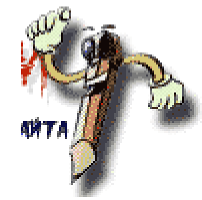


ТЕМА 7: Моделирование распределения работников по должностям. Задача коммивояжера

Вопросы:

1. Варианты задачи о назначениях.
2. Задача коммивояжера.

1. Варианты задачи о назначениях

Постановка задачи.

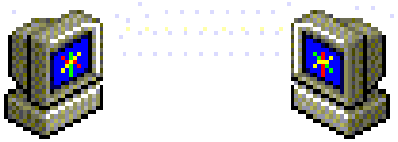
Ставится задача так распределить исполнителей по работам, чтобы суммарная стоимость выполненных работ была максимальной или суммарные затраты на выполнение работ были минимальными.

Данную *задачу о назначениях* можно представить как транспортную задачу, в которой исполнители соответствуют пунктам отправления груза A_i, а работы – пунктам назначения B_j.

Если число исполнителей не равно числу работ, то открытая задача о назначениях должна быть приведена к закрытому виду путем ввода фиктивных исполнителей или фиктивных работ.

Особенность задачи о назначениях состоит в том, что каждый исполнитель может работать только на одной работе, следовательно, A_i=1; B_j=1.

Неизвестные величины задачи x_{ij} могут принимать только два значения:1- исполнитель *i* выполняет работу *j*, 0 – в противном случае.



1. Варианты задачи о назначениях

Структурная модель задачи о назначениях.

Назначения исполнителей на работы x_{ij} должны удовлетворять ограничениям:

1. по распределению работ для выполнения

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n}$$

2. по распределению исполнителей по работам

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1,n}$$

3. Не отрицательность, целочисленность переменных

$$x_{ij} \geq 0;\ x_{ij} \in \{0,1\}$$

При этом, в зависимости от постановки, требуется максимизировать или минимизировать целевую функцию:

$$F_{\max} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

или

$$F_{\min} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

где c_{ij} – соответственно производительность исполнителя вида *i* при выполнении работы вида *j* или затраты на выполнение работы вида *j* исполнителем вида *i*.

Пример. ***Необходимо распределить 8 исполнителей на выполнение 8 работ с целью максимизации их стоимости. Производительность труда работников приведена в таблице 1.***

Таблица 1. Производительность труда работников

Исполнители, A_i	Работы, у.д.е.							
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8
A_1	4	6	5	1	7	2	9	13
A_2	7	8	12	5	4	–	–	10
A_3	1	3	5	8	9	–	–	14
A_4	15	13	10	6	3	–	–	2
A_5	3	–	–	2	10	8	12	5
A_6	8	–	–	7	12	6	1	3
A_7	7	–	–	4	8	5	6	1
A_8	2	5	9	10	13	1	16	4

Работников A_5, A_6 и A_7 не целесообразно использовать при выполнении работ B_2 и B_3, а на работах B_6 и B_7 нельзя использовать работников A_2, A_3 и A_4.

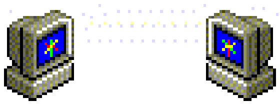
1. Варианты задачи о назначениях

I. по распределению работ для выполнения:

Развернутая модель.

1. работа $B_1 – x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}+x_{61}+x_{71}+x_{81}=1$
2. работа $B_2 – x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{82}=1$
3. работа $B_3 – x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{83}=1$
4. работа $B_4 – x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}+x_{64}+x_{74}+x_{84}=1$
5. работа $B_5 – x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}+x_{55}+x_{65}+x_{75}+x_{85}=1$
6. работа $B_6 – x_{16}+x_{56}+x_{66}+x_{76}+x_{86}=1$
7. работа $B_7 – x_{17}+x_{57}+x_{67}+x_{77}+x_{87}=1$
8. работа $B_8 – x_{18}+x_{28}+x_{38}+x_{48}+x_{58}+x_{68}+x_{78}+x_{88}=1$

II. по распределению исполнителей по работам:



9. исполнитель $A_1 – x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}+x_{18}=1$
10. исполнитель $A_2 – x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{28}=1$
11. исполнитель $A_3 – x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}+x_{38}=1$
12. исполнитель $A_4 – x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}+x_{48}=1$
13. исполнитель $A_5 – x_{51}+x_{54}+x_{55}+x_{56}+x_{57}+x_{58}=1$
14. исполнитель $A_6 – x_{61}+x_{64}+x_{65}+x_{66}+x_{67}+x_{68}=1$
15. исполнитель $A_7 – x_{71}+x_{74}+x_{75}+x_{76}+x_{77}+x_{78}=1$
16. исполнитель $A_8 – x_{81}+x_{82}+x_{83}+x_{84}+x_{85}+x_{86}+x_{87}+x_{88}=1$

Для решения задачи используем «Поиск решения» в электронных таблицах Excel. При этом x_{ij} – двоичные, т.е. принимают значение 1 или 0.

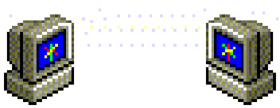
1. Варианты задачи о назначениях

Развернутая модель.

$$F_{\max} = 4x_{11} + 6x_{12} + 5x_{13} + 1x_{14} + 7x_{15} + 2x_{16} + 9x_{17} + 13x_{18} + 7x_{21} + \\ + 8x_{22} + 12x_{23} + 5x_{24} + 4x_{25} + 10x_{28} + 1x_{31} + 3x_{32} + 5x_{33} + 8x_{34} + \\ + 9x_{35} + 14x_{38} + 15x_{41} + 13x_{42} + 10x_{43} + 6x_{44} + 3x_{45} + 2x_{48} + 3x_{51} + \\ + 2x_{54} + 10x_{53} + 8x_{56} + 12x_{57} + 5x_{58} + 8x_{61} + 7x_{64} + 12x_{65} + 6x_{66} + \\ + 1x_{67} + 3x_{68} + 7x_{71} + 4x_{74} + 8x_{75} + 5x_{76} + 6x_{77} + 1x_{78} + 2x_{81} + 5x_{82} + \\ + 9x_{83} + 10x_{84} + 13x_{85} + 1x_{86} + 16x_{87} + 4x_{88}$$

После решения задачи на компьютере получены значения:

X_{12}=1, x_{23}=1, x_{44}=1, x_{52}=1, x_{56}=1, x_{61}=1, x_{78}=1, x_{87}=1, F_{max}=115



Первый индекс x_{ij} указывает номер исполнителя, второй индекс – номер работы, при таком распределении исполнителей по работам выполненная стоимость работ будет максимальной и равной 115 у.д.е.

1. Варианты задачи о назначениях

Для решения задач о назначениях можно использовать венгерский метод, названный в честь венгерского математика Кёнига.

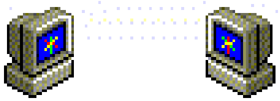
Пример. Требуется пятерых работников распределить между пятью работами с целью минимизации суммарных затрат на выполнение работ. Затраты на выполнение работ конкретными исполнителями приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2. Параметры задачи и выбор минимального элемента в строках

A_i	B_j					$\min c_{ij}$
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	6	7	9	6	8	6
A_2	8	9	7	8	9	7
A_3	9	7	8	7	8	7
A_4	7	8	9	8	9	7
A_5	10	7	8	7	10	7

Алгоритм венгерского метода.

- **Среди элементов каждой строки матрицы c_{ij} (табл. 2) находим наименьшие элементы ($\min\limits_j c_{ij}$).**
- **2. Из элементов каждой строки матрицы c_{ij} вычитаем выбранные минимальные элементы, результаты заносим в новую матрицу (табл. 3).**
- **3. Выбираем среди элементов каждого столбца новой матрицы (табл. 3) наименьшие элементы ($\min\limits_i c_{ij}$).**



Алгоритм венгерского метода.

- **4. Из элементов каждого столбца матрицы почленно вычитаем выбранные минимальные элементы, в результате получим таблицу, в которой каждая строка и каждый столбец содержит хотя бы по одному нулевому значению (табл. 4.).**

Т а б л и ц а 3 Параметры задачи и выбор минимального элемента в столбцах

A_i	B_j				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0	1	3	0	2
A_2	1	2	0	1	2
A_3	2	0	1	0	1
A_4	0	1	2	1	2
A_5	3	0	1	0	3
$\min c_{ij}$	0	0	0	0	1

- **5. Используя нулевые значения элементов, получаем допустимое решение задачи о назначениях.**

Алгоритм венгерского метода.

- 6. Анализируя допустимое решение, находим оптимальное решение задачи о назначениях (табл. 4.). Строки A_2 и A_4 содержат по одному нулю, выделим их и примем x_{23}=1 и x_{41}=1. Строки и столбцы, содержащие эти элементы исключим из рассмотрения. Это строки A_2 и A_4 и столбцы B_1 и B_3. Среди оставшихся строк находим строку с минимальным количеством нулей. Это строка A_1, содержащая один нуль, следовательно, принимаем x_{14}=1 и исключаем из анализа первую строку и четвертый столбец.

Т а б л и ц а 4. Допустимое решение задачи о назначениях

A_i	B_j				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0	1	3	$\underline{0}$	1
A_2	1	2	$\underline{0}$	1	1
A_3	2	0	1	0	$\underline{0}$
A_4	$\underline{0}$	1	2	1	1
A_5	3	$\underline{0}$	1	0	2

Строка A_5 содержит один нуль, поэтому положим, что x_{52}=1. В оставшейся строке A_3 нулевой элемент укажет на x_{35}=1. Переменные x_{14}, x_{23}, x_{35}, x_{41}, x_{52} равные единице укажут на оптимальную расстановку работников по работам, которой соответствуют суммарные затраты: F_{min}=6+7+8+7+7=35 у.д.е.

Различные ситуации при решении задачи о назначениях:

- 1) допустим, после проведения алгоритма венгерского метода имеется столбец или строка, не содержащие нулевых элементов, это является признаком недопустимого решения задачи.

Для его поиска необходимо выполнить следующее:

- 1. Провести минимальное число прямых через строки и столбцы матрицы (кроме диагоналей) таким образом, чтобы они проходили через все нулевые элементы таблицы.
- 2. Найти наименьший элемент среди элементов, через которые не проходит ни одна из проведенных прямых.
- 3. Скорректировать элементы матрицы на величину выбранного элемента:

а) вычесть его из всех элементов, через которые не проходят прямые;

б) прибавить выбранный наименьший элемент ко всем элементам таблицы, которые находятся на пересечении прямых;

в) все элементы, которые пересекает только одна прямая оставить без изменения.

- 4. Используя полученное допустимое значение, найти оптимальное решение задачи.

1. Варианты задачи о назначениях

Различные ситуации при решении задачи о назначениях:

Пример. **Допустим, получено следующее решение задачи (табл. 5).**

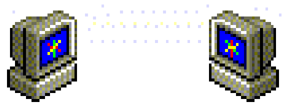


Таблица 5. Недопустимое решение задачи

A_i	B_j			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	1	5	6
A_2	0	2	3	7
A_3	7	4	0	2
A_4	3	0	0	0

Так, в столбце B_2 и B_4 нулевые элементы стоят только в строке A_4, следовательно, можно из четырех назначений выполнить только три. Для выполнения всех назначений необходимо иметь нулевые элементы в каждой строке и в каждом столбце таблицы. Так как данное условие не соблюдается, то проводим наименьшее число прямых через нулевые элементы таблицы (табл. 6).

Наименьшим элементом, через который не прошли прямые является число 1, используя выше изложенные правила рассчитываем элементы новой таблицы (табл. 7).

1. Варианты задачи о назначениях

Различные ситуации при решении задачи о назначениях: Пример.

Таблица 6. Недопустимое решение задачи

A_i	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	1	5	6
A_2	0	2	3	7
A_3	7	4	0	2
A_4	3	0	0	0

Таблица 7. Скорректированные элементы таблицы

A_i	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	0	5	5
A_2	0	1	3	6
A_3	7	3	0	1
A_4	4	0	1	0

Осуществляем назначения. Оптимальное решение будет равно $x_{12}=x_{21}=x_{33}=x_{44}=1$.

1. Варианты задачи о назначениях

Различные ситуации при решении задачи о назначениях:

- 2) алгоритм венгерского метода предполагает минимизацию целевой функции задачи о назначениях. Если же целевую функцию требуется максимизировать, то все элементы первой таблицы умножают на (–1) и минимальный (наибольший по модулю отрицательный) элемент вычитаем из элементов соответствующих строк, получая положительные элементы скорректированной таблицы. Далее задача о назначениях решается с использованием выше изложенного алгоритма.

- 3) если в задаче имеются недопустимые назначения, то в соответствующую клетку таблицы заносят максимальный элемент c_{ij}, который позволяет избежать этого назначения.

- 4) если число работников m не равно числу работ n, то для решения задачи вводят фиктивных исполнителей или фиктивные работы.

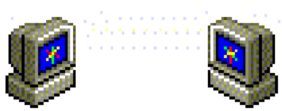
2. Задача коммивояжера

Постановка задачи.

Задачей схожей с задачей о назначениях является *задача о коммивояжере*, постановка которой состоит в том, что имеется *n* городов, которые должен посетить коммивояжер только один раз, выезжал из первого города и возвращаясь в исходный пункт.

Цель решения задачи – найти кратчайший замкнутый маршрут, проходящий через каждый пункт только один раз, называемый полным циклом.

Неизвестные величины:



$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ - если в маршрут входит перезд из города } i \text{ в город } j; \\ 0 \text{ - в противном случае.} \end{cases}$$

Структурная модель задачи о коммивояжере.

Требуется минимизировать маршрут коммивояжера:

$$F_{\min} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

где c_{ij} – расстояние между городом *i* и городом *j*.

При условиях:

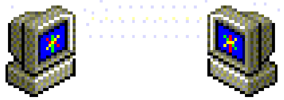
1. По въезду в города:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n}$$

2. По выезду из городов:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1,n}$$

3.Неотрицательность, целочисленность переменных



$$x_{ij} \geq 0,\ x_{ij} \in \{0,1\}$$

2. Задача коммивояжера

Структурная модель задачи о коммивояжере.

Основными методами решения задачи коммивояжера являются методы решения целочисленных задач линейного программирования: методы ветвей и границ и отсекающих плоскостей.

Идея применения метода отсекающих плоскостей для решения задачи коммивояжера состоит в том, чтобы в первоначальную задачу ввести дополнительные ограничения, позволяющие исключить возможность разрыва пути коммивояжера и появления нескольких не связанных между собой подмаршрутов. Общее количество таких ограничений равно (n-1)*(n-2). Они имеют вид:

4. По формированию маршрута коммивояжера

$$u_i - u_j + n x_{ij} \le n-1 \qquad i, j = \overline{2, n} \qquad i \ne j$$

Основным недостатком применения метода отсекающих плоскостей к решению данной задачи является увеличение размерности задачи при введении дополнительных ограничений.