максимина α и минимакса β (рис. 17.1). Так как $\alpha \neq \beta$, то игра не имеет решения в чистых стратегиях.

2. Поиск решение игры в смешанных стратегиях для первого игрока.

Чтобы свести игру к паре двойственных задач линейного программирования, увеличим все элементы платежной матрицы на 20 (рис. 17.2).

	A	B	C	D	E
11		B_1	B_2	B_3	B_4
12	A_1	7	37	37	37
13	A_2	31	8	31	31
14	A_3	43	43	0	43
15	A_4	25	25	25	13

Рис. 17.2. Преобразование исходной платежной матрицы к матрице с неотрицательными элементами

И запишем задачу линейного программирования для игрока А:

$$f = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 7y_1 + 31y_2 + 43y_3 + 25y_4 \geq 1 \\ 37y_1 + 8y_2 + 43y_3 + 25y_4 \geq 1 \\ 37y_1 + 31y_2 + 0y_3 + 25y_4 \geq 1 \\ 37y_1 + 31y_2 + 43y_3 + 13y_4 \geq 1 \\ y_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

Подготовим форму для поиска оптимального решения построенной модели (рис. 17.3). Под переменные отведем ячейки G12:G15. Целевая функция: G16=СУММ(G12:G15). Левая часть каждого ограничения – это сумма произведений коэффициентов на переменные, поэтому введем

B16=СУММПРОИЗВ(B12:B15;$G12:$G15) и скопируем эту формулу до ячейки E16.

В ячейке I16 рассчитаем цену игры по формуле: $v = {}^{1}\!/_{\varphi}$, в ячейках I12:I15 – формулы для расчета вероятностей $q_i = y_i \cdot v$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
11		B_1	B_2	B_3	B_4		Переменные		Вероятности		
12	A_1	7	37	37	37	y_1 =	1	q_1 =	1		
13	A_2	31	8	31	31	y_2 =	0	q_2 =	0		
14	A_3	43	43	0	43	y_3 =	0	q_3 =	0	=G12*I$16	
15	A_4	25	25	25	13	y_4 =	0	q_4 =	0		
16	Ограничения	7	37	37	37		1		1	цена игры	
17		>=	>=	>=	>=						
18		1	1	1	1				=СУММ(G12:G15)		
19							=СУММПРОИЗВ(E12:E15;$G12:$G15)				

Рис. 17.3. Форма для поиска оптимального решения в смешанных стратегиях

Решим задачу при помощи модуля ПОИСК РЕШЕНИЯ (рис. 17.4). Установить целевую ячейку: G16, равной: минимальному значению, изменяя ячейки: G12:G15, ДОБАВИТЬ ограничения: B16:E16 >=B18:E18. ПАРАМЕТРЫ: «Линейная модель», «Неотрицательные значения», «Автоматическое масштабирование».

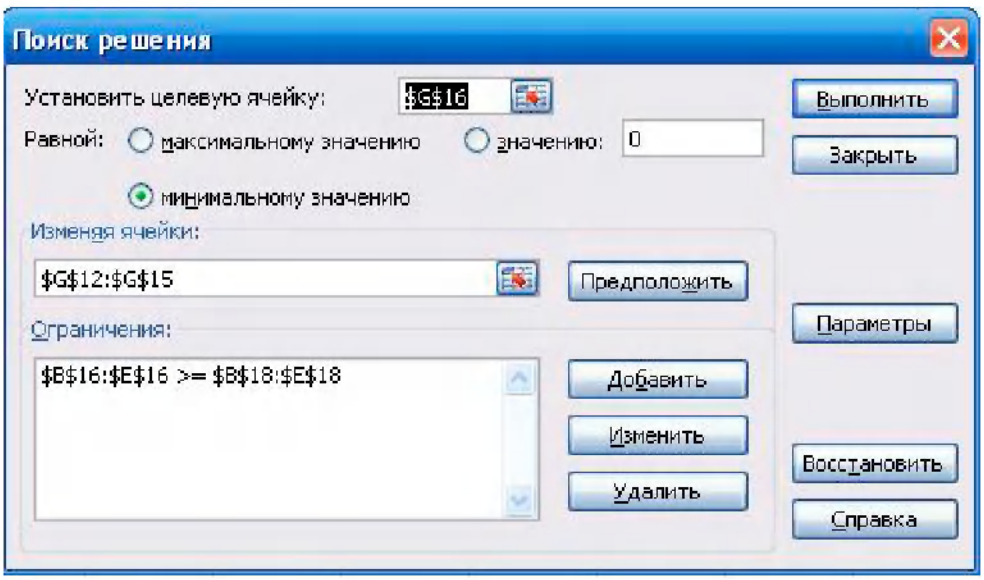


Рис. 17.4. ПОИСК РЕШЕНИЯ в смешанных стратегиях для первого игрока

ВЫПОЛНИТЬ. Вывести «Отчет по устойчивости». После выполнения ПОИСКА РЕШЕНИЯ получим результаты, представленные на рис. 17.5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
11		B_1	B_2	B_3	B_4		Переменные		Вероятности		
12	A_1	7	37	37	37	y_1 =	0,0129	q_1 =	0,3331		
13	A_2	31	8	31	31	y_2 =	0,0168	q_2 =	0,4345		
14	A_3	43	43	0	43	y_3 =	0,009	q_3 =	0,2324		
15	A_4	25	25	25	13	y_4 =	0	q_4 =	0		
16	Ограничения	1	1	1	1,39		0,0388		25,794	цена игры	
17		>=	>=	>=	>=						
18		1	1	1	1				5,7942	цена исходной игры	

Рис. 17.5. Результаты ПОИСКА РЕШЕНИЯ

Запишем полученное оптимальное решение в отчет с его интерпретацией.

Итак, оптимальной стратегией магазина *А* будет продажа товаров в следующей пропорции: 33,3% товара 1; 43,4% товара 2; 23,2% товара 3; средняя прибыль составит 5,79 д.е.

3. Поиск решения в смешанных стратегиях для второго игрока.

Составим оптимизационную модель для поиска оптимального решения в смешанных стратегиях для второго игрока:

$$f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 (\max)$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 37x_2 + 37x_3 + 37x_4 \le 1, \\ 31x_1 + 8x_2 + 31x_3 + 31x_4 \le 1, \\ 43x_1 + 43x_2 + 0x_3 + 43x_4 \le 1, \\ 25x_1 + 25x_2 + 25x_3 + 13x_4 \le 1, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Запишем оптимальное решение данной двойственной модели из графы «Теневые цены» отчета по устойчивости, рассчитанного на основе модели для первого игрока (приложение А). Найдем вероятности использования вторым игроком его стратегий при многократном повторении игры. Составим отчет о проделанной работе.

4. Оформление отчета о проделанной работе.

План отчета.

1. Запишите фамилию, имя, название группы, номер варианта.
2. Запишите значения нижней и верхней чистой цены игры. Сделайте вывод.
3. Запишите модель для определения оптимальной смешанной стратегии игрока A, полученное оптимальное решение $\vec{p}^{\,*}$. Дайте его интерпретацию.
4. Запишите модель для определения оптимальной смешанной стратегии игрока B, полученное оптимальное решение $\vec{q}^{\,*}$. Дайте его интерпретацию.
5. Опишите смысл полученной цены игры для первого и второго игрока.

Лабораторная работа № 18. Решение статистической игры

Литература: [1], [2], [7], [8].

Постановка задачи. Партия из n изделий может изготавливаться по одному из четырех технологических способов. Сырье, необходимое для изготовления этих изделий, может поступать двух сортов. Известны затраты c_{ij} на изготовление изделий по i-му технологическому способу из сырья j-го вида $(i=\overline{1,4}, j=\overline{1,2})$. Рынок сбыта изделий может находиться в двух состояниях R_1 и R_2. Известно, что при состоянии рынка R_1 изделие будет продаваться по цене z_1, а при состоянии рынка R_2 – по цене z_2. Требуется:

1) придать описанной ситуации игровую схему, установить характер игры и определить игроков, указав их возможные стратегии;
2) составить платежную матрицу;
3) определить, по какому из четырех технологических способов следует изготавливать изделие, чтобы получить возможно большую прибыль, если:
   а) известны вероятности q_1 и q_2 поступления сырья первого и второго сортов соответственно и известны вероятности p_1 и p_2 состояний рынка сбыта R_1 и R_2;
   б) о вероятностях поступления сырья и состояниях рынка сбыта ничего определенного сказать нельзя (величина параметра для критерия Гурвица задается значением γ).

Все необходимые данные приведены в таблице 18.1.

Таблица 18.1

Параметры	Номер варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	50	70	45	35	40	65	60	55	50	35
c_{11}	10	7	5	11	9	15	11	12	6	8
c_{12}	8	13	6	8	6	13	13	14	8	7
c_{21}	11	10	7	7	10	16	12	13	7	6
c_{22}	7	6	8	10	5	10	10	11	4	3
c_{31}	12	8	5	8	11	11	9	15	6	8
c_{32}	6	10	10	13	4	12	11	10	9	5
c_{41}	13	7	6	12	9	10	14	9	10	7
c_{42}	8	11	4	9	12	13	6	14	8	6
z_1	18	20	14	18	19	20	16	21	17	16
z_2	16	18	16	14	17	18	18	23	14	13
q_1	0,6	0,3	0,2	0,5	0,8	0,4	0,3	0,2	0,3	0,4
q_2	0,4	0,7	0,8	0,5	0,2	0,6	0,7	0,8	0,7	0,6
p_1	0,3	0,6	0,3	0,2	0,3	0,2	0,8	0,4	0,6	0,5
p_2	0,7	0,4	0,7	0,8	0,7	0,8	0,2	0,6	0,4	0,5
γ	0,9	0,6	0,6	0,8	0,7	0,8	0,6	0,7	0,8	0,7

Порядок выполнения работы

Пример 18. Торговая фирма планирует реализацию овощной продукции в зимний сезон населению республики, учитывая возможные варианты покупательского спроса $П_j$ ($j=\overline{1,4}$) (низкий, средний, высокий, очень высокий). Служба маркетинга разрабатывает три варианта коммерческих стратегий сбыта товаров на различных рынках A_i ($i=\overline{1,3}$). Объем товарооборота, зависящий от стратегий и покупательского спроса, представлен в таблице 18.2.

Таблица 18.2

Платежная матрица товарооборота, тыс. д.е.

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	30	10	20	25
A_2	50	70	10	25
A_3	25	35	40	60

Необходимо выбрать оптимальную стратегию продажи товаров для торговой фирмы, если:

а) известны результаты возможных состояний покупательского спроса, которые соответственно равны 0,3; 0,2; 0,35; 0,15;

б) о состояниях природы ничего определенного сказать нельзя ($\gamma = 0.7$).

1. Подготовительная работа.

Создадим форму в EXCEL (рис. 18.1).

	A	B	C	D	E
1		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
2	A_1	30	10	20	25
3	A_2	50	70	10	25
4	A_3	25	35	40	60

Рис. 18.1. Платежная матрица задачи

2. Поиск оптимальной стратегии по критериям.

Критерий Байеса.

Введем формулу, например, в ячейку F2, используя функцию СУММПРОИЗВ. Для этого поместим курсор в ячейку F2, с помощью команды МАСТЕР ФУНКЦИЙ вызовем математическую функцию СУММПРОИЗВ, На экране появится диалоговое окно, В массив 1 введем строку со значениями элементов платежной матрицы, т.е. B2:E2. В массив 2 введем адрес строки вероятностей, т.е. $B$6:$E$6 (знак $ ставим для того, чтобы адрес строки не менялся при копировании формул). Заметим, что во все диалоговые окна адреса ячеек удобно вводить не с клавиатуры, а протаскивая мышь по ячейкам, чьи адреса следует ввести. Далее копируем формулу из ячейки F2 по столбцу (рис. 18.2).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	**Байеса**		
2	$А_1$	30	10	20	25	=суммпроизв(B2:E2;$B$6:$E$6)		
3	$А_2$	50	70	10	25			
4	$А_3$	25	35	40	60			
5								
6	вероятности	0,3	0,2	0,35	0,15			

Рис. 18.2. Поиск оптимальной стратегии по критерию Байеса

Затем при помощи статистической функции МАКС выбираем наибольшее значение и определяем наилучшую оптимальную стратегию по критерию Байеса (рис. 18.3).

	A	B	C	D	E	F
1		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	**Байеса**
2	$А_1$	30	10	20	25	21,75
3	$А_2$	50	70	10	25	36,25
4	$А_3$	25	35	40	60	37,5
5				=МАКС(F2:F4) ←		37,5
6	вероятности	0,3	0,2	0,35	0,15	$А_3$

Рис. 18.3. Оптимальное решение по критерию Байеса

Критерий Лапласа.

Найдем вероятности для критерия Лапласа, используя статистическую функцию СЧЕТ. Вводим расчетную формулу по аналогии с предыдущим пунктом (по Байесу) и определяем наилучшую стратегию по критерию Лапласа (рис. 18.4).

	A	B	C	D	E	F	G
1		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	**Байеса**	**Лапласа**
2	A_1	30	10	20	25	21,75	21,25
3	A_2	50	70	10	25	36,25	38,75
4	A_3	25	35	40	60	37,5	40
5						37,5	40
6	вероятности	0,3	0,2	0,35	0,15	A_3	A_3
7	вероятности 2	0,25	0,25	0,25	0,25		
8							
9			=1/СЧЁТ($B$2:$E$2)				

Рис. 18.4. Поиск оптимальной стратегии по критерию Лапласа

Критерий Вальда.

Оптимальную стратегию по критерию Вальда определяем при помощи функций МИН и МАКС (рис. 18.5).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	**Байеса**	**Лапласа**	**Вальда**
2	A_1	30	10	20	25	21,75	21,25	10
3	A_2	50	70	10	25	36,25	38,75	10
4	A_3	25	35	40	60	37,5	40	25
5						37,5	40	25
6	вероятности	0,3	0,2	0,35	0,15	A_3	A_3	A_3
7	вероятности 2	0,25	0,25	0,25	0,25			

Рис. 18.5. Оптимальная стратегия по критерию Вальда

Критерий Сэвиджа.

Рассчитаем матрицу рисков по формуле:

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$$

и определим по ней минимаксную стратегию (рис. 18.6).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	**Байеса**	**Лапласа**	**Вальда**
2	$А_1$	30	10	20	25	21,75	21,25	10
3	$А_2$	50	70	10	25	36,25	38,75	10
4	$А_3$	25	35	40	60	37,5	40	25
5						37,5	40	25
6	вероятности	0,3	0,2	0,35	0,15	$А_3$	$А_3$	$А_3$
7	вероятности 2	0,25	0,25	0,25	0,25			
8		50	70	40	60			
9	=МАКС(B2:B4)							
10		**Матрица рисков**				Сэвиджа		
11		20	60	20	35	60		
12		0	0	30	35	35		
13	=B$8-B2	25	35	0	0	35		
14						35		
15						$А_2$, $А_3$		

Рис. 18.6. Поиск оптимальной стратегии по критерию Сэвиджа

Критерий Гурвица.

Введем значения коэффициента γ = 0,7 и коэффициента 1 – γ, например, в ячейки I8 и I9 (рис. 18.7). Для расчета средних выигрышей по критерию Гурвица используем формулу:

$$G_i = \gamma \cdot \min_j a_{ij} + (1 - \gamma) \cdot \max_j a_{ij} .$$

В ячейках I2:I4 рассчитаем средние выигрыши G_i и выберем среди них максимальный при помощи функции МАКС (рис. 18.7).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	**Байеса**	**Лапласа**	**Вальда**	**Гурвица**		
2	$А_1$	30	10	20	25	21,75	21,25	10	16		
3	$А_2$	50	70	10	25	36,25	38,75	10	28		
4	$А_3$	25	35	40	60	37,5	40	25	35,5		
5						37,5	40	25	35,5		
6	вероятности	0,3	0,2	0,35	0,15	$А_3$	$А_3$	$А_3$	$А_3$		
7	вероятности 2	0,25	0,25	0,25	0,25			=$I$8*МИН(B2:E2)+$I$9*МАКС(B2:E2)			
8		50	70	40	60			γ =	0,7		
9								1 - γ =	0,3		

Рис. 18.7. Поиск оптимальной стратегии по критерию Гурвица

3. Оформление отчета о проделанной работе.

План отчета.

1. Укажите фамилию, имя, название группы, номер варианта.
2. Укажите игроков, их стратегии, постройте платежную матрицу игры.
3. Запишите результаты расчетов по каждому критерию. Проанализируйте их. Какая стратегия является оптимальной? Почему?

Тема 6. Модели управления запасами

Лабораторная работа № 19. Однономенклатурные модели управления запасами

Литература: [1], [2], [7], [8].

Постановка задачи. Годовая потребность фирмы в некоторой продукции составляет v ед., затраты на хранение 1 ед. в год – s д.е. Затраты на подготовительно-заключительные операции, не зависящие от величины поставляемой партии и связанные с каждой поставкой, равны K д.е. Среднее время реализации заказа – Θ дней.

Найти оптимальный размер партии поставки, интервал между поставками, годовые затраты, связанные с работой данной системы, точку заказа, минимальный начальный запас. Построить график текущего и фиктивного уровня запаса. Сравнить оптимальные затраты с затратами действующей системы поставок – один раз в месяц.

Таблица 19.1

Вариант	Параметры			
	v	s	K	Θ
0	5000	5	45	15
1	45000	90	700	10
2	800	5	30	26
3	790	44	62	30
4	9000	6	120	10
5	8800	10	110	32

Окончание таблицы 19.1

Вариант	Параметры			
	v	s	K	Θ
6	7920	12	210	30
7	1250	25	150	40
8	5600	4	700	95
9	4500	7	200	30
10	60000	12	400	17
11	30000	7	140	5
12	16000	2	250	50

Порядок выполнения работы (на примере варианта 0)

1. Подготовительная работа.

Введем исходные данные в электронные таблицы Excel (рис. 19.1).

	A	B	C	D
1	**Исходные данные**			
2	Спрос на товар	v =	5000	ед. / год
3	Затраты на хранение	s =	5	д.е./(ед. · год)
4	Затраты на размещение заказа	K =	45	д.е.
5	Время реализации заказа	Θ =	15	дней

Рис. 19.1. Исходные данные

2. Расчет оптимальных параметров модели.

Учитывая, что речь идет о модели управления запасами с точкой заказа, рассчитаем оптимальные характеристики модели по формулам:

- оптимальный размер партии поставки: $q^* = \sqrt{\dfrac{2Kv}{s}}$,
- интервал между поставками в днях: $\tau^* = \dfrac{q^*}{v} \cdot 365$,
- годовые издержки: $L^* = K \cdot \dfrac{v}{q^*} + s \cdot \dfrac{q^*}{2}$,
- точка заказа: $r^* = \Theta \cdot v - \left[\dfrac{\Theta}{\tau^*}\right] \cdot q^*$,
- минимальный начальный запас: $I_0 = \Theta \cdot v$.

При вводе данных формул воспользуемся встроенными функциями: КОРЕНЬ, ЦЕЛОЕ. Также используем ссылки на ячейки с соответствующими значениями.

Результаты расчетов представлены на рис. 19.2.

	A	B	C	D
8	Размер партии поставки	q =	300	ед.
9	Интервал между поставками	τ =	21,9	дней
10	Годовые издержки	L =	1500	д.е. / год
11	Точка заказа	r =	205,4795	ед.
12	Минимальный начальный запас	I_0 =	205,4795	ед.

Рис. 19.2. Оптимальные характеристики работы системы

3. Построение графика.

Для построения графика текущего запаса сформируем таблицу 19.1. В первом столбце данной таблицы отразим моменты времени (в днях), которые соответствуют **заказу** или **поступлению** новой партии на склад. Во втором столбце – значения текущего запаса для соответствующего момента времени, в третьем – текущий запас плюс объем уже заказанной продукции.

Таблица 19.1

Время, дн.	Текущий запас	Фиктивный запас	Точка заказа
0	205,4795	505,47945	205,4795
15	0	300	205,4795
15	300	300	205,4795
21,9	205,4795	205,47945	205,4795
21,9	205,4795	505,47945	205,4795
36,9	0	300	205,4795
36,9	300	300	205,4795
43,8	205,4795	205,47945	205,4795
43,8	205,4795	505,47945	205,4795
58,8	0	300	205,4795
58,8	300	300	205,4795
65,7	205,4795	205,47945	205,4795
65,7	205,4795	505,47945	205,4795

Так, например, в начальный момент времени на складе должен находиться минимальный начальный запас – 205,5 ед. продукции, в этот же момент нужно заказать партию 300 ед. (рис. 19.2), которая поступит на склад на 15 день, т.е. в тот момент, когда будет израсходован начальный запас. В промежуток времени между 15 днем и 21,9 днем текущий запас и фиктивный запас совпадают. В момент времени 21,9 нужно заказать новую партию, т.к. этот момент соответствует точке заказа 205,5 ед. продукции. Поэтому позже между 21,9 днем и 36,9 днем текущий и фиктивный запас снова будут различаться и т.д.

Далее выделим диапазон данных, содержащих построенную таблицу, и вызовем команду ВСТАВКА – ДИАГРАММА – Точечная с прямыми отрезками и маркерами. При желании зададим нужное оформление и получим график (рис. 19.3), на котором отражены текущий запас, фиктивный запас и точка заказа. Также на графике видны моменты повторения заказов и моменты поступления продукции на склад.

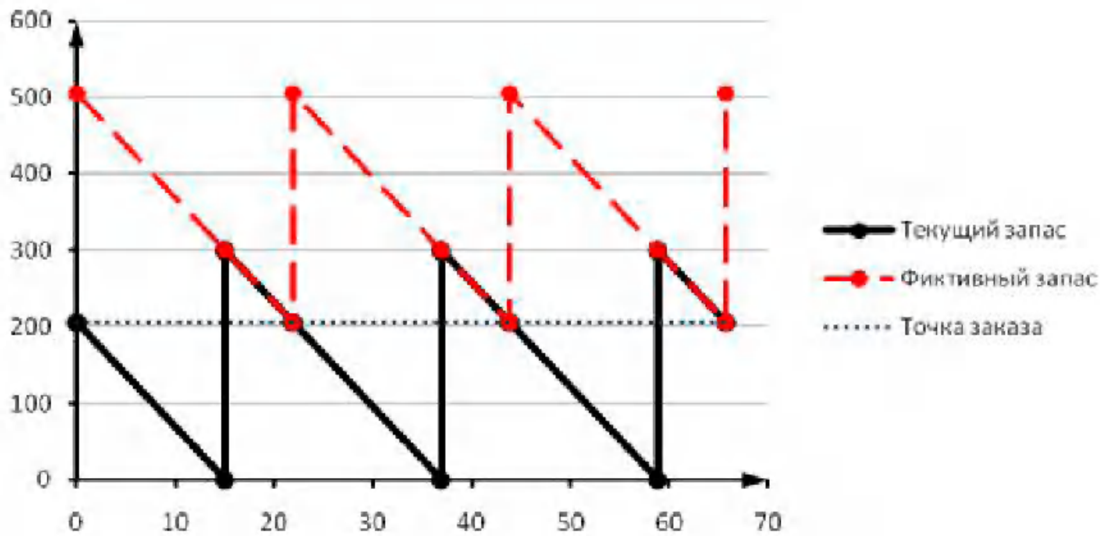


Рис. 19.3. График текущего и фиктивного запаса

Для того чтобы сравнить оптимальные параметры системы с действующей системой поставок – один раз в месяц, запишем соответствующее значение в ячейку C8 (рис. 19.2) вместо оптимального. В нашем случае это значение 416,7 ед. Все остальные значения в таблице будут автоматически пересчитаны по введенным ранее формулам (рис. 19.4). Эти значения не соответствуют оптимальной работе системы, т.к. годовые издержки на 81,7 д.е. больше минимальных.

	A	B	C	D
8	Размер партии поставки	q =	416,6667	ед.
9	Интервал между поставками	τ =	30,41667	дней
10	Годовые издержки	L =	1581,667	д.е. / год
11	Точка заказа	r =	205,4795	ед.
12	Минимальный начальный запас	I_0 =	205,4795	ед.

Рис. 19.4. Характеристики текущей системы управления запасами

Шаг 4. Оформление отчета о проделанной работе.

План отчета.

1. Запишите фамилию, имя, название группы, номер варианта.
2. Запишите значения исходных данных решаемой задачи.
3. Запишите полученные оптимальные значения параметров системы управления запасами.
4. Сравните оптимальные параметры работы системы с действующей системой поставок. Укажите, в каком объеме фирма заказывает продукцию при действующей системе, какие несет затраты.
5. Постройте график текущего и фиктивного запаса. Укажите точку заказа и моменты повторения заказов.

Лабораторная работа № 20. Многономенклатурные модели управления запасами: выбор оптимальной стратегии управления запасами в различных условиях

Литература: [1], [3].

Постановка задачи. Склад оптовой торговли отпускает 5 видов товаров. Известны потребности v_i, издержки заказа K_i, издержки содержания

s_i, расход складской площади на единицу товара f_i, а также величина складской площади торгового зала F (табл. 20.1).

1. Определить оптимальные партии поставок при ограничении на максимальный уровень запаса при условии, что все пять видов продукции поступают на склад от разных поставщиков (раздельная оптимизация).
2. Продукция поступает из одного источника (полное совмещение заказов). Издержки размещения заказов в этом случае равны средним издержкам индивидуальных издержек заказа плюс 25% от стоимости организации заказа по каждому продукту.
3. Сравнить полученные результаты с действующей системой поставок – один раз в квартал – без учета ограничений на складские площади.

Таблица 20.1

Номер варианта	Размер склада, F	Параметр	Номенклатура товара				
			1	2	3	4	5
0	1000	v_i	8000	160	1800	150	200
		K_i	40	5	6	6	30
		s_i	16	4	6	2	30
		f_i	20	3	4	3	15
1	1200	v_i	900	700	300	1000	200
		K_i	10	5	20	30	6
		s_i	5	15	10	2	3
		f_i	16	4	15	22	10
2	500	v_i	400	600	800	700	200
		K_i	10	12	11	9	8
		s_i	16	8	8	7	4
		f_i	4	3	5	4	4
3	500	v_i	700	200	500	150	800
		K_i	5	5	20	3	4
		s_i	15	4	10	2	20
		f_i	20	5	2	8	4
4	1500	v_i	3000	5000	6400	1500	80
		K_i	4	6	7	6	4
		s_i	40	6	14	6	16
		f_i	4	3	5	40	20
5	900	v_i	900	400	800	200	150
		K_i	5	10	11	7	2
		s_i	4	7	6	4	2
		f_i	8	5	6	3	3
6	800	v_i	4000	2000	8000	600	1500
		K_i	10	7	15	110	6
		s_i	8	70	6	8	20
		f_i	3	2	2	5	30

Окончание таблицы 20.1

Номер варианта	Размер склада, F	Параметр	Номенклатура товара				
			1	2	3	4	5
7	1350	v_i	5000	7000	2000	200	800
		K_i	6	110	7	5	4
		s_i	15	8	20	4	8
		f_i	10	5	2	3	4
8	1000	v_i	48000	22400	6400	8600	2460
		K_i	120	160	130	140	110
		s_i	200	280	260	200	250
		f_i	1,8	1,6	1,2	1,5	1,4
9	1250	v_i	3200	2100	5400	7900	2420
		K_i	110	150	120	130	100
		s_i	150	260	240	200	230
		f_i	14	5	3	4	6
10	5000	v_i	1350	1210	1150	1300	890
		K_i	70	65	80	77	93
		s_i	11	9	3	7	6
		f_i	8	9	4	6	7
11	1500	v_i	800	250	180	1500	400
		K_i	20	5	9	15	20
		s_i	20	4	10	2	10
		f_i	15	5	12	4	10
12	2000	v_i	160	500	180	1200	200
		K_i	40	10	6	60	30
		s_i	2	4	60	10	30
		f_i	10	13	40	30	15

Порядок выполнения работы (на примере варианта 0)

1. Подготовительная работа.

Построим таблицу и внесем в нее исходные данные (рис. 20.1).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Вид товара	Потребность	Издержки заказа	Издержки содержания	Расход складской площади на ед. товара	Объем поставок	Затраты	Расход складской площади
2	i	v_i	K_i	s_i	f_i	q_i	L_i	$f_i q_i$
3	1	8000	40	16	20	1	320008	20
4	2	160	5	4	3	1	802	3
5	3	1800	6	6	4	1	10803	4
6	4	150	6	2	3	1	901	3
7	5	200	30	30	15	1	6015	15
8							338529	45
9				=C3*B3/F3+D3*F3/2			↓	<=
10					=СУММ(G3:G7)		min	1000

Рис. 20.1. Исходные данные

В ячейках B3:E7 запишем исходные данные для решения задачи (рис. 20.1). В ячейках G3:G7 введем формулы для расчета затрат на организацию поставок и хранение товаров по отдельным номенклатурам. H3:H7 – формулы для расчета площадей для хранения товаров.

2. Раздельная оптимизация без ограничений на складские площади.

В ячейках F3:F7 рассчитаем значения оптимальных партий поставки по формуле:

$$q_i^* = \sqrt{\frac{2K_i v_i}{s_i}},\ i = \overline{1,5}. \tag{20.1}$$

Получим, что минимальные суммарные издержки при найденных оптимальных значениях партий поставки будут равны $L_{\min}$ = 4300 д.е., однако такие объемы товаров должны занимать площадь 4690 м^2 (рис. 20.2). Складские площади не позволяют заказывать товары в таких объемах.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Вид товара	Потребность	Издержки заказа	Издержки содержания	Расход складской площади на ед. товара	Объем поставок	Затраты	Расход складской площади
2	i	v_i	K_i	s_i	f_i	q_i	L_i	$f_i q_i$
3	1	8000	40	16	20	200	3200	4000
4	2	160	5	4	3	20	80	60
5	3	1800	6	6	4	60	360	240
6	4	150	6	2	3	30	60	90
7	5	200	30	30	15	20	600	300
8							4300	4690
9							↓	<=
10							min	1000

Рис. 20.2. Оптимальное решение без ограничений на складские площади

3. Раздельная оптимизация с ограничениями на складские площади.

Составим оптимизационную модель:

$$L = \sum_{i=1}^{5} \left(\frac{K_i v_i}{q_i} + s_i \cdot \frac{q_i}{2} \right) \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{5} f_i q_i \le F$$

$$q_i \ge 0, \ i = \overline{1,5}.$$

Целевая функция L данной модели находится в ячейке G8, левая часть ограничения – в ячейке H8 (рис. 20.1, 20.2).

Используем модуль ПОИСК РЕШЕНИЯ (рис. 20.3). ПАРАМЕТРЫ поиска решения: «Неотрицательные значения», «Автоматическое масштабирование». ВЫПОЛНИТЬ. Вывести ОТЧЕТ ПО УСТОЙЧИВОСТИ.

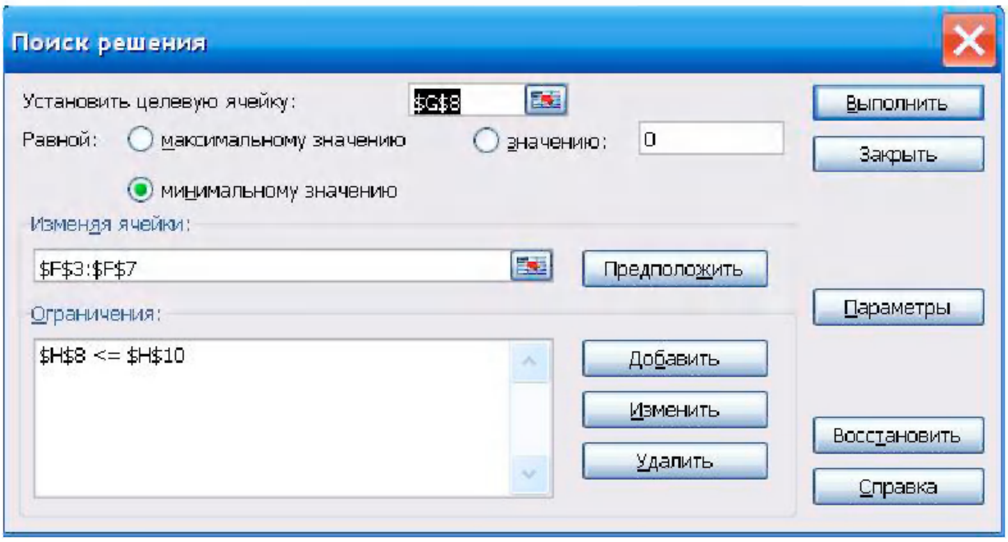


Рис. 20.3. Работа в меню ПОИСК РЕШЕНИЯ

ПОИСК РЕШЕНИЯ привел к результатам, представленным на рис. 20.4 и 20.5.

	A	F	G	H
1	Вид товара	Объем поставок	Затраты	Расход складской площади
2	i	q_i	L_i	$f_i q_i$
3	1	40,46743	8231,332	809,3487
4	2	5,111713	166,7267	15,33514
5	3	16,3552	709,4061	65,42079
6	4	5,591439	166,5518	16,77432
7	5	6,20807	1059,605	93,12106
8			10333,62	1000
9			↓	<=
10			min	1000

Рис. 20.4. Результаты ПОИСКА РЕШЕНИЯ

Минимальные издержки 10333,62 д.е. при ограничении на площади склада 1000 м^2 будут получены, если заказывать товары в объемах 40,47, 5,11, 16,36, 5,59, 6,21 ед. соответственно. Множитель Лагранжа $\lambda = -9{,}37$.

	A	B	C	D	E
6	Изменяемые ячейки				
7				Результ.	Нормир.
8		Ячейка	Имя	значение	градиент
9		$F$3	qi	40,46743455	0
10		$F$4	qi	5,111713424	0
11		$F$5	qi	16,35519806	0
12		$F$6	qi	5,59143935	0
13		$F$7	qi	6,208070358	0
14					
15	Ограничения				
16				Результ.	Лагранжа
17		Ячейка	Имя	значение	Множитель
18		$H$8	fiqi	999,9999969	-9,370306704

Рис. 20.5. Отчет по устойчивости

4. Расчет характеристик системы при полном совмещении заказов с учетом ограничений на складские площади.

Издержки размещения заказа предлагается рассчитать по формуле:

$$K = \overline{K} \cdot (1 + 0{,}25 \cdot n),$$

где n – количество номенклатур товара, $\overline{K}$ рассчитывается с помощью функции СРЗНАЧ.

Для расчета оптимального интервала между поставками используем следующую формулу:

$$t^* = \min\{t_0; t_1\},$$

где $t_0 = \sqrt{\dfrac{2K}{\sum_{i=1}^{5} s_i v_i}}$, $t_1 = \dfrac{F}{\sum_{i=1}^{5} f_i v_i}$ (используем встроенные функции КОРЕНЬ, СУММПРОИЗВ).

Оптимальные значения объемов поставляемых партий:

$$q_i^* = t^* \cdot v_i,\ i = \overline{1,5}.$$

Среднегодовые издержки работы системы будут равны:

$$L^* = \frac{K}{t^*} + \frac{1}{2} t^* \sum_{i=1}^{5} s_i v_i .$$

Для реализации представленной модели скопируем таблицу из ячеек A1:H10 в ячейки A13:H22 и видоизменим ее. Рассчитаем значения параметров K, t_0, t_1, t^*, L^*. В ячейках F15:F19 найдем значения $q_i^*, i = \overline{1,5}$ (рис. 20.6).

	A	B	C	D	E	F	G
13	Вид товара	Потребность	Издержки заказа	Издержки содержания	Расход складской площади на ед. товара	Объем поставок	Расход складской площади
14	i	v_i	K_i	s_i	f_i	q_i	$f_i q_i$
15	1	8000	40	16	20	46,74809	934,9617
16	2	160	5	4	3	0,934962	2,804885
17	3	1800	6	6	4	10,51832	42,07328
18	4	150	6	2	3	0,876527	2,62958
19	5	200	30	30	15	1,168702	17,53053
20	K =	39,15	д.е.	t^* =	0,005844	года	1000
21	t_0 =	0,023179	года	L =	7125,556	д.е.	<=
22	t_1 =	0,005844	года				1000

Рис. 20.6. Оптимальные характеристики системы с полным совмещением заказов и учетом ограничений на складские площади

Таким образом, минимальные годовые издержки 7125,6 д.е. будут получены, если товар 1-го вида заказывать в размере 46,7 ед., 2-го вида – 0,93 ед., 3-го вида – 10,5 ед., 4-го вида – 0,88 ед., 5-го вида – 1,17 ед. При этом заказы необходимо формировать каждые 2,13 дня, а в моменты поступления каждой новой партии склад будет заполнен полностью.

5. Действующая система поставок – один раз в квартал – без учета ограничений на складские площади.

Самостоятельно рассчитать объемы партий поставок, суммарные затраты и площадь, занимаемую товарами при такой системе.

6. Оформление отчета о проделанной работе.

План отчета.

1. Запишите фамилию, имя, название группы, номер варианта.
2. Запишите результаты расчетов в форме таблицы:

Раздельная оптимизация с учетом ограничений на складские площади	Полное совмещение заказов при ограничении на складские площади	Действующая система
$\vec{q}^{\,*} = \ldots$, $\sum_{i=1}^{5} f_i q_i = \ldots$, $\lambda = \ldots$, $L^* = \ldots$.	$\vec{q}^{\,*} = \ldots$, $t^* = \ldots$, $\sum_{i=1}^{5} f_i q_i = \ldots$, $L^* = \ldots$.	$\vec{q} = \ldots$, $\sum_{i=1}^{5} f_i q_i = \ldots$, $L = \ldots$.

Дайте экономическую интерпретацию каждого решения. Сравните полученные решения между собой.

3. Чему оказался равен множитель Лагранжа при решении задачи раздельной оптимизации с ограничениями на площади склада? Каков его экономический смысл?
4. Постройте график текущего запаса для первого вида товара для каждой из трех систем управления запасами.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Отчеты команды ПОИСК РЕШЕНИЯ

Пусть решается оптимизационная задача, которая записана в виде:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n \to opt$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n \ge b_3; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \{\le, \ge, =\} b_m; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, j = \overline{1,n}.$$

При решении задачи линейной оптимизации можно получить результаты, представленные в виде отчетов.

Отчет по результатам

Отчет по результатам состоит из трех таблиц. Сведения о целевой функции можно увидеть в таблице «Целевая ячейка» (табл. А-1). В столбце «Исходное значение» приведено значение целевой функции до начала вычислений. В столбце «Результат» дано оптимальное значение целевой функции.

Таблица А-1

Целевая ячейка (Максимум/минимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
\$G\$6	$f=$	f_0	f_{opt}

Таблица «Изменяемые ячейки» дает сведения об исходных значениях переменных задачи в столбце «Исходное значение» и оптимальных значениях переменных величин в столбце «Результат» (табл. А-2).

Таблица А-2

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
\$D\$3	x1	x_1^0	x_1^*
\$E\$3	x2	x_2^0	x_2^*
\$F\$3	x3	x_3^0	x_3^*
…	…	…	…

Таблица «Ограничения» показывает результаты оптимального решения для ограничений (табл. А-3). В графе «Формула» приведены зависимости, которые были введены в диалоговое окно ПОИСК РЕШЕНИЯ. В графе «Значение» даны значения левых частей ограничений при оптимальном решении. В графе «Разница» показаны значения балансовых переменных.

Таблица А-3

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
\$G\$8	Ограничение 1	b_1^*	\$G\$8<=\$I\$8	не связан.	$b_1 - b_1^*$
\$G\$9	Ограничение 2	b_2^*	\$G\$9<=\$I\$9	связанное	$b_2 - b_2^*$
\$G\$10	Ограничение 3	b_3^*	\$G\$10>=\$I\$10	связанное	$b_3^* - b_3$
\$G\$11	…	…	…	…	…

Отчет по устойчивости

В таблице «Изменяемые ячейки» отчета по устойчивости можно увидеть следующие данные (табл. А-4): графа «Результирующее значение» содержит значения переменных в оптимальном плане, в графе «Нормированная стоимость» находятся значения дополнительных двойственных переменных, которые показывают, насколько изменяется целевая функция при принудительном увеличении значения соответствующей переменной в оптимальном решении на единицу. В графе «Целевой коэффициент» находятся значения коэффициентов целевой функции, графы «Допустимое увеличение» и «Допустимое уменьшение» содержат предельные значения приращения коэффициентов, в которых сохраняется набор переменных, входящих в оптимальное решение исходной задачи.

Таблица А-4

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$D\$3	x1	x_1^*	y_{m+1}^*	c_1	Δc_1^{+}	Δc_1
\$E\$3	x2	x_2^*	y_{m+2}^*	c_2	Δc_2^{+}	Δc_2^{-}
\$F\$3	x3	x_3^*	y_{m+3}^*	c_3	Δc_3^{+}	Δc_3
…	…	…	…	…	…	…

В таблице «Ограничения» приводятся аналогичные данные для ограничений (табл. А-5). Графа «Результирующее значение» содержит значения левых частей ограничений при оптимальном решении. В графе «Теневая цена» находятся двойственные оценки, которые показывают, как изменится целевая функция при увеличении правой части соответствующего ограничения на единицу. Графа «Ограничение. Правая часть» содержит значения правых частей ограничений. В столбцах «Допустимое увеличение» и «Допустимое уменьшение» находятся значения максимальных приращений правых частей ограничений, при которых сохраняются значения двойственных оценок (теневых цен). Значение 1E+30 – это $1 \cdot 10^{30}$, что означает бесконечность, 1,27E-17 – это $1{,}27 \cdot 10^{-17}$, что примерно равно 0.

Таблица А-5

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$G\$8	Ограничение 1	b_1^*	y_1^*	b_1	Δb_1	Δb_1
\$G\$9	Ограничение 2	b_2^*	y_2^*	b_2	Δb_2^{-}	Δb_2^{-}
\$G\$10	Ограничение 3	b_3^*	y_3^*	b_3	Δb_3	Δb_3
…	…	…	…	…	…	…

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие / Н.И. Холод, А.В. Кузнецов, Я.Н. Жихар и др.; под общ. ред. А.В. Кузнецова. 2-е изд. – Мн.: БГЭУ, 2000. – 412 с.
2. Экономико-математические методы и модели: практикум / С.Ф. Миксюк и др.; под ред. С.Ф. Миксюк. – Минск: БГЭУ, 2008. – 311 с.
3. Юферева, О.Д. Экономико-математические методы и модели: сб. задач / О.Д. Юферева. – Мн.: БГЭУ, 2002. – 103 с.
4. Количественные методы принятия решений: учеб. пособие для слушателей программы Master of Business Administration / Л.Ф. Дежурко, А.А. Илюкович, И.В. Кашникова, О.Д. Юферева; под ред. Л.Ф. Дежурко. – Мн.: изд. Центр БГУ, 2003. – 254 с.
5. Кашникова, И.В. Экономико-математические методы и модели: учебно-метод. пособие / И.В. Кашникова. – Мн.: БГЭУ, 2003. – 81 с.
6. Аксень, Э.М. Математические методы в финансах. Анализ инвестиционных проектов: учеб. пособие / Э.М. Аксень. – Мн.: БГЭУ, 1998. – 39 с.
7. Костевич, Л.С. Исследование операций. Теория игр: учеб. пособие / Л.С. Костевич, А.А. Лапко. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: Выш. шк., 2008. – 368 с.
8. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие / С.Ф. Миксюк, В.Н. Комков, И.В. Белько и др.; под общ. ред. С.Ф. Миксюк, В.Н. Комкова. – Мн.: БГЭУ, 2006. – 219 с. (Система дистанционного обучения)
9. Читая, Г.О. Экономико-математические методы и модели: учеб.-метод. пособие. – Волгоград. гос. техн. ун-т. – Волгоград, 2003. – 61 с.