

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ОРДЕНОВ ОКТЯБРЬСКОЙ
РЕВОЛЮЦИИ И ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»**

МЕЛИОРАТИВНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра сельского строительства и обустройства территорий

ОПОРНЫЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по учебной дисциплине

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

для специальностей

6-05-0812-01 «Техническое обеспечение производства сельскохозяйственной
продукции»; 6-05-0812-03 «Технический сервис в агропромышленном
комплексе»; 6-05-0811-03 «Мелиорация и водное хозяйство»

Составители: Е.В. АФАНАСЕНКО, доцент, кандидат технических наук,
доцент

ЛЕКЦИЯ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Сопротивление материалов – наука, разрабатывающая инженерные методы расчета на прочность, жесткость и устойчивость, на основании которых устанавливаются рациональные формы и размеры элементов конструкций, обеспечивающие их надежность и экономичность.

Прочность – способность материала элемента конструкции сопротивляться внешнему воздействию, не разрушаясь.

Жесткость – характеристика элемента конструкции, определяющая его способность сопротивляться деформации (растяжению, изгибу, кручению и т.д.).

Устойчивость – способность элемента конструкции, находящегося под действием сил в равновесии, после незначительного отклонения возвращаться в исходное положение равновесия.

1.1. Основные элементы конструкций и сооружений

Элементы инженерных конструкций имеют разнообразную форму. Поэтому при расчете их геометрическую форму приводят к простейшей схеме *стержня (бруса), оболочки, пластины и массива*.

Стержень (брус) – это тело, два измерения которого (ширина и высота поперечного сечения) малы по сравнению с третьим (длиной). В зависимости от формы геометрической оси бруса делятся на прямые и кривые (рис. 1.1).

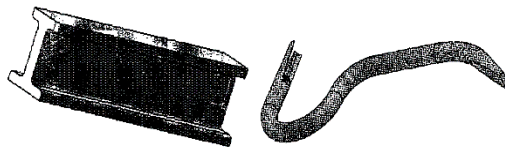


Рис. 1.1. Прямые и кривые элементы конструкций в виде бруса

Под *оболочкой* понимается тело, ограниченное криволинейной поверхностью, одно измерение которого (толщина) мало по сравнению с двумя другими.

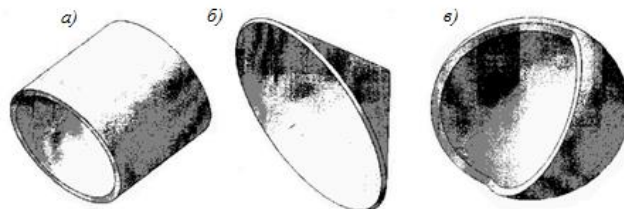


Рис. 1.2. Различные виды оболочек

Оболочки могут иметь цилиндрическую (рис. 1.2, *а*), коническую (рис. 1.2, *б*) или сферическую (рис. 1.2, *в*) форму.

Пластина – оболочка, срединная поверхность которой представляет собой плоскость. Встречаются пластины прямоугольные и круглые (рис. 1.3).

Примерами пластин могут служить обшивка корабля, самолета, мембраны, плоские днища и т. д.

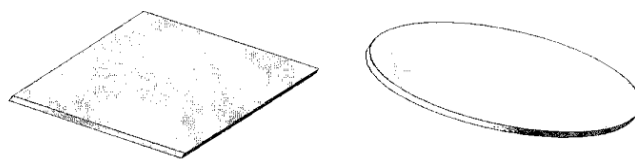


Рис. 1.3. Прямоугольные и круглые пластины

Массивом называется тело, все три измерения которого мало отличаются друг от друга (рис. 1.4). Например, сплошная опора моста, фундамент здания, станина металлорежущего станка и т. д.

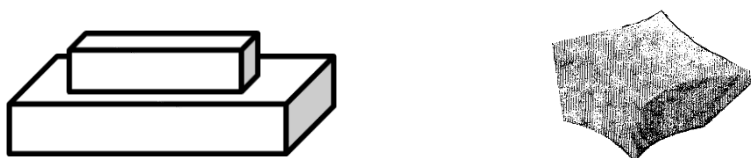


Рис. 1.4. Виды массивных элементов

1.2. Понятие о расчетной схеме

В сопротивлении материалов рассматриваются *идеализированные расчетные схемы* элементов конструкций и сооружений, которые освобождены от несущественных особенностей и элементы которых приведены к типовым геометрическим формам.

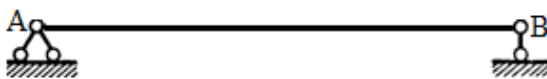


Рис. 1.4. Расчетная схема двухопорной балки

1.3. Типы опор

Существует три основных типа опор. Шарнирно-подвижная опора имеет одну элементарную связь (одиночный опорный стержень), шарнирно-неподвижная – две связи, а жесткая заделка – три связи. Каждой связи, приложенной в опоре, соответствует опорная реакция, направленная по направлению действия связи.

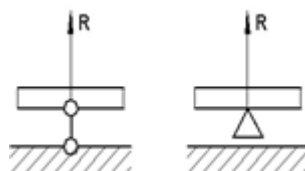


Рис. 1.5. Схемы подвижной опоры (ограничивает перемещение по вертикали, возникает одна опорная реакция)

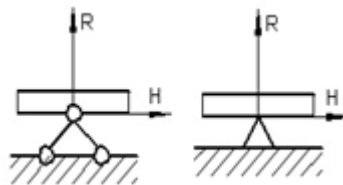


Рис. 1.6. Схемы неподвижной опоры (ограничивает перемещение по вертикали и горизонтали, возникает две опорные реакции)

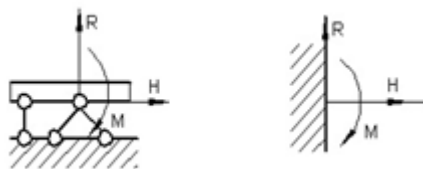


Рис. 1.7. Схемы жесткой заделки (ограничивает перемещение по горизонтали, вертикали, препятствует повороту относительно центра вращения, возникает две опорные реакции и реактивный момент)

1.4. Нагрузки статические и динамические, постоянные и переменные во времени

В процессе работы машин, элементов конструкций и сооружений их узлы и детали воспринимают и передают друг другу различные нагрузки, т. е. силовые воздействия, вызывающие изменение внутренних сил, деформации узлов и деталей и называемые *внешними силами*.

Внешние силы делятся на *активные* и *реактивные*. Активные внешние силы представляют:

- *сосредоточенные* силы. Такую силу обычно считают приложенной в точке и обозначают стрелкой и буквой F (рис. 1.8). Измеряются в [Н, кН].

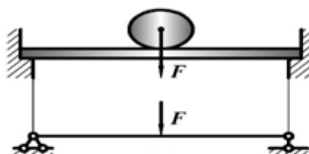


Рис. 1.8. Сосредоточенная сила F

- *распределенные* силы или нагрузки. Приложены к телу непрерывно по всей его площади или длине. Такие нагрузки могут быть распределенными, как равномерно (рис. 9, *а*), так и неравномерно (рис.1.9, *б*). Измеряются в [Н/м, кН/м].

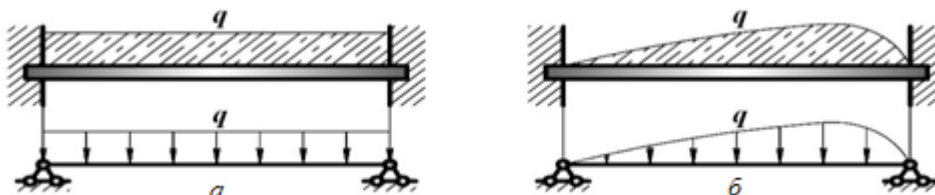


Рис. 1.9. Распределенная нагрузка

Равнодействующая равномерно распределенной нагрузки находится посередине участка, на которой действует. Определяется $F = q \cdot l$, где l – длина участка. Измеряется [Н, кН].

- *сосредоточенные* моменты. Аналогичны сосредоточенным силам. Измеряются [Н*м, кН*м].

По времени действия активные силы делятся на два вида:

- *постоянные* – собственный вес сооружения, стационарное оборудование и т. д.;

- *временные* – снег, ветер, подвижные нагрузки (люди, поезд, автотранспорт и т. п.).

По характеру действия активные силы делят на *статические* и *динамические*. К статическим нагрузкам относятся спокойно приложенные нагрузки, возрастающие постепенно от нуля до своего конечного значения (снег, собственный вес и т. д.).

К динамическим нагрузкам относятся ударные, внезапно приложенные и повторно-переменные нагрузки. Ударные нагрузки возникают, например, при ковке металла или забивке свай и т.п.

1.5. Метод сечений

Целостность твердого тела и его форма обуславливаются наличием сил взаимодействия между его частицами. Когда внешние силы на тело не действуют, то его частицы находятся в состоянии *внутреннего равновесия*.

При деформации тела под действием внешних нагрузок и других внешних воздействий происходит изменение сил взаимодействия между частицами тела и возникают ***внутренние силы сопротивления (ВСС)*** – силы взаимодействия между частицами тела, возникающие только в результате деформации тела. Для их определения используют *метод сечений*, который сводится к четырем действиям:

- через сечение тела, в котором необходимо определить внутренние силы, мысленно проводят секущую плоскость, перпендикулярную оси бруса;

- рассматриваем равновесие наиболее простой части бруса по отношению к внешней нагрузке;

- действие отброшенной части заменяют ВСС таким образом, чтобы оставшаяся исследуемая часть могла находиться в равновесии (рис. 10, а, б);

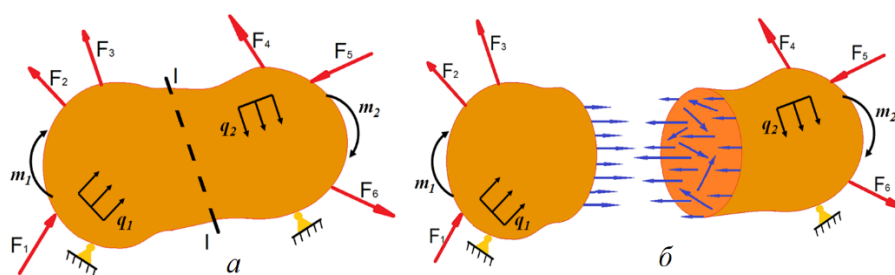


Рис. 1.10. Равновесие свободного тела и обеих его частей разреза под действием системы сил

- составляют условие равновесия для рассматриваемой правой части (рис. 1.11), используя для этого шесть уравнений статики, составляющие которых обозначаются специальными буквами и являются **внутренними силовыми факторами (ВСФ)**:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{iz} - N = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} - Q_y = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} - Q_x = 0; \\ \sum_{i=1}^n m_z(F_i) - T = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_y(F_i) - M_y = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_x(F_i) - M_x = 0; \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Из уравнений (1) следует, что:

$$\left. \begin{aligned} N = \sum_{i=1}^n F_{iz}; \quad Q_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad Q_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \\ T = \sum_{i=1}^n m_z(F_i); \quad M_y = \sum_{i=1}^n m_y(F_i); \quad M_x = \sum_{i=1}^n m_x(F_i); \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

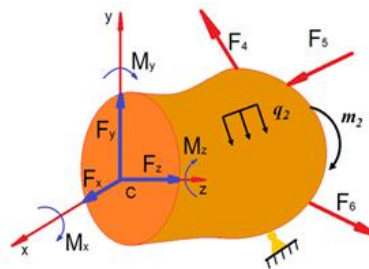


Рис.1.11. Распределение внутренних сил в сечении правой части при условии ее равновесия

- $F_z = N$ называется *продольной или нормальной силой*;
- $F_y = Q_y$ и $F_x = Q_x$ являются *поперечными силами*;
- $M_z = T$ – *крутящий момент*;
- M_y и M_x – *изгибающие моменты* относительно осей y и x .

1.6. Напряжения – полное, нормальное и касательное

Под напряжением понимается усилие, приходящееся на единицу площади сечения.

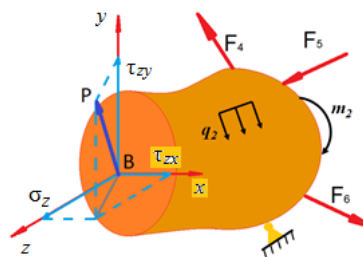


Рис.1.12. Схема к определению напряжения в точке В площади сечения

В каждой точке сечения тела полное напряжение P можно разложить на 3 составляющие по осям координат x , y и z (рис. 1.12):

- нормальную составляющую к плоскости сечения, которая направлена вдоль оси z , называется *нормальным напряжением* и обозначается σ_z ;

- составляющую, лежащую в плоскости сечения, она обозначается τ и называется *касательным напряжением*.

Нормальное напряжение σ_z характеризует сопротивление материала элемента конструкции в конкретном сечении растяжению или сжатию в направлении оси z , а касательное напряжение τ – сопротивление материала сдвигу его частиц по плоскости сечения. Определяются по формулам:

$$\sigma_z = N/A \quad (1.3)$$

$$\tau_{zx} = Q_x/A; \tau_{zy} = Q_y/A \quad (1.4)$$

1.7. Контрольные вопросы

1. Какие силы в сопротивлении материалов считают внешними? Какие силы являются внутренними?

2. Как классифицируются нагрузки, действующие на элементы конструкций и детали машин?

3. В чем суть метода сечений?

4. Какую из отсеченных частей более целесообразно рассматривать в равновесии? Почему?

5. Запишите систему уравнений, используемую при определении внутренних силовых факторов в сечении.

6. Чем отличаются нормальные напряжения от касательных?

ЛЕКЦИЯ 2. МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ

2.1. Характеристики прочности, пластичности, вязкости материала

Механическими характеристиками материалов называют их упругие свойства, характеризующие способность сопротивляться разрушению (прочность) и деформациям (пластичность).

Механические свойства материалов при различных видах деформаций (растяжение, сжатие, кручение, сдвиг, изгиб и т.д.) определяются в лаборатории путем испытания десятикратных образцов (отношение $d_0/l_0 = 10$) на специальных машинах (рис. 2.1).

Механические характеристики прочности материала:

$$\left. \begin{aligned}
 & - \sigma_{mц} = \frac{F_{mц}}{A_0} \text{ – предел пропорциональности;} \\
 & - \sigma_y = \frac{F_y}{A_0} \text{ – предел упругости;} \\
 & - \sigma_T = \frac{F_T}{A_0} \text{ – предел текучести;} \\
 & - \sigma_B = \frac{F_{max}}{A_0} \text{ – временное сопротивление}
 \end{aligned} \right\} (2.1)$$

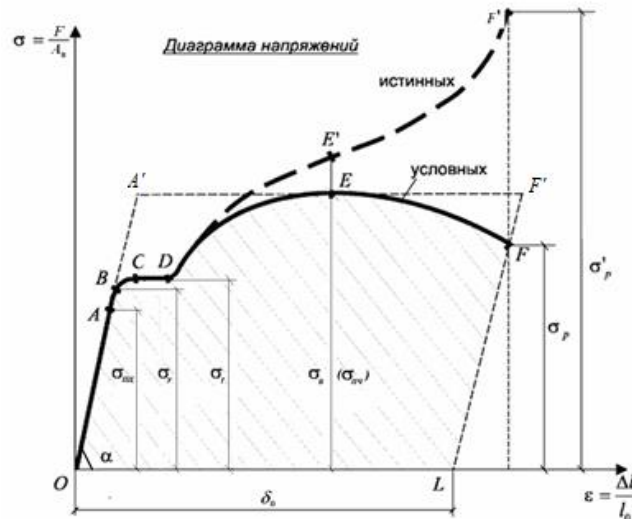


Рис. 3.4. Диаграммы условных и истинных напряжений при испытании образца на растяжение

Основные напряжения:

$\sigma_{mц}$ – предел пропорциональности (выполняется закон Гука);

σ_T – предел текучести, при котором происходит деформация материала без увеличения нагрузки;

σ_B – предел прочности материала.

Пластичность – способность материала выдерживать большие остаточные деформации без разрушения.

Вязкость – свойство материала оказывать сопротивление в процессе деформации за счет сил трения, возникающих при перемещении элементарных частиц относительно друг друга.

Основные характеристики пластичности и вязкости:

$\delta_0 = \frac{\Delta l_0}{l_0} 100 \%$ – относительное остаточное удлинение образца в момент

разрыва;

$\psi = \frac{A_0 - A_{III}}{A_0} 100 \%$ – относительное сужение образца в процессе испытания;

$a = S_{OADEF} = \eta \sigma_B \delta_0$ – удельная работа деформации, затраченная на разрушение образца;

Коэффициенты запаса прочности n

Характер действия нагрузок	Свойства материала	Значение коэффициента n
Статическая	Пластичный	2,4...2,6
Статическая	Хрупкий	3,0...9,0
Ударная	Пластичный	2,8...5,0
Переменная	Пластичный	5,0...15,0

2.5. Контрольные вопросы

1. Что называется механическими характеристиками материалов?
2. Что называется пластичностью и вязкостью материала? Какие основные характеристики пластичности и вязкости?
3. Что такое наклеп и его использование в машиностроении?
4. Что называется предельным напряжением и как определяются пределы прочности для пластичных, хрупких и пластично-хрупких материалов?
5. Что называется допускаемым напряжением и как оно определяется?
6. Что такое коэффициент запаса прочности для пластичных и хрупких материалов?

ЛЕКЦИЯ 3. РАСТЯЖЕНИЕ СЖАТИЕ**3.1. Центральное растяжение и сжатие прямого стержня**

Центральным растяжением или центральным сжатием называется такой вид напряженно-деформированного состояния, при котором в поперечном сечении бруса возникает только **продольная сила** (растягивающая или сжимающая), а все остальные внутренние силовые факторы (ВСФ) равны нулю.

Рассмотрим прямой стержень длиной l , к которому приложены две силы F противоположного направления (рис. 3.1, а).

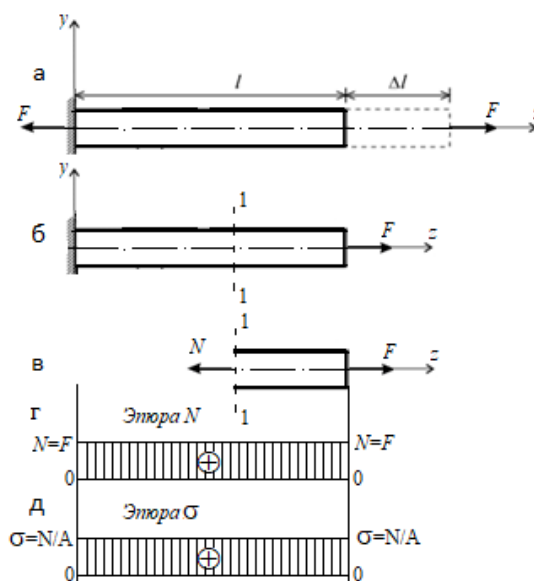


Рис.3.1. Расчетная схема прямого стержня при центральном растяжении

При воздействии сил F стержень удлиняется на величину Δl , которая называется абсолютной деформацией и измеряется в единицах длины [см; м].

Отношение $\varepsilon = \Delta l / l$ называется относительной продольной деформацией, величина безразмерная.

3.2. Продольные силы. Построение эпюр продольных сил

При действии внешних продольных сил F на прямой стержень в его поперечных сечениях возникает внутреннее усилие N , которое можно определить с помощью метода сечений (рис. 3.1, б). Проводим произвольное сечение 1-1 и рассматриваем равновесие правой отсеченной части. На эту часть (рис. 3.1, в) действует внешнее усилие F и внутренняя продольная сила N . Составим относительно отсеченной части уравнение равновесия $\sum z = 0$ (Сумма всех внешних и внутренних сил на отсеченную часть относительно оси z равна нулю. Силы действующие по оси считаются положительными, против – отрицательными). Имеем:

$$\sum z = F - N = 0, \text{ отсюда } N = F, [\text{кН}].$$

Строим эпюру нормальных сил N (рис. 3.1, г). Эпюра – графическая зависимость искомой величины по длине стержня от заданной внешней нагрузки. Эпюра строится на нейтральной линии 0-0. Положительные значения откладываются вверх от линии 0-0, отрицательные – вниз. В нашем случае N имеет положительное значение по всей длине стержня l .

3.3. Напряжения в поперечных сечениях стержня. Эпюра напряжений

Нормальные напряжения в поперечных сечениях прямого стержня определяются по формуле:

$$\sigma = N/A,$$

где A – площадь поперечного сечения стержня, в нашем случае – величина постоянная, [см², м²]. Эпюра построена на рис. 3.1, д.

3.4. Закон Гука

При центральном растяжении и сжатии напряжения прямо пропорциональны деформациям. Математически данное утверждение можно записать следующим образом:

$$\sigma = E \varepsilon,$$

где E – модуль упругости 1-го рода, для стали $E = 2 \cdot 10^4$ кН/см². ε – относительная продольная деформация, безразмерная величина.

3.5. Условия прочности и жесткости

Условие прочности по допускаемым напряжениям записывается в виде:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma],$$

где σ_{\max} – расчетное значение напряжения в опасной точке, определяется по эпюре напряжений; $[\sigma]$ – допускаемое напряжение, табличное значение, определяется лабораторным путем.

В некоторых случаях для обеспечения нормальной работы машин, конструкций и сооружений требуется проектировать размеры деталей и элементов таким образом, чтобы обеспечивалось условие жёсткости:

$$\Delta l_{\max} \leq [\Delta l],$$

где $[\Delta l]$ – допускаемое удлинение, задаётся техническими условиями.

Удлинение ступенчатых стержней, а также, когда внешние силы приложены в разных точках продольной оси стержня, определяется суммированием удлинений отдельных участков.

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \times l_i}{E_i \times A_i},$$

где N_i , l_i , E_i , A_i – нормальная сила, длина, модуль упругости и площадь поперечного сечения i -го участка соответственно.

Условие жёсткости позволяет выполнять три вида расчётов:

1. проверочный: $\Delta l_{\max} \leq [\Delta l]$;
2. проектировочный: $A \geq \frac{N_{\max} \times l}{E \times [\Delta l]}$ (стержень постоянного сечения);
3. расчёт грузоподъёмности или несущей способности:

$$F_{\max} \leq \frac{E \times [\Delta l] \times A}{l}.$$

Внешние силы, приложенные к упругому телу и вызывающие изменение его геометрии, совершают работу A_F на соответствующих перемещениях. В упругом теле накапливается потенциальная энергия деформации U . При действии динамических нагрузок часть работы внешних сил превращается в кинетическую энергию движения частиц тела K .

Уравнение баланса энергии можно записать в следующем виде:

$$A_F = U + K.$$

На рис. 3.2, а изображен стержень, растягиваемый силой F , удлинение которого соответствует Δl . График изменения величины удлинения стержня Δl в зависимости от силы F показан на рис. 3.2, б). В соответствии с законом Гука этот график носит линейный характер.

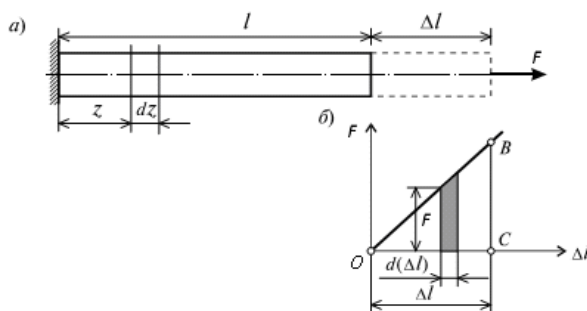


Рис. 3.2. а) – схема растягиваемого стержня; б) график зависимости $F - \Delta l$.

Пусть некоторому значению силы F соответствует удлинение стержня Δl . Дадим некоторое приращение силе ΔF – соответствующее приращение удлинения составит $d(\Delta l)$. Элементарная работа на этом приращении удлинения составит:

$$dA_F = (F + dF) \times d(\Delta l) = F \times d(\Delta l) + dF \times d(\Delta l),$$

вторым слагаемым, в силу его малости, можно пренебречь, и тогда

$$dA_F = F \times d(\Delta l).$$

Полная работа равна сумме элементарных работ, тогда при линейной зависимости работа внешней силы F на перемещении Δl будет равна площади треугольника OCB (рис. 3.2, б), т. е.:

$$A_F = \frac{1}{2} \times F \times \Delta l.$$

Брусья и шарнирно-стержневые системы, в которых внутренние усилия невозможно определить с помощью одних лишь уравнений равновесия, называют статически неопределимыми. Такие системы должны быть геометрически неизменяемыми.

Разность между числом неизвестных и числом независимых уравнений равновесия, которые можно составить для данной системы, называют степенью статической неопределимости.

Все статически неопределимые системы имеют «лишние» связи в виде закреплений, стержней или других элементов. Статически неопределимые системы приведены на рис. 4.9, б, в. Степень статической неопределимости определяется по формуле

$$n = k - 3,$$

где n – степень статической неопределимости;

k – число неизвестных;

3 – число уравнений статики.

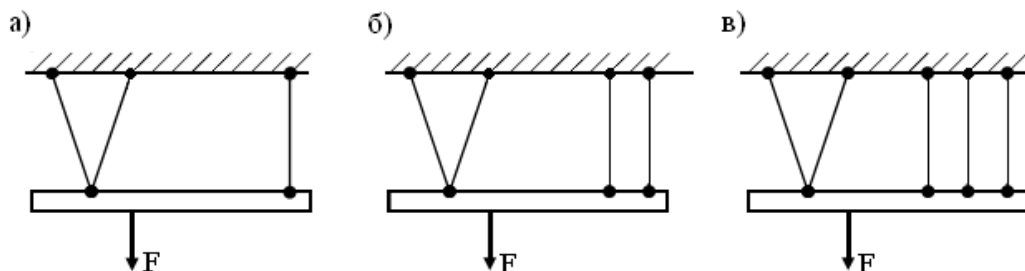


Рис.3.3. а – статически определимая система; б – 1 раз статически неопределимая система; в – 2 раза статически неопределимая система.

В статически неопределимых системах при изменении температуры возникают температурные напряжения (рис.3.4).

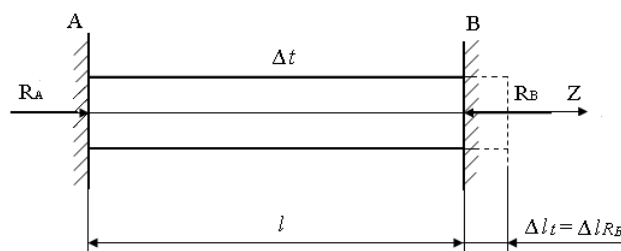


Рис. 3.4. Расчетная схема стержня при температурном воздействии

1. Составим уравнение равновесия: $\Sigma Z = 0, R_A - R_B = 0$
2. Отбросим правую заделку, составим уравнение совместности деформаций:

$\Delta l = \Delta l_t + \Delta l_{R_D} = 0$, отсюда по абсолютной величине $\Delta l_t = \Delta l_{R_D}$, где $\Delta l_t = \alpha \times l \times \Delta t$, α – коэффициент линейного температурного расширения.

3. Согласно закону Гука имеем:

$$\alpha \times l \times \Delta t = \frac{R_B \times l}{E \times A},$$

таким образом $R_A = R_B = \alpha \times \Delta t \times E \times A$,

где A – площадь поперечного сечения стержня.

4. Определим температурные напряжения:

$$\sigma_t = \frac{R_B}{A} = \alpha \times \Delta t \times E.$$

Полученная формула справедлива лишь для определения напряжений в стержнях постоянного сечения с жесткой заделкой обоих концов.

Из этой формулы следует, что в статически неопределимых системах изменение температуры вызывает дополнительные напряжения.

3.6. Контрольные вопросы

1. Центральное растяжение и сжатие. Дать определение.
2. Как построить эпюру продольных сил при центральном растяжении и сжатии?
3. Как построить эпюру нормальных напряжений при центральном растяжении и сжатии?
4. Как понимать закон Гука при центральном растяжении и сжатии?
5. Условие прочности и жесткости при центральном растяжении и сжатии.

ЛЕКЦИЯ №4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Статический момент площади. Определение центра тяжести сечения. Осевые, полярный и центробежный моменты инерции сечения. Изменение моментов инерции при параллельном переносе и повороте осей. Моменты инерции простых сечений. Радиусы инерции. Моменты сопротивления.

Выделим в плоском сечении элементарную площадку dA с координатами x, y (рис. 4.1). Сумма таких площадок – *площадь* A всего сечения, которая выражается интегралом

$$A = \int_A dA.$$

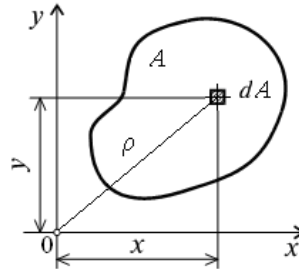


Рис. 4.1. Схема для определения статического момента площади плоского сечения

Статическим моментом площади сечения (рис. 4.1) относительно оси x или y называется взятая по всей площади A сечения сумма произведений площадей элементарных площадок на их расстояние до выбранной оси. Он определяется по формулам:

$$S_x = \int_A y \times dA, \quad S_y = \int_A x \times dA.$$

Из данных формул следует:

- 1) статический момент площади имеет размерность $[L^3]$;
- 2) в зависимости от положения осей, относительно которых вычисляется *статический момент площади*, он может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Если известны площадь сечения A и положение его центра тяжести $C (x_c; y_c)$, то статические моменты определяются по формулам:

$$S_x = y_c \times A, \quad S_y = x_c \times A,$$

из которых следует, что статический момент площади сечения относительно любой центральной (проходящей через центр тяжести) оси равен нулю.

Координаты центра тяжести сечения x_c и y_c определяем по формулам:

$$x_c = \frac{S_y}{A}, \quad y_c = \frac{S_x}{A}.$$

Если сложное сечение разделить на n частей, то его статический момент площади относительно любой оси равен сумме статических моментов его частей относительно этой оси:

$$S_x = A_1 \times y_{c1} + A_2 \times y_{c2} + \dots + A_n \times y_{cn} = \sum_{i=1}^n A_i \times y_{ci} = \sum_{i=1}^n (S_x)_i ;$$

$$S_y = A_1 \times x_{c1} + A_2 \times x_{c2} + \dots + A_n \times x_{cn} = \sum_{i=1}^n A_i \times x_{ci} = \sum_{i=1}^n (S_y)_i .$$

где A_i – площадь i -й части сечения;

x_{ci} и y_{ci} – координаты центра тяжести i -й части сечения;

$(S_x)_i$ и $(S_y)_i$ – статические моменты площади i -й части сечения относительно осей x и y соответственно.

Осевым моментом инерции сечения относительно какой-либо оси называется взятая по всей площади A сечения сумма произведений площадей элементарных площадок на квадраты их расстояний до взятой оси (см. рис. 4.1), что выражается следующими интегралами:

$$J_x = \int_A y^2 \times dA, \quad J_y = \int_A x^2 \times dA.$$

Геометрическая характеристика, которая представляет собой взятую по всей площади A сечения сумму произведений площадей элементарных площадок на произведение их расстояний до двух данных взаимно перпендикулярных осей (см. рис. 4.1), называется *центробежным моментом инерции сечения* относительно осей x и y и определяется по формуле

$$J_{xy} = \int_A x \times y \times dA.$$

Полярным моментом инерции сечения относительно начала системы координат xOy называется геометрическая характеристика, величина которой определяется равенством

$$J_p = \int_A \rho^2 \times dA,$$

где ρ – расстояние от начала координат до элементарной площадки dA .

Согласно рис. 4.1 имеем:

$$\rho^2 = x^2 + y^2,$$

тогда

$$J_p = \int_A (x^2 + y^2) \times dA = \int_A x^2 \times dA + \int_A y^2 \times dA,$$

$$J_p = J_x + J_y.$$

Таким образом, сумма осевых моментов инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции сечения относительно точки пересечения этих осей.

Общие свойства моментов инерции:

1) размерность моментов инерции $[L^4]$;

2) осевые и полярный моменты инерции всегда положительны.

Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным или равняться нулю.

Пусть моменты инерции J_x , J_y и J_{xy} для заданного сечения относительно старых осей x и y известны. Возьмем новую систему координат $x_1O_1y_1$ (рис. 3.2), оси которой параллельны старым осям. Обозначим через a и b координаты точки O_1 . Рассмотрим элементарную площадку dA , координаты которой в старой системе координат xOy равны x и y . В новой системе координат $x_1O_1y_1$ они равны $x_1 = x - b$ и $y_1 = y - a$.

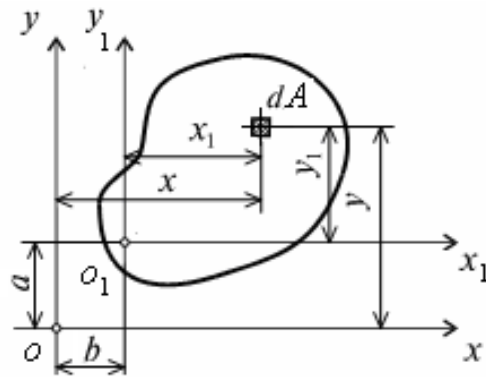


Рис. 4.2. Схема для определения моментов инерции сечения при параллельном переносе осей

Подставим значение $y_1 = y - a$ в выражение осевого момента инерции относительно оси x_1 , получим:

$$J_{x_1} = \int_A y_1^2 \times dA = \int_A (y - a)^2 \times dA = \int_A (y^2 - 2ay + a^2) \times dA =$$

$$= \int_A y^2 \times dA - 2a \times \int_A y \times dA + a^2 \times \int_A dA,$$

окончательно получим $J_{x_1} = J_x - 2a \times S_x + a^2 \times A$.

Аналогично найдем

$$J_{y_1} = \int_A x_1^2 \times dA = \int_A (x - b)^2 \times dA = \int_A (x^2 - 2bx + b^2) \times dA =$$

$$= \int_A x^2 \times dA - 2b \times \int_A x \times dA + b^2 \int_A dA,$$

$$J_{y_1} = J_y - 2b \times S_y + b^2 \times A.$$

Подставляя значения $x_1 = x - b$ и $y_1 = y - a$ в выражение

$$J_{x_1 y_1} = \int_A x_1 \times y_1 \times dA,$$

получим формулу для определения центробежного момента инерции сечения относительно осей x_1 и y_1

$$J_{x_1 y_1} = \int_A (y - a) \times (x - b) \times dA = \int_A x \times y \times dA - b \int_A y \times dA - a \int_A x \times dA +$$

$$+ a \times b \int_A dA = J_{xy} - b \times S_x - a \times S_y + a \times b \times A.$$

Если оси x и y проходят через центр тяжести сечения и совпадают с центральными осями x_c и y_c , то статический момент $S_x = S_y = 0$. Формулы для определения моментов инерции относительно осей x_1 и y_1 принимают вид:

$$J_{x1} = J_{xc} + a^2 \times A;$$

$$J_{y1} = J_{yc} + b^2 \times A;$$

$$J_{x1y1} = J_{xcyc} + a \times b \times A.$$

Моменты инерции сечения сложной формы относительно любых осей определяются как сумма моментов инерции составляющих (простых) частей сечения относительно этих осей.

Относительно оси x :

$$\begin{aligned} J_x &= J_{xc1} + y_{c1}^2 \times A_1 + J_{xc2} + y_{c2}^2 \times A_2 + \dots + J_{xcn} + y_{cn}^2 \times A_n = \\ &= \sum_{i=1}^n (J_{xc})_i + \sum_{i=1}^n (y_{ci}^2 \times A_i), \end{aligned}$$

относительно оси y :

$$\begin{aligned} J_y &= J_{yc1} + x_{c1}^2 \times A_1 + J_{yc2} + x_{c2}^2 \times A_2 + \dots + J_{ycn} + x_{cn}^2 \times A_n = \\ &= \sum_{i=1}^n (J_{yc})_i + \sum_{i=1}^n (x_{ci}^2 \times A_i), \end{aligned}$$

где J_{xci} J_{yci} – моменты инерции i -й части сечения относительно осей x_{ci} и y_{ci} , проходящих через ее центр тяжести параллельно осям x и y ;

y_{ci} – расстояние между осями x_{ci} и x ; x_{ci} – расстояние между осями y_{ci} и y .

Возьмем новую систему координат x_1Oy_1 с началом в той же точке O , но повернутую относительно старой системы xOy на угол α (рис. 4.3). Угол α считаем положительным, если поворот на этот угол оси x до совмещения с осью x_1 выполнен против часовой стрелки.

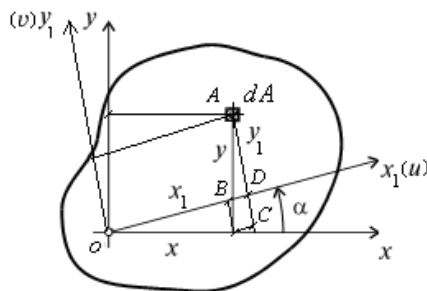


Рис. 4.3. Схема для определения моментов инерции сечения при повороте осей.

Рассмотрим элементарную площадку dA с координатами x и y в старой системе координат. Определим координаты x_1 и y_1 этой площадки в системе координат x_1Oy_1 . Из рис. 4.3 имеем: $x_1 = OB + BD$, $OB = x \times \cos \alpha$, $BD = y \times \sin \alpha$, аналогично $y_1 = AC - DC$, $AC = y \times \cos \alpha$, $DC = x \times \sin \alpha$, окончательно получим:

$$x_1 = x \times \cos \alpha + y \times \sin \alpha;$$

$$y_1 = y \times \cos \alpha - x \times \sin \alpha.$$

Подставим эти значения в формулы

$$\begin{aligned}
 J_{x_1} &= \int_A y_1^2 \times dA, & J_{y_1} &= \int_A x_1^2 \times dA, & J_{x_1 y_1} &= \int_A x_1 \times y_1 \times dA : \\
 J_{x_1} &= \int_A (y \times \cos \alpha - x \times \sin \alpha)^2 \times dA = \\
 &= \int_A (y^2 \times \cos^2 \alpha - 2x \times y \times \cos \alpha \times \sin \alpha + x^2 \times \sin^2 \alpha) dA = \\
 &= \cos^2 \alpha \int_A y^2 \times dA - 2 \cos \alpha \times \sin \alpha \int_A x \times y \times dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 \times dA = \\
 &= J_x \times \cos^2 \alpha + J_y \times \sin^2 \alpha - J_{xy} \times \sin 2\alpha; \\
 J_{y_1} &= \int_A (x \times \cos \alpha + y \times \sin \alpha)^2 dA = \\
 &= \int_A (x^2 \times \cos^2 \alpha + 2x \times y \times \cos \alpha \times \sin \alpha + y^2 \times \sin^2 \alpha) dA = \\
 &= \cos^2 \alpha \int_A x^2 \times dA + \sin^2 \alpha \int_A y^2 \times dA + 2 \cos \alpha \sin \alpha \int_A x \times y dA = \\
 &= J_y \times \cos^2 \alpha + J_x \times \sin^2 \alpha + J_{xy} \times \sin 2\alpha;
 \end{aligned}$$

Если сложить моменты инерции относительно осей x_1 и y_1 , то получим

$$J_{x_1} + J_{y_1} = J_x + J_y = \text{const.}$$

Следовательно, сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей сохраняет постоянную величину при их повороте на любой угол.

$$\begin{aligned}
 J_{x_1 y_1} &= \int_A x_1 \times y_1 \times dA = \int_A (x \times \cos \alpha + y \times \sin \alpha) \times (y \times \cos \alpha - x \times \sin \alpha) dA = \\
 &= \sin \alpha \times \cos \alpha \left(\int_A y^2 \times dA - \int_A x^2 \times dA \right) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_A x \times y dA = \\
 &= \frac{J_x - J_y}{2} \times \sin 2\alpha + J_{xy} \times \cos 2\alpha.
 \end{aligned}$$

При определении моментов инерции использовались следующие формулы:

$$\sin \alpha \times \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha, \quad \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha, \quad \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Оси, относительно которых осевые моменты инерции имеют экстремальные значения, называются *главными осями инерции*. Моменты инерции относительно главных осей называются *главными моментами инерции*.

Если осевой момент инерции относительно некоторой оси является максимальным, то осевой момент инерции относительно перпендикулярной ей оси является минимальным, так как сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей не зависит от угла α .

Для нахождения угла α_0 , определяющего положение главных осей, возьмем от момента инерции J_{x1} (J_{y1}) первую производную по углу α и приравняем ее нулю:

$$\begin{aligned}\frac{dJ_{x1}}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha}(J_x \times \cos^2 \alpha + J_y \times \sin^2 \alpha - J_{xy} \times \sin 2\alpha) = \\ &= -J_x \times 2 \sin \alpha \cos \alpha + J_y \times 2 \sin \alpha \cos \alpha - J_{xy} \times 2 \cos 2\alpha,\end{aligned}$$

далее

$$\left(\frac{dJ_{x1}}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} = -2J_x \sin \alpha_0 \times \cos \alpha_0 + 2J_y \sin \alpha_0 \times \cos \alpha_0 - 2J_{xy} \times \cos 2\alpha_0 = 0,$$

или

$$-(J_x - J_y) \times \sin 2\alpha_0 - 2J_{xy} \times \cos 2\alpha_0 = 0,$$

окончательно
$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y},$$

где α_0 – угол, на который требуется повернуть координатные оси x и y , чтобы они совпадали с главными осями.

При определении положения главных осей использовались следующие производные:

$$(\cos^2 \alpha)' = 2 \cos \alpha \times (\cos \alpha)' = 2 \cos \alpha \times (-\sin \alpha) = -\sin 2\alpha; \quad \sin^2 \alpha = 2 \sin \alpha \times (\sin \alpha)' = 2 \sin \alpha \times \cos \alpha; \quad (\sin 2\alpha)' = 2 \cos 2\alpha.$$

Подставив значение α_0 в формулу J_{x1} (J_{y1}) после преобразований получим формулу для определения главных моментов инерции:

$$J_{\min}^{\max} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}.$$

Главные оси, проходящие *через центр тяжести* сечения, называются главными центральными осями. Одна из главных осей инерции (ось максимум) обозначается U , а другая (ось минимум) – V (рис.4.3).

Например, положение главной центральной оси U , относительно которой момент инерции максимален, т. е. $I_U = I_{\max}$, можно определить двумя способами:

1) при $J_{xy} < 0$ главная ось U проходит через 1-й и 3-й, а при $J_{xy} > 0$ – через 2-й и 4-й квадранты;

2) если $J_x > J_y$, то главная ось U находится под углом α_0 к оси x . При $J_x < J_y$ ось U находится под углом α_0 к оси y .

Радиусы инерции сечения относительно координатных осей x , y обозначаются i_x , i_y соответственно и определяются по формулам:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}; i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}},$$

где A – площадь поперечного сечения бруса.

Определим осевые моменты инерции прямоугольника относительно осей x и y , проходящих через его центр тяжести. Выделим в плоскости прямоугольника элементарную площадку dA шириной b и высотой dy_1 (рис. 4.4).

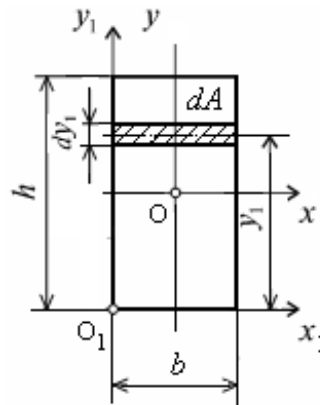


Рис. 4.4. Схема прямоугольника для определения главных осевых моментов инерции

Определим осевой момент инерции J_{x1} относительно оси x_1 , проходящей через основание прямоугольника:

$$J_{x1} = \int_A y_1^2 \times dA = \int_0^h y_1^2 \times b \times dy_1 = \frac{b \times h^3}{3}, \text{ аналогично } J_{y1} = \frac{h \times b^3}{3}.$$

Найдем осевой момент инерции J_x относительно оси x , проходящей через центр тяжести прямоугольника. Используем формулы для определения осевого момента инерции при параллельном переносе осей:

$$J_x = J_{x1} - b^2 \times A = \frac{b \times h^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \times b \times h = \frac{b \times h^3}{3} - \frac{b \times h^3}{4} = \frac{b \times h^3}{12},$$

аналогично $J_y = \frac{h \times b^3}{12},$

где $a = \frac{b}{2}$ – расстояние между осями y_1 и y ; $b = \frac{h}{2}$ – расстояние между осями x_1 и x ;

$A = b \times h$ – площадь прямоугольника.

Определим осевые моменты инерции треугольника. В плоскости треугольника (рис. 3.5) выделим элементарную площадку, параллельную оси x , площадью $dA = b(y_i) \times dy_i$.

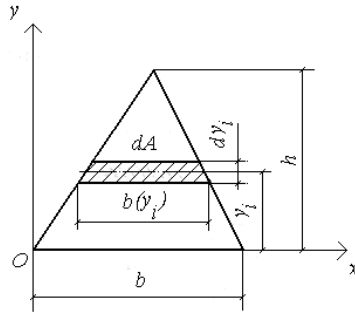


Рис. 3.5. Схема треугольника для определения главных осевых моментов инерции.

Из подобия треугольников имеем:

$$\frac{b(y_i)}{h - y_i} = \frac{b}{h}$$

Из этого соотношения находим $b(y_i) = b \times (1 - \frac{y_i}{h})$, тогда $dA = b \times (1 - \frac{y_i}{h}) \times dy_i$, подставим dA в формулу для определения J_x , получим

$$J_x = \int_A y_i^2 \times dA = b \times \int_0^h (1 - \frac{y_i}{h}) \times y_i^2 \times dy_i = (\frac{b \times y_i^3}{3} - \frac{b \times y_i^4}{4h}) \Big|_0^h = (\frac{b \times h^3}{3} - \frac{b \times h^3}{4}) = \frac{b \times h^3}{12},$$

аналогично $J_y = \frac{h \times b^3}{12}$ – осевые моменты инерции треугольника

относительно осей x и y соответственно.

Определим осевой момент инерции треугольника относительно центральной оси, параллельной основанию (рис. 4.6).

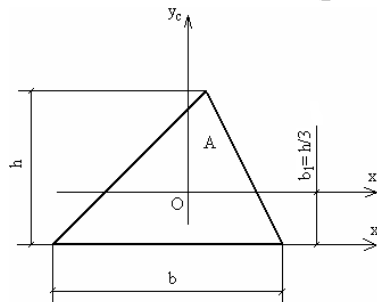


Рис.4.6. Схема треугольника для определения момента инерции относительно центральной оси x_c .

Воспользуемся формулой $J_x = J_{x_c} + b^2 \times A$, откуда $J_{x_c} = J_x - b^2 \times A$.

Учитывая, что $b = \frac{h}{3}$, $J_x = \frac{b \times h^3}{12}$, окончательно получим

$$J_{x_c} = \frac{b \times h^3}{12} - \frac{1}{2} b \times h \times \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{b \times h^3}{12} - \frac{b \times h^3}{18} = \frac{b \times h^3}{36}.$$

Определим *полярный* и *осевые* моменты инерции круга. В плоскости круга (рис. 4.7) выделим элементарную площадку в виде тонкого кольца с внутренним диаметром ρ и толщиной $d\rho$. Тогда площадь кольца $dA = 2\pi\rho \times d\rho$ и полярный момент инерции круга

$$J_{\rho} = \int_A \rho^2 \times dA = 2\pi \int_0^r \rho^3 \times d\rho = 2\pi \times \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^r = 2\pi \times \frac{r^4}{4} = 2\pi \times \frac{(d/2)^4}{4} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Согласно зависимости $J_{\rho} = J_x + J_y$ имеем $J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64}$ – осевой момент инерции круга.

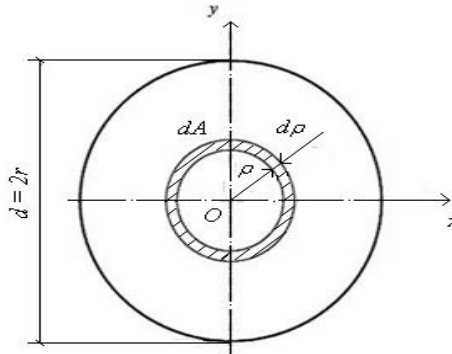


Рис.4.7. Схема круга для определения момента инерции относительно центральной оси x_c .

Моментом сопротивления сечения называется геометрическая характеристика, величина которой определяется по формулам:

$$W_x = \frac{\int y^2 \times dA}{y_{\max}}, \quad W_y = \frac{\int x^2 \times dA}{x_{\max}}, \quad W_{\rho} = \frac{\int \rho^2 \times dA}{\rho_{\max}} \quad \text{– осевые и полярный моменты}$$

сопротивления сечения соответственно,

где y_{\max} , x_{\max} , ρ_{\max} – расстояние от наиболее удаленной точки сечения до соответствующей оси.

Определим моменты сопротивления простых сечений относительно центральных осей.

1. Прямоугольник:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{b \times h^3 \times 2}{12 \times h} = \frac{b \times h^2}{6},$$

$$W_y = \frac{J_y}{x_{\max}} = \frac{h \times b^3 \times 2}{12 \times b} = \frac{h \times b^2}{6}.$$

2. Момент сопротивления треугольника относительно центральной оси параллельной основанию (рис. 4.6):

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{b \times h^3 \times 3}{36 \times 2 \times h} = \frac{b \times h^2}{24}.$$

3. Круг:

$$W_x = W_y = \frac{2J_x}{d} = \frac{2\pi \times d^4}{64 \times d} = \frac{\pi \times d^3}{32}, W_p = \frac{2J_p}{d} = \frac{2\pi \times d^4}{32 \times d} = \frac{\pi \times d^3}{16}$$

Контрольные вопросы

1. Что называется статическим моментом площади сечения относительно оси, в каких единицах он выражается?
2. Что такое осевой, центробежный и полярный моменты инерции? В каких единицах выражаются моменты инерции сечения?
3. Чему равен статический момент площади относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения?
4. Как определяются координаты центра тяжести простых (квадрат, прямоугольник, круг) и сложных сечений?
5. Чему равен осевой момент инерции прямоугольника относительно центральной оси, параллельной одной из его сторон?
6. Как изменяются осевые моменты инерции при параллельном переносе и повороте осей?
7. Какие оси называются главными осями инерции?
8. Какие оси называются главными центральными осями инерции?
9. Чему равен центробежный момент инерции относительно главных осей инерции?
10. В каких случаях можно без вычисления установить положение главных осей?
11. Как определить положение главных центральных осей инерции?
12. Сколько в сечении можно провести центральных и главных центральных осей инерции?

ЛЕКЦИЯ №5. КРУЧЕНИЕ

Кручением называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях элементов конструкций возникает только крутящий момент T , а другие внутренние силовые факторы (продольная сила, изгибающие моменты, поперечные силы) равны нулю.

Чтобы определить напряжения в поперечных сечениях вала, рассмотрим уравнение, связывающее крутящий момент с касательными напряжениями:

$$\int_A \tau \rho dA = T$$

где τ – касательное напряжение, действующее на элементарной площадке dA , расположенной на расстоянии ρ от центра тяжести сечения.

Выделим часть вала длиной dz между двумя поперечными сечениями. Считаем, что левое сечение закреплено в заделке, а правое сечение закручивается моментом $M_{кр}$ (рис. 5.1, в). При этом точка A остается неподвижной, а точка B переместится в положение B' . Мысленно вырежем в выделенном элементе внутреннюю часть с наружным радиусом ρ . Получим кольцевое сечение толщиной $d\rho$. Определим значение BB' из $\triangle ABB'$ и $\triangle BOB'$.

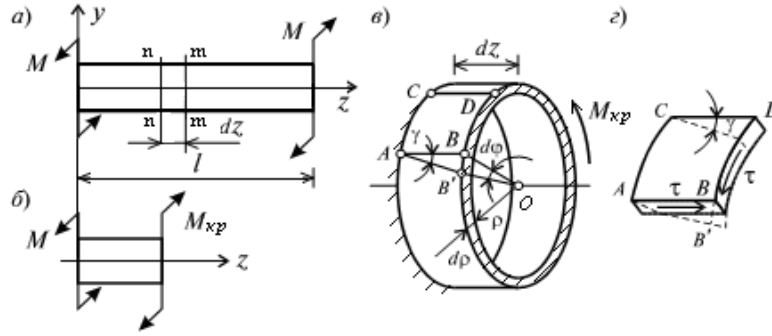


Рис. 5.1. Схема выделенной части вала длиной dz

Из $\triangle ABB'$ имеем: $BB' = AB \operatorname{tg} \gamma$,
учитывая, что при малых деформациях $\operatorname{tg} \gamma \cong \gamma$, получим

$$BB' = AB \gamma = dz \gamma.$$

С другой стороны, из $\triangle BOB'$:

$$BB' = OB d\varphi = (\rho + d\rho) d\varphi \cong \rho d\varphi.$$

Окончательно получим:

$$dz \gamma = \rho d\varphi,$$

откуда:

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz},$$

где γ – угол сдвига,

$d\varphi$ – абсолютный угол закручивания, размерность, рад.

Обозначим $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$ – относительный угол закручивания, размерность, $\frac{\text{рад}}{\text{м}}$, тогда $\gamma = \rho \theta$.

Используя закон Гука при сдвиге, получим:

$\tau = \gamma G = G \rho \theta$ – величина касательных напряжений в сечении вала на расстоянии ρ от центра тяжести сечения; G – модуль сдвига.

На основании полученной формулы можно сделать вывод, что τ в сечении вала распределяются по линейному закону и максимальные касательные напряжения τ_{max} возникают на поверхности вала. В центре

вала касательные напряжения равны нулю.

Распределение касательных напряжений по сечению вала показано на рис. 5.2.

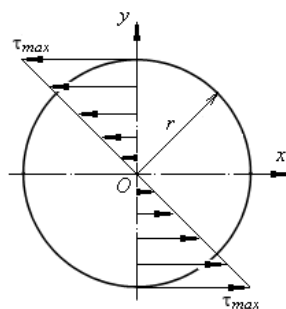


Рис. 5.2. Схема распределения касательных напряжений по сечению вала

Величину крутящего момента T можно определить через τ . Момент относительно оси z от действия касательных напряжений τ на элементарной площадке dA равен (рис. 5.3):

$$dT = \tau \rho dA.$$

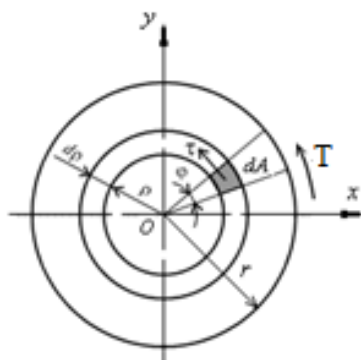


Рис. 5.3. Схема для определения T в сечении вала

Проинтегрировав это выражение по площади поперечного сечения вала, получим:

$$T = \int_A \tau \rho dA.$$

Пусть геометрические размеры поперечного сечения вала одинаковы по длине. Материал вала однороден и изотропен. Подставим в интеграл выражение τ , получим:

$$T = \int_A G \rho \theta \rho dA = \int_A G \rho^2 \theta dA = G \theta J_p,$$

где $\int_A \rho^2 dA = J_p$ – полярный момент инерции сечения вала.

Правило знаков для крутящих моментов.

Если крутящий момент со стороны внешней нормали n к сечению вала вращается против часовой стрелки, то он считается положительным (рис. 5.4), в противном случае – крутящий момент считается отрицательным.

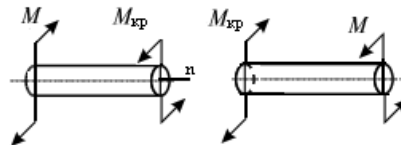


Рис. 5.4. Схема для определения знаков крутящих моментов в сечениях вала

На эпюре крутящих моментов положительные значения откладываются вверх от нулевой линии, отрицательные значения – вниз.

Из выражения крутящего момента при кручении определим относительный угол закручивания θ :

$$\theta = \frac{T}{GJ_p}$$

где GJ_p – жесткость поперечного сечения вала при кручении.

$d\varphi = \theta dz = Tdz/(GJ_p)$, проинтегрируем полученное выражение, если длина вала равна l

$$\varphi(z) = \int_0^l \frac{T}{GJ_p} dz,$$

если $T = \text{const}$, $GJ_p = \text{const}$, то решение интеграла принимает вид

$$\varphi(z) = \frac{Tl}{GJ_p} + \varphi(0),$$

где $\varphi(0)$ – угол закручивания сечения в начале системы отсчета.

Для определения касательных напряжений используем формулу $\tau = G\rho\theta$. Подставляя в данную формулу выражение θ , получим:

$$\tau = G\rho \frac{T}{GJ_p} = \frac{T\rho}{J_p}$$

Это уравнение показывает, что при чистом кручении в сечении вала возникают касательные напряжения, прямо пропорциональные крутящему

моменту и радиусу, где они определяются, и обратно пропорциональные полярному моменту инерции.

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p},$$

где $W_p = \frac{J_p}{r}$ полярный момент сопротивления вала.

При кручении внешние моменты, приложенные к валу, совершают работу вследствие поворота сечений, к которым они приложены. Эта работа расходуется на создание запаса потенциальной энергии деформации, численно равной работе внутренних сил.

Согласно закону Гука в пределах упругих деформаций угол закручивания растет пропорционально крутящему моменту. Поэтому зависимость крутящего момента от угла закручивания представляет собой прямую OA , изображенную на рис.5.5.

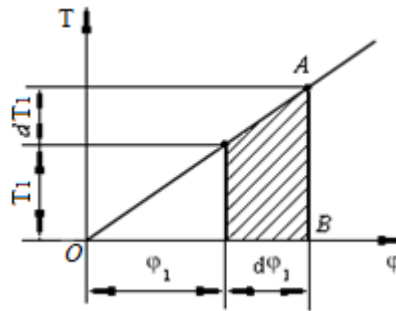


Рис. 5.5. Схема для определения потенциальной энергии деформации при кручении

Пусть угол φ_1 соответствует промежуточному значению момента T_1 . Увеличим момент на бесконечно малую величину dT_1 . Тогда угол закручивания получит приращение $d\varphi_1$.

Произведенная работа равна площади заштрихованной трапеции и находится по формуле

$$dU = \frac{T_1 + dT_1 + T_1}{2} d\varphi_1 = \left(T_1 + \frac{dT_1}{2} \right) d\varphi.$$

Тогда полная работа деформации при возрастании крутящего момента от 0 до T равна накопленной потенциальной энергии и определяется площадью треугольника OAB :

$$U = \frac{T\varphi}{2}.$$

Подставим в полученную формулу значение угла закручивания, получим:

$$U = \frac{TTl}{2GJ_p} = \frac{T^2l}{2GJ_p},$$

где G – модуль сдвига; J_ρ – полярный момент инерции сечения; l – длина вала.

Выразим потенциальную энергию через деформацию. В формулу для определения U подставим зависимость крутящего момента от угла закручивания, тогда:

$$T = \frac{\varphi G J_\rho}{l}, \text{ далее } U = \frac{\varphi^2 G^2 l J_\rho^2}{2 G l^2 J_\rho} = \frac{G J_\rho \varphi^2}{2l}$$

Произведем расчет валов на прочность и жесткость при кручении. Используя формулу для максимальных касательных напряжений, можем записать *условие прочности при кручении* в следующем виде:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_\rho} \leq [\tau].$$

Из этого неравенства определяется полярный момент сопротивления:

$$W_\rho = \frac{T}{[\tau]}.$$

Для вала круглого поперечного сечения имеем:

$$W_\rho = \frac{2 J_\rho}{d} = \frac{\pi d^3}{16}$$

Подставим выражение W_ρ в условие прочности при кручении и, решая данное уравнение относительно диаметра, получим следующую расчетную формулу:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}}$$

Расчетное значение диаметра округляем до ближайшего большего значения из ряда линейных размеров (0;0,5;1,0;1,5;2,0...17,5;18,0;19,0...).

Если выбрать значение d несколько меньше *расчетного диаметра*, то необходимо выполнить проверочный расчет и убедиться, что перегрузка вала меньше 5 %, т. е. выполнить последовательно следующий расчет:

$$W_\rho = \frac{\pi d_M^3}{16}; \tau_{\max} = \frac{T}{W_\rho}; \delta = \frac{\tau_{\max} - [\tau]}{[\tau]} 100 \% < 5 \%,$$

где d_M – диаметр вала несколько меньше расчетного.

Из схемы распределения касательных напряжений следует, что материал вала вблизи оси используется нерационально. С точки зрения экономии металла и снижения веса конструкции следует выбирать вал пустотелый, поперечное сечение которого имеет форму кольца (рис. 5.6).

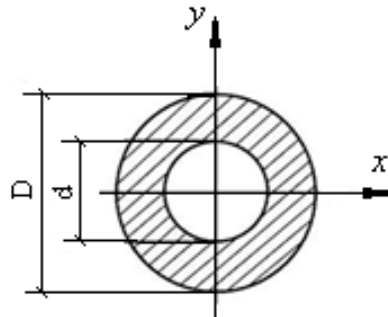


Рис. 5.6. Схема пустотелого вала

Обозначим через d внутренний диаметр кольца, D – наружный диаметр, $\alpha = d/D$ – отношение диаметров.

Определим геометрические характеристики кольцевого сечения вала:

$$J_{\rho} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4);$$

$$W_{\rho} = \frac{2 J_{\rho}}{D} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4).$$

Из условия прочности при кручении определим значение D :

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau](1 - \alpha^4)}}.$$

Расчетное значение D округляется до ближайших значений d_M и D_M , и затем выполняется проверочный расчет:

$$J_{\rho} = \frac{\pi}{32} (D_M^4 - d_M^4); \quad W_{\rho} = \frac{2 J_{\rho}}{D};$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}}; \quad \delta = \frac{\tau_{\max} - [\tau]}{[\tau]} 100 \% < 5 \%.$$

Условие жесткости вала представим в следующем виде:

$$\theta = \frac{T}{G J_{\rho}} \leq [\theta].$$

Значения $[\theta]$ зависит от условия работы вала и задается в градусах на длину вала. При статической нагрузке принимают:

$$[\theta] = 0,3^\circ \text{ м}^{-1} = 0,3^\circ \frac{\pi}{180^\circ \times 100} = \frac{\pi}{6} 10^{-4} \frac{\text{рад}}{\text{см}}.$$

Если при проверочном расчете не выполняется условие прочности, то диаметр вала необходимо подбирать из условия жесткости:

$$J_\rho \geq \frac{T}{G[\theta]}.$$

Для сплошного вала:

$$J_\rho = \frac{\pi d^4}{32}; \quad d \geq \sqrt[4]{\frac{32T}{\pi G[\theta]}}.$$

Для вала кольцевого сечения с заданным соотношением диаметров

$$\frac{d}{D} = \alpha; \quad J_\rho \geq \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4);$$

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32T}{\pi(1 - \alpha^4)G[\theta]}}; \quad d = \alpha D.$$

На практике часто требуется рассчитать диаметр вала, когда известна мощность N , кВт, передаваемая валом, и частота вращения n , мин⁻¹. Расчетная схема показана на рис. 5.7.

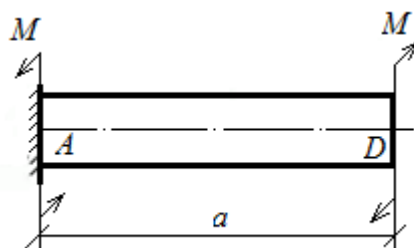


Рис.5.7. Расчетная схема кручения вала

Мощность, передаваемая валом, определяется по формуле:

$$N = T \cdot \omega \cdot 10^{-3},$$

где N – передаваемая мощность, кВт; ω – угловая скорость вращения вала, рад/с, которая определяется по формуле:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}$$

крутящий момент T (кНм) в сечениях вала, равный внешнему моменту, определяется по формуле:

$$T = M = \frac{N}{\omega} = \frac{N \cdot 30}{\pi n} = 9,55 \frac{N}{n}$$

Из условия прочности, подставляя значение W_p , находим диаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 955540 \cdot N}{3,14 \cdot [\tau] \cdot n}} = 169,5 \sqrt[3]{\frac{N}{[\tau] \cdot n}} \text{ см.}$$

В полученную формулу N подставляется в кВт; n в мин⁻¹; $[\tau]$ в Н/см².

Рассмотрим расчет статически неопределимой системы на кручение на конкретном примере. **Пример.** Определить из расчета на прочность при $\tau = 6$ кН/см² допускаемое значение скручивающего момента для вала, жестко заземленного обоими концами и нагруженного, как показано на рис.5.8, а.

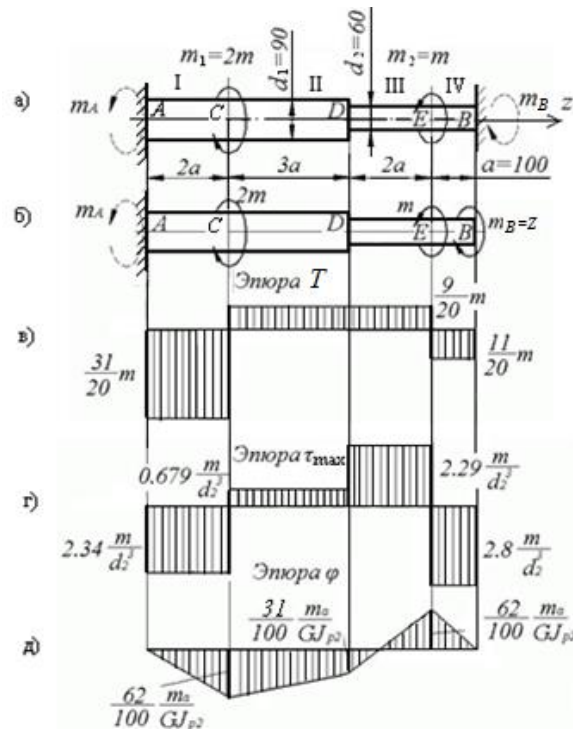


Рис. 5.8. Схема статически неопределимого вала

В заделках возникают реактивные моменты m_A и m_B (рис. 5.8, а). Составим уравнение равновесия относительно продольной оси вала:

$$\sum m_z = 0; -m_A + 2m - m + m_B = 0, \text{ отсюда } m_A - m_B = 0.$$

Таким образом, задача является один раз статически неопределимой – одно уравнение статики и два неизвестных реактивных момента. Для составления уравнения совместности деформаций (перемещений) отбросим правую заделку, заменив ее действие на вал неизвестным реактивным моментом $m_B = Z$. Полученная таким образом статически определимая система (рис. 5.8, б) эквивалентна заданной, и, следовательно, угол поворота сечения B равен нулю:

$$\varphi_B = 0.$$

Применяя принцип независимости действия сил, запишем уравнение перемещений для сечения B в виде

$$\varphi_B = \varphi_{B,m_1} + \varphi_{B,m_2} + \varphi_{B,Z} = 0.$$

При действии только момента m_1 угол поворота сечения B равен углу закручивания участка AC , т. е.

$$\varphi_{B,m_1} = \varphi_{AC} = \frac{2m_2a}{GJ_{\rho_1}}.$$

Аналогично при действии только момента m_2 :

$$\varphi_{B,m_2} = \varphi_{AE} = \varphi_{AD} + \varphi_{DE} = -\left(\frac{m_2 5a}{GJ_{\rho_1}} + \frac{m_2 2a}{GJ_{\rho_2}}\right).$$

При действии только момента $m_B = Z$ имеем:

$$\varphi_{B,Z} = \varphi_{AB} = \varphi_{AD} + \varphi_{DB} = Z\left(\frac{5a}{GJ_{\rho_1}} + \frac{3a}{GJ_{\rho_2}}\right).$$

Для упрощения вычислений выразим

$$J_{\rho_1} = \frac{\pi d_1^4}{32} \text{ через } J_{\rho_2} = \frac{\pi d_2^4}{32}, \text{ получим, } \frac{J_{\rho_1}}{J_{\rho_2}} \approx 5.$$

Подставляя значения углов поворота в уравнение совместности деформаций и учитывая последнее равенство, получаем:

$$\frac{4m}{5} - \frac{5m}{5} - 2m + \frac{5z}{5} + 3Z = 0, \text{ откуда } m_B = Z = \frac{11}{20}m.$$

Подставляя значение z в уравнение равновесия, найдем:

$$m_A = \frac{31}{20}m.$$

После раскрытия статической неопределимости эпюры крутящих моментов, касательных напряжений и углов закручивания строятся обычным способом. Эта эпюра представлена на рис. 5.8, в, г, д.

Опасными являются сечения участка BE . Следует отметить, что сечения, в которых возникают наибольшие крутящие моменты (участок AC), в данном случае менее опасны.

Запишем условие прочности:

$$\tau_{\max} = 2,8 \frac{m}{d_2^3} \leq [\tau],$$

$$\text{откуда } [m] \leq \frac{d_2^3 [\tau]}{2,8} = \frac{6^3 \cdot 6}{2,8} = 463 \text{ кНсм} = 4,63 \text{ кНм}.$$

Точный расчет винтовых пружин достаточно сложен, так как материал пружины испытывает одновременно кручение, сдвиг, изгиб и растяжение.

Пружина с малым шагом витков – это такая пружина, у которой угол между плоскостью, перпендикулярной к оси пружины, и плоскостью витка не превышает 14° .

Пусть винтовая пружина растягивается (или сжимается) силами F , имеет средний диаметр $D = 2R$ и изготовлена из проволоки диаметром d (рис. 5.9, а). Для определения внутренних усилий в пружине применим метод сечений.

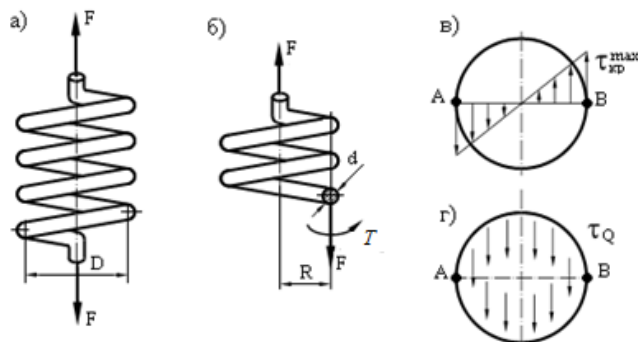


Рис. 5.9. Схема винтовой пружины с малым шагом витков

Верхняя часть пружины (рис. 5.9, б) будет находиться в равновесии под действием внешней силы F и внутренних усилий в проведенном сечении прутка, которые можно представить суммой силы F и крутящего момента T .

Считая, что угол наклона витка ≈ 0 , можно пренебречь остальными силовыми факторами (продольной силой и изгибающим моментом). Материал пружины испытывает срез и кручение.

Сила $Q = F$ вызывает в поперечном сечении касательные напряжения τ_Q , которые определяются по формуле

$$\tau_Q = \frac{Q}{A} = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d^2}.$$

Считаем, что касательные напряжения τ_Q распределяются по сечению равномерно (рис. 5.9, г).

Максимальные касательные напряжения от кручения равны:

$$\tau_{max}^{кр} = \frac{T}{W_\rho} = \frac{16FD}{2\pi d^3} = \frac{8FD}{\pi d^3}.$$

Распределение касательных напряжений от кручения показано на рисунке 5.4, в.

Опасной точкой на контуре сечения является точка A , в которой направления касательных напряжений совпадают. Таким образом, максимальные касательные напряжения равны:

$$\tau_{max} = \tau_Q + \tau_{max}^{кр} = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{8FD}{\pi d^3} = \frac{8FD}{\pi d^3} \left(\frac{d}{2D} + 1 \right).$$

Так как $\tau_Q \ll \tau_{max}^{кр}$ и на практике $\frac{d}{2D} = \frac{1}{20} \dots \frac{1}{40} \ll 1$, то часто действием τ_Q пренебрегают.

Условие прочности для пружин малой кривизны (приближенный расчет):

$$\frac{D}{d} > 10, \quad \tau_{max} = \frac{8FD}{\pi d^3} \leq [\tau].$$

Условие прочности для пружин малой кривизны:

$$\frac{D}{d} < 10, \quad \tau_{max} = k \frac{8FD}{\pi d^3} \leq [\tau],$$

где $k = (D/d + 0,25)/(D/d - 1)$ – поправочный коэффициент;
 $[\tau] = 200 \dots 800$ МПа.

Из формул для определения τ_{\max} следует, что увеличение диаметра пружины D уменьшает ее прочность, а увеличение диаметра проволоки d – увеличивает.

При определении деформации пружины будем учитывать только кручение витков.

Изменение длины пружины вдоль оси под действием внешней нагрузки называется *осадкой пружины* λ , которая определяется по формуле:

$$\lambda = \frac{8FD^3n}{Gd^4},$$

где n – число витков; G – модуль сдвига.

Зависимость осадки λ от осевой нагрузки F называется *характеристикой пружины*. Обычные пружины имеют линейную характеристику.

Усилие F , при котором перемещение λ равно единице (1 м), называется *жесткостью пружины* c , которая определяется по формуле:

$$c = \frac{F}{\lambda} = \frac{Gd^4}{8D^3n} = \text{const},$$

размерность жесткости кН/м.

Итак, увеличение числа витков n и диаметра пружины D уменьшает жесткость пружины, а увеличение диаметра проволоки d повышает жесткость пружины.

Контрольные вопросы

1. Какой вид нагружения называется кручением?
2. Что называется валом? Что такое крутящий момент?
3. Какие деформации возникают при кручении?
4. Какие внутренние силовые факторы возникают при кручении?
5. Вывести формулу для определения напряжений в поперечном сечении скручиваемого круглого вала.
6. Вывести формулы для определения относительного и полного углов закручивания круглого вала.
7. Что такое эпюра крутящего момента и как она строится?
8. Как распределяется касательное напряжение при кручении? Чему равно напряжение в центре круглого поперечного сечения?
9. Написать формулу для расчета напряжения на поверхности вала при кручении. Как изменится напряжение, если диаметр вала увеличится в два раза?
10. В чем заключается расчет на прочность при кручении?
11. В чем заключается расчет на жесткость при кручении?

12. Почему при одинаковой прочности и жесткости вал кольцевого поперечного сечения легче, чем вал сплошного круглого сечения?

13. Как вычислить потенциальную энергию деформации, накапливаемую валом при кручении?

14. Расчет статически неопределимых валов.

15. Расчет цилиндрических пружин с малым шагом витков. Что такое осадка и жесткость пружины, как они определяются?

ЛЕКЦИЯ 6. ИЗГИБ

В практических инженерных расчетах очень часто брус (балка) подвергается действию поперечной нагрузки, плоскость действия которой проходит через ось балки. Такой вид деформации называется *изгибом* (рис. 6.1).

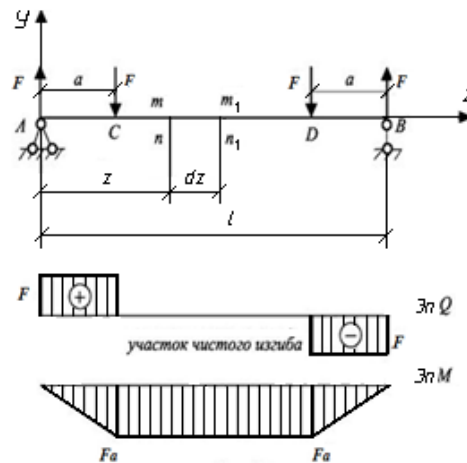


Рис.6.1. Схема балки, подвергающейся изгибу.

В сечении балки, взятом на участке чистого изгиба, возникает только один изгибающий момент

$$M_x = \int_A \sigma y dA$$

Следовательно, в сечении действуют нормальные напряжения σ (рис. 8.2).

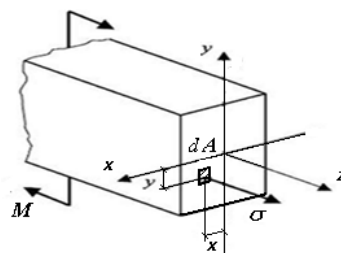


Рис. 6.2. Схема внутренних сил при чистом изгибе.

Продольная сила N и изгибающий момент M_y будут равны нулю, т. е.

$$N = \int_A \sigma x dA,$$

$$N_y = \int_A \sigma x dA = 0.$$

Из формулы для определения изгибающего момента M_x нельзя определить величину нормальных напряжений σ , так как неизвестно, как они распределены по сечению. Задача определения напряжений σ в сечении балки является статически неопределимой. Пусть отдельное волокно при изгибе испытывает простое растяжение или сжатие. Тогда для него можно записать закон Гука как при растяжении:

$$\sigma = E \varepsilon.$$

Чтобы найти относительную деформацию ε на участке чистого изгиба, выделим элемент балки длиной dz и рассмотрим его деформацию.

Сечения mn и m_1n_1 остаются плоскими и поворачиваются на угол $d\varphi/2$. Волокна нейтрального слоя искривляются, но их длина не изменяется. Радиус кривизны нейтрального слоя обозначим ρ . Тогда имеем:

$$dz = OO_1 = \rho d\varphi.$$

Волокно AB , расположенное на расстоянии y от нейтрального слоя, удлинится, радиус его кривизны составляет $\rho + y$ (рис. 6.3.).

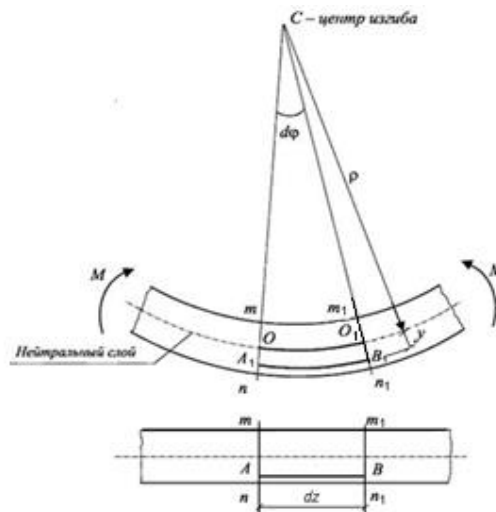


Рис. 6.3. Схема деформации элемента балки длиной dz .

Относительное удлинение волокна:

$$\varepsilon = \frac{A_1B_1 - AB}{AB} = \frac{(\rho + y)d\varphi - dz}{dz} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}.$$

Тогда $\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho}$.

Подставим данное выражение в формулу для M_x :

$$M_x = \int_A \sigma y dA = \int_A E \frac{y}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA.$$

Учитывая, что

$$\int_A y^2 dA = J_x.$$

представляет момент инерции сечения относительно оси x , можно записать

$$M_x = \frac{1}{\rho} EJ_x,$$

Откуда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}.$$

Величина EJ_x называется *жесткостью поперечного сечения* при изгибе.

Из вышеприведенной формулы видно, что если балка изготовлена из однородного материала ($E = const$) и имеет постоянное сечение ($J_x = const$), то при чистом изгибе ($M = const$) ее ось искривляется по дуге окружности ($\rho = const$). Подставим в формулу для определения σ значение кривизны, получим:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho} = E \frac{M_x y}{EJ_x} = \frac{M_x y}{J_x}$$

Рассмотрим построение эпюр M и Q на конкретном примере (рис. 6.4, а). Заданная система является статически определимой, следовательно, из условий равенства нулю суммы моментов всех сил относительно шарнирных закреплений определяем вертикальные реакции в опорах:

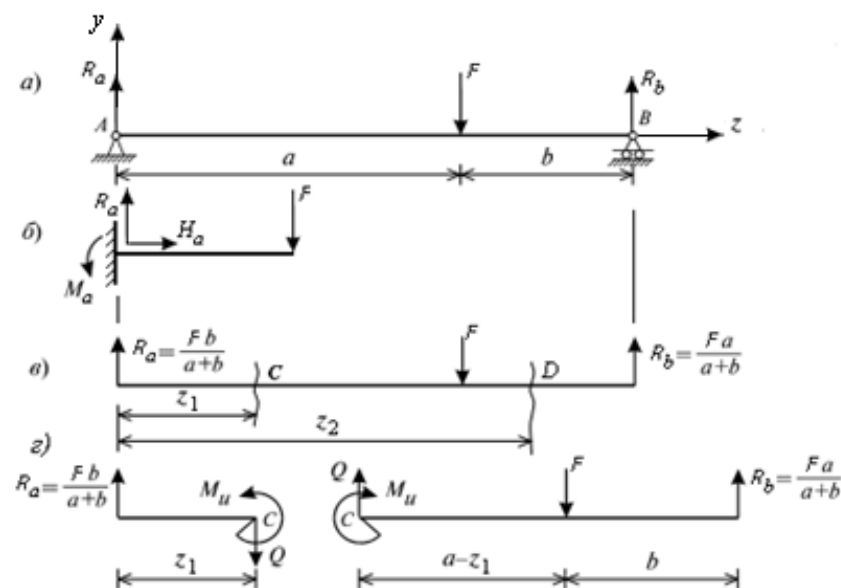


Рис. 6.4. Расчетная схема однопролетной балки

$$\sum m(B) = 0, \quad R_a(a+b) - Fb = 0, \quad R_a = \frac{Fb}{a+b};$$

$$\sum m(A) = 0, \quad R_b(a+b) - Fa = 0, \quad R_b = \frac{Fa}{a+b}.$$

Для определения реакции H_A имеем:

$$\sum z = 0, \text{ откуда } H_A = 0.$$

Для проверки правильности вычислений воспользуемся условием равенства нулю суммы всех вертикальных сил $\sum y = 0$, откуда получим:

$$R_a + R_b - F = \frac{Fb}{a+b} + \frac{Fa}{a+b} - F = 0, \text{ реакции найдены верно.}$$

Для определения внутренних силовых факторов (изгибающего момента $M(z)$ и поперечной силы $Q(z)$), как функций от продольной координаты z , воспользуемся *методом сечений*. Для получения этих зависимостей разбиваем балку на *участки*, границами которых являются следующие сечения: начало и конец балки; точки приложения сосредоточенных усилий; начало и конец действия распределенной нагрузки; сечения, в которых скачкообразно изменяется жесткость балки; точки, где происходит изменение положения элементов стержневой системы со сложной структурой.

Заданная балка (рис. 6.4, в) состоит из двух участков – первого ($0 \leq z_1 \leq a$) и второго ($a \leq z_2 \leq a+b$). Рассматривая последовательно сечения, принадлежащие к первому и второму участкам, и равновесие отсеченных частей балки при действии на них всех внешних сил и внутренних усилий, составим общие уравнения для внутренних силовых факторов. В системе координат yOz , принятой на рис. 6.5, а, положительный момент вызывает растяжение нижних волокон балки. При построении эпюры $M(z)$ положительные ординаты откладываются вниз от нулевой линии, отрицательные – вверх.

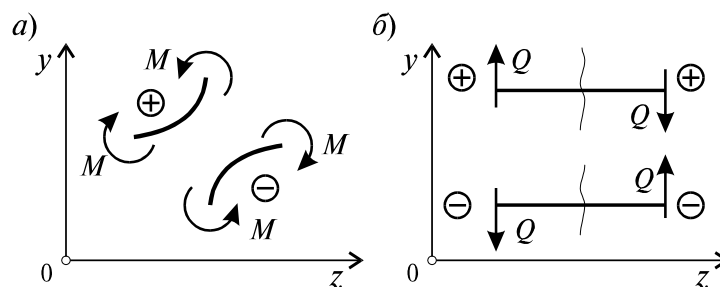


Рис. 6.5. Правило знаков для изгибающих моментов и поперечных сил

Для поперечных сил, независимо от направления координатных осей, устанавливается следующее правило знаков: если результирующая поперечная сила Q_y вращает рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки, то она считается положительной, в противном случае – отрицательной (рис. 6.5, б). При построении эпюры $Q(z)$ положительные ординаты откладываются вверх от нулевой линии, отрицательные – вниз.

Из условия равновесия $\Sigma M_x = 0$; $\Sigma y = 0$ отсеченной части балки (рис.6.4, г), расположенной левее от сечения z_1 (первый участок), имеем:

$$M_x(z_1) = R_a z_1; Q_y = R_a.$$

Для определения M_x и Q_y на втором участке рассмотрим равновесие отсеченной части балки, расположенной правее от сечения z_2 (рис. 6.4, г), т. е. $\Sigma M_x = 0$; $\Sigma y = 0$, откуда

$$M_x(z_2) = R_b(a + b - z_2); Q_y = -R_b.$$

Эпюры M_x и Q_y построены на растянутых волокнах и изображены на рис. 6.6.

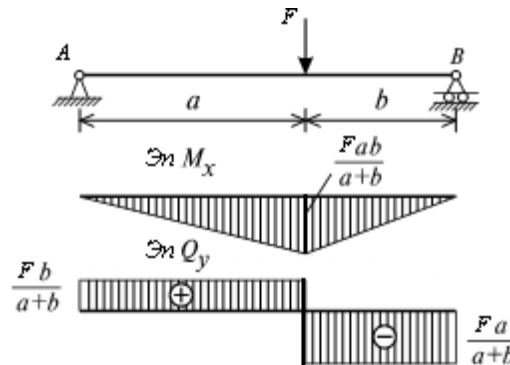


Рис. 6.6. Построение эпюр M_x и Q_y при изгибе

При поперечном изгибе в сечениях балки кроме изгибающего момента M возникает и поперечная сила Q . Поэтому кроме нормальных напряжений в сечениях балки возникают и касательные напряжения. Определим касательные напряжения, возникающие в балке прямоугольного поперечного сечения.

Возьмем два произвольных сечения по длине балки $I-I$ и $II-II$, расположенных на расстоянии dz друг от друга (рис.8.7, а). Согласно эпюрам, в сечении $I-I$ действуют поперечная сила Q_x и изгибающий момент M_x , а в сечении $II-II$ – поперечная сила Q_x и изгибающий момент $M_x + dM_x$.

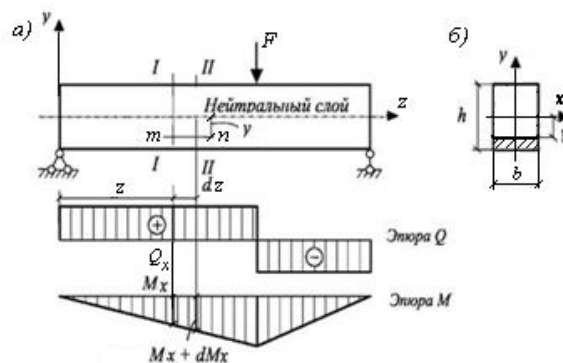


Рис.6.7. Схема балки к расчету касательных напряжений.

Нормальные напряжения, вызванные изгибающими моментами в сечениях $I-I$ и $II-II$, соответственно определяются по формулам:

$$\sigma' = \frac{My}{J_x}; \quad \sigma'' = \frac{(M + dM)y}{J_x}.$$

Проведем горизонтальное сечение mn на расстоянии y от нейтральной оси балки и рассмотрим равновесие выделенного элемента (рис. 6.7, б).

Равнодействующие нормальных напряжений, которые действуют на левую и правую боковые грани параллелепипеда, обозначим N_1 и N_2 . Площадь граней обозначим A_{omc} (часть отсеченной площади поперечного сечения, расположенная между горизонтальным сечением mn и нижним основанием сечения балки).

$$N_1 = \int_{A_{omc}} \sigma' dA = \int_{A_{omc}} \frac{My}{J_x} dA = \frac{M}{J_x} \int_{A_{omc}} y dA,$$

где $\int_{A_{omc}} y dA = S_x^{omc}$, тогда $N_1 = \frac{M}{J_x} S_x^{omc}$;

$$N_2 = \int_{A_{omc}} \sigma'' dA = \int_{A_{omc}} \frac{(M + dM)y}{J_x} dA = \frac{(M + dM)y}{J_x} S_x^{omc}.$$

Выделенный элемент (рис. 6.8) находится в равновесии и для него справедливо условие равновесия $\Sigma x = 0$.

Предположим, что в горизонтальном сечении параллелепипеда действуют касательные напряжения τ , которые равномерно распределены по ширине сечения. Площадь горизонтального сечения равна bdz .

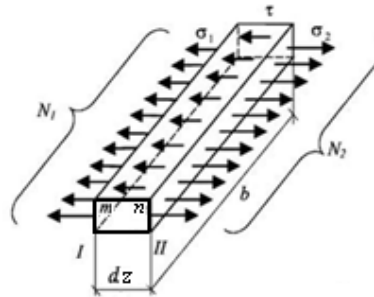


Рис. 6.8. Схема распределения внутренних сил

Из уравнения равновесия получим:

$$\Sigma x = N_2 - N_1 - \tau b dz = 0,$$

откуда

$$\tau = \frac{N_2 - N_1}{b dz} = \frac{dM S_x^{omc}}{b dz J_x}.$$

Используя зависимость

$$\frac{dM}{dz} = 0,$$

окончательно получим

$$\tau = \frac{QS_x^{omc}}{bJ_x} \text{ – формула Д. И. Журавского,}$$

где Q – величина поперечной силы в сечении; S_x^{omc} – статический момент отсеченной части площади поперечного сечения, расположенной между рассматриваемым волокном и краем сечения балки относительно нейтральной оси; b – ширина сечения в той точке, где определяются касательные напряжения; J_x – осевой момент площади поперечного сечения относительно нейтральной оси.

Согласно закону парности касательных напряжений они возникают и в поперечных сечениях балки. Знак касательных напряжений определяется знаком поперечной силы Q .

Для обеспечения прочности балки необходимо, чтобы максимальные нормальные напряжения в опасном сечении, где изгибающий момент достигает наибольшего по абсолютной величине значения, не превосходили допустимой величины. Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям для симметричных сечений имеет вид

$$\frac{|M_{\max}|}{W_x} \leq [\sigma].$$

Для балок с несимметричным поперечным сечением относительно оси x необходимо составить два условия прочности – для сжатой и растянутой зоны отдельно:

$$\frac{|M_{\max}|}{J_x} h_c \leq [\sigma_c] \text{ и } \frac{|M_{\max}|}{J_x} h_p \leq [\sigma_p],$$

где $[\sigma_c]$ и $[\sigma_p]$ – допускаемые напряжения на сжатие и на растяжение соответственно.

Из условия прочности по нормальным напряжениям вытекает три вида расчетов:

- 1) проверочный расчет, при котором определяются максимальные нормальные напряжения и сравниваются с допускаемыми напряжениями;
- 2) проектировочный расчет для определения размеров поперечного сечения;
- 3) определение величины допускаемой нагрузки (несущей способности балки).

При подборе сечений прокатного профиля необходимо определить из условия прочности требуемый момент сопротивления W_x и затем из таблиц сортамента найти соответствующий номер профиля.

Балка, изображенная на рис. 6.9, а, нагружена произвольной распределенной нагрузкой $q = f(z)$.

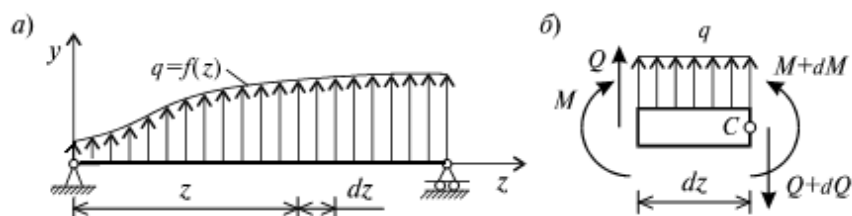


Рис. 6.9. Однопролетная балка, нагруженная произвольной распределенной нагрузкой

Выделим из балки элемент длиной dz и приложим по его краям положительные внутренние усилия. Считаем, что в пределах малого участка dz нагрузка q распределена равномерно. Составим уравнения равновесия проекций всех сил на вертикальную ось y и суммы моментов всех сил относительно поперечной оси x , проходящей через точку C (рис. 6.9, б), получим:

$$\begin{aligned} Q_y + q dz - Q_y - d Q_y &= 0; \\ M_x + Q_y dz + q dz dz/2 - M_x - d M_x &= 0. \end{aligned}$$

В данных уравнениях выполним упрощения и отбросим величины второго порядка малости, получим:

$$\frac{dQ_y}{dz} = q; \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y,$$

откуда

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = q.$$

Проверки правильности построения эпюр внутренних силовых факторов при поперечном изгибе.

1. Эпюра M_x на участках балки между сосредоточенными силами, между сосредоточенной силой и моментом, между началом или концом действия равномерно распределенной нагрузки и сосредоточенной силой или моментом всегда изменяется по линейному закону (прямая под углом к нулевой линии). Если эпюра M строится на растянутых волокнах, то в пределах действия равномерно распределенной нагрузки она изменяется по закону квадратной параболы с выпуклостью в сторону действия нагрузки.

2. Под точкой приложения сосредоточенной силы эпюра M_x имеет перегиб с направлением в сторону действия силы.

3. На эпюре M_x в сечении, где действует сосредоточенный момент m , будет скачок, равный его величине.

4. Над шарнирными опорами однопролетной балки изгибающий момент может быть только в тех случаях, когда в опорных сечениях приложены сосредоточенные моменты или когда на консолях, расположенных за опорами, приложены нагрузки. Во всех других случаях изгибающие моменты в шарнирных опорах равны нулю.

5. В сечениях, где поперечная сила Q_y принимает нулевое значение и меняет знак, изгибающий момент M_x достигает экстремальных значений.

6. Поперечная сила Q_y на участке равна нулю, если во всех сечениях по длине этого участка $M_x = \text{const}$.

7. Эпюра Q_y постоянна на участках балки между сосредоточенными нагрузками и изменяется по линейному закону лишь на участках, где действует равномерно распределенная нагрузка.

8. Эпюра Q_y в точках приложения сосредоточенных вертикальных сил (F , R_A , R_B) имеет скачки, равные по величине приложенным в этих сечениях сосредоточенным силам, причем их направление всегда совпадает с направлением этих сил.

В общем случае выбор поперечного сечения балки определяется материалом, характером внешней нагрузки и условиями работы конструкции.

Будем считать сечение балки рациональным, если оно обеспечивает необходимую прочность при минимальном весе, т. е. при минимальной площади поперечного сечения.

Согласно условию прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Предположим, что площадь поперечного сечения балки $A = \text{const}$, тогда наиболее рациональной формой поперечного сечения будет такая, для которой W_x имеет максимальное значение. Для этого следует располагать большую часть площади сечения дальше от нейтральной оси (рис. 6.10).

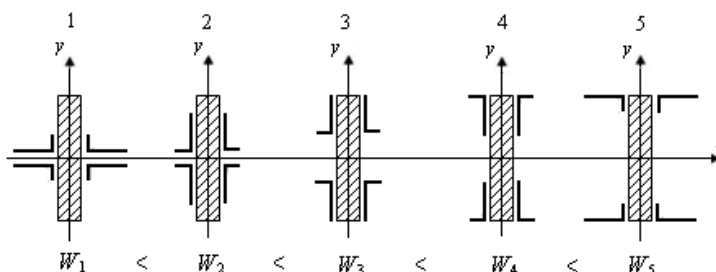


Рис. 6.10. Моменты сопротивления для различных сечений балки

Согласно рис. 6.10 наиболее рациональной будет форма сечения 5. Таким образом, при изгибе балки из пластичного материала сечение тем рациональнее с точки зрения расхода материала, чем оно ближе к форме идеального двутавра (рис.6.11).

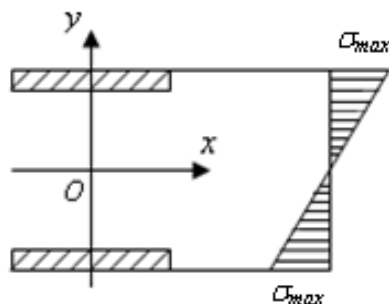


Рис. 8.11. Схема идеального двутавра

Если материал конструкции одинаково работает на растяжение и сжатие (сталь), то рациональными будут сечения, симметричные относительно нейтральной оси. Близким к идеальному сечению является двутавровое сечение. Деревянные балки, как правило, имеют прямоугольное или круглое сечение, так как изготовление деревянных двутавровых балок требует больших трудозатрат. Следует отметить, что при одинаковой прочности вес двутавровой балки значительно меньше, почти в 4 раза, по сравнению с балкой круглого сечения.

Для балок из хрупких материалов (чугун, бетон) целесообразно использовать несимметричные сечения относительно нейтральной оси. Хрупкие материалы хорошо работают на сжатие и значительно хуже на растяжение. Поэтому, выбирая форму сечения балки, можно добиться того, чтобы нейтральная линия была смещена в сторону растянутой зоны и σ_{max} в растянутой зоне было значительно меньше, чем в сжатой зоне.

Для исследования напряженного состояния в произвольной точке балки, испытывающей поперечный изгиб, выделим вокруг исследуемой точки элементарную призму. Пусть вертикальная площадка призмы является частью поперечного сечения балки, а ее наклонная площадка составляет произвольный угол α с осью z . Принимаем, что выделенный элемент имеет следующие размеры по координатным осям: dz по оси z ; dy по оси y ; по оси x – размер, равный ширине балки (рис. 6.12). Так как вертикальная площадка выделенного элемента принадлежит поперечному сечению балки, испытывающему поперечный изгиб, то нормальные напряжения σ на этой площадке определяются по формуле $\sigma = \frac{M_x y}{J_x}$, а касательные напряжения τ – по формуле Журавского.

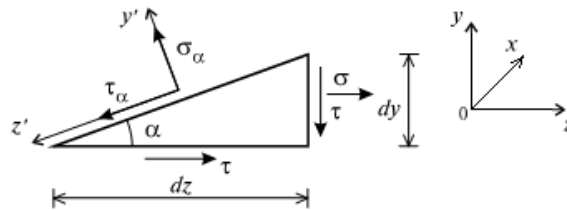


Рис. 6.12. Схема элементарной призмы

Так как вертикальная площадка выделенного элемента принадлежит поперечному сечению балки, испытывающему поперечный изгиб, то нормальные напряжения σ на этой площадке определяются по формуле $\sigma = \frac{M_x y}{J_x}$, а касательные напряжения τ – по формуле Журавского. Касательные напряжения на горизонтальной площадке призмы с учетом закона парности касательных напряжений также равны τ . С учетом принятых допущений при изгибе (продольные волокна балки не деформируют друг друга), нормальные напряжения на этой площадке равны нулю.

Обозначим величины нормальных и касательных напряжений на наклонной площадке через σ_a и τ_a соответственно. Пусть площадь наклонной площадки равна dA . Тогда площади вертикальной и горизонтальной площадок будут равны $dA \sin \alpha$ и $dA \cos \alpha$ соответственно.

Составляя уравнения равновесия для элементарной вырезанной призмы (рис. 6.12), получим:

$$\Sigma y' = 0; \quad \Sigma z' = 0,$$

откуда будем иметь:

$$\begin{aligned} \sigma_a dA - \tau \cos \alpha dA \sin \alpha - \tau \sin \alpha dA \cos \alpha - \sigma \sin \alpha dA \sin \alpha &= 0; \\ \tau_a dA - \tau \sin \alpha dA \sin \alpha - \tau \cos \alpha dA \cos \alpha - \sigma \cos \alpha dA \sin \alpha &= 0. \end{aligned}$$

После несложных преобразований получим окончательные выражения напряжений на наклонной площадке:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \sigma \sin^2 \alpha + \tau \sin 2\alpha; \\ \tau_a &= \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Определим значение $\alpha = \alpha_0$, при котором напряжение σ_a принимает экстремальное значение. Возьмем производную функции σ_a по α и приравняем ее нулю:

$$\frac{d\sigma_a}{d\alpha} = 2\sigma \sin \alpha \cos \alpha + 2\tau \cos 2\alpha = 0.$$

Пусть $\alpha = \alpha_0$, тогда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau}{\sigma}.$$

Окончательно будем иметь:

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\tau}{\sigma} \right).$$

Согласно последнему выражению, экстремальные напряжения возникают на двух взаимно перпендикулярных площадках, называемых *главными*, а сами напряжения на этих площадках называются *главными напряжениями*.

Сопоставим формулы τ_a и $\frac{d\sigma_a}{d\alpha}$, получим

$$\tau_a = \frac{1}{2} \frac{d\sigma_a}{d\alpha},$$

откуда следует, что касательные напряжения на *главных площадках* всегда равны нулю.

С учетом известных тригонометрических тождеств

$$\sin^2 \alpha_0 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha_0) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}} \right);$$

$$\sin 2\alpha_0 = \pm \frac{\operatorname{tg} 2\alpha_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}}$$

и формулы $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau}{\sigma}$ определим главные напряжения:

$$\sigma_{\alpha_0} = \sigma_{\frac{\min}{\max}} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

Метод начальных параметров.

Рассмотрим балку постоянной жесткости, нагруженную положительными сосредоточенными моментами, силами и равномерно распределенной нагрузкой. Они считаются положительными, если вызывают в сечении положительный изгибающий момент (рис. 6.13).

Начало координат возьмем на левом конце балки, ось z направим вправо, ось y – вверх. Разобьем балку на ряд участков.

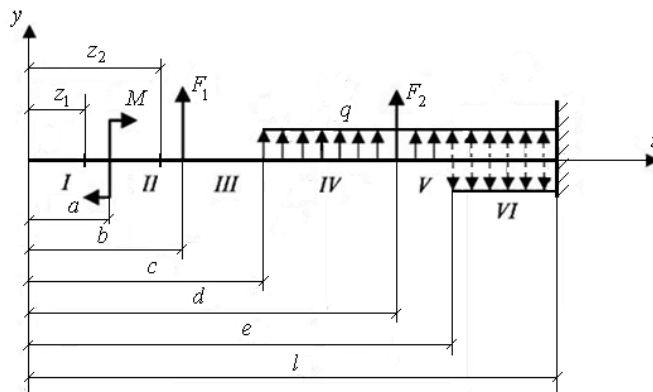


Рис. 6.13. Схема к расчету балки методом начальных параметров

Первый участок:

$$0 \leq z_1 \leq a; M(z) = 0,$$

тогда

$$EJ_x \frac{d^2 y}{dz^2} = 0,$$

проинтегрируем уравнение упругой линии, получим:

$$EJ_x \frac{dy}{dz} = C_1; EJ_x y(z) = C_1 z + D_1.$$

Второй участок:

$$\alpha \leq z_2 \leq b, \quad M(z) = M.$$

Умножим изгибающий момент на величину $(z_2 - \alpha)^0$, равную единице:

$$M(z) = M(z_2 - \alpha)^0;$$

$$EJ_x \frac{d^2 y}{dz^2} = M(z_2 - \alpha)^0,$$

после интегрирования имеем:

$$EJ_x \frac{dy}{dz} = M(z_2 - \alpha) + C_2; \quad EJ_x y(z) = \frac{M(z_2 - \alpha)^2}{2} + C_2 z + D_2.$$

Постоянные интегрирования определим из условия, что упругая линия не имеет разрывов и изломов и является плавной кривой. На границе первого и второго участков имеем:

$$\left. \frac{dy}{dz} \right|_{z_1=\alpha} = \left. \frac{dy}{dz} \right|_{z_2=\alpha},$$

для n участков балки получим: $C_1 = C_2 = \dots = C_n = C$;

$$y(z) \Big|_{z_1=\alpha} = y(z) \Big|_{z_2=\alpha},$$

тогда для n участков балки: $D_1 = D_2 = \dots = D_n = D$.

Определим физический смысл постоянных интегрирования C и D . Если обозначить угол поворота и прогиб в начале координат через θ_0 и y_0 , то из уравнения упругой линии получим:

$$C = EJ_x \theta_0; \quad D = EJ_x y_0 - \text{начальные параметры.}$$

Рассмотрим последний шестой участок балки. Уравнение моментов в общем виде на этом участке имеет вид

$$M(z) = \sum_{i=1}^n M_i (z - \alpha_i)^0 + \sum_{i=1}^m F_i (z - b_i) + \sum_{i=1}^k q_i \frac{(z - c_i)^2}{2} - \sum_{i=1}^p q_i \frac{(z - d_i)^2}{2}.$$

Проинтегрируем дважды это уравнение, получим:

$$\begin{aligned}
EJ_x \theta(z) &= EJ_x \theta_0 + \sum_{i=1}^n M_i (z - \alpha_i) + \sum_{i=1}^m \frac{F_i (z - b_i)^2}{2} + \\
&+ \sum_{i=1}^k q_i \frac{(z - c_i)^3}{6} - \sum_{i=1}^p q_i \frac{(z - d_i)^3}{6}; \\
EJ_x y(z) &= EJ_x y_0 z + EJ_x y_0 + \sum_{i=1}^n \frac{M_i (z - \alpha_i)^2}{2} + \sum_{i=1}^m \frac{F_i (z - b_i)^3}{6} + \\
&+ \sum_{i=1}^k q_i \frac{(z - c_i)^4}{24} - \sum_{i=1}^p q_i \frac{(z - d_i)^4}{24}.
\end{aligned}$$

При использовании полученных уравнений должны выполняться приведенные ниже требования.

1. При определении прогиба и угла поворота произвольного сечения в уравнения записываются слагаемые только для тех нагрузок, которые расположены между началом координат и рассматриваемым сечением. Если нагрузка относительно рассматриваемого сечения создает положительный изгибающий момент, то она входит в эти уравнения со знаком «плюс».

2. Распределенная нагрузка не должна прерываться. Если по условию задачи распределенная нагрузка оканчивается на одном из участков (конец пятого участка), то ее следует продолжить до конца балки, добавив одновременно нагрузку (добавленная и компенсирующая нагрузки показаны на расчетной схеме пунктиром, рис. 9.1) такой же интенсивности, но с противоположным знаком.

3. Если начало координат расположено на левом конце балки, то положительным будет угол поворота сечения против часовой стрелки. Если же начало координат взято на правом конце балки, то положительным будет угол поворота сечения по часовой стрелке. Линейное перемещение вверх будет положительным независимо от того, где расположено начало координат.

4. Жесткость балки должна быть постоянной на всех участках.

5. Начало координат является единым для всех участков балки.

6. Ось балки является прямолинейной.

7. Значения начальных параметров находятся из граничных условий в опорных сечениях балки. Если начало координат взято в жестко закрепленном опорном сечении, то начальные параметры будут равны нулю, т. е. $\theta_0 = 0$ и $y_0 = 0$. Поэтому для консольной балки, имеющей жесткую заделку, начало координат обязательно следует размещать в этом сечении.

Если начало координат находится в сечении на шарнирной опоре, то $\theta_0 \neq 0$ и $y_0 = 0$.

Если же концевые сечения балки не являются опорными сечениями, то начальные параметры не равны нулю и их необходимо определять.

Для этого в общем виде находят прогибы в опорных сечениях и, приравняв их к нулю, получают уравнения для определения начальных параметров.

Графоаналитический метод. Интеграл Мора. Рассмотрим общий метод определения перемещений, пригодный для любой линейно деформируемой

системы при любой нагрузке. Этот метод был предложен немецким ученым О. Мором.

Пусть требуется определить вертикальное перемещение y_c точки C балки, изображенной на рис. 6.14, а.

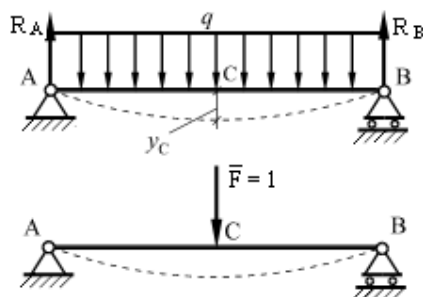


Рис.6.14. Схема балки для определения перемещений с помощью интеграла Мора

Возьмем такую же вторую балку (рис. 6.14, б) и в искомой точке C приложим единичную силу $\bar{F} = 1$. Сообщим дополнительно этой балке такие же прогибы, какие имеет первая балка, изгибаемая распределенной нагрузкой q . Потенциальная энергия U , накопленная вследствие деформации второй балки, будет равна работе единичной силы $\bar{F} = 1$ на перемещении y_c :

$$U = 1 \cdot y_c.$$

Дополнительную потенциальную энергию второй балки можно определить другим способом. Если вырезать из балки бесконечно малый элемент длиной dz , то его потенциальная энергия определяется по формуле:

$$dU = \bar{M}d\varphi,$$

где \bar{M} – момент от единичной нагрузки $\bar{F} = 1$ в сечении C ; $d\varphi$ – угол поворота концевых сечений элемента балки длиной dz , который определяется по формуле:

$$d\varphi = \frac{dz}{\rho},$$

где ρ – радиус нейтрального слоя.

С учетом выражения $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}$, определим $d\varphi$:

$$d\varphi = \frac{M_x dz}{EJ_x}, \text{ далее } dU = \frac{\bar{M}M_x dz}{EJ_x}.$$

Потенциальная энергия всей балки, нагруженной единичной силой, определится по формуле:

$$U = \int_0^1 \frac{\bar{M}M_x dz}{EJ_x}.$$

Сравним выражения для определения потенциальной энергии, найденной двумя способами, получим:

$$y_c = \int_0^1 \frac{\overline{M} M_x dz}{EJ_x}.$$

Если балка имеет постоянное поперечное сечение, то

$$y_c = \frac{1}{EJ_x} \int_0^1 \overline{M} M_x dz \text{ – интеграл Мора,}$$

где y_c – прогиб балки в рассматриваемом сечении; EJ_x – жесткость балки при изгибе; \overline{M} – изгибающий момент в рассматриваемом сечении от действия единичной силы; M_x – изгибающий момент в рассматриваемом сечении от действия на балку внешних нагрузок; z – координата сечения балки.

Для определения угла поворота в рассматриваемом сечении прикладываем единичный момент $\overline{M} = 1$.

Способ Верещагина.

Помимо непосредственного вычисления интеграла Мора для определения перемещений при изгибе можно пользоваться графоаналитическим методом перемножения эпюр по правилу Верещагина.

Для вывода формулы, предложенной Верещагиным, возьмем участок балки длиной l_1 – l_2 . Построим *грузовую* эпюру M от заданной внешней нагрузки. Часть грузовой эпюры на длине балки l_1 – l_2 показана на рис. 6.15, а.

В сечении C , где необходимо определить прогиб балки, прикладываем единичную силу $\overline{F} = 1$ и строим от нее *единичную* эпюру изгибающих моментов \overline{M} . Часть этой эпюры на той же длине балки приведена на рис. 6.15, б.

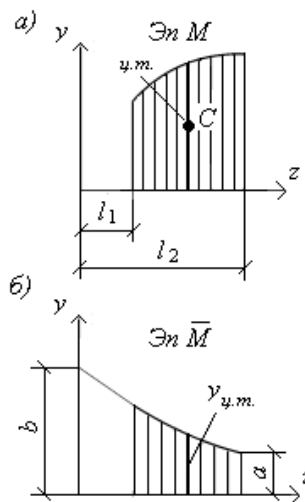


Рис. 6.15. Схема участка балки для определения перемещений способом Верещагина

В общем случае грузовая эпюра определяется уравнением $M = f(x)$, а эпюра от единичной нагрузки – уравнением прямой линии $\overline{M} = az + b$. Подставим эти значения в интеграл Мора, получим:

$$y_c = \frac{1}{EJ_x} \int_0^1 M_x \bar{M} dz = \frac{1}{EJ_x} \int_0^1 M_x (\alpha z + b) dz = \frac{1}{EJ_x} \int_0^1 M_x \alpha z dz +$$

$$+ \frac{1}{EJ_x} \int_0^1 M_x b dz = \frac{1}{EJ_x} \left(\int_0^1 \alpha z dA + \int_0^1 b dA \right) = \frac{1}{EJ_x} A(b + \alpha z_{ц.т.}),$$

где A – площадь грузовой эпюры на участке балки длиной dz .

Так как $b + \alpha z_{ц.т.} = y_{ц.м.}$, то окончательно получим:

$$y_c = \frac{1}{EJ_x} Ay_{ц.м.},$$

где $y_{ц.м.}$ – ордината единичной эпюры моментов \bar{M} под центром тяжести грузовой эпюры M_x .

Для нескольких грузовых участков балки формула перемещений имеет вид:

$$y_c = \frac{1}{EJ_x} \sum_{i=1}^n Ay_{ц.м.}.$$

Для определения перемещений при помощи правила Верещагина необходимо:

1) построить эпюры изгибающих моментов от внешней нагрузки.

В том сечении, где необходимо определить прогиб, приложить единичную силу (для нахождения угла поворота в сечении приложить единичный момент);

2) построить эпюры изгибающих моментов от единичной силы (от единичного момента);

3) вычислить площадь эпюры A на каждом участке балки.

Умножить каждую площадь грузовой эпюры на соответствующую ординату единичной эпюры, находящуюся под центром тяжести грузовой эпюры. Полученные результаты сложить.

Контрольные вопросы

1. Что такое чистый изгиб, поперечный изгиб и продольно-поперечный изгиб?

2. Внутренние силовые факторы при изгибе.

3. Как определяются нормальные и касательные напряжения при изгибе?

4. Построение эпюр M и Q при изгибе.

5. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.

6. Условие прочности и жесткости при изгибе.

7. Рациональное сечение балки при изгибе.

8. Формула Журавского для определения касательных напряжений при изгибе.

9. Построение эпюр M и Q для простейших сечений при изгибе.

10. Балки переменного сечения. Определение перемещений.

ЛЕКЦИЯ 7. СЛОЖНОЕ НАГРУЖЕНИЕ

Косым называют такой вид изгиба, при котором все внешние нагрузки, вызывающие изгиб, действуют в одной силовой плоскости, не совпадающей ни с одной из главных плоскостей (рис. 7.1).

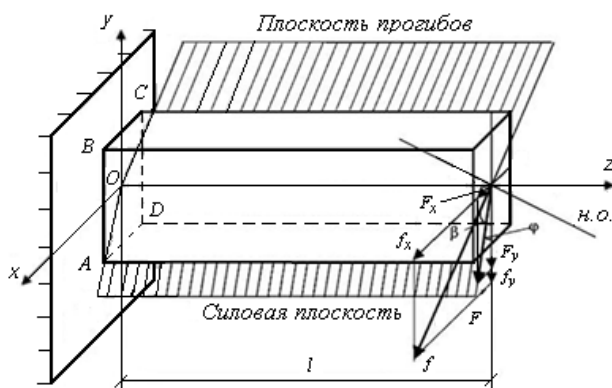


Рис. 7.1. Расчетная схема к косому изгибу

Косой изгиб удобнее всего рассматривать как одновременный изгиб бруса в двух главных плоскостях xOz и yOz . Для наглядности рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения, возьмем произвольное ее сечение на расстоянии l от конца консоли.

Внешняя сила F приложена под углом φ к оси y . Разложим силу F на составляющие, лежащие в главных плоскостях бруса, тогда:

$$F_x = F \sin \varphi;$$

$$F_y = F \cos \varphi.$$

Изгибающие моменты в произвольном сечении, взятом на расстоянии z от свободного конца, будут равны:

$$M_x = F_y z = F z \cos \varphi;$$

$$M_y = F_x z = F z \sin \varphi.$$

Таким образом, в каждом сечении бруса одновременно действуют два изгибающих момента, которые создают изгиб в главных плоскостях. Поэтому косой изгиб можно рассматривать как частный случай пространственного изгиба.

Нормальные напряжения в поперечном сечении бруса при косом изгибе определяются по формуле

$$\sigma = \pm \frac{M_x y}{J_x} \pm \frac{M_y x}{J_y} = \pm F z \left(\frac{y \cos \varphi}{J_x} + \frac{x \sin \varphi}{J_y} \right).$$

Для нахождения наибольших растягивающих и сжимающих нормальных напряжений при косом изгибе необходимо выбрать опасное сечение бруса.

Если изгибающие моменты $|M_x|$ и $|M_y|$ достигают наибольших значений в некотором сечении, то это и есть опасное сечение. Таким образом, $|M_x|_{max} = M_x^{оп}$; $|M_y|_{max} = M_y^{оп}$.

К опасным сечениям относятся также сечения, где изгибающие моменты $|M_x|$ и $|M_y|$ одновременно достигают достаточно больших значений. Поэтому при косом изгибе может быть несколько опасных сечений. В общем случае, когда $J_x \neq J_y$, $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ – несимметричное сечение, то есть нейтральная ось не перпендикулярна силовой плоскости. **Для симметричных сечений косо́й изгиб невозмо́жен.**

Положение нейтральной оси при косом изгибе определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sin \varphi J_x}{\cos \varphi J_y} = -\operatorname{tg} \varphi \frac{J_x}{J_y};$$

тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \varphi \frac{J_x}{J_y},$$

где α – угол наклона нейтральной оси к оси x ; φ – угол наклона силовой плоскости к оси y (рис. 10.3).

В опасном сечении бруса (в заделке, рис. 7.1) напряжения в угловых точках определяются по формулам:

$$\sigma_A = -\frac{F_y l}{W_x} - \frac{F_x l}{W_y};$$

$$\sigma_B = \frac{F_y l}{W_x} - \frac{F_x l}{W_y};$$

$$\sigma_C = \frac{F_y l}{W_x} + \frac{F_x l}{W_y};$$

$$\sigma_D = -\frac{F_y l}{W_x} + \frac{F_x l}{W_y}.$$

При косом изгибе нейтральная ось делит сечение бруса на две зоны – зону растяжения и зону сжатия. Для прямоугольного сечения эти зоны показаны на рис. 7.2.

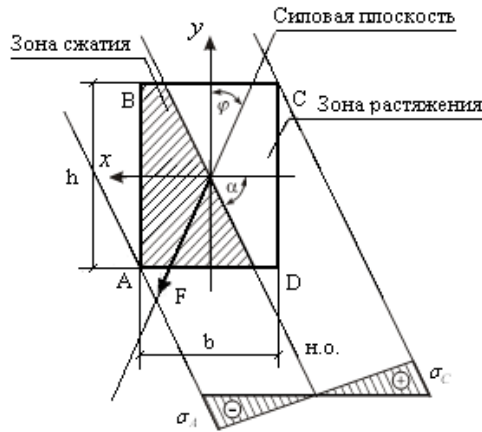


Рис. 7.2. Схема сечения защемленного бруса при косом изгибе

Для определения экстремальных растягивающих и сжимающих напряжений необходимо провести касательные к сечению в зонах растяжения и сжатия, параллельные нейтральной оси (рис. 7.2).

Наиболее удаленные от нейтральной оси точки касания A и C – опасные точки в зонах сжатия и растяжения соответственно.

Для пластичных материалов, когда расчетные сопротивления материала бруса при растяжении и сжатии равны между собой, т. е. $[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$, в опасном сечении определяется $|\sigma|_{\max}$ и условие прочности можно представить в виде

$$|\sigma|_{\max} \leq [\sigma].$$

Для несимметричных сечений (прямоугольник, двутавровое сечение) условие прочности имеет следующий вид:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M_x^{\text{оп}}|}{W_x} + \frac{|M_y^{\text{оп}}|}{W_y} \leq [\sigma].$$

Из условия прочности вытекает три вида расчетов:

- проверочный;
- проектировочный – определение геометрических размеров сечения;
- определение несущей способности бруса (допускаемой нагрузки).

Если известно соотношение между сторонами поперечного сечения, например, для прямоугольника $h = 2b$, то из условия прочности защемленного бруса можно определить параметры b и h следующим образом:

$$6Fz \left(\frac{1}{bh^2} + \frac{1}{hb^2} \right) \leq [\sigma],$$

или

$$6Fz \left(\frac{1}{b(2b)^2} + \frac{1}{(2b)b^2} \right) \leq [\sigma],$$

далее
$$6Fz \left(\frac{1}{4b^3} + \frac{1}{2b^3} \right) \leq [\sigma]$$

окончательно
$$b \geq \sqrt[3]{\frac{9Fz}{2[\sigma]}}$$

Аналогичным образом определяются параметры любого сечения. Полное перемещение сечения бруса при косом изгибе с учетом принципа независимости действия сил определяется, как геометрическая сумма перемещений в главных плоскостях.

Определим перемещение свободного конца бруса. Воспользуемся способом Верещагина. Вертикальное перемещение находим перемножением эпюр (рис. 7.3) по формуле:

$$f_y = \frac{1}{E J_x} \omega_y y_{ц.т} = \frac{1}{E J_x} \frac{F_y}{2} l^2 \frac{2}{3} l = \frac{F_y l^3}{3E J_x}$$

Аналогично определим горизонтальное перемещение:

$$f_x = \frac{F_x l^3}{3E J_y}$$

Тогда полное перемещение определим по формуле:

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_x^2}$$

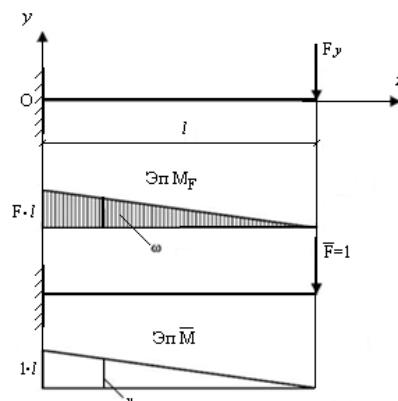


Рис. 7.3. Схема для определения полного перемещения при косом изгибе

Направление полного перемещения определяется углом β (рис. 7.4):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f_x}{f_y} = \frac{F_y J_x}{F_x J_y} = \frac{\sin \varphi J_x}{\cos \varphi J_y} = \operatorname{tg} \varphi \frac{J_x}{J_y}.$$

Полученная формула идентична формуле для определения положения нейтральной оси сечения бруса. Это позволяет сделать вывод, что $\alpha = \beta$, то есть направление прогиба перпендикулярно нейтральной оси. Следовательно, плоскость прогибов не совпадает с плоскостью нагружения.

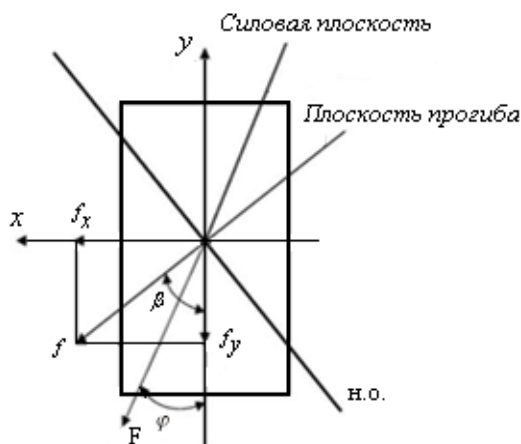


Рис. 7.4. Схема для определения плоскости прогиба при косом изгибе

Угол отклонения плоскости прогиба β от главной оси y будет тем большим, чем большим будет перемещение. Поэтому для бруса с упругим сечением, у которого отношение J_x/J_y велико, косой изгиб опасен, так как вызывает большие прогибы и напряжения в плоскости наименьшей жесткости. Для бруса, у которого $J_x = J_y$, суммарный прогиб лежит в силовой плоскости и косой изгиб невозможен.

Внецентренным растяжением (сжатием) называется такой вид деформации, при котором растягивающая (сжимающая) сила параллельна продольной оси бруса, но точка ее приложения не совпадает с центром тяжести поперечного сечения.

Такой тип задач часто применяется в строительстве при расчете колонн зданий. Рассмотрим внецентренное сжатие бруса. Обозначим координаты точки приложения силы F через x_F и y_F , а главные оси поперечного сечения – через x и y . Ось z направим таким образом, чтобы координаты x_F и y_F были положительными (рис. 7.5, а).

Если перенести силу F параллельно самой себе из точки C в центр тяжести сечения, то внецентренное сжатие можно представить как сумму трех простых деформаций: сжатия и изгиба в двух плоскостях (рис. 7.5, б). При этом имеем:

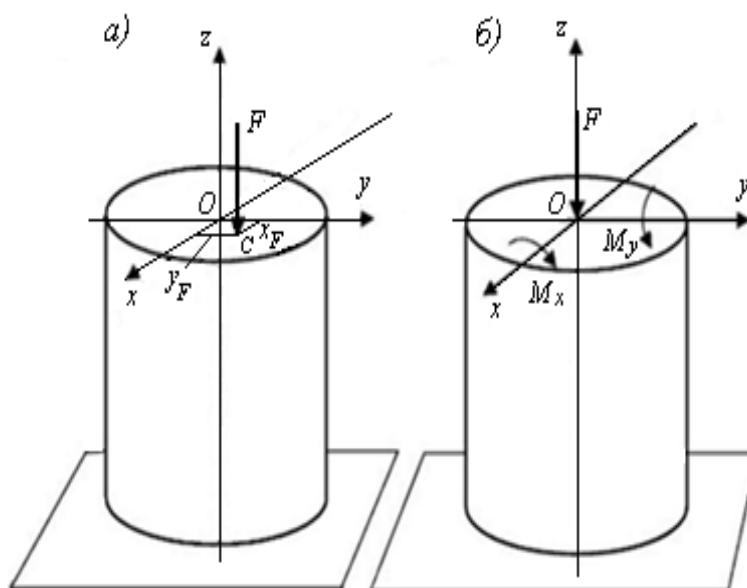


Рис. 7.5. Схема бруса при внецентренном сжатии

$$M_x = F y_F, \quad M_y = F x_F.$$

Напряжения в произвольной точке сечения при внецентренном сжатии, лежащей в первом квадранте, с координатами x и y можно найти исходя из принципа независимости действия сил:

$$\sigma = -\frac{F}{A} - \frac{M_y}{J_y} x - \frac{M_x}{J_x} y = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F A}{J_y} x + \frac{y_F A}{J_x} y \right).$$

Так как

$$\frac{J_y}{A} = i_y^2, \quad \frac{J_x}{A} = i_x^2 \text{ — квадраты радиусов инерции сечения, то}$$

$$\sigma = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F}{i_y^2} x + \frac{y_F}{i_x^2} y \right),$$

где x и y — координаты точки сечения, в которой определяется напряжение.

При определении напряжений необходимо учитывать знаки координат как точки приложения внешней силы, так и точки, где определяется напряжение.

В последнюю формулу все величины подставляются со своими знаками: растягивающая сила F — со знаком плюс, сжимающая со знаком минус, координаты z_F , y_F , и z , y — с соответствующими своими знаками.

Обозначим координаты точек нейтральной оси через x_0 и y_0 . Так как в точках нейтральной оси $\sigma = 0$, то приравняем правую часть уравнения для определения нормальных напряжений к нулю.

С учетом того, что $\frac{F}{A} \neq 0$, получим:

$$1 + \frac{x_F}{i_y^2} x_0 + \frac{y_F}{i_x^2} y_0 = 0.$$

Это уравнение прямой, не проходящей через начало координат. Определим отрезки a_x и a_y , отсекаемые нейтральной осью на координатных осях (рис. 7.6).

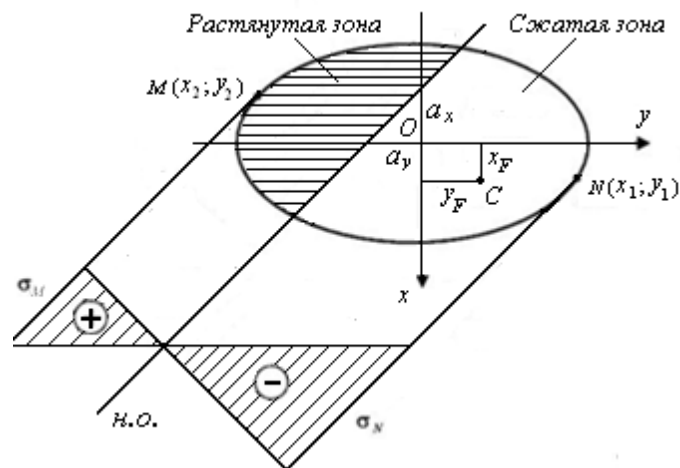


Рис. 7.6. Схема для определения отрезков, отсекаемых нейтральной осью на осях координат

Для этого в уравнении нейтральной оси сначала приравняем нулю y_0 . При $y_0 = 0$ получим следующее выражение:

$$1 + \frac{x_F}{i_y^2} a_x = 0,$$

откуда

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_F}.$$

Аналогично при $x_0 = 0$, имеем:

$$1 + \frac{y_F}{i_x^2} a_y = 0,$$

далее

$$a_y = -\frac{i_x^2}{y_F}.$$

Знак «минус» в данных формулах указывает на то, что точка приложения силы C и нейтральная ось всегда расположены по разные стороны от центра тяжести сечения (рис. 7, а, б).

Положение нейтральной оси зависит от координат точки приложения нагрузки – чем ближе сила приложена к центру тяжести сечения, тем дальше от него расположена нейтральная ось.

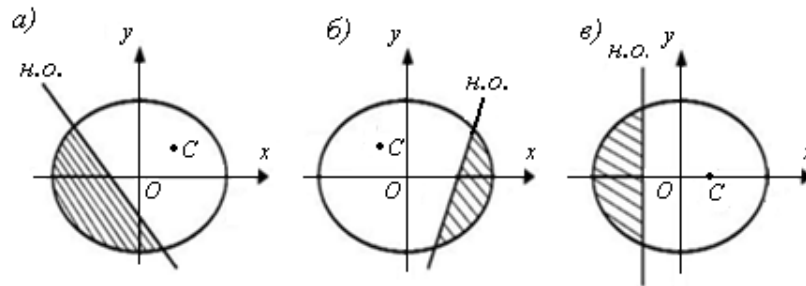


Рис. 7.7. Схема для определения положения нейтральной оси

Если сила F приложена в точке, лежащей на оси y ($x_F = 0$), то нейтральная ось будет параллельна оси x , так как:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{i_y^2}{0} = -\infty.$$

Аналогично и для другой оси.

Нейтральная ось делит сечение на две зоны – сжатую и растянутую. Напряжения в точках сечения линейно зависят от расстояния до нейтральной оси. Проведем касательные к контуру сечения, параллельные нейтральной оси, получим точки M и N (см. рис. 7.6). В этих точках возникают максимальные напряжения растяжения и сжатия соответственно. Если материал бруса неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию (чугун, бетон, каменная кладка), то необходимо составить два условия прочности:

$$\sigma_N = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F}{i_y^2} x_1 + \frac{y_F}{i_x^2} y_1 \right) \leq [\sigma_c];$$

$$\sigma_M = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F}{i_y^2} x_2 + \frac{y_F}{i_x^2} y_2 \right) \leq [\sigma_p].$$

Нейтральная ось в общем случае может проходить через сечение, касаться сечения или находиться за его пределами.

Например, если сила F приложена в центре тяжести сечения, то нейтральная ось проходит в бесконечности и нормальные напряжения в этом случае распределяются равномерно по сечению (центральное растяжение-сжатие).

В некоторых случаях необходимо установить возможные положения сжимающей силы, при которых напряжения во всех точках поперечного сечения будут одного знака. Простейший пример представляет бетонная колонна, на которую опирается балка перекрытия. Так как бетон хорошо работает на сжатие и плохо работает на растяжение, то необходимо приложить внешнюю нагрузку таким образом, чтобы во всех точках сечения возникали только сжимающие напряжения. Следовательно, нейтральная ось в данном случае должна проходить вне сечения или только касаться его.

Область вокруг центра тяжести сечения, характерная тем, что всякая продольная сила, расположенная внутри или по границе этой области, вызывает во всех точках поперечного сечения напряжения одного знака, называется *ядром сечения*. Если силу приложить на границе ядра сечения, то нейтральная ось будет касательной к контуру сечения.

Для построения ядра сечения необходимо рассмотреть различные положения касательных к контуру сечения, предполагая, что они представляют собой нейтральные линии, и найти координаты граничных точек ядра сечения, а затем по этим точкам построить ядро сечения.

Координаты границ ядра сечения можно определить по формулам:

$$y_{\text{я}} = -\frac{i_x^2}{a_y}; \quad x_{\text{я}} = -\frac{i_y^2}{a_x}.$$

Контрольные вопросы

1. Какой изгиб называется косым?
2. По каким формулам определяются нормальные напряжения при косом изгибе?
3. Как находится положение нейтральной оси при косом изгибе?
4. Что представляют собой опасные точки в сечении и как определяется их положение при косом изгибе?
5. Как определяются перемещения точек оси при косом изгибе?
6. Какой вид нагружения называется внецентренным растяжением (сжатием)?
7. Как определяются нормальные напряжения при внецентренном растяжении (сжатии)?
8. Как определяется положение нейтральной оси при внецентренном растяжении (сжатии)?
9. Чему равняется нормальное напряжение в центре тяжести сечения при внецентренном растяжении (сжатии)?
10. Что называется ядром сечения?

ЛЕКЦИЯ 8. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ

Из теоретической механики известно, что равновесие твердых тел может быть устойчивым, неустойчивым и безразличным (рис. 8.1).

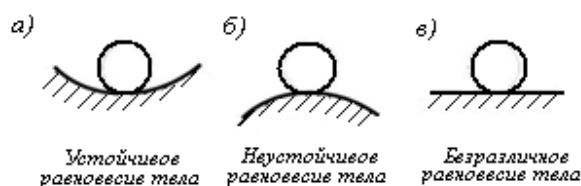


Рис. 8.1. Виды равновесия твердых тел

Аналогично этому равновесие упругих систем также может быть устойчивым и неустойчивым.

Рассмотрим тонкий стержень, испытывающий сжатие с постепенно возрастающей нагрузкой $F_1 \leq F_2 \leq F_3$.

При малой сжимающей силе F ось стержня остается прямолинейной. Если стержень отклонить незначительной горизонтальной силой, то после ее удаления, стержень снова возвратится в свое первоначальное положение. Такое упругое равновесие стержня называется устойчивым (рис. 8.2, а).

При большой величине сжимающей силы F_3 после незначительного отклонения стержня его ось искривляется и стержень не может возвратиться в первоначальное положение, он продолжает еще более искривляться под действием сжимающей силы. При этом имеем неустойчивую форму упругого равновесия стержня. Далее происходит потеря устойчивости (рис. 8.2, в). Такой случай изгиба называют *продольным изгибом*, т. е. изгибом, вызванным сжимающей силой, действующей вдоль оси стержня.

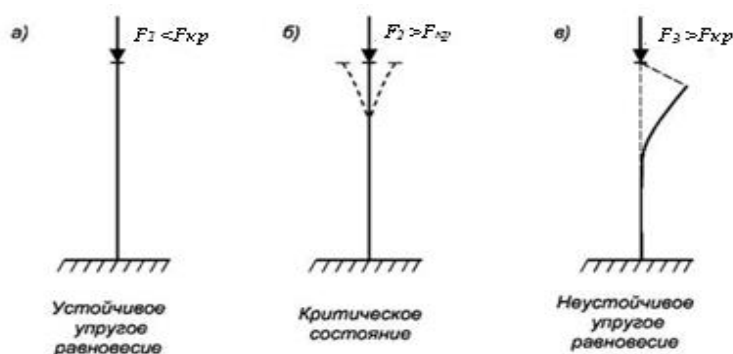


Рис. 8.2. Виды упругого равновесия тонкого стержня

Появление продольного изгиба опасно тем, что при нем происходит значительное нарастание деформаций при незначительном нарастании сжимающей нагрузки. Разрушения от продольного изгиба происходят внезапно, что чревато катастрофическими последствиями в технике и строительстве.

Между этими двумя состояниями равновесия существует переходное состояние, называемое критическим, при котором деформированное тело находится в безразличном равновесии. Оно может сохранять первоначальную прямолинейную форму, но может и потерять ее от самого незначительного воздействия (рис. 8.2, б).

Нагрузка, превышение которой вызывает потерю устойчивости первоначальной формы тела (стержня), называется критической и обозначается F_k .

Для обеспечения устойчивости в конструкциях и сооружениях допускаются нагрузки, которые значительно меньше критических, то есть должно выполняться условие:

$$[F] = \frac{F}{n_y},$$

где $[F]$ – допускаемая на стержень нагрузка; n_y – коэффициент запаса устойчивости, зависящий от материала, из которого изготовлен стержень.

Обычно принимают:

- дерево – $n_y = 2,8...3,2$;
- сталь – $n_y = 1,8...3,0$;
- чугун – $n_y = 5,0...5,5$.

Таким образом, чтобы производить расчеты сжатых стержней на устойчивость, необходимо знать способы определения критических нагрузок F_k .

Рассмотрим стержень постоянного сечения, оба конца которого закреплены шарнирно (рис. 8.3). Стержень сжимается критической силой. Рассматриваем малые перемещения сечений стержня. Задавшись прогибом оси стержня в определенном сечении, найдем величину осевой сжимающей силы, при которой такой прогиб возможен. Будем считать, что напряжения в стержне не превышает предела пропорциональности.

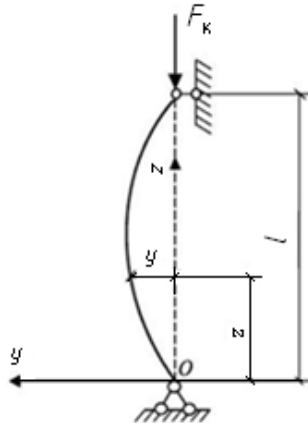


Рис. 8.3. Схема изгиба стержня критической силой F_k

Начало координат поместим в точке O , ось z направлена вдоль оси стержня, ось y – влево от начала координат. Определим прогиб стержня в произвольном сечении z .

Воспользуемся приближенным дифференциальным уравнением изогнутой оси стержня:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M(x)}{EJ}.$$

Определим изгибающий момент в произвольном сечении стержня:

$$M(x) = -Fy,$$

тогда

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{Fy}{EJ}.$$

Обозначим $\frac{F}{EJ} = k^2$, тогда

$$\frac{d^2y}{dz^2} + k^2y = 0.$$

Последнее выражение представляет собой однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

Решение этого уравнения можно записать в виде гармонической функции:

$$y = A \sin kz + B \cos kz$$

Постоянные интегрирования A и B находятся из граничных условий: при $z = 0, y = 0, B = 0$ и дифференциальное уравнение принимает следующий вид:

$$y = A \sin kz.$$

Стержень изгибается по синусоиде.

При $z = l, y = 0, A \sin kl = 0$.

Известно, что произведение двух сомножителей равно нулю, лишь в том случае, если один из сомножителей равен нулю. Разберем оба случая.

Пусть $A = 0$, то $y(z)$ всегда равен нулю и прогиба вообще не существует. Это решение противоречит принятому предположению о том, что стержень прогнулся, т. е. $A \neq 0$. Следовательно, должно выполняться условие $\sin kl = 0$, откуда:

$$kl = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi,$$

где n – любое целое число.

Определим, какое значение n подходит к решению данной задачи. Рассмотрим условие:

$$\frac{F}{E J} = k^2,$$

$$\text{откуда } k = \sqrt{\frac{F}{E J}}.$$

Из последнего выражения следует, что если $k = 0$, то $F_k = 0$, то есть стержень не нагружен, а это противоречит условию задачи.

Следовательно, значение $k = 0$ можно исключить из решения. В общем случае имеем:

$$k = \frac{n\pi}{l}.$$

Приравняв $F = F_k$, получим выражение

$$\frac{F_k}{E J} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2},$$

откуда

$$F_k = \frac{n^2 \pi^2 E J}{l^2},$$

где F_k – наименьшее значение сжимающей силы, при котором происходит продольный изгиб, поэтому следует принять $n = 1$.

Тогда уравнение для определения критической силы примет вид

$$F_k = \frac{\pi^2 E J}{l^2}.$$

Таким образом, стержень изгибается по синусоиде с одной полуволной.

При $z = l/2$ прогиб стержня имеет максимальное значение.

При $n = 2$ и $n = 3$ стержень изгибается по двум и трем полуволнам синусоиды соответственно (рис. 12.4, б, в).

Прогиб стержня в произвольном сечении под воздействием сжимающей силы можно определить по формуле:

$$y = A \sin \frac{\pi}{l} z.$$

Потеря устойчивости стержня происходит в плоскостях наименьшей жесткости, то есть $J = J_{\min}$, поэтому при определении критической силы следует учитывать наименьший осевой момент инерции сечения, тогда окончательно:

$$F_k = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{l^2}.$$

Таким образом, имеем формулу Эйлера (1744) для определения критической силы для стержня с двумя шарнирно закрепленными концами (основной случай).

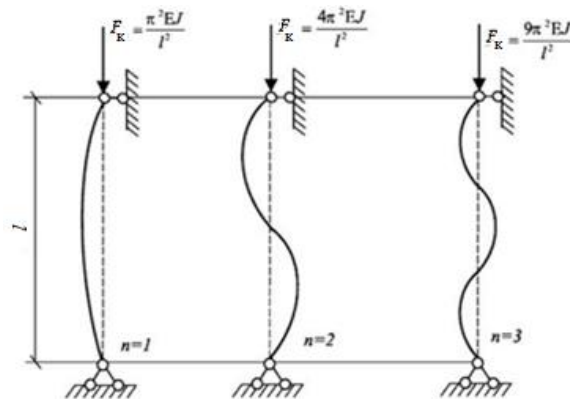


Рис. 8.4. Схема изогнутой оси стержня при различных значениях n

Величина критической силы прямо пропорциональна наименьшей жесткости сечения и обратно пропорциональна квадрату длины стержня.

Как видно из формулы Эйлера, величина критической силы зависит от геометрических характеристик стержня и модуля упругости материала, но не зависит от прочностных характеристик материала.

Рассмотрим, как влияют условия закрепления стержня на величину критической силы.

Второй случай: один конец стержня жестко зашпемлен, второй – свободен (рис. 8.5, а).

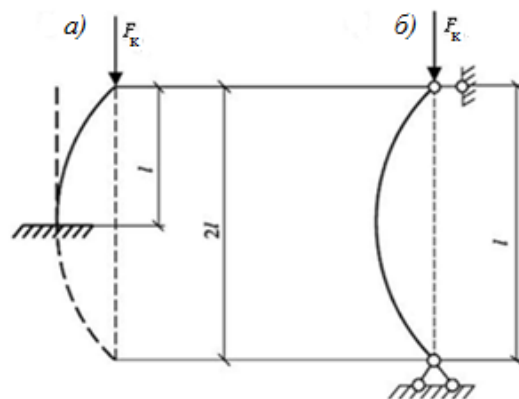


Рис. 8.5. Схема закрепления стержня по второму случаю

При потере устойчивости верхний конец стержня отклонится на некоторую величину и повернется, нижний заземленный конец останется вертикальным. Изогнутая ось получится такая же, как для одной половины стержня первого случая (рис. 8.5, б).

Для получения полного соответствия с первым случаем продолжим мысленно изогнутую ось стержня вниз. Тогда форма потери устойчивости будет полностью совпадать с первым случаем. Отсюда можно сделать вывод, что критическая сила для этого случая будет такая же, как и для пропорционально закрепленного по концам стержня длиной $2l$. Тогда

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J}{(2l)^2} min.$$

Третий случай: оба конца стержня жестко закреплены (рис. 8.6).

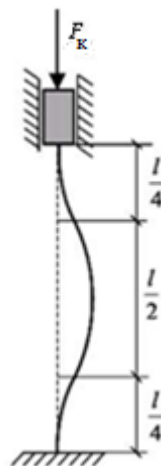


Рис. 8.6. Схема закрепления стержня по третьему случаю

После потери устойчивости концы стержня не поворачиваются. Средняя часть стержня длиной $l/2$ вследствие симметрии будет работать в таких же условиях, что и стержень с шарнирно опертыми концами, но длиной l . Тогда, исходя из формулы, получим:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J}{(2l)^2} min.$$

Четвертый случай: один конец стержня жестко заземлен, а другой – закреплен шарнирно. В этом случае верхняя часть стержня длиной приблизительно $2l/3$ имеет вид полуволны синусоиды и находится в таких же условиях, что и стержень с шарнирными опорами на концах (рис. 8.7).

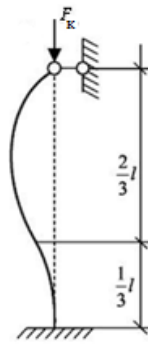


Рис. 8.7. Схема закрепления стержня по четвертому случаю

Тогда

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J \min.}{(0,7l)^2}.$$

Анализируя последние выражения для определения критической силы, приходим к выводу, что чем более жестко закреплены концы стержня, тем большую нагрузку данный стержень может воспринимать.

Поэтому зависимости для определения критической силы при различных условиях закрепления стержня можно объединить в одну формулу:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J \min.}{(\mu l)^2},$$

где μl – приведенная длина стержня; μ – коэффициент приведения длины стержня, зависящий от способа закрепления концов стержня; l – фактическая длина стержня.

Понятие о *приведенной длине* стержня впервые было введено профессором Петербургского института путей сообщения Ф. С. Ясинским в 1892 году.

Коэффициент продольной длины стержня в зависимости от условий его закрепления представлен на рис. 8.8.

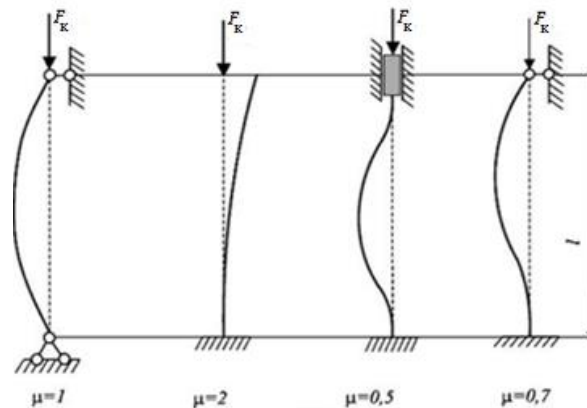


Рис.8.8. Коэффициент приведения длины для различных случаев закрепления концов стержня

Вывод формулы Эйлера основан на применении дифференциального уравнения упругой линии в предположении, что материал стержня подчиняется закону Гука. Следовательно, формула Эйлера применима лишь в том случае, когда критические напряжения не превышают предела пропорциональности, то есть:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} \leq \sigma_{нц}.$$

Определим критические напряжения:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu l)^2 A}.$$

Учитывая, что

$$\frac{J_{min}}{A} = i_{min}^2,$$

где i_{min} – наименьший из главных радиусов инерции поперечного сечения стержня, получим:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{i_{min}}\right)^2}.$$

Отношение приведенной длины стержня к радиусу инерции сечения называется гибкостью и обозначается λ , то есть:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}}.$$

Окончательно получим:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Формула Эйлера будет применима до тех пор, пока критические напряжения не станут равными пределу пропорциональности, то есть:

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda_{пред}^2} = \sigma_{нц}.$$

Следовательно,

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{нц}}}.$$

Определим предел применимости *формулы Эйлера* для стержней, изготовленных из стали Ст 3, для которой модуль упругости $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$, предел пропорциональности $\sigma_{\text{пц}} = 200 \text{ МПа}$, предел текучести $\sigma_{\text{Т}} = 240 \text{ МПа}$:

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \times 2 \times 10^5}{200}} \approx 100.$$

Таким образом, формула Эйлера может быть использована для стержней, у которых гибкость больше ста. *В противном случае формулу Эйлера применять нельзя.*

Для чугуна формула Эйлера применима при гибкости $\lambda_{\text{пред}} > 80$, для сосны при гибкости $\lambda_{\text{пред}} > 110$.

Построим график зависимости критических напряжений от гибкости стержня, изготовленного из стали Ст3.

Если на оси ординат (рис. 8.9) отложить величину предела пропорциональности ($\sigma_{\text{пц}} = 200 \text{ МПа}$) и провести из полученной точки прямую, параллельную оси абсцисс, то она в пересечении с гиперболой Эйлера даст точку K , абсцисса которой и есть $\lambda_{\text{пред}} = 100$.

Слева от точки K гипербола Эйлера показана штриховой линией, так как здесь она дает значения напряжений, большие предела пропорциональности и устойчивость стержня становится в этой области сомнительной.

Профессор Ф. С. Ясинский собрал и обработал обширный опытный материал по продольному изгибу стержней и составил таблицы критических напряжений для стержней разной гибкости.

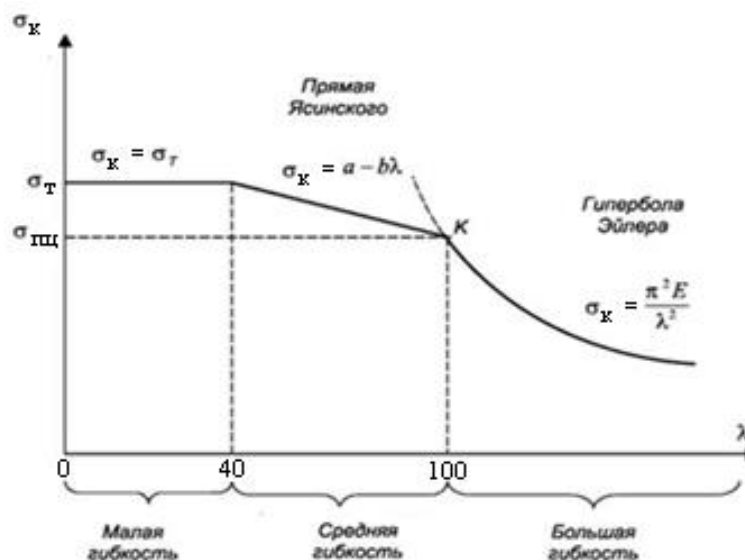


Рис.8.9. График зависимости критических напряжений от гибкости стержня

Опыты показали, что короткие стержни с малой гибкостью ($0 < \lambda < 40$) не теряют устойчивости и разрушаются от простого сжатия, когда напряжения в них достигают предела текучести, то есть для них $\sigma_k = \sigma_T$.

Для стержней средней гибкости ($40 < \lambda < 100$) Ясинским предложена эмпирическая зависимость

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda,$$

где a и b – коэффициенты, зависящие от физико-механических свойств материала.

Для стали (Ст 3): $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа.

Для дерева (сосна): $a = 29,3$ МПа, $b = 0,194$ МПа.

Таким образом, график состоит из трех частей: гиперболы *Эйлера* для стержней большой гибкости, наклонной прямой для стержней средней гибкости и слабо наклоненной прямой для стержней малой гибкости.

Подобные графики можно построить и для других материалов.

Для сжатых стержней проводим две проверки:

на прочность:

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{нетто}}} \leq [\sigma_c], \quad \text{где } [\sigma_c] = \frac{\sigma_o}{n_o};$$

на устойчивость:

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{брутто}}} \leq [\sigma_y], \quad \text{где } [\sigma_y] = \frac{\sigma_k}{n_y};$$

$$\frac{[\sigma_y]}{[\sigma_c]} = \frac{\sigma_k n_o}{n_y \sigma_o}, \quad [\sigma_y] = \frac{\sigma_k n_o}{n_y \sigma_o} [\sigma_c].$$

Допускаемое напряжение на устойчивость $[\sigma_y]$ и допускаемое напряжение на прочность $[\sigma_c]$ взаимно связаны. Составим отношение:

$$\frac{[\sigma_y]}{[\sigma_c]} = \frac{\sigma_k n_o}{n_y \sigma_o}, \quad [\sigma_y] = \frac{\sigma_k n_o}{n_y \sigma_o} [\sigma_c].$$

Обозначив $\frac{\sigma_k n_o}{n_y \sigma_o} = \varphi$, получим:

$$[\sigma_y] = \varphi [\sigma_c],$$

где φ – коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения на простое сжатие (коэффициент продольного изгиба). Он всегда меньше единицы.

Коэффициент φ зависит от материала стержня и гибкости и принимается по таблицам. Условие устойчивости принимает вид:

$$\frac{N}{A_{\text{брутто}}} \leq \varphi[\sigma_c].$$

При расчете стержня на устойчивость местные ослабления сечений практически не влияют на величину критической силы, поэтому в расчетные формулы вводится полная площадь поперечного сечения $A_{\text{брутто}}$.

Различают два вида расчетов на устойчивость сжатых стержней: проверочный и проектировочный.

Проверочный расчет сжатых стержней.

Порядок расчета.

1. Зная размеры и форму поперечного сечения, определить площадь поперечного сечения $A_{\text{брутто}}$ и минимальный момент инерции J_{min} .

2. Вычислить минимальный радиус инерции и гибкость стержня по формулам:

$$i_{\text{min}} = \sqrt{\frac{J_{\text{min}}}{A}}; \lambda = \frac{\mu l}{i_{\text{min}}}.$$

3. По таблице найти значение коэффициента φ .

4. Проверить условие устойчивости

$$\frac{N}{A_{\text{брутто}}} \leq \varphi[\sigma_c].$$

Проектировочный расчет сжатых стержней.

Условие устойчивости содержит две неизвестные величины, которые зависят одна от другой, – площадь поперечного сечения и коэффициент продольного изгиба φ . Задача при проектировочном расчете сжатых стержней решается методом последовательных приближений. В первом приближении принимают $\varphi_1 = 0,5$, находят площадь сечения и устанавливают фактическое значение φ'_1 .

При большом различии между φ_1 и φ'_1 выполняется второе приближение, то есть:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} \text{ и так далее,}$$

до тех пор пока разница в значениях между φ_1 и φ'_1 будет не более 5 %.

Затем окончательно определяются геометрические параметры поперечного сечения стержня.

Для стержней большой гибкости

$$(\lambda > \lambda_{\text{пред}}; \sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2})$$

модуль упругости E является единственной механической характеристикой материала, определяющей критические напряжения. Так как модули упругости E для различных сталей почти одинаковы, то применять *высокопрочные стали* для гибких стержней нецелесообразно.

Для стержней малой гибкости (они не теряют устойчивости, а разрушаются от простого сжатия) использование сталей повышенной прочности будет целесообразным.

Так как продольный изгиб происходит всегда в плоскости наименьшей жесткости, то при проектировании сжатых стержней необходимо стремиться к тому, чтобы главные моменты инерции были по возможности одинаковыми. Поэтому применять двутавровые и сплошные прямоугольные сечения *нерационально*. При заданной площади сечения выгоднее будет такое сечение, у которого материал распределен по возможности дальше от главных центральных осей инерции. Поэтому кольцевое сечение в этом отношении значительно выгоднее, чем сплошное круглое. Рациональными являются и коробчатые тонкостенные сечения. Однако при значительном уменьшении толщины стенок пустотелых стержней может произойти местная потеря устойчивости, для предотвращения которой ставят ребра жесткости (рис. 8.10, ж).

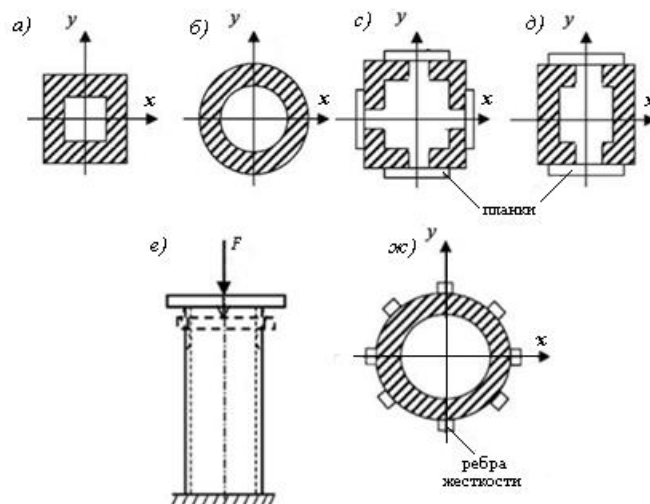


Рис.8.10. Схемы рациональных поперечных сечений сжатых стержней

Самой экономичной конструкцией сжатых стержней являются решетчатые стержни. Для стержней, у которых осевые моменты инерции различны, добиться равной устойчивости в двух плоскостях можно при различном закреплении концов стержня.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается явление потери устойчивости сжатого стержня?
2. Какая сила называется критической силой?
3. Какое дифференциальное уравнение из теории изгиба лежит в основе вывода формулы Л. Эйлера?
4. Что называется гибкостью стержня? Приведите формулу.
5. Приведите формулу Л. Эйлера для определения критической силы?
6. Как учитывается различное закрепление концов стержня при определении критической силы?
7. Каков предел применимости формулы Л. Эйлера?
8. Как определяется предельная гибкость для формулы Л. Эйлера?
9. Как определяется критическая сила при напряжениях, превышающих предел пропорциональности материала?
10. Какой вид имеет график изменения критической силы в зависимости от гибкости (или длины) для стальных стержней?
11. Приведите формулу Ф. Ясинского для определения критической силы и укажите пределы её применимости.
12. Как определяется коэффициент запаса устойчивости сжатого стержня?
13. Напишите условие устойчивости сжатого стержня через критическую силу и коэффициент запаса устойчивости.
14. Напишите условие устойчивости сжатого стержня с помощью коэффициента продольного изгиба φ .
15. От чего зависит коэффициент продольного изгиба φ , и в каких пределах он изменяется?
16. Какие три типа задач можно решать исходя из условия устойчивости сжатого стержня?
17. Покажите порядок подбора сжатого стержня из условия устойчивости с помощью коэффициента φ .

ЛЕКЦИЯ 9. ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЖЕНИЯ

Действие динамических нагрузок характеризуется наличием сил инерции, равных произведению массы тела на его ускорение и направленных в сторону, противоположную ускорению ($F_u = ma$). Силы инерции вызывают дополнительные напряжения и деформации, которые необходимо учитывать.

Рассмотрим задачу о расчете троса, поднимающего груз G с ускорением a (рис. 9.1).

Площадь поперечного сечения троса – A , объемный вес материала троса – γ .

Если груз находится в покое или поднимается равномерно, т. е. без ускорения (рис. 9.1, а), то на расстоянии z от груза продольная сила будет равна:

$$N_c = G + \gamma Az,$$

где γAz – вес участка троса длиной z .

Если груз поднимается с ускорением (рис. 9.1, б), возникает сила инерции $F_u = ma$, направленная вниз, значение которой определяется по формуле:

$$F_u = ma = \frac{(G + \gamma Az)}{g} a,$$

где $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения.

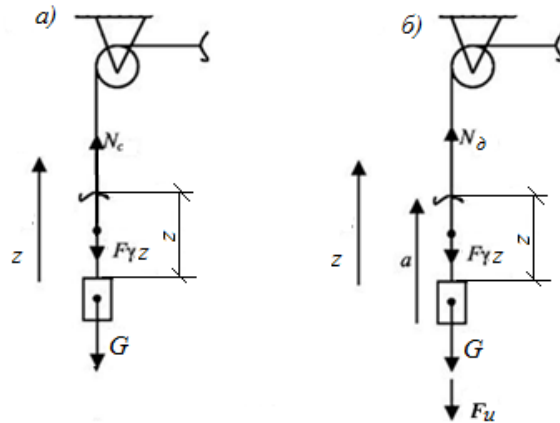


Рис. 9.1. Схема поднимаемого с ускорением груза

Тогда получим:

$$N_\delta = G + \gamma Az + I = G + \gamma Az + \frac{(G + \gamma Az)}{g} a = (G + \gamma Az) \left(1 + \frac{a}{g}\right) = N_c k_\delta,$$

где $k_\delta = 1 + \frac{a}{g}$ – динамический коэффициент.

Определим динамическое напряжение:

$$\sigma_\delta = \frac{N_\delta}{A} = k_\delta \frac{N_c}{A},$$

$$\sigma_\delta = k_\delta \sigma_c.$$

Если груз опускается с ускорением a , то величина ускорения будет входить в формулу усилия и напряжения со знаком «минус». При свободном падении груза при $a = g$, $k_\delta = 0$, то есть трос будет следовать за грузом без натяжения, $\sigma_c = 0$.

Под ударом понимается взаимодействие движущихся навстречу друг другу тел в результате их соприкосновения, связанное с резким изменением скоростей точек этих тел за весьма малый промежуток времени.

Ударная нагрузка является динамической. Время удара измеряется в тысячных, а иногда и миллионных долях секунды, а сила удара достигает

большой величины, например, действие кузнечного молота на кусок металла, удар падающего груза при забивке свай и др.

Система, подвергаясь удару, может испытывать различные деформации, такие как сжатие, растяжение, изгиб, кручение, изгиб с кручением и др.

Поэтому различают продольный, поперечный и скручивающий удары (рис. 9.2).

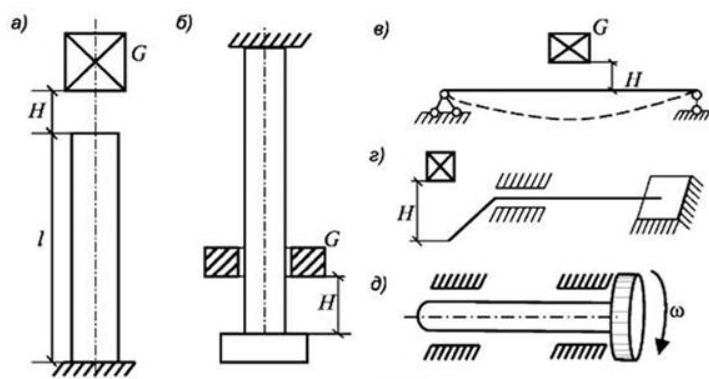


Рис. 9.2. Схемы ударных нагрузок

За очень малый промежуток времени скорость ударяющегося тела становится равной нулю. В этот момент напряжения и деформации в системе достигают наибольших значений. Целью расчета на удар и является определение наибольших деформаций и напряжений.

На рис. 9.2, а и 9.2, б показаны продольные удары – сжимающий и растягивающий, на рис 9.2, в показан поперечный изгибающий удар.

Скручивающий удар имеет место при падении груза G с высоты h или при резком снижении угловой скорости ω вала с маховиком, например, при внезапной его остановке (рис. 9.2, г, д).

В практике применяют упрощенные методы расчета, основанные на следующих основных допущениях:

1) деформации стержня от ударяющего груза распространяются по всей длине стержня, они подчиняются закону Гука и подобны деформациям, возникающим от статического приложения того же груза. Поэтому связь между динамическими силами и перемещениями остается такой же, как и при статической нагрузке;

2) опорные устройства, как правило, полагают абсолютно жесткими;

3) ударяющее тело является абсолютно жестким и при ударе не отскакивает от системы.

Изучение напряжений и деформаций при ударе основано на использовании закона сохранения энергии. При этом предполагается, что кинетическая энергия падающего груза A численно равна потенциальной энергии деформации упругой системы U :

$$A = U.$$

Рассмотрим сначала расчет на удар в случаях, когда масса упругого тела, подвергающегося удару, мала и ею можно пренебречь.

Продольный удар. Груз G падает с высоты h и ударяется о стержень, вызывая его сжатие на величину Δ_{∂} , которая больше деформации стержня Δ_c при статическом действии груза G (рис. 9.3).

Кинетическая энергия падающего груза равна:

$$A = G(H + \Delta_{\partial}).$$

Потенциальная энергия численно равна площади треугольника диаграммы $F_{\partial} - \Delta_{\partial}$ (рис. 9.4).

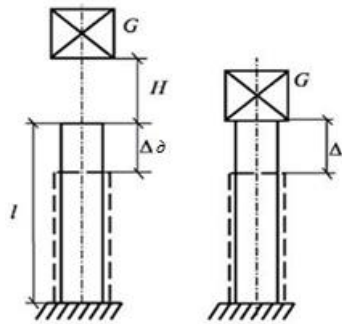


Рис.9.3. Схема удара сжатием

$$U = \frac{1}{2} F_{\partial} \Delta_{\partial}.$$

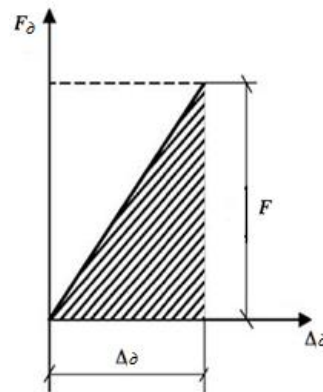


Рис. 9.4. Схема для определения потенциальной энергии деформации при ударе

С учетом зависимости $A = U$ имеем:

$$G(H + \Delta_{\partial}) = \frac{1}{2} F_{\partial} \Delta_{\partial}.$$

Выразим нагрузки через деформации:

$$\Delta_c = \frac{Gl}{EA} \Rightarrow G = \Delta_c \frac{EA}{l};$$

$$\Delta_\partial = \frac{F_\partial l}{EA} \Rightarrow F_\partial = \Delta_\partial \frac{EA}{l}.$$

Далее имеем:

$$\Delta_c \frac{EA}{l} (H + \Delta_\partial) = \frac{1}{2} \Delta_\partial^2 \frac{EA}{l};$$

$$\Delta_c H + \Delta_c \Delta_{\text{дин}} - \frac{1}{2} \Delta_\partial^2 = 0;$$

$$\Delta_\partial^2 H - 2\Delta_c \Delta_\partial - 2H\Delta_c = 0.$$

Получим квадратное уравнение для определения Δ_∂

$$\Delta_\partial = \Delta_c \pm \sqrt{\Delta_c^2 + 2H\Delta_c}.$$

В последней формуле перед корнем следует взять знак «плюс», так как $\Delta_\partial > \Delta_c$, тогда получим:

$$\Delta_\partial = \Delta_c + \sqrt{\Delta_c^2 + 2H\Delta_c} = \Delta_c + \Delta_c \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_c}} =$$

$$= \Delta_c \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_c}} \right) = \Delta_c k_\partial.$$

Динамический коэффициент будет равен:

$$k_\partial = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_c}}.$$

Зная коэффициент, можно определить и напряжения:

$$\sigma_\partial = k_\partial \sigma_c.$$

Динамический коэффициент зависит от величины:

$$\Delta_c = \frac{Gl}{EA}.$$

Следовательно, напряжения при ударе зависят не только от площади поперечного сечения стержня A (как при статическом приложении нагрузки), но и от длины стержня и жесткости материала E . Чем больше длина l , тем напряжения при ударе будут меньшими. С увеличением модуля упругости напряжения увеличиваются.

С целью уменьшения динамических напряжений в технике используются различные амортизаторы, увеличивающие податливость стержня (резиновые прокладки, пружины) (рис. 9.5).

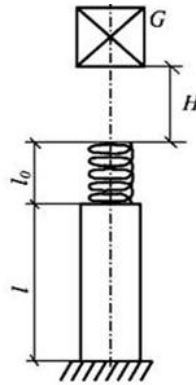


Рис. 9.5. Схема удара сжатием с амортизатором – пружиной

В этом случае

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_c^{\text{стержня}} + \Delta_c^{\text{пружины}}}}$$

Рассмотрим частные случаи.

1. При мгновенном приложении нагрузки, когда $H = 0$:

$$k_{\partial} = 0.$$

При этом напряжение и перемещение в два раза больше, чем при статическом приложении нагрузки.

2. Если высота падения груза H велика, т. е.

$$\left(\frac{2H}{\Delta_c} \gg 1\right),$$

то единицей в подкоренном выражении для определения динамического коэффициента можно пренебречь, тогда:

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{\frac{2H}{\Delta_c}}.$$

3. При очень больших величинах

$$\frac{2H}{\Delta_c}$$

можно пренебречь единицей и перед корнем. Тогда

$$k_{\partial} = \sqrt{\frac{2H}{\Delta_c}}.$$

Если известна скорость падения груза, а не высота падения, то динамический коэффициент может быть выражен через скорость. При свободном падении

$$V^2 = 2gH, \quad 2H = \frac{V^2}{g},$$

тогда

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{\frac{2H}{\Delta_c}} = 1 + \frac{V^2}{\sqrt{g\Delta_c}}.$$

Условие прочности при продольном и поперечном изгибающем ударах:

$$\sigma_d \leq [\sigma_d].$$

Условие жесткости при продольном изгибающем ударе:

$$\Delta_d \leq [\Delta_d].$$

Условие жесткости при поперечном изгибающем ударе:

$$f_d \leq [f_d].$$

Контрольные вопросы

1. Какие виды динамических нагрузок существуют?
2. Что такое силы инерции? Как они учитываются в динамических расчетах? Определение динамического коэффициента.
3. Что такое ударная динамическая нагрузка?
4. Какие виды ударных нагрузок существуют?
5. В чем существует различие между продольным и поперечным ударом?
6. Как определяется динамический коэффициент при ударе?
7. Как выполняется расчет на прочность и жесткость при ударе?