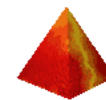




## **ТЕМА 2:** ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### **Вопросы:**

- 1. Понятие об экономико-математическом моделировании**
- 2. Классификация моделей**
- 3. Этапы экономико-математического моделирования**
- 4. Понятие о критерии оптимальности**
- 5. Задачи маркетинга как объекта моделирования**

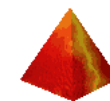


# 1. Понятие об ЭММ



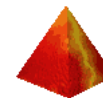
Для изучения процессов управления производством, нахождения наилучшего решения хозяйственной ситуации в конкретных экономических условиях создаются модели.

**Модель** позволяет имитировать поведение системы в различных условиях, включая и такие, которые в действительности редко встречаются или сопряжены с большими затратами ресурсов или риском.



**Модель** – это некоторый аналог той системы, которой мы должны управлять, получая знания из исследования данного аналога.



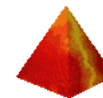


**Математические модели** – это те модели, которые не похожи на оригинал, но с помощью математических уравнений или неравенств описывают протекающие в оригинале экономические процессы.



## Общие элементы базовой модели линейного программирования

- 1) **неизвестные величины** – это величины значения которых определяются в результате решения задачи. Обычно их обозначают  $x_j$ , где  $j=1\dots n$  или  $y_i$ , где  $i=1\dots m$ . Решить задачу, значит найти величины неизвестных переменных;
- 2) **техничко-экономические коэффициенты**, т.е. известные величины, стоящие при переменных, они служат для отображения закономерных взаимосвязей ресурсов с результатами решения задачи. Техничко-экономические коэффициенты обычно характеризуются двумя индексами и обозначаются малыми латинскими буквами. Например, индексы при  $a_{ij}$  показывают, что коэффициент  $a$  стоит в  $i$ -ой строке (или в ограничении вида  $i$ ) и в  $j$ -ом столбце (или при переменной вида  $j$ ), где  $i=1\dots n$ ;  $j=1\dots m$ ;

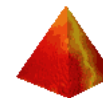


## Общие элементы базовой модели линейного программирования



3) **известные величины** - величины, стоящие в правой части ограничений (т.е. уравнений или неравенств). Они отображают возможные объемы ресурсов и ограничивающие условия, влияющие на результаты решения задачи. Эти элементы обозначаются большими латинскими буквами. Например  $A_i (A_1, A_2, \dots, A_m)$ , где  $i=1 \dots m$ . Известных величин столько, сколько ограничений в экономико-математической задаче;

4) **коэффициенты целевой функции**, или коэффициенты  $F$ -строки, которая определяет цель решения задачи. Они обозначаются малыми латинскими буквами. Например,  $p_j (p_1, p_2, \dots, p_n)$ , где  $j=1 \dots n$ . Коэффициентов целевой функции столько, сколько переменных в экономико-математической задаче.



Запишем **общую задачу линейного программирования**.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq A_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq A_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = A_3 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq A_m \end{cases}$$



$$F_{\max} = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$$

Решить данную задачу, значит найти такие значения переменных, которые удовлетворяют требованиям всех ограничений и придают целевой функции минимальное или максимальное (в нашем случае максимальное) значение.

# 1. Понятие об ЭММ

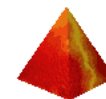
---



**Математическая модель** – это концентрированное выражение наиболее существенных взаимосвязей и закономерностей поведения исследуемой системы, записанное в математической форме.



Исследование систем на их моделях и перенесение полученных знаний на оригинал при управлении его поведением называется **моделированием**.



### Классификация моделей :

- ❑ **По периоду планирования** модели делятся на:
  - 1) долгосрочные (срок планирования 5-10 лет);
  - 2) среднесрочные (период планирования 3-5 лет);
  - 3) краткосрочные (1-3 года);
  - 4) модели оперативного планирования (до 1 года).
- ❑ **По характеру взаимосвязей компонентов** модели делятся на:
  - 1) детерминированные – это модели, в которых результат полностью и однозначно определяется набором независимых переменных.
  - 2) стохастические модели – это модели, которые описывают случайные процессы, подчиненные законам теории вероятности.
- ❑ **В зависимости от учета фактора времени** модели делятся на:
  - 1) статические; 2) динамические.

Модель носит динамический характер, если в процессе решения задачи ряд технико-экономических коэффициентов изменяет свое значение. Если же при решении задачи технико-экономические коэффициенты остаются неизменными, то имеем статическую модель.

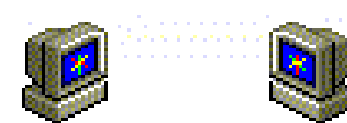


## 2. Классификация моделей

### Классификация моделей :

❑ В зависимости от уровня управления системами в АПК модели делятся на:

- 1) межотраслевые;
- 2) отраслевые;
- 3) региональные;
- 4) внутрихозяйственные.



❑ Исходя из применяемого математического аппарата модели делятся на:

1) **статистические**, которые описывают зависимость результата производства от влияния на него одного или нескольких факторов (например, производственные функции);

2) **балансовые**, т.е. модели представляющие собой систему балансов производства и распределения продукции, которая записывается в виде шахматных матриц;

3) **оптимизационные** модели базируются на методах математического программирования. Данные модели представляют собой систему уравнений и неравенств, подчиненную целевой функции, т.е. цели решения задачи.

## 2. Классификация моделей



### *Классификация моделей :*

4) **игровые** модели – это модели в виде игры, описывающие конфликтную ситуацию, анализ которой осуществляется по определенным правилам, в результате чего определяется наилучшая стратегия игрока;

5) **имитационные** модели представляют собой программы для персонального компьютера, а эксперименты над ними состоят в наблюдении за результатами расчетов по этим программам при различных значениях вводимых переменных;

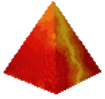
6) **модели сетевого планирования и управления** служат для управления производственной деятельностью коллективов людей, выполняющих комплекс взаимосвязанных работ;

7) **модели массового обслуживания** применяются для улучшения качества обслуживания, т.е. сокращения времени ожидания обслуживания, сокращение очередей, уменьшение стоимости обслуживания и т.д.;

8) **модели управления запасами** служат для определения оптимальных значений уровня запасов (точки заказа) и размера заказа и т.д.

## 2. Классификация моделей

### Классификация моделей :



- ❑ По степени детализации модели делятся на:
  - 1) структурные;
  - 2) развернутые.



**Развернутая модель** - это сама задача, которая описывает функционирование конкретной системы, она составлена на основе конкретного цифрового материала.

**Структурная модель** описывает систему в виде символов и математических выражений, каждое выражение структурной модели объединяет группу однородных ограничений развернутой модели.



## 2. Классификация моделей



Так как реальные процессы или объекты АПК представляют собой сложные динамические системы, то для описания их функционирования в современных условиях чаще всего используют интегрированную **систему моделей**, которая представляет собой совокупность логически, информационно и алгоритмически связанных моделей, отражающих экономические, организованные и технологические процессы воспроизводства в моделируемой системе.

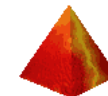


При отображении сложных систем основная проблема состоит в том, чтобы найти компромисс между простотой описания, позволяющей составить целостное представление об исследуемом объекте или процессе и детализацией описания, позволяющей отразить многочисленные особенности конкретного объекта или процесса.

## 2. Классификация моделей



*При построении системы моделей необходимо соблюдать следующие принципы:*



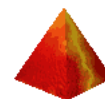
- ❑ 1. Принцип **развития** требует постоянного совершенствования системы моделей, включения в ее состав новых моделей, использование которых становится необходимым по мере совершенствования планирования и управления.
- ❑ 2. Принцип **единства** означает представление системы моделей в единой структуре блоков, которые взаимосвязаны между собой логически, информационно и алгоритмически.
- ❑ 3. Принцип **относительной автономии** позволяет выделить из общей системы моделей относительно самостоятельные модели, результаты решения по которым можно внедрять в производство не ожидая расчетов по всей системе моделей.
- ❑ 4. Принцип **соответствия и адаптации** означает соответствие системы моделей реальной действительности.

## 2. Классификация моделей



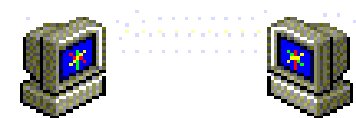
*При построении системы моделей необходимо соблюдать следующие принципы:*

- ❑ 5. Принцип **ориентации на выходные плановые показатели** означает, что система моделей и ее решение должны обеспечивать выход на утвержденные плановые показатели.
- ❑ 6. Принцип **разнообразия** состоит в том, что для адекватного отражения действительности в состав системы моделей должны быть включены разнообразные модели (статистические, оптимизационные, сетевые модели и т.д.).
- ❑ 7. Принцип **взаимного дополнения** требует, чтобы модели различающиеся по своему функциональному назначению, дополняли друг друга и были увязаны в единую систему логически, алгоритмически и информационно.





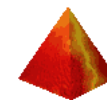
*Для экономико-математического моделирования или построения модели необходимо выполнить следующие этапы:*



**❑ 1. Постановка (формулировка) задачи.**

Постановка задачи включает решение следующих вопросов:

- а) выбор и формулировка цели задачи, решение которой наиболее важно в данный момент времени;
- б) выбор периода планирования (т.е. краткосрочный, среднесрочный, долгосрочный или текущего планирования);
- в) определение объемов основных ресурсов моделируемой системы и тех параметров, которые оказывают влияние на функционирование системы;
- г) выявление возможных альтернатив решения применительно к исследуемой конкретной ситуации.





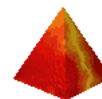
#### □ 2. *Определение перечня переменных и ограничений базовой модели.*

**К переменным модели предъявляются следующие требования:**

- 1.** перечень переменных должен отражать характер модели;
- 2.** число переменных определяется возможностями используемого пакета прикладных программ;
- 3.** число переменных зависит от величины планового периода.

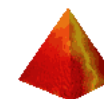
**Переменные по своей значимости подразделяются на группы:**

- 1.** **основные** переменные, т.е те, которые составляют основное содержание задачи;
- 2.** **дополнительные** переменные – это те, которые показывают величину недоиспользования ресурсов или превышение ресурсов над минимальным уровнем;
- 3.** **вспомогательные** переменные – те, которые привлекаются для облегчения записи ограничений и определения расчетных показателей.





#### □ 2. *Определение перечня переменных и ограничений базовой модели.*



**Ограничения модели по своей роли подразделяются на группы:**

- 1. основные** ограничения, т.е те, которые описывают наиболее существенные условия задачи и включают все или почти все переменные задачи;
- 2. дополнительные** ограничения – это те, которые записываются по отдельным переменным и определяют границы их измерения;
- 3. вспомогательные** ограничения – те, которые применяются для установления соотношений между переменными.



### 3. Этапы ЭММ



#### □ 3. Построение структурной экономико-математической модели.



Структурная модель описывает изучаемую систему в общем виде, т.е. в виде символов и математических выражений.

Структурная модель имеет 3 группы символов или условных обозначений:

#### □ 1. Индексация.

Обычно индекс  $i$  – номер строки, т.е. ограничения или ресурса, индекс  $j$  – номер переменной, т.е. столбца или отрасли.

Используя общий индекс  $i$  или  $j$  необходимо указать в каких пределах изменяются номера ограничений или переменных для этого необходимо вводят понятие множества, обозначаемого большими буквами  $I_0$  – множество ресурсов,  $J_0$  – множество отраслей. Например, запись  $i \in I_0$  показывает, что ограничение

записывается по ресурсам, которые входят в множество  $I_0$ , или запись  $\sum_{j \in J_0}$  показывает, что необходимо произвести

суммирование по всем  $j$  принадлежащим множеству  $J_0$ .



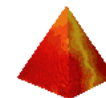
#### ➤ 1. Индексация.



При построении структурной ЭММ необходимо учитывать, что часть отраслей может по разному относиться к производству отдельных ресурсов. Например, по отношению к кормам отрасли растениеводства и животноводства имеют принципиальные различия. Отрасли растениеводства производят корма, отрасли животноводства - преимущественно их потребляют. Чтобы подчеркнуть и учесть это в экономико-математической модели в рамках множества выделяют подмножества. Если  $J_0$  – множество отраслей, то  $J_1$  – подмножество отраслей растениеводства, а  $J_2$  - подмножество отраслей животноводства. Эти подмножества являются частью множества  $J_0$ . В экономико-математической модели это записывают так:

$$J_1 \subset J_0 \qquad J_2 \subset J_0$$

Наряду с вышеописанными индексами часто употребляется индекс  $h$  – номер корма.



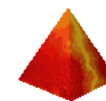


#### ➤ 2. **Неизвестные величины.**



Чаще всего для их обозначения используют переменные  $X$  и  $Y$ . Если в группе переменных нужно выделить подгруппы, отличающиеся особенностями взаимосвязи отрасли, ресурсами, то вводятся  $\tilde{x}_j, \hat{x}_j, \check{x}_j$  и т.д.

#### ➤ 3. **Известные величины.**



Известные величины, стоящие при переменных, т.е. технико-экономические коэффициенты обычно обозначаются малыми латинскими буквами. Например,  $a_{ij}$ . При этом ставится столько индексов, сколько необходимо для объяснения места параметра в модели.

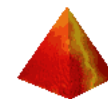
Свободные члены ограничений обозначаются большими латинскими буквами. Например,  $A_j$ .

Коэффициенты целевой функции обозначаются малыми латинскими буквами. Например:  $p_j, c_j$ .



### 3. Этапы ЭММ

**Правило записи ограничений в структурном виде: висящие индексы в левой и правой частях ограничений должны совпадать и по ним записывают ограничение.**



При этом под не висящим индексом понимают тот, по которому производится суммирование, при этом индекс, стоящий не под знаком суммы – висящий.



**Между структурной и развернутой моделями существует взаимосвязь:**

1. каждое выражение структурной модели объединяет группу однородных ограничений развернутой модели и наоборот;
2. структурная модель указывает группы неизвестных **величин**, значения которых определяют в результате решения развернутой модели;
3. структурная модель указывает исходную информацию, необходимую для решения развернутой модели;
4. структурная модель определяет взаимосвязи между левой и правой частями развернутой модели.



#### 4. Обоснование исходной информации модели:

- 1 технико-экономических коэффициентов,
- 2 свободных членов,
- 3 коэффициентов целевой функции.

**Методика обоснования исходной информации зависит от цели и периода расчета**, так как исходные данные могут быть использованы:

- 1) для анализа эффективности использования ресурсов;
- 2) для решения задач текущего планирования;
- 3) для перспективного планирования.

Подготовка информации для каждого из этих направлений имеет свои отличия. Так, если информация характеризующая исследуемую систему отличается устойчивостью, то для 1-го и 2-го направлений берут данные в среднем за последние 2-3 года. Если информация не устойчива, то данные берут за последний год, что позволит отразить характеристики системы с учетом ее развития.



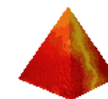


#### □4. Обоснование исходной информации модели:

Для 3-го направления информацию получают используя совокупность различных методик:



- 1. Метод экспертных оценок, т.е. эксперты дают ответ о тенденциях и величинах формирования показателей.
- 2. Метод экстраполяции, который основан на изучении тенденций формирования показателей в прошлые годы и перенесение данной тенденции на перспективу.
- 3. Чаще всего используются для обоснования информации корреляционные (эконометрические) и оптимизационные модели.
- 4. Данные технологических карт.
- 5. Нормативные данные, т.е. информация справочников.
- 6. Информация передовых предприятий и т.д.



#### □ 5. Разработка развернутой модели.

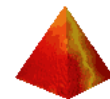


На базе структурной модели с конкретными цифровыми данными составляется развернутая модель, информация которой заносится в матрицу и задача решается на персональном компьютере.



#### □ 6. Анализ оптимального решения.

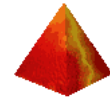
Анализируют результаты решения задачи, при необходимости вносят корректировки в модель, решают задачу заново с учетом изменений, разрабатывают мероприятия для внедрения решения задачи в производство.



## 4. Понятие о критерии оптимальности



Под **критерием оптимальности** понимается экономическая категория, выражающая предельную меру экономического эффекта принимаемого хозяйственного решения.



Критерий оптимальности должен обладать следующими **свойствами**:

- быть **простым**, т.е. не содержать большого количества факторов;
- представительным**, т.е. отражать основную цель поставленной задачи;
- критичным**, т.е. сильно реагировать на изменения параметров исследуемых стратегий функционирования системы;
- единственным**, т.е. каждой модели соответствует единственный критерий оптимальности.



## 4. Понятие о критерии оптимальности



Критерий оптимальности подразделяется на глобальный и локальный.

□ **Глобальный** критерий оптимальности является народнохозяйственным, он вытекает из действия основного экономического закона любой системы, т.е. интенсивного использования ресурсов с целью максимального производства продукции, снижения издержек производства, создания условий для нормального функционирования общества.

□ **Локальный** – это частный критерий оптимальности, он связан с детализацией глобального. Этот критерий используют для решения задач более низкого уровня.

□ **Требуется**, чтобы локальный критерий оптимальности учитывал основные положения глобального критерия эффективности и не противоречил ему.

## 4. Понятие о критерии оптимальности



Критерий оптимальности может быть выражен как количественно, так и качественно.



❑ Математически критерий оптимальности, соответствующий **качественной цели**, записывается следующим образом:  $\Phi=1$ , если цель достигается или  $\Phi=0$ , если цель не достигается.

*В литературе такие критерии называются порядковыми или ранговыми критериями оптимальности. Они определяют какая стратегия лучше или хуже других, но не поясняют насколько.*

❑ В основном критерий оптимальности носит **количественный характер**, состоящий в стремлении к увеличению (**максимизации**) или уменьшению (**минимизации**) показателя, характеризующего уровень достижения поставленной цели и зависящего от рассматриваемых стратегий и входных параметров модели.

## 4. Понятие о критерии оптимальности



**Количественным выражением критерия оптимальности в экономико-математических моделях является целевая функция.**

**Особенность ее в том, что она однозначна.**



**В силу специфики своего развития агропромышленное производство многокритериально.**

**Возникает необходимость поиска многих решений, отвечающих разным критериям оптимальности.**



## 4. Понятие о критерии оптимальности



Многоцелевой характер критерия оптимальности чаще всего выражается в модели следующим образом:

- 1) применяют *прием ведущего критерия*, т.е. один из наиболее предпочтительных критериев используется в качестве целевой функции задачи, а требования всех остальных учитываются при составлении ограничений задачи;
- 2) *прием последовательных уступок* состоит в замене многокритериальной задачи оптимизации последовательностью однокритериальных задач. Вначале исследуемые критерии ранжируются в порядке убывания их значимости. Задача решается с первым по значимости критерием и определяется его экстремальное значение. Затем назначается величина допустимого отклонения критерия от его оптимального значения, т.е. уступка  $\Delta$  и решается задача еще раз, но уже со вторым по значимости критерием, при условии, что отклонение первого критерия от его оптимального значения не превзойдет величины уступки. Далее назначается уступка для второго критерия и задача решается с третьим критерием и т.д.

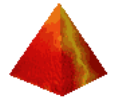
## 4. Понятие о критерии оптимальности



Многоцелевой характер критерия оптимальности чаще всего выражается в модели следующим образом:

□3) используют *прием линейной комбинации* критерия:

аддитивная свертка критериев:

$$F = \sum_{i=1}^n a_i f_i$$


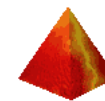
где  $f_i$  – локальный критерий вида  $i$ ,  $a_i$  – вес критерия вида  $i$ .

При этом  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$  и  $a_i \geq 0, i = \overline{1, n}$ .



Вектор весов критериев  $a_i$  обычно определяется на основе экспертных оценок.

## 5. Задачи маркетинга как объекта моделирования



*Особенности моделирования в области маркетинга определяются задачами и функциями этой сферы деятельности предприятий в условиях рыночной экономики.*

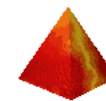
**Перед маркетингом как рыночной концепцией управления стоят следующие основные задачи:**

- 1. Детально и всесторонне изучать рынок, спрос, вкусы и желания потребителей.
- 2. Приспосабливать производство к этим требованиям, выпускать товары и оказывать услуги, соответствующие спросу.
- 3. Воздействовать на рынок, общественный спрос в интересах предприятия.



Перечисленные задачи маркетинга, определяют и применяемые экономико-математические методы и модели в этой области.

## 5. Задачи маркетинга как объекта моделирования



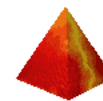
### *Экономико-математические задачи в области маркетинга:*

□ 1. Наиболее широкое применение получили модели математического программирования, в частности линейного программирования, с помощью которых из ряда альтернативных решений выбирается самое наилучшее, т.е. оптимальное (например, с наименьшими затратами, максимальной прибылью и т.д. при прочих равных условиях). Данный тип моделей применяется для решения таких проблем маркетинга, как разработка наиболее выгодного ассортимента при ограниченных ресурсах, обоснование наилучших каналов товародвижения продукции, планирование маршрутов движения сбытовых агентов и других.



□ 2. Балансовые методы и модели позволяют решить задачи сбалансированности товарного предложения и спроса.

## 5. Задачи маркетинга как объекта моделирования



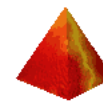
### *Экономико-математические задачи в области маркетинга:*

□ 3. Модели сетевого планирования дают возможность регулировать последовательность и взаимозависимость отдельных видов работ или операций в пределах какой-либо программы. Они позволяют зафиксировать основные этапы работ, определить и согласовать сроки их выполнения, разграничить ответственность исполнителей. Использование этих моделей эффективно при решении таких задач маркетинга, как выпуск нового товара, организация пробных продаж, подготовка и проведение сбытовых и рекламных компаний и т.д.



□ 4. Модели и методы теории управления запасами позволяют управлять поступлением товаров и отгрузкой запасов, увязывать производственные мощности с возможностями сбыта.

## 5. Задачи маркетинга как объекта моделирования



### *Экономико-математические задачи в области маркетинга:*

□ 5. Модели и методы теории массового обслуживания применяются при решении задач о выборе очередности обслуживания заказчиков, при составлении графиков поставок товаров и т.д. С помощью этих моделей можно изучить складывающиеся закономерности, связанные с наличием потока заявок на обслуживание.



□ 6. Решению реальных маркетинговых ситуаций могут помочь модели и методы теории игр. Упрощенные модели поведения конкурентов, стратегии выхода на новые рынки и т.д. могут предварительно «проигрываться» для нахождения оптимальных решений.