

И. Г. Пугачёва, Н. Ю. Лещина, И. Н. Таранова

**МЕТОДЫ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОСИСТЕМ.
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ**

*Допущено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов учреждений
высшего образования по экологическим специальностям*

Минск
РИВШ
2017

УДК 504.06(075.8)

ББК 28.088

П88

Рецензенты:

кафедра общей экологии и методики
преподавания биологии Белорусского государственного университета;
ведущий научный сотрудник лаборатории биобиформатики
ГНУ «Объединенный институт проблем информатики»
Национальной академии наук Беларуси,
кандидат технических наук *О. В. Красько*

Пугачёва, И. Г.

П88 Методы экологических исследований и моделирование экосистем. Лабораторный практикум : учеб. пособие / И. Г. Пугачёва, Н. Ю. Лещина, И. Н. Таранова. – Минск : РИВШ, 2017. – 140 с.

ISBN 978-985-586-017-5.

В учебном пособии представлены статистические методы анализа экспериментальных данных, основы планирования экспериментов, построения простейших математических моделей экосистем. Материал изложен с учетом специфики преподавания дисциплин, содержащих элементы математики, студентам-биологам: предусмотрено постепенное усложнение материала, многочисленные примеры, задания разного уровня сложности, разноплановые индивидуальные и групповые задания, компьютерные имитационные игры и др.

Адресуется студентам высших учебных заведений, обучающимся по биологическим, сельскохозяйственным и экологическим специальностям, магистрантам, аспирантам, преподавателям.

УДК 504.06(075.8)

ББК 28.088

ISBN 978-985-586-017-5

© Пугачёва И. Г., Лещина Н. Ю.,
Таранова И. Н., 2017

© Оформление. ГУО «Республиканский
институт высшей школы», 2017

КРАТКИЙ УКАЗАТЕЛЬ СИМВОЛОВ

μ – средняя генеральной совокупности;
 σ^2 – дисперсия генеральной совокупности;
 σ – стандартное отклонение генеральной совокупности;
 X – значение варьирующего признака;
 $\bar{x}$ – выборочная средняя, арифметическая средняя;
 S^2 – выборочная дисперсия, средний квадрат;
 S – выборочное стандартное отклонение, среднее квадратическое отклонение;
 V – коэффициент вариации, изменчивости;
 $S_{\bar{x}}$ – средняя ошибка выборочной средней;
 $S_{\bar{x}\%}$ – относительная ошибка выборочной средней;
 d – разность между выборочными средними;
 S_d – ошибка разности между выборочными средними;
 l – число вариантов;
 n – повторность, объем выборки;
 N – общее число наблюдений в опыте;
 ν – число степеней свободы;
 P – вероятность;
 P_i – уровень значимости;
 $t_{\text{факт.}}$ – фактическое значение критерия t Стьюдента;
 t_{05}, t_{01} – табличные значения критерия t для 5 %-го и 1 %-го уровней значимости;
 $F_{\text{факт.}}$ – фактическое значение критерия F Фишера;
 F_{05}, F_{01} – табличные значения критерия F для 5 %-го и 1 %-го уровней значимости;
 $\chi^2_{\text{факт.}}$ – фактическое значение критерия хи-квадрат Пирсона;
 χ^2_{01}, χ^2_{05} – табличные значения критерия хи-квадрат для 5 %-го и 1 %-го уровней значимости;
 H_0 – нулевая гипотеза;
 HSP_{05}, HSP_{01} – наименьшие существенные разности для 5 %-го и 1 %-го уровней значимости;
 C – корректирующий фактор (поправка) в дисперсионном анализе;

C_v, C_p, C_v, C_z и т. д. – суммы квадратов отклонений для разных источников варьирования в дисперсионном анализе;

r – коэффициент линейной корреляции;

S_r – ошибка коэффициента линейной корреляции;

b_{yx} – коэффициент регрессии Y по X ;

S_b – ошибка коэффициента регрессии;

S_{yx} – ошибка отклонения от регрессии;

Σ – сумма, знак суммирования.

ВВЕДЕНИЕ

Учитывая большую изменчивость природных объектов и явлений, невозможно проводить даже самые простые эксперименты без использования математических методов планирования и обработки опытных данных. Методы математической статистики позволяют правильно определить оптимальное количество исследуемых объектов, составить рациональную схему эксперимента, выбрать способ обработки и интерпретации экспериментальных данных при условии оптимального распределения рабочего времени, необходимых материалов и оборудования.

В заранее спланированном эксперименте и при наблюдениях в естественных условиях исследователь сталкивается с одновременным влиянием на объект множества внешних факторов. При этом важно определить условия, которые оказывают наибольшее влияние на изучаемый процесс, а также органы и системы организма, определяющие реакцию на это воздействие. Результаты эксперимента будут иметь соответствующую ценность только при установлении первичных связей, а не отдаленных последствий или вторичных несущественных явлений. Поэтому конечный результат исследовательской работы определяется совокупностью полезного эффекта от правильного планирования опытов, применения методов математической статистики, современной компьютерной техники и личных творческих качеств, профессионализма самого экспериментатора.

В биологических исследованиях накоплен обширный опыт использования существующих математических методов и моделей. Особенность биологических систем требует применения адекватного математического аппарата.

Сложность математических моделей с неизбежностью ведет к широкому использованию компьютерной техники как для обработки данных и уточнения параметров моделей, так и для постановки машинного эксперимента, во многих случаях призванного заменить дорогостоящий натурный эксперимент. Поэтому дальнейшее развитие математического моделирования представ-

ляется путем создания новых информационных технологий как инструмента построения содержательных моделей, накопления и хранения информации, полученной в результате исследования этих моделей.

Целью настоящего лабораторного практикума является ознакомление студентов с основными методами математической обработки экспериментальных данных, статистическими методами проверки гипотез и планированием экологических экспериментов, а также – с основными идеями, методами, возможностями и ограничениями современного моделирования в широком диапазоне применения.

ТЕМА 1

ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ СОВОКУПНОСТИ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ И ЕГО ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ

Всякое массовое явление, например, группа сосен в лесу, стая перелетных птиц, представляет собой совокупность объектов, т. е. некоторых условных единиц, каждая из которых в отдельности строго индивидуальна и отличается от других рядом признаков – высотой, массой, содержанием каких-либо веществ и т. д. Каждый из признаков может иметь у различных особей разную степень выраженности, поэтому говорят, что признак варьирует. Свойство условных единиц – растений, животных, проб воды из разных водоемов, проб почвы или воздуха в разных местах – отличаться друг от друга даже в однородных совокупностях называется *изменчивостью* или *варьированием*.

Изменчивость – это свойство, присущее всем объектам и явлениям природы. Варьирование возникает вследствие того, что даже родственные живые организмы могут отличаться своей наследственностью, кроме того, формирование их часто протекает в относительно различных условиях внешней среды.

Изменчивость признаков создает известные трудности в случаях, когда требуется дать общую характеристику определенной варьирующей группе (совокупности) растений, животных, почв и т. п. по отдельным признакам или сравнить две такие группы и найти различия между ними. Практически никогда не представляется возможным исследовать по тому или иному признаку всю совокупность. В таком случае прибегают к изучению части совокупности, по которой делают общее заключение. Такой метод называется выборочным и считается основным при статистическом изучении совокупности.

Всю группу объектов, подлежащую изучению, называют совокупностью, или *генеральной совокупностью*, а ту часть объектов, которая попала на проверку, исследование, – выборочной совокупностью, или *выборкой*. Число элементов в генеральной совокупности и выборке называют их *объемом*.

Главная цель выборочного метода – по статистическим показателям выборочной совокупности как можно точнее охарактеризовать всю генеральную совокупность объектов.

В результате наблюдений получают сведения о численной величине изучаемого признака у каждого члена данной выборочной совокупности. Возможные значения варьирующего признака X называют *вариантами* и обозначают $X_1, X_2, \dots, X_n$. Полученный таким образом ряд варьирующих величин можно упорядочить – расположить значения признака (варианты) в порядке их возрастания или убывания. Такое упорядочение ряда называется ранжированием. После ранжирования можно заметить, что каждое значение признака встречается неодинаковое число раз – одни редко, другие часто. Числа, которые характеризуют, сколько раз повторяется каждое значение признака у членов данной совокупности, называют *частотами признака* и обозначают f . Сумма всех частот (Σf) равна объему выборки, т. е. числу членов ряда n .

В результате такой обработки первичных наблюдений получают так называемый вариационный ряд. *Вариационным рядом* называют такой ряд данных, в котором указаны возможные значения варьирующего признака в порядке возрастания или убывания и соответствующие им частоты.

Результаты экспериментов обычно представляют собой обширный цифровой материал, восприятие которого облегчается при систематизации и представлении в виде таблиц и графиков. При небольшой вариации признака, принимающего целочисленные значения, данные достаточно сгруппировать по значениям вариантов с последующим построением вариационной кривой. При значительной вариации признака прибегают к разнесению данных по классам, которые охватывают сразу несколько значений вариантов.

Пример. Допустим, что в результате подсчета количества жуков-долгоносиков в 100 сосудах с пищевым субстратом были получены следующие данные (в штуках):

90	109	99	100	115	68	70	72	73	70
76	82	80	68	69	74	72	69	80	79
79	84	84	108	83	84	99	98	102	101
45	59	60	63	78	87	94	91	88	90
72	68	80	81	84	77	79	81	84	76
70	67	100	103	69	72	74	66	67	72
79	78	83	92	93	81	82	86	89	93
77	76	88	89	94	82	80	81	77	80
92	91	76	79	73	84	79	84	79	84
89	85	93	90	79	83	91	87	89	94

Для того, чтобы проанализировать число долгоносиков в сосудах с пищевым субстратом, необходимо сгруппировать значения $X_1, X_2, \dots, X_n$ в k групп с интервалом i . Ориентировочно число групп равно корню квадратному из объема выборки, которое, однако, не должно быть меньше 5 и больше 20.

Величину интервала групп определяют по соотношению

$$i = \frac{X_{max} - X_{min}}{\text{число групп}} = \frac{R}{k}.$$

В данном примере целесообразно взять 7 групп, тогда величина интервала будет равна целому числу

$$i = \frac{R}{k} = \frac{115 - 45}{7} = \frac{70}{7} = 10 \text{ шт.}$$

При выборе границ групп следует обращать внимание на то, чтобы верхняя граница группы была меньше, чем нижняя граница прилегающей соседней группы на единицу измерения, в нашем примере на 1 особь (штуку). Группировка осуществляется в такой последовательности:

1. Определяем размах варьирования результатов измерений, т. е. разность между наибольшим и наименьшим значением ряда измерений

$$R = X_{max} - X_{min}.$$

2. Устанавливаем число групп k и размер интервала группировки i .

3. Готовим макет таблицы сгруппированного распределения частот результатов измерений (табл. 1). В первой колонке запи-

сываем интервал группировки, во второй – число измерений, входящих в данный интервал (частота), в третьей – среднее значение в группе (для этого сумму минимального и максимального значений в группе делят на два).

Таблица 1

Сгруппированное распределение частот по данным подсчета числа долгоносиков в 100 сосудах с пищевым субстратом

Группы (интервал группировки)	Частота	Среднее значение в группе
45–54	1	50
55–64	3	60
65–74	21	70
75–84	40	80
85–94	23	90
95–104	9	100
105–115	3	110

Сумма частот должна быть равна объему совокупности $\Sigma f = n = 100$.

Для получения графического изображения данных строят гистограмму и вариационную кривую. Это позволит сразу охватить важнейшие закономерности распределения наблюдений. Для этого на горизонтальной линии (оси абсцисс) наносят значения интервала группировки, а по вертикали (ось ординат) – численности этих значений (их частоты). Масштаб выбирают такой, чтобы весь график имел удобную и легко обозримую форму. Ступенчатый график в виде столбиков, имеющих высоту, пропорциональную частотам, а ширину, равную интервалам группировки, называется *гистограммой*, из которой легко получить *кривую распределения*, или *вариационную кривую*, соединив линией средние значения групп. В конце работы делают вывод о наиболее часто встречающейся численности долгоносиков в сосудах. Такое значение в статистике называется *модой* (либо, соответствующий класс – модальным). Мода – это значение, наиболее часто встречающееся в выборке.

Задание. После рассмотрения примера необходимо сгруппировать результаты эксперимента, представить графическое изображение (приложения 4, 5, 6).

ТЕМА 2

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ

Различают эмпирические и теоретические распределения частот совокупности результатов наблюдений.

Эмпирическое распределение – распределение результатов измерений, полученных при изучении выборки, например, распределение растений по высоте или массе, распределение поверхностных водоемов Могилевской области по содержанию нитратных форм азота и т. д. В основе эмпирического распределения лежат определенные математические закономерности, которые в генеральной совокупности, т. е. при очень большом числе наблюдений ($n \rightarrow \infty$), характеризуются некоторыми теоретическими распределениями.

На основе теоретических распределений построены статистические критерии, которые используются для проверки некоторых гипотез. Наиболее часто в исследовательской работе опираются на нормальное распределение или специальные распределения, получаемые из нормального для определенно поставленной задачи и при ограниченном числе степеней свободы (t , F , χ^2 – распределение).

Нормальное распределение. Нормальным, или гауссовым, называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X , которое описывается функцией Y

$$Y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

где Y – ордината кривой, или вероятность; μ – генеральная средняя (математическое ожидание); σ – стандартное отклонение генеральной совокупности ($n \rightarrow \infty$); π и e – константы ($\pi \approx 3,14$; $e \approx 2,72$).

Положение и форма кривой нормального распределения полностью определяются двумя параметрами: генеральной средней μ , которая находится в центре распределения, и отклонением σ , которое измеряет вариацию отдельных наблюдений около средней. Максимум, или центр, нормального распределения лежит в точке $X = \mu$; точки перегиба кривой находятся при $X_1 = \mu - \sigma$ и $X_2 = \mu + \sigma$. При $X \pm \infty$ кривая достигает нулевого значения (рис. 1).

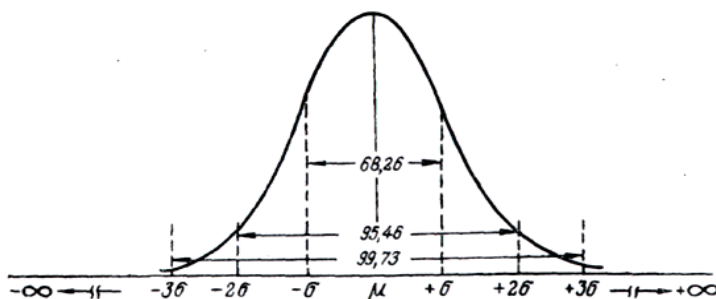


Рис. 1. Процент наблюдений (площадь), ограниченный кривой нормального распределения, для различных значений σ

Для нормального распределения характерны следующие закономерности:

1. В области $\mu \pm \sigma$ лежит около 68 % (68,26 %) всех наблюдений.
2. Внутри пределов $\mu \pm 2\sigma$ находится около 95 % (95,46 %) всех значений случайной величины.
3. Интервал $\mu \pm 3\sigma$ охватывает более 99 % (99,73 %), следовательно, практически все значения.

Площадь под кривой, отграниченную от среднего на t стандартных отклонений, выраженную в процентах всей площади, называют статистической надежностью, или уровнем вероятности P , т. е. вероятностью появления значения признака, лежащего в области $\mu \pm t\sigma$. Вероятность того, что значение варьирующего признака находится вне указанных пределов, называется уровнем значимости P_1 . Чем больше уровень вероятности, тем меньше уровень значимости, и наоборот.

Заметим, что средняя μ , дисперсия σ^2 и стандартное отклонение σ – параметры генеральной совокупности, когда $n \rightarrow \infty$.

Выборочные наблюдения позволяют получать оценки этих параметров. Так, выборочная средняя является оценкой генеральной средней μ , выборочная дисперсия S^2 – оценкой σ^2 (дисперсии генеральной совокупности), выборочное стандартное отклонение S – оценкой σ . Для достаточно больших выборок ($n > 20 - 30$ и особенно $n > 100$) закономерности нормального распределения, указанные выше для параметров генеральной совокупности, справедливы и для их оценок, а именно: в области $\bar{x} \pm S$ находится около 68 %, внутри пределов $\bar{x} \pm 2S$ – около 95 % и в интервале $\bar{x} \pm 3S$ – более 99 % всех наблюдений.

Результаты различных наблюдений, полевых и вегетационных опытов чаще всего располагаются приблизительно в соответствии с симметричной кривой нормального распределения, когда частоты вариантов, равно отстоящих от средней, равны между собой. Но нередко некоторые признаки растений и животных дают распределения, значительно отличающиеся от нормального, – *асимметричные*, или *скошенные*.

Асимметрия может быть положительной, или правосторонней, когда увеличиваются частоты правой части, и отрицательной, или левосторонней, когда увеличиваются частоты левой части вариационной кривой.

Причинами асимметричных распределений могут быть:

1. Неправильно взятая выборка, когда в нее вошло непропорционально много (или мало) вариант с большим или меньшим их значением.

2. Действие определенных факторов, сдвигающих частоту варьирующего признака в ту или другую сторону от среднего значения.

Когда какие-либо причины благоприятствуют более частому появлению и средних и крайних значений признака, образуются так называемые положительные эксцессивные распределения, имеющие вид острой пирамиды с расширенным основанием, или отрицательные эксцессивные распределения, когда в центре их имеется не вершина, а впадина, и вариационная кривая становится двухвершинной.

Многовершинные и двухвершинные кривые в большинстве случаев указывают, что в выборку попали представители несколь-

ких совокупностей с различными средними. Например, посеяна смесь сортов, имеются закономерные различия в плодородии почвы на отдельных частях земельного участка и т. п. В генетических работах двухвершинные и многовершинные кривые могут свидетельствовать о появлении объектов с новыми свойствами или признаками и указывать на результативность применяемого фактора.

Нормальное распределение – наиболее часто встречающийся в практике экспериментальной работы закон распределения случайной величины, т. е. величины, значение которой нельзя точно предсказать. Главная его особенность заключается в том, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения.

t-распределение Стьюдента. Закон нормального распределения проявляется при $n > 20 - 30$. Если же эксперимент проводят при $n = 4 - 6$, то естественно ожидать, что среди измерений различных параметров очень больших отклонений не будет. Поэтому стандартное отклонение S , подсчитанное по малой выборке, в большинстве случаев будет меньше, чем по всей генеральной совокупности σ . Следовательно, в этих случаях полагаться на критерии нормального распределения в своих выводах нельзя.

С начала XX в. в математической статистике стало разрабатываться новое направление, которое можно назвать статистикой малых выборок. Наибольшее практическое значение для экспериментальной работы имело открытое в 1908 г. английским статистиком и химиком В. Госсетом t -распределение, получившее название распределения Стьюдента (от англ. *student* – студент, псевдоним В. Госсета). Распределение t Стьюдента для выборочных средних определяется равенством

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \mu}{S_{\bar{x}}}.$$

Числитель формулы означает отклонение выборочной средней от средней совокупности μ , а знаменатель является показателем, оценивающим стандартную ошибку средней генеральной совокупности. Таким образом, величина t измеряется отклоне-

ем выборочной средней $\bar{x}$ от средней совокупности μ , выраженным в долях ошибки выборки $S_{\bar{x}}$, принятой за единицу.

Максимумы частоты нормального и t -распределения совпадают, но форма t -распределения полностью зависит от числа степеней свободы. При очень малых значениях степеней свободы она принимает вид плосковершинной кривой, причем площадь, отграниченная кривой, больше, чем при нормальном распределении, а при увеличении числа наблюдений ($n > 30$) распределение t приближается к нормальному и переходит в него при $n \rightarrow \infty$.

Распределение t Стьюдента имеет важное значение при работе с малыми выборками: позволяет определить доверительный интервал, накрывающий среднюю совокупности μ , и проверить ту или иную гипотезу относительно генеральной совокупности. При этом нет необходимости знать параметры совокупности μ и σ , достаточно иметь их оценки $\bar{x}$ и S для определенного объема выборки n .

χ^2 -распределение. Распределение χ^2 (хи-квадрат) впервые было рассмотрено Р. Хельмертом (1876) и К. Пирсоном (1900). Если $x_1, x_2, \dots, x_n$ – независимые случайные величины, распределенные по стандартному нормальному закону, то распределение случайной величины $Y = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ имеет распределение χ^2 с n степенями свободы. Распределение χ^2 зависит от одного параметра, который называется степенью свободы. Число степеней свободы равно $n - 1$, где n – размер выборки. Плотность распределения χ^2 выражается формулой

$$f(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \times \Gamma(\frac{n}{2})} \times y^{\frac{n}{2}-1} \times e^{-y/2},$$

где n – число степеней свободы; e – основание натурального логарифма ($\approx 2,72$); Γ – гамма-функция.

F -распределение Фишера. Если из нормально распределенной совокупности взять две независимые выборки объемом n_1 и n_2 и подсчитать дисперсии S_1^2 и S_2^2 со степенями свободы $\nu_1 = n_1 - 1$ и $\nu_2 = n_2 - 1$, то можно определить отношение дисперсий

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}.$$

Отношение дисперсий берут таким, чтобы в числителе была большая дисперсия, и поэтому $F \geq 1$.

Распределение F зависит только от числа степеней свободы ν_1 и ν_2 .

Кривые, полученные из функции распределения для всех возможных значений F , особенно при небольшом числе наблюдений, имеют асимметричную форму – длинный «хвост» больших значений и большую концентрацию малых величин F .

Статистические методы проверки гипотез. Любая разность между средними арифметическими двух генеральных совокупностей всегда существенна. В опытной работе обычно сравнивают средние величины не генеральных, а выборочных совокупностей, поэтому приходится доказывать методами математической статистики статистическую значимость различий в действии изучаемых факторов и на основании этого делать выводы и предложения для производства.

При этом исследователь не в состоянии исключить возможность ошибки: он может отклонить истинную гипотезу или принять ошибочную. В статистическом анализе говорят, он может совершить ошибку первого или второго рода.

Вероятность совершения ошибки первого рода (то есть отклонения истинной нулевой гипотезы) называют уровнем значимости (α).

Вероятность избежать ошибки второго рода (то есть принятия ошибочной нулевой гипотезы) называют мощностью анализа ($1 - \beta$).

Уровень значимости $\alpha = 0,05$ означает, что в пяти случаях из 100 мы ошибочно отклоним верную нулевую гипотезу. Чем меньше значение α , тем больше должно быть отклонение выборочной оценки признака от истинного (наблюдающегося в генеральной совокупности) значения для того, чтобы привести нас к ошибочному выводу.

Использование статистических методов или критериев проверки гипотез – основа принятия решений при изучении явлений, обусловленных случайной вариацией.

Статистическая гипотеза – это научное предположение о тех или иных законах распределения рассматриваемых случайных величин, которое может быть проверено на основе выборки. Почти всегда задача заключается в проверке нулевой гипотезы (H_0)

об отсутствии реального различия между фактическими и ожидаемыми наблюдениями.

Принятие H_0 гипотезы означает, что данные не противоречат предположению об отсутствии различий между фактическими и теоретическими или двумя рядами фактических распределений. Отбрасывание гипотезы означает, что эмпирические данные несовместимы с H_0 и верна другая, альтернативная гипотеза.

Справедливость H_0 проверяется вычислением статистических критериев проверки для определенного уровня значимости. Для проверки H_0 используют критерии двух видов: параметрические и непараметрические.

Параметрические критерии – это критерии, основанные на предположении, что распределение признака в совокупности подчиняется известному закону (например, закону нормального распределения). К таким показателям относятся критерии t и F , использование которых предполагает вычисление оценок параметров нормального распределения.

Непараметрические критерии – это такие, использование которых не требует вычисления оценок неизвестных параметров распределения и приближенного значения распределения признака. Этими критериями пользуются в предварительных исследованиях и в случаях, если данные не подчиняются закону нормального распределения.

Статистические показатели выборочной совокупности (выборки) являются приближенными оценками показателей (параметров) генеральной совокупности. Оценка может быть точечная (представлена одним числом) или интервальная.

Через выборочную среднюю $\bar{x}$ и ее ошибку $S_{\bar{x}}$ можно дать точечную оценку генеральной средней в виде $\bar{x} \pm S_{\bar{x}}$. Это означает, что $\bar{x}$ – оценка генеральной средней μ с ошибкой, равной $S_{\bar{x}}$.

Интервальная оценка характеризуется двумя числами – концами интервала, покрывающего оцениваемый параметр.

Доверительный интервал – это такой интервал, который с заданной вероятностью покрывает оцениваемый параметр. Центр такого интервала – выборочная оценка параметра, а пределы, или доверительные границы, определяются средней ошибкой оценки и уровнем вероятностей.

Статистические методы проверки гипотез основываются на использовании: t -критерия для оценки существенности разности выборочных средних для независимых и сопряженных выборок; t -критерия (греч. тау) для проверки гипотезы о принадлежности «сомнительной» варианты к совокупности; критерия F для оценки существенности различий в степени вариации признаков; критерия χ^2 для оценки степени соответствия эмпирических данных теоретическим ожиданиям.

ТЕМА 3

ВЫЧИСЛЕНИЕ И АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ИЗМЕНЧИВОСТИ

Различают два типа изменчивости: *количественную*, которая может быть измерена, и *качественную*, которая не поддается измерению.

Под количественной изменчивостью понимают изменчивость количественных признаков – это такие свойства изучаемых объектов, разные состояния которых можно выразить при помощи чисел, например, масса, высота, концентрация и др.

Различают два вида количественной изменчивости: прерывистую, или *дискретную*, и *непрерывную*. В первом случае различия между вариантами выражаются целыми числами, между которыми нет и не может быть переходов, например, число растений на квадратном метре, количество детенышей у животных и т. д. Во втором случае значения вариант выражаются мерами объема, длины, массы и т. д., между которыми возможны любые переходы с неограниченным числом возможных значений.

Выделяют также порядковые (ранговые) переменные, когда признаки невозможно измерить количественно, однако при этом они поддаются ранжированию в порядке возрастания степени проявления признака. Например, 10-балльная система оценивания в отечественной системе образования; оценка интенсивности запаха природных вод; степени агрессивности лабораторных мышей и т. д.

Качественной изменчивостью называется такое варьирование, когда различия между вариантами выражаются качественными показателями, которые одни варианты имеют, а другие нет (цвет, вкус, форма изучаемого предмета). Если признак принимает только два взаимоисключающих значения (больной – здоро-

вый, безостый – остистый), то изменчивость называется *альтернативной*.

Основными статистическими характеристиками количественной изменчивости являются: средняя арифметическая ($\bar{x}$), дисперсия (S^2), среднее квадратическое отклонение (S), коэффициент вариации (V), ошибка средней арифметической ($S_{\bar{x}}$) и относительная ошибка ($S_{\bar{x}\%}$).

Средняя арифметическая является абстрактной величиной, характеризующей всю совокупность в целом. В простейшем случае она находится путем сложения всех вариантов выборки и деления на их число

$$\bar{x} = \frac{\sum X}{n}.$$

Как обобщающая характеристика средняя арифметическая ($\bar{x}$) обладает рядом свойств:

1. С увеличением или уменьшением индивидуальных значений выборки на или во сколько-то раз средняя арифметическая изменяется таким же образом.
2. На числовой оси средняя арифметическая является центром колебания индивидуальных значений выборочной совокупности.
3. Сумма всех положительных и всех отрицательных отклонений от средней арифметической равна нулю

$$\sum (X - \bar{x}) = 0.$$

4. Сумма квадратов отклонений от средней арифметической при нормальном распределении меньше суммы квадратов отклонений от любого произвольного числа A , не равного средней

$$\sum (X - \bar{x})^2 < \sum (X - A)^2.$$

Средняя арифметическая не показывает индивидуальных колебаний изучаемых признаков. Основными мерами вариации, рассеяния изучаемого признака служат дисперсия и стандартное отклонение.

Выборочная несмещенная *дисперсия* представляет собой частное от деления суммы квадратов отклонений на число всех

измерений без единицы ($n - 1$). Если количество элементов в выборке меньше 30, то знаменатель дроби принимает значение n

$$s^2 = \frac{\sum (X - \bar{x})^2}{n - 1}.$$

Из математической статистики известно, что при определении любых средних величин сумму всех показателей необходимо делить на число независимых друг от друга величин. В связи с этим в формулах сумму квадратов отклонений $\sum (X - \bar{x})^2$ делят не на общее число наблюдений, а на число без единицы, так как одно любое отклонение зависимое и может быть найдено из равенства $\sum (X - \bar{x})^2 = 0$. Остальные отклонения могут свободно варьировать, принимать любые значения. Число свободно варьирующих величин называется *числом степеней свободы*. Оно обозначается v и в простейшем случае равно $n - 1$.

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия показывает возможную площадь рассеяния индивидуальных признаков от среднего значения.
2. Будучи показателем четной степени, она позволяет избавиться от отрицательных значений отклонений от средней, приводящих результаты сложения к нулю.
3. Размерность дисперсии равна квадрату размерности изучаемого признака.

Дисперсия представляет собой средний квадрат отклонений. То есть вначале рассчитывается среднее значение, затем берется разница между каждым исходным и средним значением, возводится в квадрат, складывается и затем делится на количество значений в данной совокупности. Разница между отдельным значением и средним арифметическим отражает меру отклонения. В квадрат возводится для того, чтобы все отклонения стали исключительно положительными числами и во избежание взаимоничтожения положительных и отрицательных отклонений при их суммировании.

Для перевода меры рассеяния в величину с размерностью изучаемой величины применяют *стандартное* или *среднеквадратичное отклонение*. Его получают извлечением квадратного корня из дисперсии $S = \sqrt{s^2}$.

При вычислении дисперсии и стандартного отклонения по основным формулам нередко возникают технические неудобства. Средняя арифметическая обычно получается в виде дробного числа, поэтому отклонения $(X - \bar{x})$ и особенно их квадраты $(X - \bar{x})^2$ получаются многозначными, что затрудняет расчеты и ведет к ошибкам. Поэтому разработаны способы вычислений, основанные на том, что для получения суммы квадратов центральных отклонений $(X - \bar{x})^2$ достаточно взять отклонения от любого произвольного числа A (удобно брать целое число, близкое к предполагаемой средней) и произвести расчеты по формуле

$$\sum (X - \bar{x})^2 = \sum (X - A)^2 - \frac{[\sum (X - A)]^2}{n} = \sum X_1^2 - \frac{(\sum X_1)^2}{n}.$$

Стандартное отклонение служит показателем, который дает представление о наиболее вероятной средней ошибке отдельного, единичного измерения, взятого из данной совокупности. В интервал плюс-минус стандартное отклонение относительно средней ($\pm 1S$) укладывается примерно $\frac{2}{3}$ всех наблюдений (около 68 % всех вариантов), то есть основное ядро изучаемого ряда величин. Возможны отклонения от средней арифметической, превосходящие ($\pm 1S$), но вероятность их по мере удаления от $\pm 1S$ все время уменьшается. Так, вероятность встретить варианты, отклоняющуюся от средней на величину больше $\pm 2S$ составляет менее 5 %, а больше $\pm 3S$ – менее 0,3 %. Поэтому утроенное значение стандартного отклонения принято считать предельной ошибкой отдельного наблюдения.

Стандартное отклонение, выраженное в процентах к средней арифметической данной совокупности, называется *коэффициентом вариации* (V)

$$V = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100.$$

Коэффициент вариации является относительным показателем изменчивости. Изменчивость принято считать незначительной, если коэффициент вариации не превышает 10 %, средней, если V выше 10 %, но менее 20 %, и значительной, если коэффициент вариации более 20 %.

Для характеристики степени выравненности материала иногда целесообразно использовать величину, дополняющую значение коэффициента вариации до 100. Этот показатель называют *коэффициентом выравненности* и определяют по равенству $V = 100 - V$.

Вычисление основных статистических характеристик выборочным методом всегда связано с неизбежными ошибками. *Ошибка средней арифметической для выборочной совокупности* является мерой отклонения выборочной средней от средней генеральной совокупности. Она прямо пропорциональна стандартному отклонению и обратно пропорциональна корню квадратному из объема выборки

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Ошибка средней арифметической обладает рядом свойств:

1. Ошибка средней арифметической подчиняется закону нормального распределения.

2. Ошибку средней арифметической можно регулировать, изменяя объем выборки. Для каждой величины ошибки объем выборки определяют по соотношению

$$n = \left(\frac{S}{S_{\bar{x}}} \right)^2.$$

Ошибка средней арифметической выражается в тех же единицах измерения, что и сама средняя. Поэтому сравнить между собой ошибочность определения средних разных признаков одной и той же совокупности бывает затруднительно или даже невозможно. Такое сравнение можно провести, если ошибку выразить в процентах. Ошибка выборки, выраженная в процентах от соответствующей средней, называется *относительной ошибкой выборочной средней*

$$S_{x\%} = \frac{S_{\bar{x}}}{\bar{x}} \cdot 100.$$

Относительная ошибка средней прямо пропорциональна абсолютной ошибке и обратно пропорциональна средней арифметической.

Приводя числовые данные в тексте или в таблицах, вначале указывают среднее значение параметра, затем знак $\pm$, а после него — значение стандартного отклонения или ошибки. Например, средняя продолжительность пребывания птицы у гнезда при кормлении птенцов составляет 8 ± 2 с. При описании данных обязательно указать объем анализируемых выборок и показатель разброса, приведенный вместе со средним значением.

Далее следует выполнить индивидуальное задание (Приложения 4, 5).

ТЕМА 4

ВЫЧИСЛЕНИЕ И АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КАЧЕСТВЕННОЙ ИЗМЕНЧИВОСТИ

Основными статистическими показателями качественной изменчивости являются: доля признака, показатель изменчивости, коэффициент вариации и ошибка выборочной доли.

Доля признака, или относительная численность (частота), отдельной варианты в данной совокупности обозначается через P_1, P_2, P_3 и т. д. и может быть выражена в частях единицы или в процентах. В первом случае сумма всех долей в пределах данной совокупности или ряда распределения равна единице, во втором – 100 %.

Доля признака – это отношение численности каждого из членов ряда n_1, n_2, n_3 и т. д. к численности совокупности n , т. е. вероятность появления данного признака в изучаемой совокупности

$$p_1 = \frac{n_1}{n}; \quad p_2 = \frac{n_2}{n}; \quad p_3 = \frac{n_3}{n} \text{ и т. д.}$$

При альтернативной (двоичновозможной) изменчивости доля одного признака обозначается через p , а второго через q . На основании очевидного равенства $p + q = 1$ (или 100 %), так как сумма вероятностей двух противоположных событий всегда равна единице (100 %), значение $q = 1 - p$.

Показатель изменчивости качественного признака S характеризует варьирование величин ряда относительно друг друга. Значение показателя изменчивости определяется по формуле

$$S = \sqrt[k]{p_1 \times p_2 \times p_3 \times \dots \times p_k},$$

где p_1, p_2 и т. д. – доли признака (или процентные значения их) в общей совокупности; k – число градаций признака.

Если изучаемая совокупность представлена объектами с двумя градациями признака (альтернативная изменчивость), то

$$S = \sqrt{pq},$$

где p и q – доли признака, выраженные в частях единицы или процентах.

Например, показатель изменчивости при $p = 0,10$ и $q = 0,90$ будет равен

$$S = \sqrt{pq} = \sqrt{0,10 \times 0,90} = 0,30 (\text{или } 30 \%).$$

В зависимости от соотношения p и q значение S изменяется от 0 до 0,5. Максимальная изменчивость качественного признака будет наблюдаться тогда, когда $p = q = 0,5$ и $S_{max} = 0,5$ (или 50 %). Значения максимальной (наибольшей) изменчивости для распределений с разным числом градаций качественных признаков даны ниже:

Число градаций признака	S_{max}	Число градаций признака	S_{max}
2	0,500 (50,0 %)	5	0,200 (20,0 %)
3	0,333 (33,3 %)	6	0,167 (16,7 %)
4	0,250 (25,0 %)	7	0,143 (14,3 %)

Пользуясь величинами максимальных значений S_{max} , можно вычислить *коэффициент вариации качественных признаков* – фактический показатель изменчивости, выраженный в процентах к максимально возможной изменчивости

$$V_p = \frac{S}{S_{max}} \cdot 100.$$

Коэффициент вариации характеризует относительную степень изменчивости изучаемых признаков и широко используется для сравнительной оценки выравненности различных совокупностей. Максимальное значение $V_p = 100 \%$ наблюдается при $S = S_{max}$.

Ошибка выборочной доли S_p – мера отклонения доли признака выборочной совокупности p от доли его по всей генеральной совокупности P вследствие неполной представительности (репрезентативности) выборки. Ошибку доли вычисляют по формуле

$$S_p = \frac{S}{\sqrt{n}},$$

где S – показатель изменчивости качественного признака; n – объем выборки.

Для альтернативного варьирования, когда значение $S = \sqrt{pq}$, формула ошибки выборочной доли примет вид

$$S_p = \sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

Вероятность встретить p (или q) в интервале $p \pm S_p$ составляет около 68 %, в интервале $p \pm 2S_p$ – 95 % и в интервале $p \pm 3S_p$ – около 99 %. Следовательно, подобно количественной изменчивости, все значения p с вероятностью 99 % укладываются в пределах тройной ошибки выборочной доли.

Далее следует выполнить индивидуальное задание (Приложение 6).

ТЕМА 5

ОЦЕНКА СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ ОЖИДАЕМЫМИ И НАБЛЮДАЕМЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ПО КРИТЕРИЮ χ^2 (ХИ-КВАДРАТ)

Если необходимо определить соответствие двух сравниваемых рядов распределения (эмпирического и теоретического или двух эмпирических) используют критерий χ^2 .

Часто критерий χ^2 применяют:

- В генетическом анализе, когда необходимо убедиться в том, является ли обнаруженное отклонение от теоретически ожидаемого распределения (1 : 1, 1 : 3, 9 : 3, 9 : 7 и т. д.) закономерным или лежит в пределах возможных случайных колебаний.

- В защите растений, токсикологии, экологии при изучении качественных признаков для оценки соответствия эмпирических данных нулевой гипотезе (теоретической предпосылке H_0).

Нулевая гипотеза отвергается, если $\chi^2_{\text{факт.}} > \chi^2_{\text{теор.}}$ и не отвергается, если $\chi^2_{\text{факт.}} < \chi^2_{\text{теор.}}$. Теоретически ожидаемые частоты обозначают через M , а опытные, эмпирически полученные, – через m . Критерий χ^2 представляет собой сумму отношений квадратов разностей между частотами эмпирического и теоретического распределений к частотам теоретического распределения для данной группы

$$\chi^2 = \frac{(m_1 - M_1)^2}{M_1} + \frac{(m_2 - M_2)^2}{M_2} + \dots + \frac{(m_n - M_n)^2}{M_n} = \sum \frac{(m - M)^2}{M}.$$

Величина $\chi^2_{\text{теор.}}$ зависит от числа степеней свободы, которое определяют по формуле $\nu = (c - 1) \times (k - 1)$, где c – это число строк, а k – число колонок в анализируемой таблице. Значение $\chi^2_{\text{теор.}}$, соответствующее определенному числу степеней свободы, находят в приложении 2.

Пример 1. При скрещивании двух сортов гороха Г. Мендель во втором поколении получил 355 желтых семян (m_1) и 123 зеленых семени (m_2). Общее количество полученных семян – 478 штук. Соответствуют ли результаты опыта теоретически ожидаемому отношению желтых семян к зеленым как 3:1? В качестве нулевой гипотезы (H_0) принимаем соотношение 3:1.

Решение. Расчеты удобно осуществлять в таблице 2. Сначала в соответствующие графы заносим ожидаемое расщепление и наблюдаемые частоты (m_1 и m_2) из условия задачи. Затем определим теоретически ожидаемые частоты (M_1 и M_2)

$$M_1 = \frac{3}{4} \times 478 = 358,5$$

$$M_2 = \frac{1}{4} \times 478 = 119,5.$$

Таблица 2

Результаты опыта и последовательность расчета критерия χ^2

Показатели	Семена		Сумма
	желтые	зеленые	
Ожидаемое расщепление H_0	3	1	4
Наблюдаемые частоты (m)	355	123	478
Ожидаемые частоты (M)	358,5	119,5	478
Разность ($m - M$)	-3,5	3,5	-
Квадрат разности $(m - M)^2$	12,25	12,25	-
Отношение $(m - M)^2 / M$	0,034	0,103	$\chi^2 = 0,137$

Подставляя эмпирические и теоретически ожидаемые частоты в формулу для вычисления критерия χ^2 , получим

$$\chi^2_{\text{факт.}} = \sum \frac{(m - M)^2}{M} = \frac{(355 - 358,5)^2}{358,5} + \frac{(123 - 119,5)^2}{119,5} = 0,137.$$

При числе степеней свободы равном 1 ($\nu = (c - 1) \times (\kappa - 1) = (2 - 1) \times (2 - 1) = 1$) теоретическое значение $\chi^2_{05} = 3,84$ (Приложение 2).

Вывод: так как $\chi^2_{\text{факт.}} (0,137) < \chi^2_{05} (3,84)$, то нулевая гипотеза H_0 не отвергается и различия между фактическими и теоретически ожидаемыми частотами несущественны.

Пример 2. Рассмотрим пример с распределением кормящихся птиц по частям крон деревьев, где они собирают корм (или

распределением гнезд по имеющимся искусственным дуплянкам в разных местообитаниях). Предположим, мы получили следующие данные распределения вида по 5 грациям среды (частям крон или местообитаниям) (второй столбец таблицы):

Таблица 3

Результаты опыта и последовательность расчета критерия χ^2

Номер станции	Фактическое распределение m	Теоретическое распределение M	$m - M$	$(m - M)^2$	$(m - M)^2 / M$
1	35	40	-5	25	0,625
2	28	30	-2	4	0,133
3	18	20	-2	4	0,20
4	12	8	4	16	2,0
5	7	2	5	25	12,5
сумма	100	100			$\chi^2 = 15,46$

Данные фактического распределения могут быть представлены как в виде частоты встречаемости (в процентах), так и в абсолютных значениях, однако с точки зрения расчетов теоретической частоты удобнее использовать проценты. Теоретической (ожидаемой нами) частотой распределения (помещена в третий столбец таблицы) в наших примерах могут быть, например, найденные нами данные о распределении биомассы корма по частям крон или распределение по исследуемым местообитаниям развешанных искусственных гнездовий.

Подставляем данные в формулу (см. таблицу 3) и получаем значение $\chi^2 = 15,46$. Наш результат оказался существенно выше критического (найденного по таблице) значения (при числе степеней свободы 4 на уровне значимости $P = 0,05$ критическое значение $\chi^2 = 9,49$), что свидетельствует о неслучайном (неравномерном) распределении нашего вида по частям крон или местообитаниям. Если бы полученное нами значение χ^2 было равно или меньше 9,49, мы бы доказали, что распределение птиц полностью соответствует распределению их ресурса (в данном случае корма или дуплянок).

Пример 3. Две группы насекомых (долгоносиков) содержали при разной температуре 25°C и 5°C. При первом температурном режиме из 84 насекомых погибли 16, при втором – из 50 погиб-

ли 25. Доказывают ли результаты опыта губительное действие низкой температуры на выживаемость долгоносиков?

Если между группами насекомых нет отличий по устойчивости к температуре, то доля погибших долгоносиков в обеих группах будет одинаковой, то есть ожидаемое число погибших особей должно быть пропорционально общему числу (H_0).

Решение. Условие задачи и решение оформляем в таблице 4.

Таблица 4

Результаты опыта и расчеты теоретически ожидаемых частот

Вариант опыта (температура)	погибшие		выжившие		всего
	m	M	m	M	
1 (25 °C)	16	25,7 (M_1)	68	58,3 (M_3)	84
2 (5 °C)	25	15,3 (M_2)	25	37,4 (M_4)	50
Всего	41		93		134
%	30,6 %	30,6 %	69,4 %	69,4 %	100 %

Теоретически ожидаемые частоты вычисляем согласно нулевой гипотезе. Если из общего числа насекомых (134 шт.) погибло 30,6 % (41 шт.), то теоретически ожидаемая доля погибших в каждой группе будет такой же. Составим и решим соответствующие пропорции:

$$84 - 100 \%$$

$$X - 30,6 \%, \text{ откуда } X = (84 \times 30,6) / 100 = 25,7 \text{ шт. } (M_1)$$

$$(50 \times 30,6) / 100 = 15,3 \text{ шт. } (M_2)$$

$$(84 \times 69,4) / 100 = 58,3 \text{ шт. } (M_3)$$

$$(50 \times 69,4) / 100 = 37,4 \text{ шт. } (M_4)$$

Подставляя эмпирические и теоретически ожидаемые частоты в формулу для вычисления критерия χ^2 , получим:

$$\chi^2 = \frac{(16 - 25,7)^2}{25,7} + \frac{(25 - 15,3)^2}{15,3} + \frac{(68 - 58,3)^2}{58,3} + \frac{(25 - 37,4)^2}{37,4} = 14,137.$$

При числе степеней свободы равном 3 ($\nu = (c - 1) \times (k - 1) = (2 - 1) \times (4 - 1) = 3$) теоретическое значение $\chi^2_{05} = 7,81$.

Вывод: так как $\chi^2_{\text{факт.}} (14,137) > \chi^2_{05} (7,81)$, то нулевая гипотеза H_0 отвергается и низкая температура действительно является причиной гибели долгоносиков.

Далее следует выполнить индивидуальное задание (Приложение 7).

ТЕМА 6

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ И РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

В биологических исследованиях редко приходится иметь дело с определенными функциональными связями между признаками, когда каждому значению одной величины соответствует строго определенное значение другой величины. Чаще всего каждому значению признака X соответствует не одно, а множество возможных значений признака Y . Такие связи называются *стохастическими* (вероятностными) или корреляционными.

Термин «корреляция» происходит от английского слова *correlation*, что означает соотношение, соответствие. Понятие корреляции введено в науку английским ученым Ф. Гальтоном (1888 г.) и развито его учеником К. Пирсоном (1895 г.). К изучению связи методом корреляции обращаются в том случае, когда невозможно элиминировать (изолировать) влияние посторонних факторов либо потому, что они неизвестны, либо из-за невозможности их изоляции. Кроме того метод позволяет найти и оценить количественную меру тесноты связи между взаимосвязанными признаками. При этом численность выборки должна быть достаточно большой, так как малое количество наблюдений не позволяет обнаружить закономерность связи.

Корреляция бывает простой (зависимость между двумя признаками) и множественной (больше двух), по форме – прямолинейной и криволинейной, по направлению – прямой и обратной.

Под прямолинейной корреляцией понимают такое соотношение между переменными, которое выражается уравнением прямой линии $Y = a + bX$. Когда при одинаковых приращениях аргумента функция имеет неодинаковые изменения, корреляция называется криволинейной. Если при увеличении аргумента функция воз-

растает, то корреляция называется положительной или прямой, а если убывает – отрицательной или обратной.

В качестве числового показателя простой линейной корреляции, показывающего тесноту (силу) и направление связи, используют безразмерное число, называемое коэффициентом корреляции (r).

Значения коэффициента корреляции могут находиться в пределах от $+1$ при прямой функциональной связи до -1 при обратной функциональной связи. При полном отсутствии корреляции $r = 0$, при $|r| < 0,3$ корреляционная зависимость слабая, при $|r| = 0,3 - 0,7$ – средняя, а при $|r| > 0,7$ – сильная. Знак при коэффициенте корреляции указывает направление связи: $(+)$ – прямая зависимость, $(-)$ – связь обратная.

Для анализа линейной корреляции между X и Y проводят n независимых парных наблюдений, исходом каждого из которых является пара чисел $(X_1; Y_1), (X_2; Y_2), \dots (X_n; Y_n)$. Способ вычисления коэффициента корреляции рассмотрим на примере (табл. 5).

Таблица 5

**Вычисление коэффициента корреляции между
продуктивностью растений и числом зерен в колосе**

№ растения	Значение признаков		Отклонение от средней		Квадраты отклонений		Произведения отклонений
	Продуктивность растений Y , г/раст.	Число зерен в колосе X , шт.	$(Y - \bar{y})$	$(X - \bar{x})$	$(Y - \bar{y})^2$	$(X - \bar{x})^2$	$(Y - \bar{y}) \times (X - \bar{x})$
1	1,74	38	-0,13	-3	0,0169	9	0,39
2	2,06	46	0,19	5	0,0361	25	0,25
3	1,75	38	-0,12	-3	0,0144	9	0,36
4	2,00	42	0,13	1	0,0169	1	0,13
5	1,53	38	-0,34	-3	0,1156	9	1,02
6	1,78	44	-0,09	3	0,0081	9	-0,27
7	1,77	38	-0,10	-3	0,0100	9	0,30
8	1,80	37	-0,07	-4	0,0049	16	0,28
9	2,22	48	0,35	7	0,1225	49	2,45
10	2,05	41	0,18	0	0,0324	0	0
$\Sigma =$	18,70	410	0	0	0,3778	136	5,61
	= 1,87	= 41	$n = 10$				

Коэффициент корреляции вычисляют по формуле

$$r = \frac{\sum (X - \bar{x})(Y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (X - \bar{x})^2 \sum (Y - \bar{y})^2}} = \frac{5,61}{\sqrt{0,3778 \times 136}} = \frac{5,61}{\sqrt{51,3008}} = 0,78.$$

или, минуя вычисления отклонений и квадратов отклонений, по формуле

$$r = \frac{\sum XY - (\sum X \times \sum Y) \div n}{\sqrt{(\sum X^2 - (\sum X)^2 \div n)(\sum Y^2 - (\sum Y)^2 \div n)}}.$$

или через средние квадратические отклонения

$$r = \frac{\sum (X - \bar{x})(Y - \bar{y})}{n \times S_{\bar{x}} \times S_{\bar{y}}},$$

где $S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{x})^2}{n-1}}$, $S_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{\sum (Y - \bar{y})^2}{n-1}}$,

где $(X - \bar{x})$ и $(Y - \bar{y})$ – отклонения значений X и Y от своих средних значений $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в n сопоставимых парах.

Таким образом, связь между продуктивностью растений озимой ржи сорта Калинка и числом зерен в их колосьях сильная прямая ($r = 0,78$).

Степень связи между признаками более точно измеряется коэффициентом детерминации d_{yx} , равным квадрату коэффициента корреляции $d_{yx} = r^2$. Он показывает долю тех изменений (%), которые зависят от изучаемого фактора. В нашем примере $d_{yx} = 0,78^2 = 0,61$, следовательно только 61 % изменчивости признака Y обусловлено действием факториального признака X (числом зерен в колосе), остальная часть корреляционной связи ($1 - 0,61 = 0,39$) обусловлена другими факторами.

Коэффициент корреляции выборочных наблюдений подвержен случайным колебаниям, которые зависят от объема выборки и точности проведения наблюдений. Поэтому для оценки надежности выборочного коэффициента вычисляют его ошибку и критерий существенности.

Стандартную ошибку коэффициента корреляции определяют по формуле

$$S_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-0,78^2}{10-2}} = \pm 0,22,$$

где S_r – ошибка коэффициента корреляции; r – коэффициент корреляции; n – число пар значений.

Чем больше число наблюдений, тем меньше будет ошибка коэффициента корреляции. Значение коэффициента корреляции обычно записывается вместе с его ошибкой

$$r \pm S_r = 0,78 \pm 0,22.$$

Критерий существенности (оценку значимости) коэффициента корреляции вычисляют по формуле

$$t_r = \frac{r}{S_r} = \frac{0,78}{0,22} = 3,55.$$

Сопоставляя фактические и теоретически рассчитанные значения t_r при числе степеней свободы, равном $n - 2$, оценивают существенность корреляционной связи. Если $t_{r \text{ факт.}} \geq t_{r \text{ теор.}}$, то корреляционная связь существенна, а при $t_{r \text{ факт.}} < t_{r \text{ теор.}}$ – несущественна. Теоретическое значение критерия Стьюдента находят по таблице (Приложение 1), принимая 5 %-ый или 1 %-ый уровень значимости. В нашем примере при восьми степенях свободы ($n - 2 = 8$) $t_{0,05}(2,31) \leq t_{r \text{ факт.}}(3,55)$. Значит, коэффициент корреляции в нашем случае является статистически значимым.

Определив коэффициент корреляции, мы выясняем направление и степень сопряженности в изменчивости признаков. Однако, он не позволяет узнать, как количественно изменяется результативный признак при изменении факториального на единицу измерения. Это решается с помощью регрессионного анализа. Его основная задача – определить формулу корреляционной зависимости. Различают регрессию простую и множественную, а по форме – прямо- и криволинейную. Сущность регрессионного анализа состоит в том, чтобы построить линию, которая наиболее точно выражала бы зависимость одного признака от другого.

Зависимость между признаками может быть выражена коэффициентом регрессии, показывающим, в каком направлении и на

какую величину изменяется в среднем один признак (функция) при изменении другого (аргумент) на единицу измерения. Коэффициенты регрессии имеют знак коэффициента корреляции и вычисляются по следующим формулам

$$b_{yx} = \frac{\sum(X - \bar{x})(Y - \bar{y})}{\sum(X - \bar{x})^2} = \frac{5,61}{136} = 0,04125$$

$$b_{xy} = \frac{\sum(X - \bar{x})(Y - \bar{y})}{\sum(Y - \bar{y})^2} = \frac{5,61}{0,3778} = 14,85.$$

Их можно вычислить и через среднеквадратичные отклонения

$$b_{yx} = r \frac{S_{\bar{y}}}{S_{\bar{x}}}, \quad b_{xy} = r \frac{S_{\bar{x}}}{S_{\bar{y}}}.$$

Произведение коэффициентов регрессии равно квадрату коэффициента корреляции

$$b_{yx} \times b_{xy} = r^2$$

$$r = \sqrt{0,04125 \times 14,85} = \sqrt{0,61} = 0,78.$$

Ошибку коэффициентов регрессии вычисляют по формулам

$$S_{b_{yx}} = S_r \cdot \sqrt{\frac{\sum(Y - \bar{y})^2}{\sum(X - \bar{x})^2}} = 0,22 \cdot \sqrt{\frac{0,3778}{136}} = 0,22 \times 0,0527 = 0,0116$$

$$S_{b_{xy}} = S_r \cdot \sqrt{\frac{\sum(X - \bar{x})^2}{\sum(Y - \bar{y})^2}} = 0,22 \cdot \sqrt{\frac{136}{0,3778}} = 0,22 \times 18,97 = 4,174.$$

Критерий существенности коэффициента регрессии определяется по формуле

$$t_{b_{yx}} = \frac{b_{yx}}{S_{b_{yx}}} = \frac{0,04125}{0,0116} = 3,55.$$

Критерий существенности коэффициентов регрессии равен критерию существенности коэффициента корреляции $t_{b_{yx}} = t_r$.

В зависимости от того, между какими признаками рассматривается связь, не всегда имеет смысл вычислять все коэффициенты регрессии. Линию регрессии можно построить двумя способами – графическим и аналитическим.

При графическом способе по оси абсцисс откладывают значения признака X , по оси ординат – значения признака Y . Такой график называют точечной диаграммой, или корреляционным полем.

При аналитическом способе используют уравнения прямой линии (для линейной регрессии)

$$Y = a + bX; \quad a = \bar{y} - b\bar{x}; \quad b = b_{yx}.$$

Уравнение линейной регрессии имеет вид

$$Y = \bar{y} + b_{yx}(X - \bar{x})$$

$$Y = 1,87 + 0,04125 (X - \bar{x}) = 1,87 + 0,04125 X - 0,04125 \times 41 = 0,18 + 0,04125 X.$$

Выводы. Корреляционная зависимость между продуктивностью растений озимой ржи сорта Калинка и числом зерен в колосе прямая, сильная. Продуктивность растений на 61 % зависит от числа зерен. При увеличении числа зерен в колосе на 1 шт. продуктивность растений увеличивается на 0,04125 г. Данная зависимость выражается уравнением $Y = 0,18 + 0,04125 X$.

Далее следует выполнить индивидуальное задание (Приложение 8).

ТЕМА 7

ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Наряду с относительно простыми способами сравнения двух выборок (например, с помощью t -критерия) встречаются и более сложные задачи, когда необходимо сравнить несколько выборок, объединенных в единый статистический комплекс. Попарное сравнение в таких случаях неудобно, так как требует длительных и сложных вычислений. Учитывая это, английским ученым Р. А. Фишером был предложен метод комплексной оценки сравниваемых средних, получивший название дисперсионного анализа.

Исторически возникновение дисперсионного анализа связано с экспериментами в сельском хозяйстве по использованию различных доз удобрений. Требовалось доказать существенность «отклика» урожая на точно определенную дозу удобрений в сравнении с контролем. Однофакторный дисперсионный анализ широко используется в различных областях научных исследований и часто является их завершающим этапом. В то же время он может быть составной частью других важных методов анализа данных. Поэтому целесообразно его подробное рассмотрение.

Например, измеряется влажность почвы в каждом генетическом горизонте. При этом проба с определенной влажностью называется элементом, почвенный горизонт – группой или классом. Если определяется численность какого-либо вида в каждом типе местообитания, то численность – это элемент, а тип местообитания – заданный класс. Целью анализа является проверка гипотезы о принадлежности выборок в каждом классе по их математическим ожиданиям к одной общей генеральной совокупности. Анализ строится на основе сопоставления дисперсий выборок, с учетом принадлежности их к классам, с общей дисперсией всей совокуп-

ности измерений. Использование при оценивании только одного параметра (дисперсии) требует, чтобы распределения не сильно отличались от нормальных. Следовательно, перед использованием дисперсионного анализа необходима обязательная нормализация выборки, либо, если данные не подчиняются закону нормального распределения, необходимо использовать непараметрические аналоги дисперсионного анализа (например, в Statistica).

Пример 1. С помощью дисперсионного анализа необходимо установить достоверность различий массы проростков томата в зависимости от температуры проращивания и выяснить степень влияния изучаемого фактора на общую изменчивость результирующего признака (массы проростка). Данные, полученные в ходе эксперимента, представлены в таблице 6.

Таблица 6

Масса проростков томата, мг

Вариант	Повторения, x				Число наблюдений, n	Сумма по вариантам, V	Среднее по вариантам, X
	I	II	III	IV			
16 °C	18,6	16,5	16,4	19,0	4	70,5	17,625
19 °C	20,7	20,0	17,7	19,5	4	77,9	19,475
22 °C	26,5	27,7	28,2	27,6	4	110,0	27,5
25 °C	26,3	27,6	28,4	28,7	4	111,0	27,75
Суммы по повторениям, P	92,1	91,8	90,7	94,8	$\sum x = N = 16$	$\sum X = 369,4$	$23,1 = x_0$

Здесь же начинаем вычислять необходимые показатели:

Суммы по вариантам V находят сложением данных о массе проростков в четырех повторениях каждого варианта (каждую строку)

$$18,6+16,5+16,4+19,0 = 70,5 \text{ и т. д.}$$

Суммы по повторениям P находят сложением данных о массе проростков каждой повторности по всем вариантам (каждую колонку)

$$18,6+20,7+26,5+26,3 = 92,1 \text{ и т. д.}$$

Среднее арифметическое по каждому варианту находят делением сумм по вариантам на число повторений: $\bar{x} = V \div n$;

$70,5 \div 4 = 17,625$ и т. д. Правильность расчетов проверяют по равенству $\sum X = \sum P = \sum V = 369,4$.

Для нахождения средней массы проростка по всему опыту (x_0) сумму всех измерений $\sum X$ делят на общее число делянок в опыте N

$$x_0 = \sum X \div N = 369,4 \div 16 = 23,1.$$

Для облегчения дальнейших расчетов исходные данные целесообразно преобразовать по соотношению $X_1 = X - A$, приняв за A число 23, близкое к x_0 . Преобразованные данные записывают в таблицу 7 и рассчитывают суммы по вариантам V_1 , суммы по повторениям P_1 и $\sum X_1$.

Правильность расчетов проверяют по равенству: $\sum X_1 = \sum V_1 = \sum P_1 = 1,4$.

Таблица 7

Таблица преобразованных данных

Вариант	$X_1 = X - A = X - 23$				Сумма по вариантам, V_1
	I	II	III	IV	
16°C	-4,4	-6,5	-6,6	-4	-21,5
19°C	-2,3	-3	-5,3	-3,5	-14,1
22°C	3,5	4,7	5,2	4,6	18
25°C	3,3	4,6	5,4	5,7	19
Суммы по повторениям, P_1	0,1	-0,2	-1,3	2,8	$\sum X_1 = 1,4$

Все данные таблицы 7 возводят в квадрат и заполняют таблицу 8.

Таблица 8

Таблица квадратов

Вариант	X_1^2				V_1^2
	I	II	III	IV	
16°C	19,36	42,25	43,56	16,00	462,25
19°C	5,29	9,00	28,09	12,25	198,81
22°C	12,25	22,09	27,04	21,16	324,00
25°C	10,89	21,16	29,16	32,49	361,00
P_1^2	0,01	0,04	1,69	7,84	$1,96 = (\sum X_1)^2$

Для дальнейших расчетов путем сложения находят соответствующие суммы

$$\begin{aligned}\sum X_1^2 &= (19,36 + 42,25 + \dots + 32,49) = 352,04 \\ \sum V_1^2 &= (462,25 + 198,81 + 324,00 + 361,00) = 1346,06 \\ \sum P_1^2 &= (0,01 + 0,04 + 1,69 + 7,84) = 9,58.\end{aligned}$$

Общее число наблюдений в опыте определяется умножением числа вариантов ($l = 4$) на число повторений ($n = 4$): $N = l \times n = 4 \times 4 = 16$.

Затем определяют корректирующий фактор (С)

$$C = (\sum X_1)^2 / N = 1,96 / 16 = 0,12.$$

Сумму квадратов отклонений рассчитываем по формулам

Для общего варьирования

$$C_y = \sum X_1^2 - C = 352,04 - 0,12 = 351,92.$$

Для варьирования вариантов

$$C_v = \sum V_1^2 / n - C = 1346,06 / 4 - 0,12 = 336,4.$$

Для варьирования повторений

$$C_p = \sum P_1^2 / l - C = 9,58 / 4 - 0,12 = 2,28.$$

Для варьирования ошибки (остатка)

$$C_z = C_y - C_v - C_p = 351,92 - 336,40 - 2,28 = 13,24.$$

Для выяснения достоверности различий между вариантами данные о суммах квадратов отклонений сводим в таблице 9. Для заполнения этой таблицы необходимо определить число степеней свободы для общего варьирования, для повторений, для вариантов, для остаточного варьирования (ошибки). Число степеней свободы для общего варьирования определяется общим числом наблюдений минус единицу

$$N - 1 = 16 - 1 = 15.$$

Также определяют степени свободы для повторений и вариантов

$$n - 1 = 4 - 1 = 3 \text{ и } l - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Число степеней свободы ошибки определяют умножением степеней свободы вариантов и повторений: $(n - 1) \times (l - 1) = 3 \times 3 = 9$.

Дисперсия для различных видов варьирования находится делением суммы квадратов вида варьирования на число степеней свободы

$$\text{Для вариантов } S_v^2 = C_v / (n - 1) = 336,4 / 3 = 112,13.$$

Для ошибки $S_z^2 = C_z / ((n - 1) \times (l - 1)) = 13,24 / 9 = 1,47$.

Критерий Фишера находят делением дисперсии вариантов на дисперсию ошибок: $F_{\text{факт.}} = S_v^2 / S_z^2 = 112,13 / 1,47 = 76,28$.

Критерий F_{05} находят в таблицах приложения для доверительной вероятности 95 % (при 5 %-ом уровне значимости). По вертикали откладывают число степеней свободы для меньшей дисперсии (ошибки), а по горизонтали – число степеней свободы для большей дисперсии (вариантов). На пересечении находят число, показывающее табличное отношение дисперсий. В нашем случае $F_{05} = 3,86$.

Таблица 9

Результаты дисперсионного анализа

Источник вариации	Сумма квадратов	Степени свободы	Дисперсия S^2	Критерий Фишера	
				$F_{\text{факт.}}$	F_{05}
Общая C_v	351,92	15			
Повторений C_p	2,28	3			
Вариантов C_v	336,40	3	112,13	76,28	3,86
Ошибки C_z	13,24	9	1,47		

Сравнивая теоретическое и фактическое значения критерия F , подтверждают или отвергают нулевую гипотезу, которая состоит в предположении об отсутствии различий между вариантами опыта. Если $F_{\text{факт.}} \geq F_{\text{теор.}}$, то нулевая гипотеза отвергается. Следовательно, между изучаемыми вариантами есть существенные различия. Если $F_{\text{факт.}} < F_{\text{теор.}}$, нулевая гипотеза подтверждается и между вариантами существенных различий нет. В последнем случае дисперсионный анализ заканчивается и вычисляется только ошибка опыта.

Вывод: Так как в нашем примере $F_{\text{факт.}} > F_{\text{теор.}}$, то нулевая гипотеза опровергается. Между вариантами опыта есть достоверные различия.

Чтобы оценить существенность частных различий, вычисляют:

а) Ошибку опыта

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{(S_z^2/n)} = \sqrt{(1,47/4)} = 0,61 \text{ мг};$$

б) Ошибку разности средних

$$S_d = \sqrt{(2 \times S_z^2/n)} = \sqrt{(2 \times 1,47/4)} = 0,86 \text{ мг};$$

в) Наименьшую существенную разность (HCP_{05}) в абсолютных и относительных показателях

$$HCP_{05} = t_{05} \times S_d = 2,26 \times 0,86 = 1,94 \text{ мг}$$

$$HCP_{05} = (t_{05} \times S_d / x_0) \times 100 = 2,26 \times 0,86 / 23,1 \times 100 = 8,4 \text{ \%}.$$

Значение критерия t_{05} берут из таблицы (Приложение 1) для 9 степеней свободы ошибки. В нашем случае $t_{05} = 2,26$. Итоги результатов опыта и статистической обработки данных записывают в таблицу 10.

Таблица 10

Результаты анализа

Вариант (температура)	Масса, мг	Отклонение от контроля		Группа
		мг	%	
25 °С (контроль)	27,75	-	-	II
16 °С	17,625	-10,125	36,5	III
19 °С	19,475	-8,275	29,8	III
22 °С	27,5	-0,25	0,9	II
HCP_{05}		1,94	8,4	

В колонку «масса» переносят средние значения вариантов из таблицы 6. Отклонения от контроля находят, отнимая от средней массы по вариантам среднюю массу проростка в контроле. Затем сравнивают полученные значения с HCP . В том случае, если величина отклонения от контроля имеет положительный знак и по модулю больше величины HCP , делают вывод о том, что данный вариант существенно превышает контроль, и его относят к I группе. Если отклонение от контроля имеет отрицательный знак, но по модулю больше HCP , значит данный вариант существенно хуже контроля, и его относят к третьей группе.

Варианты, у которых отклонение от контроля по модулю меньше HCP , несущественно отличаются от контроля, и они относятся ко второй группе.

По результатам анализа делают вывод: Масса проростков томата, полученных в контроле при 25°С и в варианте опыта при 22°С, существенно не отличается между собой – варианты относятся во II группу. Проращивание же семян при более низкой температуре (16°С и 19°С) позволяет получить проростки с достоверно меньшей массой – варианты относятся в III группу.

Дисперсионный анализ дает возможность получить представление о степени влияния того или иного фактора в общей дисперсии (изменчивости) признака. Это можно определить по следующим формулам:

а) для влияния вариантов

$$\eta_v^2 = C_v / C_y = 336,4 / 351,92 = 0,956 \text{ или } 95,6 \%;$$

б) для влияния повторений

$$\eta_p^2 = C_p / C_y = 2,28 / 351,92 = 0,006 \text{ или } 0,6 \%;$$

в) для влияния случайных факторов

$$\eta_z^2 = C_z / C_y = 13,24 / 351,92 = 0,038 \text{ или } 3,8 \%;$$

г) для влияния всех факторов

$$\eta_y^2 = \eta_v^2 + \eta_p^2 + \eta_z^2 = 1,0 \text{ (100 \%)}.$$

Далее следует выполнить индивидуальное задание (Приложение 8).

Пример 2. Для выяснения роли обработки инсектицидом были выделены два участка с яблонями, причем только первый был обработан, а второй оставлен контрольным. Количество яблок, собранных с каждой яблони, приведено в таблице 11. Можно ли считать различия достоверными, т. е. можно ли считать, что применение инсектицида увеличивает урожай? Статистическую обработку данных проведите при помощи программы Microsoft Excel.

Таблица 11

Количество яблок, собранных с одной яблони, кг

Повторности	Обработанные деревья	Необработанные деревья
1	210	174
2	240	162
3	197	154
4	205	173
5	183	148
6	191	157
7	197	150
8	201	163
9	193	170
10	203	169

В состав Microsoft Excel входит набор средств анализа данных (так называемый пакет анализа), предназначенный для решения сложных статистических и инженерных задач. Для проведения анализа данных с помощью этих инструментов следует указать входные данные и выбрать параметры; анализ будет проведен с помощью подходящей статистической или инженерной макрофункции, а результат будет помещен в выходной диапазон. Другие средства позволяют представить результаты анализа в графическом виде. Чтобы просмотреть список доступных инструментов анализа, выберите команду Анализ данных в меню Сервис. Если команда Анализ данных в меню Сервис отсутствует – необходима установка пакета анализа. Пакет анализа включает в себя три средства дисперсионного анализа. Выбор конкретного инструмента определяется числом факторов и числом выборок в исследуемой совокупности данных.

Решение задачи начинается с создания исходной таблицы на рабочем листе Excel, после чего в меню Сервис выбирается пункт Анализ данных, а в открывшемся списке функций выделяется курсором имя Однофакторный дисперсионный анализ. В открывшемся списке функций указывается диапазон ячеек, содержащий входные данные, для чего необходимо протащить указатель мыши при нажатой левой кнопке по всем ячейкам таблицы с данными на рабочем листе, а также задаётся выходной интервал. Указав группировку данных по столбцам и уровень значимости $\alpha = 0,05$, щелкаем по кнопке ОК, после чего на рабочем листе, начиная с указанной ячейки, выводятся результаты вычислений, приведенные на рисунке 2.

Однофакторный дисперсионный анализ						
ИТОГИ						
Группы	Счет	Сумма	Среднее	Дисперсия		
1	9	54	6	7,5		
210	9	1810	201,1	257,6		
174	9	1446	160,7	81		
Дисперсионный анализ						
Источник вариации	SS	df	MS	F	P-Значение	F критическое
Между группами	190877,6	2	95438,8	827,24	7,3E-23	3,40
Внутри групп	2768,9	24	115,4			
Итого	193646,5	26				

Рис. 2. Результаты дисперсионного анализа в Microsoft Excel

Как видно из полученных данных, фактическая величина F -критерия значительно больше табличного (критического) значения, что свидетельствует о существенных различиях между групповыми средними, которые не могут быть результатами случайного варьирования.

Задания для самостоятельного выполнения:

1. В пресноводном озере на разных глубинах отобрали одинаковые пробы грунта для изучения количества пиявок. Определить, влияет ли глубина взятия пробы на количество пиявок.

Глубина, см	Повторности		
	1	2	3
0–10	20	19	21
10–20	15	14	13
20–30	10	11	12
30–40	5	6	5
40–50	1	2	1

2. Изучали вес телят (кг) одного возраста на разных фермах. Достоверны ли различия по этому показателю на разных фермах?

Номер фермы	Повторности		
	1	2	3
1	180	190	187
2	168	173	171
3	220	215	210
4	202	200	195

3. В пробах почвы подсчитали количество семян сорняков (шт.). Достоверно ли различие между разными горизонтами по числу семян?

Глубина, см	Повторности			
	1	2	3	4
0 – 20	839	695	744	812
20 – 40	238	292	254	303
40 – 60	89	104	95	91

4. Достоверно ли отличается содержание селена (мкг/100 г) в грибах в различных районах Могилевской области?

Район	Повторности			
	1	2	3	4
Шкловский	15,8	15,3	13,1	11,3
Горецкий	9,2	8,3	9,7	9,3
Мстиславский	4,1	5,7	3,9	4,2

5. Подсчитали число крольчат в помете у крольчих разных пород. Достоверно ли зависит число крольчат в помете от породы?

Порода	Повторности			
	1	2	3	4
1	12	11	9	10
2	7	6	7	8
3	5	7	5	6

6. Изучали число микроорганизмов в разных пробах воды (шт./м³). Достоверны ли различия по изучаемому показателю для разных водоемов?

Водоем	Повторности			
	1	2	3	4
Оршанское озеро	138	117	123	110
Нижнее озеро	98	87	92	85
Поляницы	34	42	54	40

7. Изучали зависимость урожайности томата от вида удобрений. Достоверны ли различия по урожайности томатов (ц/га) на разных участках?

Вариант	Повторности		
	1	2	3
Естественное плодородие	230	250	240
Органические удобрения	390	400	388
Минеральные удобрения	377	380	368
Органика + минеральные удобрения	580	610	625

8. В опыте по определению концентрации нитратов получены данные, приведенные в таблице. Достоверно ли отличается содержание нитратов (мг/кг продукции) в разных овощах?

Вид продукции	Повторности		
	1	2	3
Картофель	86	92	101
Морковь	93	95	86
Огурцы	52	31	59
Корневой сельдерей	176	140	153

ТЕМА 8

ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЖИЗНЕСПОСОБНОСТИ ПЫЛЬЦЫ ТОМАТА ПРИ РАЗЛИЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ МЕТОДОМ ОДНОФАКТОРНОГО ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА

Для анализа жизнеспособности пыльцы томата с каждой формы собирают по 20–30 цветков, пыльники высушивают, пыльцу извлекают встряхиванием в стеклянных бюксах. Среда для прорастания пыльцы включает 20 % сахарозы, 0,006 % борной кислоты. Условия прорастания в контроле: 28 °С в течение 3-х часов. Пыльцу в опытном варианте проращивают 15 дней при 10–12 °С. Чашки Петри и питательную среду предварительно охлаждают до заданной температуры. На крышку чашки Петри микропипеткой наносят 2 капли питательной среды. Затем при помощи иглы наносят пыльцу, так чтобы она не была погружена в каплю. Изучаемые показатели пыльцы (жизнеспособность пыльцы в процентах, длина пыльцевой трубки в делениях шкалы окуляр-микрометра на 10-й, 12-й, 15-й дни с момента постановки эксперимента) определяют при помощи микроскопа «Биолам» (увеличение 7×20). Длину пыльцевой трубки вычисляют как среднее по 20-ти измерениям в каждом поле зрения. В каждом варианте анализируют около 500 пыльцевых зерен в 5-ти полях зрения.

Основным критерием оценки холодостойкости генотипов считается отношение значения изучаемых показателей на стрессовом фоне II к значению признаков на оптимальном фоне I (индекс $^{II/I}$). На основании полученных экспериментальных данных провести статистическую обработку методом однофакторного дисперсионного анализа и сделать выводы.

ТЕМА 9

ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ИЗУЧЕНИЮ ПРОРАСТАНИЯ СЕМЯН КУЛЬТУРНЫХ РАСТЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ СОРТОВ ПРИ НЕСКОЛЬКИХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ РЕЖИМАХ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ МЕТОДОМ ДВУХФАКТОРНОГО ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММЫ MICROSOFT EXCEL

Для многих растений характерна сопряженность проявления признаков спорофитного поколения у проростков и взрослых растений. В связи с этим, а также для технического упрощения проводимых экспериментов, холодостойкость спорофита томата может быть оценена на стадии проростков по следующей схеме:

- 1) проращивание семян при 25 °С – контроль;
- 2) проращивание семян при 10–12 °С;
- 3) проращивание семян при 18–20 °С.

В эксперименте могут быть использованы семена различных сортов и гибридов теплолюбивых культурных растений.

Семена каждого сорта помещаем в соответствующие температурные условия в чашках Петри на увлажненной фильтровальной бумаге в четырехкратной повторности по 50 штук. Предварительно семена обрабатываем раствором марганцевокислого калия (0,1 %, 1 мин.) и промываем водой.

Изучаемые признаки:

- всхожесть семян на 2-й, 4-й, 6-й, 8-й, 10-й, 12-й, 14-й дни, %;
- средняя масса проростков на 14-й день, мг;
- средняя длина корешка и гипокотили на 14-й день, мм.

Проросшими считаются семена, у которых длина корешка достигла 3 мм (приблизительно равна диаметру семени). Массу растений определяем на торсионных весах. Основным критерием оценки холодостойкости генотипов считается отношение значения изучаемых показателей на стрессовом фоне II к значению признаков на оптимальном фоне I (индекс Π/I).

Полученные в ходе эксперимента данные необходимо оформить в виде четырех таблиц с соответствующими названиями (Всхожесть семян, Средняя масса проростков, Средняя длина корня проростка, Средняя длина гипокотили проростка).

На основании полученных экспериментальных данных провести статистическую обработку методом двухфакторного дисперсионного анализа при помощи программы Microsoft Excel и сделать выводы (табл. 12).

Таблица 12

Макет таблицы для записи результатов

Фактор 1 (температура)	Фактор 2 (сорт)	Повторность				Среднее значение
		1	2	3	4	
25°C	Спринт					
	Гарант					
	Доходный					
12°C	Спринт					
	Гарант					
	Доходный					
НСР ₀₅ для фактора 1 =.....	НСР ₀₅ для фактора 2 =....					
НСР ₀₅ для взаимодействия факторов =....						

ТЕМА 10

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Проведение научного исследования можно условно разделить на четыре этапа: планирование, выполнение, обработка и обобщение полученных данных, подготовка публикации.

В общем случае планирование включает разработку гипотезы, которая подвергается экспериментальной проверке, и схемы для анализа результатов эксперимента.

Планирование начинают с выбора генеральной совокупности, которую предполагается изучить и к которой должны быть применимы результаты планируемого исследования. Затем важно определить точность, с которой требуется определить величину каждого измеряемого параметра, минимальную величину эффекта, который планируется обнаружить. При этом выбирают методы статистического анализа, которые будут использованы при анализе эмпирических данных, поскольку разным методам анализа соответствуют разные типы планов экспериментов.

Планирование эксперимента является частью научного исследования. Ошибки, допущенные при планировании, невозможно исправить в дальнейшем.

Рассмотрим подробнее процесс планирования агрономического опыта, который имеет определенную структуру, требующую последовательного выполнения.

1. Выбор темы и объекта исследования

Вопросов, которыми может заняться исследователь, чрезвычайно много, важно уметь выделить наиболее перспективные из них. Первым и основным источником тем для исследования являются прямые заказы производства, но их не нужно ждать, а самим выявлять потребности практики в тех или иных научных разработках, систематически интересоваться проблемами производст-

ва, заглянуть в его будущее, предвидеть возможные потребности. Это и позволяет экспериментатору наметить наиболее перспективные темы для научной работы.

Важно, чтобы тема исследований была определенной, а не расплывчатой, соответствовала сущности исследований и имеющейся материально-технической базе.

Объектом исследования являются живые организмы и их системы различных уровней организации.

2. Изучение научной литературы. Опыты невозможно заложить, пока не изучена и не проанализирована история и современное состояние вопроса. Один только критический анализ литературного материала может иногда дать частичное или полное решение вопроса. Для этого нужно изучить монографии, журнальные статьи, диссертации, научные отчеты и др. Чтобы быть на уровне современных требований, специалист должен систематически затрачивать более 25 % своего времени на ознакомление с научно-технической информацией, ибо знания, полученные ранее, не развиваемые и не дополняемые очень быстро обесцениваются (на 10 % в год). Как правило, это ведет к повторным изобретениям: 2/3 новых заявок на изобретения не регистрируются как новые. Знание литературы дает возможность создать рабочую гипотезу, разработать программу и методику исследований.

3. Постановка цели и задач. Первым результатом обработки значительного количества информации путем сравнения, обобщения, систематизации должна быть постановка цели и определение задач исследования.

Цель – одна большая (это конечный результат, на который ориентируется исследователь), задачи – более мелкие, это этапы, которые необходимо выполнить для достижения цели.

4. Рабочая гипотеза – это научное предположение о развитии явлений, на котором основывается объяснение ожидаемых в опыте результатов. Она строится на основании всех ранее установленных закономерностей изучаемого явления и тех новых идей (предположений), которые вносит исследователь в данную проблему. При построении рабочей гипотезы не нужно бояться новизны, оригинальности идей, надо пытаться идти новыми путями. Ведь даже ложная гипотеза приносит свою долю пользы:

в случае ее опровержения становится одним возможным объяснением меньше, ограничивается число возможных решений, сужается круг возможных действий, приближающий нас к единственному центру – истине. В этом состоит ценность всякой гипотезы.

5. Разработка программы исследований. Программа исследований – это проект намеченного хода эксперимента, в котором указывают точные границы опытной работы, схемы опытов, описывают условия осуществления опытов, приводят методику и основные элементы техники проведения экспериментов. Для чего:

5.1 Определяют объект исследования.

5.2 Определяют вид опыта (наблюдение, вегетационный, полевой и т. д.).

5.3 Определяют условия проведения опыта, время, необходимое для проведения наблюдений и учетов (метеорологические условия, время года и т. д.).

5.4 Разрабатывают схему и методику опыта.

5.5 Планируют наблюдения и учеты.

Наиболее трудный вопрос, который приходится решать исследователю при составлении программы, – это схемы будущих опытов. При этом важно учесть два основных момента: во-первых, то, что варианты в опыте могут различаться качественно: опыты по улучшению и сравнительной оценке сортов и культур, способов посева и обработки почвы, предшественников, различных форм удобрений, пестицидов и т. д.; во-вторых, нужно четко и логично определить количественные градации факторов: дозы удобрений, нормы полива, глубину обработки почвы и т. д.

В схемах, где варианты различаются качественно, важно выдержать принцип единственного различия, правильно выбрать контрольный вариант (стандарт) и определить сопутствующие, не учитываемые в опыте оптимальные агротехнические условия (фон).

В опытах с количественной градацией признаков, кроме перечисленных выше требований, необходимо правильно установить единицу варьирования для доз изучаемого фактора (шаг) и число градаций (доз), чтобы по результатам эксперимента можно было построить кривую отклика, которая будет характеризовать зависимость изучаемой величины от градаций фактора.

Целесообразно иметь 5–8 уровней (доз, градаций) фактора, чтобы эксперимент охватил лимитирующую, стационарную и ингибирующую область кривой. Успешное решение поставленной перед экспериментатором задачи зависит от удачного выбора основного уровня (центра эксперимента) и единицы (шага) варьирования изучаемого фактора. Если неправильно установлен центр эксперимента и приняты недостаточные различия в дозах, то результаты эксперимента могут охватить только лимитирующую или стационарную область кривой и, следовательно, на основании этих данных нельзя установить оптимальный уровень изучаемого в опыте фактора. С другой стороны, если шаг выбран слишком большим, то можно «проскочить» точку максимума (минимума).

При постановке многофакторных опытов можно установить не только действие изучаемых факторов, но и величину их взаимодействия при совместном применении, однако, для этого схема должна предусматривать испытание всех возможных сочетаний намеченных для изучения факторов и их градаций. При этом может изучаться действие и взаимодействие как количественных, так и качественных факторов.

При разработке методики опыта необходимо установить наиболее рациональное направление, форму, площадь делянки, повторность, систему расположения повторений, вариантов и делянок.

Метод размещения вариантов должен обеспечивать проведение опыта с минимальными ошибками независимо от вероятных случайностей (порча некоторых растений, их гибель от болезней и вредителей и т. д.), а также обеспечивать гибкость опыта, т. е. возможность введения новых вариантов вместо старых, уже не представляющих интереса.

Варианты в опытах можно размещать стандартным, систематическим методом, методами рендомизированных повторений, латинского квадрата, латинского прямоугольника, полной рендомизации, расщепленных делянок и т. д. в зависимости от варьирования плодородия почвы, других условий выращивания, урожая растений, показателей их роста.

Стандартный метод – размещение контроля (стандарта) рядом с каждым опытным вариантом.

Случайный метод – размещение вариантов в опыте в определенной последовательности, с учетом закономерности.

Рендомизированные повторения – случайное размещение всех вариантов опыта в пределах каждого повторения. При этом в каждом повторении каждый вариант встречается только один раз.

Рендомизированный латинский квадрат. При этом размещении в каждом ряду и в каждом столбце имеется полный набор вариантов и ни один из них не повторяется. Благодаря такому размещению при различных окраинах опыта – продольная или торцовая стены, центральная дорога и т. д. – все варианты будут находиться в одинаковых условиях и средние арифметические по вариантам будут объективными.

Рендомизированный латинский прямоугольник – это рендомизированное размещение вариантов в пределах каждого ряда и по отдельным блокам. Такое размещение позволяет уменьшить влияние неизучаемых факторов, действующих в трех направлениях: взаимно перпендикулярных и по диагонали.

Метод полной рендомизации применяют: 1) когда индивидуальное варьирование роста и урожая растений превышает варьирование плодородия почвы, как это бывает у многолетних растений; 2) в опытах с небольшим числом вариантов и небольшой площадью делянок, т. е. при ограниченной площади участка; 3) когда коэффициент варьирования по повторностям сведен к нулю, а сумма квадратов дисперсии повторения минимальна. Для размещения вариантов методом полной рендомизации пользуются таблицей случайных чисел.

Метод рендомизированных расщепленных делянок – это рендомизированное размещение вариантов факторов первого порядка на основных делянках, а факторов второго и третьего порядков на субделянках, на которые расщепляют основные делянки. Такой метод размещения применяют: 1) в многофакторных опытах; 2) если в опыте внимание акцентируют на взаимодействии факторов, а не на каждом из них отдельно, например взаимодействии глубины обработки и влажности грунта, удобрения и полива; 3) если в опыт надо ввести группу новых дополнительных вариантов; 4) если надо увеличить точность исследований для каких-то определенных более важных факторов, несколько снизив

ее для второстепенных. Расщепление делянок лучше проводить в таком порядке: делянки первого порядка – гибриды и сорта; делянки второго порядка – обработка почвы; делянки третьего порядка – удобрение или опрыскивание пестицидами.

При пространственном размещении экспериментальных единиц в условиях активного эксперимента важно учитывать следующее:

1. При проведении лабораторных экспериментов экспериментальные единицы, как правило, более сходны друг с другом, чем в полевых экспериментах. Однако лабораторные условия сами по себе создают неоднородную среду, вынуждая исследователя принимать меры для уменьшения риска воздействия неучтенных факторов и случайных (неконтролируемых) событий на результаты экспериментов.

2. В некоторых случаях во время лабораторного эксперимента, помимо исходной рендомизации целесообразно время от времени изменять расположение экспериментальных единиц в пространстве. Случайная перестановка обеспечивает выравнивание средних условий, в которых в течение опыта находится каждая экспериментальная единица. Соответственно, уменьшается случайная изменчивость между экспериментальными единицами, что облегчает обнаружение исследуемого эффекта.

3. Существуют особенности при выборе экспериментальных единиц в условиях пассивного эксперимента, например, при описании последствий воздействия промышленного загрязнения на различные параметры экосистем. Необходимо сочетать два подхода: первый – абсолютно случайный способ закладки пробных площадей; второй – тщательный подбор типичного места. На первом этапе следует сформировать набор потенциальных пробных площадей, пригодных для характеристики исследуемого варианта биотопа. На втором этапе – из большого набора потенциально подходящих участков, выбрать те, которые составят итоговую выборку.

4. Полевые опыты сопровождаются однократными или периодическими количественными и качественными наблюдениями за объектами исследований и состоянием окружающей среды. Основное требование к наблюдениям – целенаправленность, не-

обходимость для понимания действия изучаемого фактора. В связи с этим экспериментатор должен определить:

- какие наблюдения, анализы и учеты включить в программу исследований;
- в какие сроки проводить наблюдения и учеты;
- определить оптимальный объем выборок;
- обеспечить представительность отбираемых выборок (проб).

6. Составление рабочего плана. Планирование эксперимента завершается составлением рабочего плана исследований, в котором достаточно полно, но лаконично описывают все этапы опытной работы, указывают количество опытов, затраты времени и средств для достижения основной цели исследований.

При планировании эксперимента оговаривают также и способы статистической обработки данных (однофакторный, двухфакторный дисперсионный анализ, корреляционно-регрессионный анализ и т. д.), устанавливают необходимый уровень точности (95 % или 99 %).

Предвидеть все детали будущего исследования не так просто, поэтому в процессе работы программу и рабочий план дополняют и редактируют.

Задание. Разработать план эксперимента, выбрав одну из предложенных тем (Приложение 10).

ТЕМА 11

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ БАЗЫ ДАННЫХ

Базой данных (БД) называется организованная в соответствии с определенными правилами и поддерживаемая в памяти компьютера совокупность сведений об объектах, процессах, событиях или явлениях, относящихся к некоторой предметной области, теме или задаче. Она организована таким образом, чтобы обеспечить информационные потребности пользователей и удобное хранение этой совокупности данных.

Реляционная база данных представляет собой множество взаимосвязанных таблиц, каждая из которых содержит информацию об объектах определенного вида. Каждая строка таблицы содержит данные об одном объекте (например, автомобиле, компьютере, клиенте), а столбцы таблицы содержат различные характеристики этих объектов – атрибуты (например, номер двигателя, марка процессора, телефоны фирм или клиентов).

Для работы с данными используются системы управления базами данных (СУБД). Основные функции СУБД:

- определение данных (описание структуры баз данных);
- обработка данных;
- управление данными.

Разработка структуры БД – важнейшая задача, решаемая при проектировании БД. Структура БД (набор, форма и связи ее таблиц) – это одно из основных проектных решений при создании приложений с использованием БД. Созданная разработчиком структура БД описывается на языке определения данных СУБД.

Например, информационно-поисковая система по экологии антарктического бентоса может состоять из 4 основных блоков: таксономического (названия и номенклатура таксонов), географического (точки находок с координатами станций, сборов), эко-

логического (данные по биомассе; глубине, температуре, солености, кислороду; дате (сезону) сбора, состоянию объекта, жизненной стадии и т.п.) и библиографического (литературные данные).

Проектирование экологической базы данных для оценки и прогнозирования состояния земельного фонда предполагает разработку соответствующих предметных областей. Допустим, что на динамику развития склоновой эрозии оказывает влияние ряд факторов: рельеф, растительность и почва.

В соответствии с теорией проектирования баз данных на первом этапе необходимо провести анализ исследуемой предметной области и ограничить ее, выделив основные объекты, о которых будет храниться информация в разрабатываемой базе данных. Перечень всех данных можно классифицировать по принадлежности той или иной предметной области следующим образом:

почва: тип почвы, мощность гумусового горизонта, содержание физической глины в почве, негативные свойства почв, предельно допустимые концентрации химических веществ в почве и др.;

биота: тип культуры, название культуры, данные о корневой системе культуры;

рельеф: код участка-полигона, информация о площади и периметре, характеризующая геометрию конкретного участка, пары координат x , y – регистрационных точек каждого участка, крутизна уклона, длина склона.

Задание. Разработайте предметную область одной из экологических баз данных:

1. Участок для размещения полигона твердых бытовых отходов.
2. Животноводческий комплекс, не представляющий угрозы для экологического равновесия территории.
3. Пруд-охладитель для атомной электростанции.
4. Виды, занесенные в Красную книгу Республики Беларусь.
5. Устойчиво развивающийся сельский населенный пункт.

ТЕМА 12

КЛАСТЕРНЫЙ АНАЛИЗ В ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Кластерный анализ – совокупность алгоритмов обработки данных, предназначенных для распределения исследуемых объектов на относительно однородные группы (кластеры).

В области экологии широко применяется для выделения пространственно однородных групп организмов, сообществ и т. п. Реже методы кластерного анализа применяются для исследования сообществ во времени.

Иногда биологи ставят цель разбить животных на различные виды, чтобы содержательно описать различия между ними. В соответствии с современной системой, принятой в биологии, человек принадлежит к приматам, млекопитающим, амниотам, позвоночным и животным. В данной классификации, чем выше уровень агрегации, тем меньше сходства между членами в соответствующей группе. Человек имеет больше сходства с другими приматами (т. е. с обезьянами), чем с «отдаленными» членами класса млекопитающих (например, собаками) и т. д.

Проведение кластерного анализа может быть реализовано в программе Statistica несколькими методами: Иерархическая классификация, Двухходовое объединение и Метод K средних.

Последний метод используется, если вы уже имеете гипотезы относительно числа кластеров по наблюдениям или по переменным. Вы можете «сказать» системе образовать ровно три кластера так, чтобы они были настолько различны, насколько это возможно. Это именно тот тип задач, которые решает алгоритм метода K средних. В общем случае метод K средних строит ровно k различных кластеров, расположенных на возможно больших расстояниях друг от друга.

Исходными данными для анализа могут быть первичные данные (объекты и их параметры) или матрица расстояний между

объектами. В основе процедур кластерного анализа лежит группировка сходных между собой объектов в некоторые группы (или кластеры). Именно поэтому понятие сходства имеет для него первостепенное значение. Несмотря на кажущуюся простоту, понятие сходства и особенно процедуры, используемые при измерении сходства, не так просты. Количественное оценивание сходства отталкивается от понятия метрики или расстояния (*distance*) между объектами. Интуитивно понятно, что чем меньше расстояние между объектами, тем больше сходство между ними.

Одной из мер сходства является Евклидово расстояние. Например, если объект описывается двумя параметрами, то он может быть изображен точкой на плоскости, а расстояние между объектами – это расстояние между точками, вычисленное по теореме Пифагора. Нужно возвести в квадрат расстояние по каждой координате, суммировать их и из полученной суммы извлечь квадратный корень.

$$\text{Расстояние } d(x, y) = \sqrt{(x_i - y_i)}$$

Рассмотрим применение кластерного анализа в экологических исследованиях. Метод позволяет сгруппировать водные объекты в кластеры с разным уровнем загрязнения. Исходные данные приведены в таблице 13.

Таблица 13

**Среднегодовая концентрация вещества в реке
или на значительном ее протяжении в 2009 г. (в долях ПДК)**

Речной бассейн	Фосфаты (по Р)	Азот аммонийный	Азот нитритный
р. Западная Двина	1,2	1,4	1,7
р. Неман	1,2	1,6	0,9
р. Западный Буг	3,5	1,9	1,9
р. Днепр	4,4	2,8	3,3
р. Березина	1,3	2,3	1,2
р. Свислочь (ниже Минска)	11,0	6,1	5,5
р. Сож	1,1	1,1	0,5
р. Припять	1,2	1,5	1,2

В результате обработки данных методом полной связи (*Complete linkage*) получена дендрограмма (рис. 3), на которой объек-

ты исследования разделены на несколько групп. Наиболее тесным сходством по уровню загрязнения характеризуются Западная Двина, Неман, Припять, Березина, Сож. Во вторую группу объединены Западный Буг и Днепр. Концентрации загрязнителей в Свислочи наиболее сильно отличаются от других объектов.

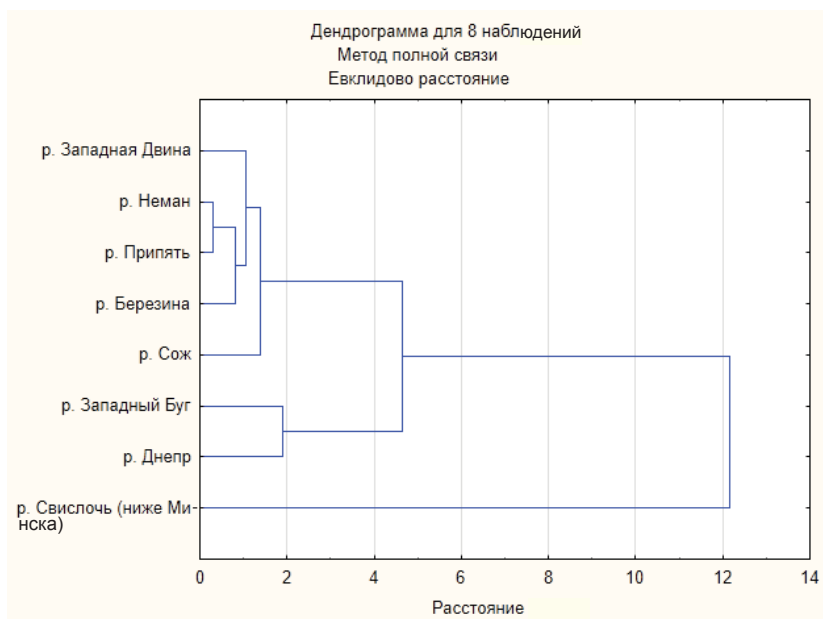


Рис. 3. Дендрограмма результатов кластерного анализа

Так как в имеющейся структуре связей возможно выделение трех групп, то продолжение обработки данных можно провести при помощи метода К средних (рис. 4). Это итеративный метод, который работает непосредственно с объектами, а не с матрицей сходства. Он отличается тем, что позволяет заранее задать число кластеров. Это число определяет сам пользователь, исходя из имеющейся задачи и предсказаний теории. Метод К средних разобьет все объекты на заданное количество кластеров, которые будут максимально различаться между собой.

В этом методе объект относится к тому классу, расстояние до которого минимально. Расстояние понимается как Евклидово расстояние, то есть объекты рассматриваются как точки Евклидо-

ва пространства. Вначале задается некоторое разбиение данных на кластеры (число кластеров определяется пользователем) и вычисляются центры тяжести кластеров. Затем происходит перемещение каждой точки в ближайшей к ней кластер. Затем снова вычисляются центры тяжести новых кластеров и процесс повторяется, пока не будет найдена стабильная конфигурация (то есть кластеры перестанут изменяться) или число итераций не превысит заданное пользователем.

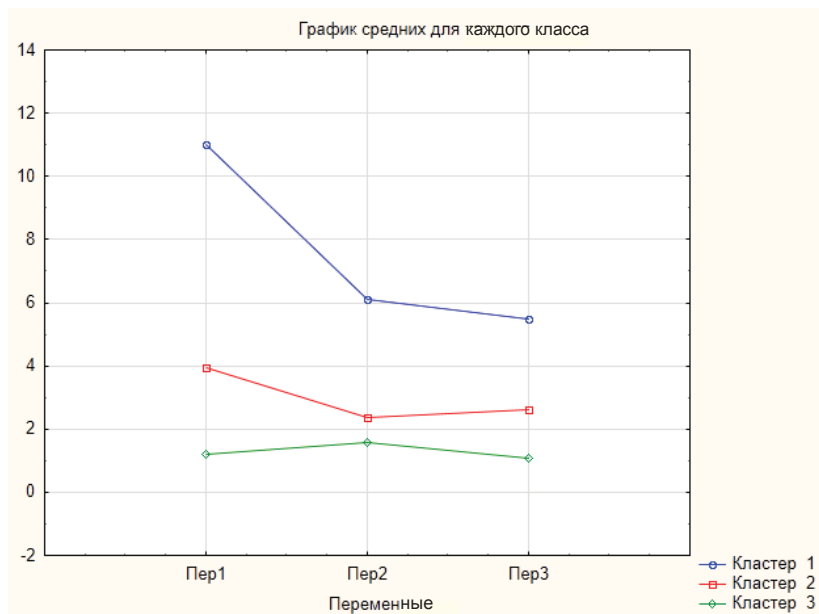


Рис. 4. Результаты кластеризации методом К средних

В кластер 1 входит река Свислочь (№ 6), в кластер 2 входят реки Западный Буг и Днепр (№ 3 и 4), к третьему кластеру относятся водные объекты с номерами 1, 2, 5, 7 и 8. От первого к третьему кластеру уменьшается уровень загрязнения рек.

Задание. Выполнить кластерный анализ данных (Приложение 8) в программе Statistica.

ТЕМА 13

МОДЕЛИРОВАНИЕ УРОЖАЙНОСТИ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ КУЛЬТУР

В основе моделирования урожайности сельскохозяйственных культур лежат принципы оптимизации комплекса факторов среды для получения заданного высокого урожая. При этом предполагается, что все технологические приемы будут качественно выполнены в оптимальные агротехнические сроки.

Программирование урожая имеет свою специальную шкалу соответствующих уровней урожайности, включая фактическую урожайность (в производственных условиях), действительно возможную, климатически обеспеченную, потенциальную и программированную урожайность. Как и любая шкала, шкала уровней урожайности имеет начальную точку отсчета. За начальную точку отсчета в шкале урожайности принимается значение потенциальной урожайности, так как уровень урожайности, достигаемый в производственных условиях, имеет значительные колебания, а нулевое значение не имеет биологического смысла.

Потенциальный урожай (ПУ) – это урожай, который может быть получен на высокоплодородных почвах при оптимальной агротехнике в идеальных метеорологических условиях. Он зависит от прихода ФАР, агротехнического фона, биологических свойств культуры и сорта.

Климатически обеспеченная урожайность (КУ) – это та максимальная урожайность, которая может быть достигнута в реальных метеорологических условиях на высокоплодородных почвах (при оптимальной агротехнике).

Определение потенциальной урожайности.

Повышение урожайности благодаря увеличению продуктивности фотосинтеза растений в посевах и, в частности, повышение чистой продуктивности фотосинтеза таит в себе большие

возможности, так как 90–95 % биомассы растений составляют органические вещества, образуемые в процессе фотосинтеза.

Наиболее распространенный способ определения величины потенциальной урожайности заключается в ее вычислении через значение коэффициента использования ФАР (фотосинтетически активной радиации). Расчетная формула имеет вид

$$\text{ПУ} = (Q_{\text{ФАР}} \times K_{\text{ФАР}}) / (q \times 10^4),$$

где ПУ – величина потенциальной урожайности основной и побочной продукции по сухому веществу, ц/га;

q – удельная калорийность сухой биомассы, ккал/кг;

$Q_{\text{ФАР}}$ – суммарное поступление ФАР на поверхность почвы за период вегетации, ккал/га;

$K_{\text{ФАР}}$ – коэффициент использования ФАР посевом, выбираемый на границе своих максимально возможных значений, %.

Пример 1. Расчёт потенциальной урожайности кукурузы по приходу ФАР:

Дата посева – 20 мая (20.05). Дата уборки – 25 сентября (25.09).

Месячные суммы ФАР за вегетационный период (ккал/см²).

Месяц	апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь	октябрь
Сумма ФАР	6,2	6,9	7,1	7,9	6,3	5,2	3,9

$$Q_{\text{фар}} = 1/3 \times 6,9 + 7,1 + 7,9 + 6,3 + 2/3 \times 5,2 = 2,61 \times 10^9 \text{ ккал/га.}$$

$$\text{Так как } 1 \text{ га} = 100\,000\,000 \text{ см}^2 = 1 \times 10^8 \text{ см}^2,$$

$$\text{ПУ} = \frac{2,61 \times 10^9 \times 1,2}{10^4 \times 4,1 \times 10^3} \approx 76 \text{ ц/га.}$$

Удельная калорийность сухой биомассы, у кукурузы 4100 или $4,1 \times 10^3$ ккал/кг.

В зависимости от качества посевов значения коэффициента использования ФАР ($K_{\text{фар}}$) могут изменяться в следующих пределах: обычно наблюдаемые – 0,5–1,5 %; хорошие – 1,5–3,0 %; рекордные – 3–5 %; теоретически возможные – до 8 % (по А. А. Ничипоровичу).

Урожайность сельскохозяйственных культур в решающей степени зависит от режима влагообеспеченности растений в те-

чение вегетации. Для реализации потенциальной продуктивности растений влажность почвы в течение вегетации должна быть в диапазоне от 60 % до 100 % предельной полевой влагоемкости.

Показатель климатически обеспеченного урожая по влагообеспеченности определяют по формуле

$$КОУ_w = \frac{(W_{\text{м.с.}} + O_{\text{в.п.}} \times K_o)}{K_b \times C \times (100 - B_{\text{ст}})} \times 100,$$

где $КОУ_w$ – климатически обеспеченная урожайность основной продукции при стандартной влажности, т/га;

$W_{\text{м.с.}}$ – влажность метрового слоя почвы при возобновлении весенней вегетации или перед весенним посевом, мм;

$O_{\text{в.п.}}$ – сумма осадков за вегетационный период, мм (апрель-август);

K_o – коэффициент полезности осадков;

K_b – коэффициент водопотребления, мм×га/ц или м³/т;

C – сумма частей основной и побочной продукции;

$B_{\text{ст}}$ – стандартная влажность.

Задание. Используя данные в таблицах 14 и 15, составьте модель расчета климатически обеспеченной урожайности в зависимости от обеспеченности влагой.

Таблица 14

Уровень обеспечения поля влагой

Вариант	Влажность метрового слоя почвы, мм	Сумма осадков за вегетационный период, мм	Коэффициент полезности осадков	Коэффициент водопотребления	Культура
1	244	220	0,73	425	Лён долгунец
2	218	245	0,70	450	Кукуруза на силос
3	197	232	0,65	525	Пшеница
4	220	273	0,90	325	Рожь
5	182	258	0,85	115	Мн. травы на сено
6	225	263	0,75	600	Горох
7	244	232	0,70	110	Люпин
8	122	262	0,90	90	Рапс озимый
9	198	241	0,65	435	Картофель
10	136	247	0,80	500	Сахарная свёкла
11	244	236	0,65	590	Гречиха
12	157	228	0,75	200	Просо

Таблица 15

Технологические показатели сельскохозяйственных культур

Культура	Стандартная влажность, %	Сумма частей основной и побочной продукции
Лён долгунец	12	13,0
Кукуруза на силос	80	1,0
Пшеница	14	2,3
Рожь	14	3,0
Мн. травы на сено	16	1,0
Горох	13	3,0
Люпин	13	4,0
Рапс озимый	12	4,0
Картофель	75	1,8
Сахарная свёкла	80	1,5
Гречиха	14	4,0
Просо	14	3,2

ТЕМА 14

ОЦЕНКА ВИДОВОГО СХОДСТВА СООБЩЕСТВ

Для оценки видового сходства биоценозов предложены индексы, которые определяют взаимную упорядоченность объектов (проб, описаний, видовых списков биоценозов) друг относительно друга.

Большинство выражений для индексов сходства основаны на общих положениях теории множеств, которые могут быть интерпретированы в виде диаграммы Венна (рис. 5). При использовании конкретных выражений для коэффициентов подобия в формулы могут подставляться значения подмножеств a , b , c и d .

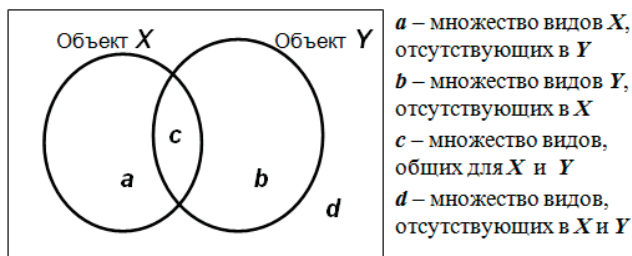


Рис 5. Диаграмма интерпретации составляющих подмножеств признакового пространства видов

Первая попытка количественного выражения степени сходства между сообществами была реализована в 1901 г. швейцарским исследователем П. Жаккаром (Р. Jaccard). Его коэффициент флористического сходства до сих пор широко используется в геоботанике, но применим и в других областях

$$K1 = c / (a + b - c).$$

Пределы этого коэффициента от 0 до 1, причем $K = 1$ означает полное сходство сообществ (абсолютное совпадение списков), а $K = 0$ означает, что они не имеют ни одного общего вида.

Гидробиологи чаще применяют формулу коэффициента общности видового состава Т. Сьёренсена

$$K2 = 2 c / (a + b).$$

Существуют и другие подобные формулы коэффициентов, оперирующих с мощностями подмножеств:

Роджерса и Танимото (он же, Нордхагена): $K3 = c / (a + b + c)$;

Маунтфорда: $K4 = 2 c / (2ab - ac - bc)$;

Рао-Рассела: $K5 = c / (a + b + c + d)$;

Дейка: $K6 = 2 c / (a + b + 2 c)$;

Кульчинского: $K7 = (a + b) / 2ab$;

Экмана: $K8 = (a + b) / c$;

процент несогласия: $K9 = (a + b) / (a + b + c)$.

Мониторинг окружающей среды с учетом видового состава и соотношением числа видов позволяет на конкретных примерах определить степень влияния антропогенных факторов на природные сообщества и основные тенденции развития биоценозов. Влияние деятельности человека практически всегда приводит к уменьшению видового разнообразия.

Например, обследуется территория городского парка. В смешанном лесу (контроль – ненарушенное сообщество) встречаются: крапивник, зарянка, пищуха, пеночка-теньковка, мухоловка, королек, славка-черноголовка, иволга, зяблик, черный дрозд, дрозд-рябинник, певчий дрозд, дятел, рябчик. Всего 14 видов. На территории парка были отмечены: славка садовая, зяблик, дрозд-рябинник, певчий дрозд, дятел, овсянка обыкновенная, скворец, большая синица. Всего 8 видов. Число общих для обоих участков видов – 4 (зяблик, дрозд-рябинник, певчий дрозд, дятел). Отсюда коэффициент Жаккара

$$K1 = 4 / ((14 + 8) - 4) = 4/18 \approx 0,22.$$

Очевидно, что соответствие очень незначительно, следовательно, урбанизация территории привела к значительному уменьшению видового разнообразия. Причины: выбросы в атмосферу газо-дымовых загрязнений промышленными предприятиями, ис-

чезновение мест для гнездований, нарушение кормовых участков, шумовое загрязнение, частое посещение территории людьми и т. д.

Оборудование: бинокль, определитель птиц.

Задания:

1. Выберите участок леса (парка) вблизи населенного пункта. Определите, какому типичному биоценозу он наиболее соответствует. Запишите число видов, обитающих в нем (контроль).

2. Составьте перечень видов птиц на другом участке (опыт).

3. Рассчитайте коэффициенты видового сходства, установите степень видовой общности сообществ. Сделайте возможные выводы о причинах изменения видового разнообразия.

4. Сравните полученные данные видового разнообразия птиц с контрольными (табл. 16).

Таблица 16

Примерный видовой состав лесных птиц

Местообитание	Примерное количество видов в ненарушенном сообществе
Старый смешанный лес	14-18
Еловый лес	10-12
Лиственный лес	20-25
Опушка, вырубка, кустарник	13-15
Сосновый лес	12-13

Дополнительная информация:

1) старый смешанный лес (ель, береза, осина): крапивник, зарянка, пищуха, мухоловка малая, пеночка-теньковка, сойка, ворон, ястреб-тетеревятник, рябчик, дятел малый пестрый, дятел большой пестрый, желна, королек, славка-черноголовка, иволга, зяблик, черный дрозд, дрозд-рябинник;

2) еловый лес: ворон, сойка, клест, чиж, пищуха, королек, пеночка-теньковка, рябчик, сова-сплюшка, ястреб-тетеревятник, ястреб-перепелятник;

3) лиственный лес: иволга, зяблик, поползень, большая синица, славка садовая, славка-черноголовка, пеночка-трещотка, пеночка-весничка, пеночка-пересмешка, дрозд черный, горихвостка, мухоловка-пеструшка, мухоловка серая, мухоловка малая, за-

рянка, дрозд певчий, соловей, дятлы (2–3 вида), иволга, скворец, щегол, коноплянка, горихвостка;

4) сосновый лес: зяблик, лесной конек, синица хохлатая, гаичка-пухляк, горихвостка, мухоловка-пеструшка, мухоловка серая, дрозд-деряба, дрозд певчий, козодой, дятлы (2 вида), сойка;

5) опушка, вырубка, кустарник: овсянка, конек лесной, крапивник, славка садовая, славка серая, славка-мельничек, чечевица, пеночка-весничка, горихвостка, сорокопут-жулан, соловей.

ТЕМА 15

МОДЕЛИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО И ЛОГИСТИЧЕСКОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИИ

Рост популяции во времени зависит от ряда факторов: исходной численности, способности к размножению (скорость роста), наличия или отсутствия лимитирующих рост факторов среды. Различают два типа роста популяции: *экспоненциальный* – в оптимальных условиях среды и *логистический* – в реальных условиях при проявлении лимитирующих факторов (рис. 6).

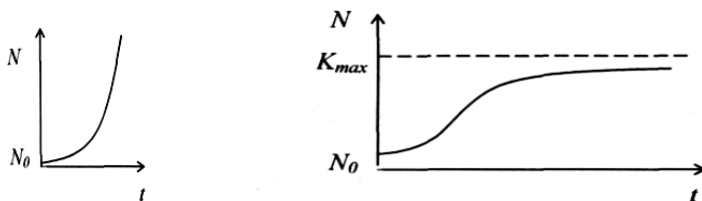


Рис. 6. Графическое изображение экспоненциального и логистического роста

Экспоненциальный рост можно описать уравнением

$$N_t = N_0 \times e^{rt},$$

где N_t – численность популяции в момент времени t ; N_0 – численность популяции в начальный момент t_0 ; e – основание натурального логарифма ($\approx 2,72$); r – биотический потенциал, характеризующий скорость роста популяции.

В дифференциальной форме это уравнение можно записать

$$\frac{dN}{dt} = rN,$$

где dN – прирост численности популяции за отрезок времени dt .

Как правило, экспоненциальный рост численности возможен непродолжительное время. В реальных условиях ресурсы среды ограничены, при увеличении численности и плотности популяции усиливается конкуренция за ресурсы и происходит замедление роста. Численность популяции приближается к предельно возможной для этих условий величине емкости среды K . *Емкость среды* – способность природного окружения обеспечивать нормальную жизнедеятельность определенному числу организмов без заметного нарушения самого окружения (Реймерс, 1990). Логистический тип роста может быть описан уравнениями

$$N_t = N_0 e^{rt\left(\frac{K-N_0}{K}\right)}$$

или

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(\frac{K - N}{K} \right).$$

Из уравнений очевидно, что при приближении N к K выражение $(K - N) / K$ стремится к 0 и прирост популяции не наблюдается.

Задание. Построить модели роста численности популяции в оптимальных и реальных условиях за период времени $t = 100$ лет, используя предложенные данные таблицы 17. Шаг модели $\Delta t = 1$ год, емкость среды обитания $K = 1$.

Таблица 17

Исходные данные

Вариант	Показатели			
	r	N_0	N_t (эксп.)	N_t (лог.)
1	0,001	0,1	?	?
2	0,0015	0,2		
3	0,002	0,3		
4	0,0025	0,4		
5	0,003	0,5		
6	0,0035	0,6		
7	0,004	0,7		
8	0,0045	0,8		
9	0,005	0,9		
10	0,0055	0,99		

ТЕМА 16

МОДЕЛЬ ПИЩЕВОЙ ЦЕПИ ИЗ ДВУХ ЗВЕНЬЕВ

Основная функция биоценозов – поддержание круговорота веществ в биосфере – базируется на пищевых взаимоотношениях видов. Именно в пищевых цепях органические вещества, синтезированные автотрофными организмами, претерпевают многократные химические превращения и в конечном итоге возвращаются в среду в виде неорганических продуктов жизнедеятельности, вновь вовлекаемых в круговорот. Поэтому каждый биоценоз обязательно включает представителей всех трех функциональных блоков – продуцентов, консументов и редуцентов. Функционально равнозначные виды распределяются на несколько групп в зависимости от их места в общей системе круговорота веществ и образуют определенный трофический уровень.

Задание. Построить модель роста численности популяций, соответствующих двум последующим трофическим уровням, за период времени $t = 100$ лет, шаг модели $\Delta t = 1$ год, используя предложенные математические зависимости и данные таблицы 18:

$$\begin{aligned} N_1 &= N_{01} \times r_1 \times (1 - N_{01}) \times (1 - N_{02}); \\ N_2 &= N_{02} \times r_2 \times (1 - N_{02}) \times r_1, \end{aligned}$$

где N_1 , N_2 – численность популяции первого и второго видов в момент времени t ; N_{01} , N_{02} – численность популяции первого и второго видов в начальный момент t_0 ; r_1 , r_2 – биотический потенциал, характеризующий скорость роста популяции первого и второго видов, соответственно.

Таблица 18

Исходные данные

Вариант	Показатели					
	r_1	r_2	N_{01}	N_{02}	N_1	N_2
1	4,2	4,3	0,6	0,3	?	?
2	4,5	4,4	0,7	0,4		
3	4,8	4,7	0,8	0,5		
4	5,0	4,9	0,9	0,6		
5	5,2	5,2	0,2	0,4		
6	5,6	5,3	0,3	0,9		
7	5,9	5,5	0,4	0,8		
8	6,0	5,6	0,5	0,7		
9	6,2	5,7	0,6	0,6		
10	6,7	5,9	0,7	0,5		

ТЕМА 17

МОДЕЛЬ ПИЩЕВОЙ ЦЕПИ ИЗ ТРЕХ ЗВЕНЬЕВ

В конкретных биоценозах продуценты, консументы и редуценты представлены популяциями многих видов, состав которых специфичен для каждого отдельного сообщества. Группа видов-продуцентов образует уровень первичной продукции, на котором утилизируется внешняя энергия и создается органическое вещество. Накопленная в виде биомассы организмов-автотрофов первичная продукция служит источником питания для представителей следующих трофических уровней – консументов, которые образуют несколько трофических уровней (обычно не более 3–4).

Задание. Построить модель роста численности популяций продуцентов, консументов первого и второго порядков (первого, второго и третьего видов) за период времени 100 лет, используя предложенные математические зависимости и данные таблицы 19:

$$\begin{aligned}N_1 &= N_{01} \times r_1 \times (1 - N_{01}) \times (1 - N_{02}); \\N_2 &= N_{02} \times r_2 \times (1 - N_{02}) \times (1 - N_{03}) \times N_{01}, \\N_3 &= N_{03} \times r_3 \times (1 - N_{03}) \times N_{02},\end{aligned}$$

где N_1, N_2, N_3 – численность популяции первого, второго и третьего видов в момент времени t ; N_{01}, N_{02}, N_{03} – численность популяции первого, второго и третьего видов в начальный момент t_0 ; r_1, r_2, r_3 – биотический потенциал, характеризующий скорость роста популяции первого, второго и третьего видов, соответственно.

Таблица 19

Исходные данные

Вариант	Показатели								
	N_{01}	N_{02}	N_{03}	r_1	r_2	r_3	N_1	N_2	N_3
1	0,6	0,3	0,7	4,2	4,3	3,5	?	?	?
2	0,5	0,2	0,6	4,5	4,4	3,6			
3	0,4	0,25	0,5	4,8	4,7	3,7			
4	0,3	0,35	0,4	5,0	4,9	3,8			
5	0,7	0,36	0,3	5,2	5,2	3,9			
6	0,8	0,4	0,4	5,6	5,3	4,0			
7	0,9	0,45	0,5	5,9	5,5	4,1			
8	0,55	0,48	0,4	6,0	5,6	4,2			
9	0,65	0,46	0,6	6,2	5,7	4,3			
10	0,75	0,8	0,8	6,7	5,9	4,4			

ТЕМА 18

ИМИТАЦИОННАЯ КАРТОЧНАЯ ИГРА «ОСТРОВ»

Часто Землю сравнивают с островом жизни в бескрайних просторах Вселенной. Для изучения законов, по которым живет природа нашей планеты, создана модель жизни маленького острова.

Правила игры. Комплект для игрового моделирования простейшей наземной экологической системы из четырех трофических уровней состоит из 36 карт разного достоинства. Одна единица соответствует одному организму (рис. 7). Играть лучше втроем или вчетвером. Карты раздаются поровну. Задача игроков – первыми «заселить» остров своими картами. Проигрывает последний, оставшийся с любыми картами на руках. Один круг игры равен одному году.

За один ход можно выкладывать карты с организмами только одного уровня в любом количестве, но не больше того, что уже на нем есть (если есть), так как скорость размножения любого вида ограничена. Первые организмы на каждом уровне могут появиться на острове (семена занесены ветром) в любом количестве. Для существования одной особи необходимо иметь на предыдущем уровне не меньше 50 % ее кормовой базы. В завершенной пищевой пирамиде (схема 1) кормовая база равна 100 %. Мыши и кролики питаются растениями – для каждого животного нужно 5 травинок. Лиса питается мышами и кроликами – каждой лисе нужно по 3 грызуна. Ласка – узкоспециализированный хищник – питается только мышами – каждой ласке нужно по 3 мыши. Беркут в основном охотится на лис и ласок – ему нужно по 2 хищника, однако при избытке мышей и кроликов (свободных от «пресса» лис и ласок) поедает и их – беркуту нужно 5 травоядных. Для существования беркута достаточно иметь также одного хищника и трех травоядных, свободных от «пресса» лис и ласок.

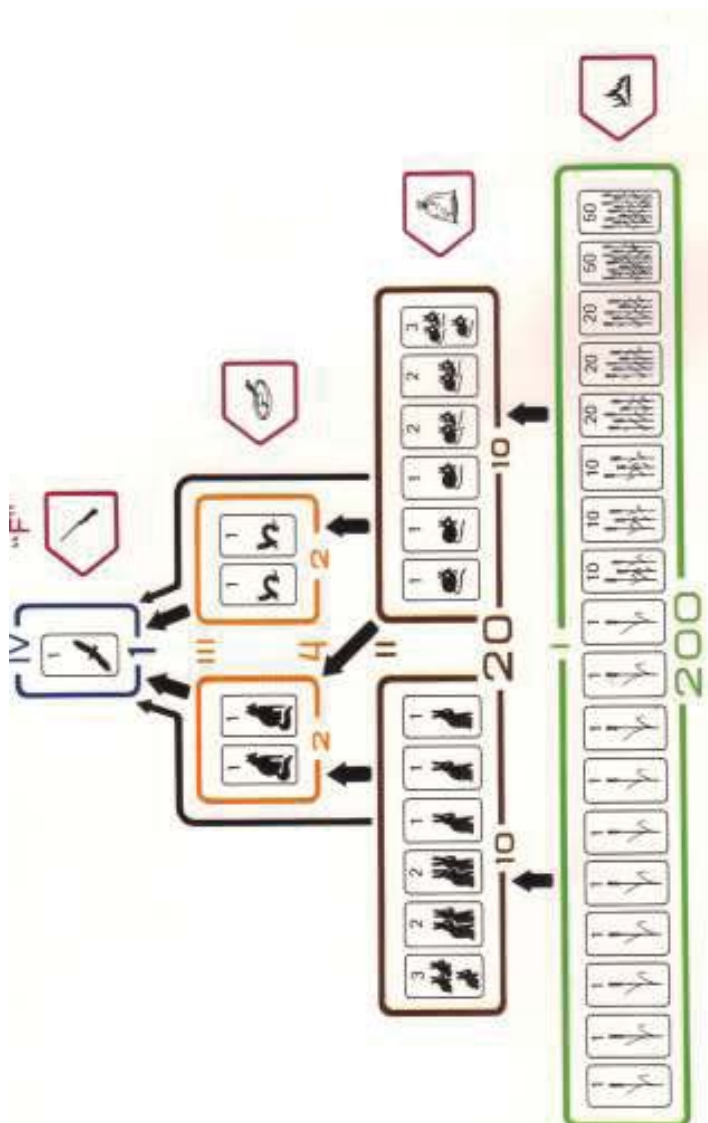


Рис. 7. Экологическая пирамида экологической системы острова

Карта «*P*» (*P* – фактор воздействия человека) может быть введена в любой момент игры, но только один раз. Выкладывая по своему усмотрению эту карту на тот или иной уровень, игрок вводит антропогенный фактор: пожар, борьбу с грызунами, охоту. Следующий игрок с этого уровня забирает половину имеющихся на нем организмов (если их число не кратно двум, то округлять в сторону увеличения). По пищевым цепям изменения передаются на более высокие уровни пирамиды и в порядке очередности хода игроки забирают с верхних уровней карты организмов, не обеспеченных кормовой базой. Затем достраивание пирамиды (восстановление экосистемы) продолжается. Игра завершается в тот момент, когда карты остаются только у одного из игроков.

Задание. Освоив игру, попробуйте ставить и решать экспериментальные задачи, например: поведение модели при отсутствии организмов одного вида, при взаимодействии антропогенного фактора на разных уровнях и на разных этапах формирования экосистемы и т. д.

ТЕМА 19

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЗАИМООТНОШЕНИЙ «ХИЩНИК – ЖЕРТВА» И «ПАЗАЗИТ – ХОЗЯИН»

Межвидовые взаимоотношения играют большую роль в динамике численности организмов в биоценозе. Хищники, уничтожая свои жертвы, влияют на их численность. Такое же воздействие оказывают и паразиты. Хищничество и сходное с ним явление паразитизма издавна вызывало у экологов интерес. Математическая модель, описывающая взаимодействия животных в системе «паразит – хозяин» и «хищник – жертва» была предложена А. Лоткой и В. Вольтеррой.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (\alpha - \beta y)x \\ \frac{dy}{dt} = (-\gamma + \delta x)y \end{cases}$$

где x – количество жертв;

y – количество хищников;

t – время;

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – коэффициенты, отражающие взаимодействия между видами.

Сущность их выводов сводится к тому, что истребление особей хозяина паразитами является функцией численности не только паразитов, но и хозяев. Из этого следует, что той или иной численности хозяина соответствует определенная численность паразита и по мере возрастания плотности популяции хозяина увеличивается и плотность популяции паразита. Повышение же численности паразита приводит к снижению численности хозяина, а последнее опять снижает количество паразитов. И так, вол-

на за волной, происходят периодические колебания численности популяций хозяина и паразита с небольшими отклонениями от оптимального уровня. Данная модель полностью соответствует модели взаимодействия хищника и его жертвы, приводящих к циклическим колебаниям численности в системе «хищник – жертва» рис. 8.

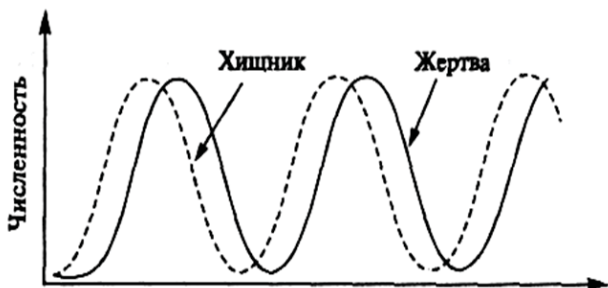


Рис. 8. Циклические колебания численности популяций хищника и жертвы

Подобные уравнения можно использовать для моделирования систем «хищник – жертва», «паразит – хозяин», конкуренции и других видов взаимодействия между двумя видами.

Одно из уравнений описывает скорость изменения популяции хищника, другое – его жертвы. Для некоторого ограниченного пространства, когда каждая из двух популяций имеет определенный уровень равновесия (K), одновременный их рост можно выразить в форме

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left(\frac{K_1 - N_1 - \alpha N_2}{K_1} \right) \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left(\frac{K_2 - N_2 - \beta N_1}{K_2} \right),\end{aligned}$$

где N_1 и N_2 – численность популяции жертвы и хищника соответственно;

α и β – коэффициенты межвидовой конкуренции, характеризующие тормозящее влияние второго вида на первый и наоборот (коэффициенты конкуренции обычно меньше единицы);

K_1 и K_2 – максимально возможная численность популяций при отсутствии конкуренции;

r_1 и r_2 – биотические потенциалы.

Из уравнений следует, что подавляющее влияние каждой особи второго вида на популяцию первого равно α / K_1 , а первого на популяцию второго – β / K_2 . Исход конкуренции зависит от относительных значений K_1 , K_2 , α и β . Различные их комбинации дают четыре варианта воздействия популяций друг на друга (табл. 20).

Пользуясь приведенными уравнениями, можно определить, какой должна быть плотность каждой популяции, чтобы другая не имела возможности увеличивать свою численность. Очевидно, что N_1 не может возрасти при $N_2 = K_1 / \alpha$, а когда N_1 достигает величины K_2 / β , не может увеличиваться N_2 .

Таблица 20

**Возможные варианты конкуренции, вытекающие
из уравнений Лотки – Вольтерры**

Характер взаимоотношений	Варианты при условиях, что	
	вид 1 подавляет вид 2 ($K_2 / \beta < K_1$)	вид 1 не подавляет вид 2 ($K_2 / \beta > K_1$)
Вид 2 подавляет вид 1 ($K_2 / \alpha < K_1$)	Каждый вид может подавлять друг друга (вариант 3)	Всегда побеждает вид 2 (вариант 2)
Вид 2 не подавляет вид 1 ($K_2 / \alpha > K_1$)	Всегда побеждает вид 1 (вариант 1)	Ни один из видов не подавляет другой; устойчивое сосуществование (вариант 4)

Задание. Построить модель изменения численности популяций хищника и жертвы или паразита и хозяина во времени, используя предложенные данные (табл. 21).

Таблица 21

Исходные данные

Вариант	Показатели								
	N_{01} (жертва – хозяин)	N_{02} (хищник – паразит)	r_1	r_2	α	β	t	Δt	$K_1,$ K_2
1	0,75	0,01	4,0	3,0	0,02	0,03	100	1	1
2	0,55	0,05	5,0	2,0	0,08	0,04			
3	0,83	0,15	3,5	2,5	0,04	0,03			
4	0,75	0,36	4,5	3,5	0,1	0,05			
5	0,91	0,73	4,0	3,0	0,03	0,05			
6	0,05	0,06	2,8	1,8	0,1	0,2			
7	0,68	0,97	2,5	3,0	0,07	0,1			
8	0,95	0,16	3,0	1,5	0,01	0,03			
9	0,42	0,12	2,5	50	0,2	0,02			
10	0,01	0,75	2,3	35	0,3	0,01			

ТЕМА 20

МОДЕЛЬ ПИЩЕВОЙ КОНКУРЕНЦИИ

Конкуренция как форма межвидовых взаимоотношений возникает в тех случаях, когда два вида используют одни и те же ресурсы (пища, пространство, убежища и др.). Формирование конкретных биоценозов всегда связано с выработкой приспособлений, смягчающих конкуренцию, в противном случае менее приспособленный вид вытесняется из состава сообщества.

Конкурентные отношения являются важнейшим механизмом формирования видового состава сообщества, пространственного распределения видов и регуляции их численности. Именно поэтому они играют огромную роль в эволюционном развитии видов.

Одна из моделей для описания конкуренции представляет собой систему из двух дифференциальных уравнений, вытекающих из уравнения логистического роста. Для некоторого ограниченного пространства, когда каждая из двух популяций имеет определенный уровень равновесия (K), одновременный их рост можно выразить в следующей форме:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(\frac{K_1 - N_1 - \alpha N_2}{K_1} \right) \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(\frac{K_2 - N_2 - \beta N_1}{K_2} \right) \end{cases}$$

где N_1 и N_2 – численность популяции первого и второго вида соответственно;

α и β – коэффициенты, характеризующие тормозящее влияние второго вида на первый и наоборот (коэффициенты обычно меньше единицы);

K_1 и K_2 – максимально возможная численность популяций при отсутствии взаимного влияния видов;

r_1 и r_2 – биотические потенциалы.

Из уравнений следует, что подавляющее влияние каждой особи второго вида на популяцию первого равно α/K_1 , а первого на популяцию второго – β/K_2 . Исход зависит от относительных значений K_1 , K_2 , α и β . Различные их комбинации дают четыре варианта воздействия популяций друг на друга (табл. 21).

Пользуясь приведенными уравнениями, можно определить, какой должна быть плотность каждой популяции, чтобы другая не имела возможности увеличивать свою численность. Очевидно, что N_1 не может возрасти при $N_2 = K_1/\alpha$, а когда N_1 достигает величины K_2/β , не может увеличиваться N_2 .

Таблица 22

**Возможные варианты конкуренции, вытекающие
из уравнений Лотки – Вольтерры**

Характер взаимоотношений	Варианты при условиях, что	
	вид 1 подавляет вид 2 ($K_2/\beta < K_1$)	вид 1 не подавляет вид 2 ($K_2/\beta > K_1$)
Вид 2 подавляет вид 1 ($K_2/\alpha < K_1$)	Каждый вид может подавлять друг друга (вариант 3)	Всегда побеждает вид 2 (вариант 2)
Вид 2 не подавляет вид 1 ($K_2/\alpha > K_1$)	Всегда побеждает вид 1 (вариант 1)	Ни один из видов не подавляет другой; устойчивое сосуществование (вариант 4)

Рассмотрим модель роста ячменя и овса в смешанном посеве. Для описания динамических моделей можно использовать одну из модификаций уравнения Лотки – Вольтерры:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - bx - cy) \\ \frac{dy}{dt} = y(e - fx - gy) \end{cases}$$

где x – количество первого вида, y – количество второго вида, t – время, a , b , c , e , f и g – положительные константы, отражающие конкуренцию между видами растений при смешанном посеве.

Численность растений каждого вида в смешанном посеве этих сельскохозяйственных культур определяется во время сева. В нашей модели конкуренция между культурами будет выражать-

ся в терминах «относительное пространство» безразмерной переменной, которая характеризует влияние плотности растений на пространство, доступное для корней и листьев, на количество получаемых растениями питательных веществ, солнечного света и прочих факторов. Действительная продукция сухого вещества получается затем как произведение «относительного пространства» на максимально возможную продуктивность в монокультуре с высокой плотностью посева. Таким образом, все величины оказываются функциями времени.

Рост и конкуренцию овса и ячменя при смешанном посеве можно представить в виде дифференциальных уравнений, в которых $r_{\text{я}}$ – это относительное пространство для ячменя, а $r_{\text{о}}$ – относительное пространство для овса:

$$\begin{cases} \frac{dr_{\text{я}}}{dt} = G_{\text{я}} (r_{\text{я}} - r_{\text{я}}^2 - r_{\text{я}} r_{\text{о}}) \\ \frac{dr_{\text{о}}}{dt} = G_{\text{о}} (r_{\text{о}} - r_{\text{о}}^2 - r_{\text{я}} r_{\text{о}}) \end{cases}$$

Для того чтобы построить модели изменения конкурентов со временем, можно воспользоваться приемом, который часто применяется в подобных ситуациях, т.е. можно рассматривать коэффициенты $G_{\text{я}}$ и $G_{\text{о}}$ как эмпирические функции, которые представляют собой относительные скорости роста растений в отсутствие конкуренции и могут быть получены из данных о росте растений при очень низких плотностях посева (табл. 22).

Таблица 23

Относительные скорости роста овса и ячменя

Сутки	Относительная скорость роста	
	ячмень	овес
0	0,4286	0,7143
7	0,1071	0,1190
14	0,0441	0,0634
21	0,0225	0,0431
28	0,0064	0,0242
35	- 0,0036	0,0511
42	- 0,0065	0,0491

Задание. Построить модель изменения численности популяций вида – пищевого ресурса и двух конкурирующих за данный ресурс видов, например, заяц, лиса и волк (период времени 100 лет), используя предложенные математические зависимости и исходные данные таблицы 23.

Таблица 24

Исходные данные

Вариант	Показатели								
	N_{01}	N_{02}	N_{03}	r_1	r_2	r_3	N_1	N_2	N_3
1	0,6	0,3	0,7	4,2	4,3	3,5	?	?	?
2	0,5	0,2	0,6	4,5	4,4	3,6			
3	0,4	0,25	0,5	4,8	4,7	3,7			
4	0,3	0,35	0,4	5,0	4,9	3,8			
5	0,7	0,36	0,3	5,2	5,2	3,9			
6	0,8	0,4	0,4	5,6	5,3	4,0			
7	0,9	0,45	0,5	5,9	5,5	4,1			
8	0,55	0,48	0,4	6,0	5,6	4,2			
9	0,65	0,46	0,6	6,2	5,7	4,3			
10	0,75	0,8	0,8	6,7	5,9	4,4			

$$\begin{aligned}
 N_1 &= N_{01} \times r_1 \times (1 - N_{01}) \times (1 - N_{02}) \times (1 - N_{03}); \\
 N_2 &= N_{02} \times r_2 \times (1 - N_{02}) \times (1 - N_{03}) \times N_{01}, \\
 N_3 &= N_{03} \times r_3 \times (1 - N_{02}) \times (1 - N_{03}) \times N_{01},
 \end{aligned}$$

где N_1, N_2, N_3 – численность популяции первого, второго и третьего видов в момент времени t ;

N_{01}, N_{02}, N_{03} – численность популяции первого, второго и третьего видов в начальный момент t_0 ;

r_1, r_2, r_3 – биотический потенциал, характеризующий скорость роста популяции первого, второго и третьего видов соответственно.

ТЕМА 21

МОДЕЛИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕСУРСОВ

Рыбный промысел может существенно влиять на популяционную динамику рыб. Отлов взрослых особей приводит к снижению численности молоди, в результате чего численность популяции начинает сильно варьировать и иногда падать до катастрофически низкого уровня. Чтобы предотвратить такого рода катастрофы, во многих странах введены квоты, определяющие величину допустимого отлова рыбы. Полагают, что изучение того, каким образом отлов рыбы влияет на размеры и стабильность ее популяции, может помочь в разработке стратегии, гарантирующей возможность постоянного использования рыбных ресурсов. До 1977 года в северо-восточном арктическом промысловом районе была определена допустимая норма рыбодобычи – $0,75 \times 10^6$ т/год. Позже квота была снижена до $0,3 \times 10^6$ т/год.

Используя таблицу 24 и рисунок 9, построить модель использования трески и самостоятельно определить величину рыбных запасов на выбранный год, прирост популяции (число особей, достигших возраста одного года, разделить на общее число отловленных икринок) и соответствующий объем отлова. Затем заполнить индивидуальное задание.

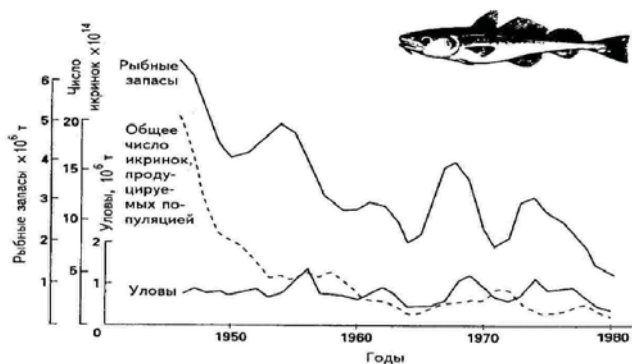


Рис. 9. Динамика рыбных запасов в северо-восточном арктическом промысловом районе (1940–1980 гг.)

Таблица 25

**Данные о запасах трески в северо-восточном
арктическом промысловом районе**

Годы	Общее число отложенных икринок /10¹⁴	Число особей, достигших возраста 1 год/10⁶
1946	20,5	-
1947	16,9	7,0
1948	11,8	10,6
1949	8,9	16,2
1950	8,0	17,8
1951	7,4	23,8
1952	6,0	16,6
1953	4,6	10,4
1954	4,7	6,6
1955	4,4	12,0
1956	5,0	7,5
1957	4,7	10,3
1958	5,1	11,8
1959	4,4	13,8
1960	3,1	10,9
1961	2,6	7,1
1962	2,4	5,1
1963	1,9	11,6
1964	1,2	7,7
1965	1,1	11,1
1966	1,7	2,5
1967	2,3	1,7
1968	2,2	2,9
1969	2,4	6,0
1970	2,4	15,2
1971	3,4	8,3
1972	3,4	7,8
1973	2,0	9,3
1974	1,2	9,2
1975	1,1	5,2
1976	1,2	9,8
1977	1,6	3,2
1978	2,0	2,2
1979	1,2	2,5
1980	0,8	2,0

Задания:

1. Построить модель использования лесных ресурсов на период 100 лет, если известно, что:
начальный запас древесины составляет $150\,000\text{ м}^3$;
ежегодный прирост – 7 %;
объем вырубki – $20\,000\text{ м}^3$.
2. Построить модель использования рыбных ресурсов на период 100 лет, если известно, что:
начальный запас рыбы – $200\,000\text{ т}$;
ежегодный прирост – 5 %;
объем вылова – $11\,000\text{ т}$.
3. Построить модель использования запасов пушнины на период 100 лет, если известно, что:
начальный запас животных с ценным мехом – $10\,000\text{ гол.}$;
ежегодный прирост – 4 %;
объем отстрела – $2\,100\text{ гол.}$
4. Построить модель изменения мощности пахотного горизонта на период 100 лет, если известно, что:
начальная толщина пахотного слоя – $0,2\text{ м}$;
ежегодный прирост – 0,035 %;
количество смывтой почвы с участка размером 20×2 метра составило 180 кг в год.
5. Построить модель использования лесных ресурсов на период 100 лет, если известно, что:
начальный запас древесины – $300\,000\text{ м}^3$;
ежегодный прирост – 12 %;
объем вырубki – $17\,000\text{ м}^3$.
6. Построить модель использования рыбных ресурсов на период 100 лет, если известно, что:
начальный запас рыбы – $1\,200\,000\text{ т}$;
ежегодный прирост – 4 %;
объем вылова – $15\,000\text{ т}$.
7. Построить модель использования рыбных ресурсов на период 100 лет, если известно, что:
начальный запас рыбы – $800\,000\text{ т}$;
ежегодный прирост – 10 %;
объем вылова – 700 т .

8. Построить модель использования запасов пушнины на период 100 лет, если известно, что:

начальный запас животных с ценным мехом – 250 000 гол.;

ежегодный прирост – 2 %;

объем отстрела – 4500 гол.

9. Построить модель изменения мощности пахотного горизонта на период 100 лет, если известно, что:

начальная толщина пахотного слоя – 0,2 м;

ежегодный прирост – 0,05 %;

количество смытой почвы с участка размером 20×2 метра составило 90 кг в год.

10. Построить модель использования популяции оленей в тундре на период 100 лет, если известно, что:

начальный запас животных – 200 000 гол.;

ежегодный прирост – 15 %;

объем изымаемых животных – 5000 гол.

11. Построить модель использования запасов каменного угля на период 100 лет, если известно, что:

начальный запас – 1 500 000 млн т;

ежегодный прирост – 0,03 %;

объем добычи – 100 000 млн т.

12. Построить модель использования лесных ресурсов на период 100 лет, если известно, что:

начальный запас древесины – 550 000 м³;

ежегодный прирост – 9 %;

объем вырубki – 40 000 м³.

13. Построить модель использования рыбных ресурсов на период 100 лет, если известно, что:

начальный запас рыбы – 1 500 000 т;

ежегодный прирост – 7 %;

объем вылова – 30000 т.

14. Построить модель использования запасов пушнины на период 100 лет, если известно, что:

начальный запас животных с ценным мехом – 10 000 гол.;

ежегодный прирост – 4 %;

объем отстрела – 2100 гол.

ТЕМА 22

МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ (МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ ГРИППА)

За многие тысячелетия существования человечества большое число людей погибло от различных эпидемий. Для того чтобы иметь возможность бороться с эпидемиями, т. е. своевременно проводить те или иные медицинские мероприятия (карантины, вакцинации и т. д.), необходимо уметь сравнивать эффективность этих мероприятий. Сравнить же их можно лишь в том случае, если есть возможность предсказать, как при том или ином мероприятии будет меняться ход эпидемии, прежде всего число больных. Отсюда возникает необходимость в построении моделей, которые могли бы служить целям прогноза.

Рассмотрим модель «естественного» хода эпидемии (без медицинского вмешательства). Понятно, что модель эпидемии может включать в себя влияние факторов самых различных уровней. Так, можно было бы учесть законы, управляющие деятельностью бактериальных клеток, степень восприимчивости к инфекции отдельных людей, вероятности встречи носителей инфекции с еще здоровыми людьми и многие другие факторы. Так как нашей целью является лишь создание иллюстративной модели, то мы абстрагируемся от многих факторов.

Пусть имеется N здоровых людей, и в момент времени $t = 0$ в эту группу попадает один заболевший человек (источник инфекции). Предположим, что он выздоравливает на седьмой день. Будем считать также, что человек становится источником инфекции с коэффициентом инфицирования, равным 0,2, сразу же после того, как он сам заразится.

Задание. Построить модель распространения гриппа в студенческой группе и определить, через сколько дней все студенты будут здоровы. Для решения необходимо использовать приведен-

ные ниже исходные данные, расчеты представить в виде таблицы Microsoft Excel.

Макет таблицы:

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
День	Здоровые	Носители	Больные	Выздоровевшие	Всего выздоровевших	Всего присутствует в группе
0						
1						
2						
3						
...						

Исходные данные:

- 1) количество студентов = 40 чел.;
- 2) количество инфицированных (носителей) в 1-й день = 1;
- 3) носители в 2-й день – целое ($k \times \text{здоровые в 1-й день} \times \text{корень (носители в 1-й день / количество человек в группе + 1)}$);
- 4) коэффициент инфицирования $k = 0,2$;
- 5) здоровые в 1-й день = количество студентов – количество инфицированных;
- 6) здоровые во 2-й день = здоровые в 1-й день – носители во 2-й день;
- 7) больные в 1-й день = 0;
- 8) больные во 2-й день = больные в 1-й день + носители в 1-й день – выздоровевшие во 2-й день;
- 9) выздоровевшие на 7-й день = носители в 1-й день;
- 10) выздоровевших всего на 7-й день = выздоровевшие на 7-й день + всего выздоровевших на 6-й день;
- 0) всего присутствует в группе в n-й день = количество человек в группе – больные в этот день.

ТЕМА 23

ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗВИТИЯ ЭКОСИСТЕМ МЕТОДАМИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Симплекс-метод – как способ решения оптимизационных задач линейного программирования

Линейное программирование как математическая дисциплина развивается с 60-х годов прошлого века применительно к задачам комплексного планирования и размещения капиталовложений в различных отраслях экономики.

Симплекс-метод предложен Дж. Данцигом и усовершенствован другими математиками.

Примеры использования симплекс-метода в сельском хозяйстве:

- 1) принятие решений о типах и нормах внесения удобрений;
- 2) подбор рациона наименьшей стоимости для животных;
- 3) планирование трудозатрат и потребности в технике.

Теоретически симплекс-метод – задача n -мерного пространства. Каждый угол – одно из решений функции. Цель – найти такую угловую точку этой фигуры, которая будет минимальной или максимальной.

Использование графического способа решения оптимизационных задач удобно только при наличии двух управляемых переменных. При большем числе переменных можно применить универсальный метод решения оптимизационных задач – симплекс-метод.

Симплекс-метод – это характерный пример итерационных вычислений, используемых при решении большинства оптимизационных задач. Итерационные действия – однотипные вычи-

слительные процедуры, повторяющиеся в определенной последовательности до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение. Поэтому применение симплекс-метода требует использования вычислительных машин.

Идея метода состоит в последовательном продвижении по опорным решениям задачи, т. е. в последовательном улучшении решений по определенному критерию до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение.

План решения задачи симплекс-методом:

- 1) привести математическую модель к каноническому виду;
- 2) найти опорное решение;
- 3) найти оптимальное решение.

Основные элементы оптимизационных моделей

Использование оптимизационных моделей предполагает выделение трех основных элементов:

- управляемые переменные, которые могут изменяться в определенных пределах и оптимальные значения которых должны быть определены;
- целевая функция, которая показывает, что необходимо найти;
- ограничения целевой функции – это условия, ограничивающие возможность выбора значений управляемых переменных.

Требования к элементам при использовании симплекс-метода

Целевая функция и ограничения должны быть представлены в линейной форме (нелинейное – сепарабельное программирование, $\ln$, x^2).

Целевая функция и ограничения должны быть полностью детерминированными, т. е. не содержать случайных составляющих, изменяющихся в некотором диапазоне.

Управляемые переменные должны быть непрерывными и неотрицательными, т. е. в пределах наложенных ограничений могут принимать значения любого неотрицательного числа.

Приведение математической модели к каноническому виду

Для построения канонической модели стандартная математическая модель должна быть приведена к определенному виду:

- а) все ограничения записываются в виде равенств (хотя бы одно должно быть с отрицательной правой частью);
- б) целевая функция подлежит максимизации или минимизации

$$Z = 25x_1 + 30x_2 \rightarrow \max.$$

Для приведения модели к каноническому виду пользуются тремя правилами.

Исходные ограничения, записанные в виде неравенств, можно записать в виде равенств, прибавив (или отняв) дополнительную переменную к левой части ограничения

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 120; \\ 2x_1 + 3x_2 + y_1 &= 120; \\ 6x_1 + 250x_2 &\geq 1500; \\ 6x_1 + 250x_2 - y_1 &\geq 1500. \end{aligned}$$

Если исходное ограничение имеет вид ($\leq$), переменную y_1 следует интерпретировать как остаток или недоиспользованную часть данного ресурса, либо, если исходное ограничение имеет вид ($\geq$), переменная y_1 обозначает величину превышения сверх минимума.

Правую часть неравенства всегда можно сделать отрицательной, умножив на минус 1 обе части, если это необходимо

$$2x_1 + 3x_2 \leq 120 - 2x_1 - 3x_2 \geq -120.$$

Знак неравенства изменяется на противоположный при умножении обеих частей на минус 1.

Основная идея этих преобразований заключается в формировании множества переменных, состоящего из свободных и дополнительных переменных. В целевой функции значения дополнительных переменных равны 0, т. е. предполагается полное использование ресурсов без остатка.

$$Z = 25x_1 + 30x_2 + 0y_1 + 0y_2.$$

Подготовка модели к итерационным вычислениям. Понятие базисных и небазисных переменных, свободных членов

Основная идея метода заключается в том, что все множество переменных разбивают на **базисные** и **небазисные** переменные, где небазисные переменные – это управляемые переменные (x_1 и x_2 в нашем примере), а количество базисных переменных равно количеству равенств в канонической модели (у нас два ограничения, две базисных переменных y_1, y_2).

Наряду с базисными и небазисными переменными обозначим **свободные члены** – числа в правой части уравнения.

Составление симплекс-таблицы

Далее строим таблицу-матрицу (табл. 25), где число столбцов равно числу небазисных переменных + 3, а число строк равно числу базисных переменных + 2.

Таблица 26

Макет симплекс-таблицы

Базисные переменные	Свободные члены (СЧ)	Небазисные переменные		Симплексное отношение (СО)
		x_1	x_2	
y_1				
y_2				
Z (строка целевой функции)				

Признаки опорного и оптимального решения

При поиске опорного решения необходимо, чтобы в процессе преобразований отрицательные свободные члены стали положительными, а нули в числе базисных были переброшены в небазисные.

Опорное решение будет оптимальным, если коэффициенты целевой функции F строки будут отрицательными (или нулевыми) при поиске минимума или положительными (или нулевыми) при поиске максимума за исключением свободного члена F строки.

Алгоритм решения оптимизационной задачи методом обнуления

Задача. Пусть есть хищник, гнездо которого находится в точке А, и две потенциальные жертвы на участках В и С. Время, необходимое хищнику для того, чтобы добраться до пищи и возвратиться с единицей добычи, равно 2 и 3 минуты соответственно. На поимку добычи на участке В хищник тратит 2 мин; а на участке С – 1 мин. Энергетическая ценность единицы добычи на участке В равна 25 Дж, а на участке С – 30 Дж.

Найти способ добычи пищи, который давал бы максимальный энергетический выход при следующих условиях:

время на путь за добычей в обе стороны составляет не более 120 мин/сут.;

время на поимку не более 80 мин/сут.;

переменные: x_1 – количество жертв на участке В;

x_2 – количество жертв на участке С;

целевая функция: максимум энергии $Z = 25x_1 + 30x_2$;

ограничения: на время в пути $-2x_1 + 3x_2 \leq 120$;

на время поимки $-2x_1 + 1x_2 \leq 80$.

Приведем условие задачи к каноническому виду:

Преобразуем неравенства в уравнения с отрицательной правой частью

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 + y_1 &= 120; \\-2x_1 - 3x_2 - y_1 &= -120; \\2x_1 + 1x_2 + y_2 &= 80; \\-2x_1 - 1x_2 - y_2 &= -80; \\Z &= 25x_1 + 30x_2; \\Z &= 25x_1 + 30x_2 + 0y_1 + 0y_2.\end{aligned}$$

Метод обнуления подходит для решения задач, где число базисных и небазисных переменных одинаково. Находим опорное решение, для этого заполняем исходную симплекс-таблицу (табл. 26).

Таблица 27

Исходная симплекс-таблица № 1

Базисные переменные	Свободные члены (СЧ)	Небазисные переменные		Симплексное отношение (СО)
		x_1	x_2	
y_1	- 120	- 2	- 3*	40 Р с-ка
y_2	- 80	- 2	- 1	80
Z (строка целевой функции)			Р с-ц	

Дальнейшие действия выполняем по следующему алгоритму:

а) в строке с минимальным свободным членом находим минимальный отрицательный коэффициент небазисной переменной и выделяем столбец, содержащий это число (– 3). Этот столбец называется разрешающим.

б) находим симплексное отношение: СО – неотрицательное отношение свободных членов к ненулевым элементам разрешающего столбца;

в) по минимальному СО определяется и выделяется разрешающая строка;

г) на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки находим разрешающий элемент (– 3);

д) с помощью разрешающего элемента преобразуем симплекс-таблицу и заполняем следующую (табл. 27);

е) меняем местами соответствующие разрешающему элементу базисную и небазисную переменные (x_2 и y_1);

ж) разрешающую строку симплекс-таблицы № 1 делим на разрешающий элемент и записываем в новую таблицу;

з) все элементы разрешающего столбца обнуляем (приравняем к нулю), за исключением того, что стоит на месте разрешающего элемента, который равен 1;

и) все остальные элементы симплекс-таблицы №2 преобразуем по правилу прямоугольника из симплекс-таблицы №1: от произведения элементов главной диагонали (там, где находится разрешающий элемент) отнимаем произведение элементов побочной диагонали; полученный результат делим на разрешающий элемент;

к) в случае, если в симплекс-таблице № 2 не все свободные члены положительны, повторяем пункты а) – и).

Таблица 28

Симплекс-таблица № 2

Базисные переменные	Свободные члены (СЧ)	Небазисные переменные		Симплексное отношение (СО)
		x_1	x_2	
y_1	40	2/3	1	
y_2	- 40	- 4/3*	0	Р с-ка
Z (строка целевой функции)		Р с-ц		

$$x_1 y_2 = [(-2 \cdot -3)] - [(-2 \cdot -1) / -3] = -4/3;$$

$$СЧ y_2 = [(-3 \cdot -80)] - [(-120 \cdot -1) / -3] = -40.$$

Так как свободные члены не все положительные, рассчитываем следующую таблицу (табл. 28).

$$X_2 СЧ = [(-4/3 \cdot 40)] - [(2/3 \cdot -40) / -4/3] = 20;$$

$$X_2 y_1 = [(-4/3 \cdot 1)] - [(2/3 \cdot 0) / -4/3] = 1.$$

Так как все свободные члены положительны, найденное решение является опорным. Подставим полученные значения в формулу целевой функции

$$Z = 25x_1 + 30x_2;$$

$$Z = 25 \times 30 + 30 \times 20 = 750 + 600 = 1350.$$

Таблица 29

Симплекс-таблица № 3

Базисные переменные	Свободные члены (СЧ)	Небазисные переменные		Симплексное отношение (СО)
		y_2	y_1	
x_2	20	0	1	
x_1	30	1	0	Р с-ка
Z (строка целевой функции)		Р с-ц		

Алгоритм решения оптимизационной задачи традиционным методом.

Задача. Фермеру необходимо определить количество свиного навоза и сложных минеральных удобрений для разбрасывания на 20 га лугопастбищных угодий таким образом, чтобы стоимость внесенных удобрений была минимальной. При этом необходимо внести не менее 75 кг/га азота, 25 кг/га фосфора, 35 кг/га калия. Химический состав удобрений приведен в таблице 29. Производительность труда при разбрасывании навоза составляет 8 т/ч., при разбрасывании сложных удобрений – 0,4 т/ч. Ресурс времени на выполнение данной операции – 25 ч. Стоимость 1 т навоза – 2,5 у. е., 1 т сложных удобрений – 130 у. е.

Таблица 30

Химический состав удобрений

Удобрение	Азот	Фосфор	Калий
Свиной навоз	6	1,5	4
Сложное удобрение	250	100	100

Переменные: x_1 – количество свиного навоза (т);

x_2 – количество сложных удобрений (т).

Целевая функция: минимум затрат $Z = 2,5x_1 + 130x_2$.

Ограничения:

на нормы внесения удобрений:

$$\begin{aligned} 6x_1 + 250x_2 &\geq 1500 \text{ (азот);} \\ 1,5x_1 + 100x_2 &\geq 500 \text{ (фосфор);} \\ 4x_1 + 100x_2 &\geq 700 \text{ (калий);} \end{aligned}$$

на временной ресурс: $x_1 / 8 + x_2 / 0,4 \leq 25$, или умножить обе части на 8 и получим $x_1 + 20x_2 \leq 200$.

Приведем условие задачи к каноническому виду:

1) приведем неравенства задачи к виду $\leq$:

$$\begin{aligned} -6x_1 - 250x_2 &\leq -1500; \\ -1,5x_1 - 100x_2 &\leq -500; \\ -4x_1 - 100x_2 &\leq -700; \\ x_1 + 20x_2 &\leq 200; \\ Z &= 2,5x_1 + 130x_2. \end{aligned}$$

2) преобразуем неравенства в уравнения:

$$\begin{aligned} -6x_1 - 250x_2 + y_1 &= -1500; \\ -1,5x_1 - 100x_2 + y_2 &= -500; \\ 4x_1 - 100x_2 + y_3 &= -700; \\ x_1 + 20x_2 &\leq 200; \\ Z &= 2,5x_1 + 130x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0y_4. \end{aligned}$$

Находим опорное решение, для этого заполняем исходную симплекс-таблицу (табл. 30).

Таблица 31

Исходная симплекс-таблица № 1

Базисные переменные	Свободные члены (СЧ)	Небазисные переменные		Симплексное отношение (СО)
		x_1	x_2	
y_1	- 1500	- 6	- 250	250 / 6
y_2	- 500	- 1,5	- 100*	333,3 / 5
y_3	- 700	- 4	- 100	175 / 7
y_4	200	1	20	200 / 10
Z (строка целевой функции)	0	-2,5	-130	не считаем

Находим разрешающий элемент (РЭ) (важно найти наименьшее положительное СО).

Для этого найдем коэффициент небазисной переменной, при делении на который свободных членов получается наименьшее положительное число (симплексное отношение СО).

После нахождения РЭ приступаем к заполнению следующей таблицы (табл. 31).

Таблица 32

Симплекс-таблица № 2

Базисные переменные	Свободные члены (СЧ)	Небазисные переменные		Симплексное отношение (СО)
		x_1	y_2	
y_1	- 250	- 2,25	- 2,5	111,1 / 100
x_2	5	0,015	- 0,01	333,3 / -
y_3	- 200	- 2,5*	- 1	80 / 200
y_4	100	0,7	0,2	142,9 / 500
Z (строка целевой функции)	650	- 0,55	- 1,3	

1. Меняем местами базисную и небазисную переменные, соответствующие РЭ $y_2 \leftrightarrow x_2$.

2. Новый коэффициент на месте РЭ равен обратной ему величине: $1/\text{РЭ } 1/-100 = -0,01$.

3. Коэффициенты столбца РЭ новой таблицы равны коэффициентам столбца РЭ предыдущей таблицы, деленным на РЭ предыдущей таблицы, и записываются с противоположным знаком

$$-250/-100 = -2,5;$$

$$-100/-100 = -;$$

$$20/-100 = 0,2;$$

$$-130/-100 = -1,3.$$

4. Коэффициенты строки РЭ равны коэффициентам этой строки предыдущей таблицы, деленным на РЭ предыдущей таблицы:

$$-500/-100 = 5; -1,5/-100 = 0,015.$$

5. Остальные коэффициенты находим по правилу прямоугольника: от произведения элементов главной диагонали (там, где находится РЭ) отнимаем произведение элементов побочной диагонали, полученный результат делим на РЭ (все значения берем из предыдущей таблицы):

$$\begin{aligned}
Y_1C &= (-1500) \cdot (-100) - (-500) \cdot (-250) / (-100) = \\
&= 150000 - 125000 / (-100) = -250; \\
Y_1X_1 &= (-6) \cdot (-100) - (-1,5) \cdot (-250) / (-100) = 600 - 375 / (-100) = -2,25; \\
Y_3C &= (-700) \cdot (-100) - (-500) \cdot (-100) / -100 = \\
&= 70000 - 50000 / (-100) = -200; \\
Y_4C &= (200) \cdot (-100) - (20) \cdot (-500) / (-100) = 100; = 650; \\
Y_3X_1 &= (-4) \cdot (-100) - (-1,5) \cdot (-100) / (-100) = 400 - 150 / (-100) = -2,5; \\
Y_4X_1 &= (1) \cdot (-100) - (20) \cdot (-1,5) / (-100) = -100 + 30 / (-100) = 0,7; \\
ZX_1 &= (-2,5) \cdot (-100) - (-1,5) \cdot (-130) / (-100) = \\
&= 250 - 195 / (-100) = -0,55.
\end{aligned}$$

6. Проверяем, является ли полученное решение опорным, если «да» – ищем оптимальное решение, если «нет» – повторяем пп. 1–5.

В нашем случае решение не является опорным, так как среди свободных членов есть отрицательные числа. Поэтому находим новый РЭ по минимальному СО (-2,5) таблицы 31 и заполняем новую таблицу (табл. 32).

Таблица 33

Симплекс-таблица № 3

Базисные переменные	Свободные члены (СЧ)	Небазисные переменные		Симплексное отношение (СО)
		y_3	y_2	
y_1	- 70	- 0,9	- 1,6	77,8 / 43,8
x_2	3,8	0,006	- 0,016	633,3 / -
x_1	80	- 0,4	0,4	- / 200
y_4	44	0,28	- 0,08	157,1 / -
Z (строка целевой функции)	694	- 0,22	- 1,08	

Меняем местами $x_1 \leftrightarrow y_3$.

Новый РЭ = $1 / -2,5 = -0,4$.

Находим элементы Р столбца:

$$(-2,25) / (-2,5) = -0,9; 0,015 / -2,5 = 0,006; 0,7 / -2,5 = 0,28 - 0,55 / -2,5 = -0,22.$$

Находим элементы Р строки:

$$-200 / (-2,5) = 80; -1 / (-2,5) = 0,4.$$

Остальные элементы находим по правилу прямоугольника:

$$Y_1CЧ = (-250) \cdot (-2,5) - (-200) \cdot (-2,25) / (-2,5) = \\ = 625 - 450 / (-2,5) = -70;$$

$$X_2CЧ = (5) \cdot (-2,5) - (-200) \cdot (0,015) / (-2,5) = \\ = -12,5 + 3 / (-2,5) = 3,8;$$

$$Y_4CЧ = (100) \cdot (-2,5) - (-200) \cdot (0,7) / (-2,5) = \\ = -250 + 140 / (-2,5) = 44;$$

$$ZCЧ = (650) \cdot (-2,5) - (-200) \cdot (-0,55) / (-2,5) = \\ = -1625 - 110 / (-2,5) = 694;$$

$$Y_1Y_2 = (-2,5) \cdot (-2,5) - (-2,25) \cdot (-1) / (-2,5) = \\ = 6,25 - 2,25 / (-2,5) = -1,6;$$

$$Y_2X_2 = (-2,5) \cdot (-0,01) - (0,015) \cdot (-1) / (-2,5) = \\ = 0,025 + 0,015 / (-2,5) = -0,016;$$

$$Y_4Y_2 = (-2,5) \cdot (0,2) - (0,7) \cdot (-1) / (-2,5) = \\ = -0,5 + 0,7 / (-2,5) = -0,08;$$

$$ZY_2 = (-2,5) \cdot (-1,3) - (-0,55) \cdot (-1) / -2,5 = \\ = 3,25 - 0,55 / (-2,5) = -1,08.$$

Так как решение не опорное, находим минимальное $CO = 43,8$, тогда $PЭ = -1,6$. Заполняем четвертую таблицу (табл. 33).

Таблица 34

Симплекс-таблица № 4

Базисные переменные	Свободные члены (СЧ)	Небазисные переменные		Симплексное отношение (СО)
		Y_3	Y_1	
y_2	43,75	0,5625	- 0,625	77,8 / -
x_2	4,5	0,015	- 0,01	300 / -
x_1	62,5	- 0,625	0,25	- / 250
y_4	47,5	0,325	- 0,05	146,2 / -
Z (строка целевой функции)	741,25	0,3875	- 0,675	

Меняем местами $y_1 \leftrightarrow y_2$.

Новый $PЭ = 1 / -1,6 = -0,625$.

Находим элементы Р столбца:

$$-0,016 / -1,6 = -0,01; 0,4 / -1,6 = 0,25; -0,08 / -1,6 = \\ = -0,05; -1,08 / -1,6 = -0,675.$$

Находим элементы Р строки:

$$-70/-1,6 = 43,75; -0,9/-1,6 = 0,5625.$$

Остальные элементы находим по правилу прямоугольника:

$$X_2CЧ = (3,8 \cdot -1,6) - (-70 \cdot -0,016) / -1,6 = -6,08 - 1,12 / -1,6 = 4,5;$$

$$X_1CЧ = (80 \cdot -1,6) - (-70 \cdot 0,4) / -1,6 = -128 + 28 / -1,6 = 62,5;$$

$$Y_4CЧ = (44 \cdot -1,6) - (-70 \cdot -0,08) / -1,6 = -70,4 - 5,6 / -1,6 = 47,5;$$

$$\begin{aligned} ZCЧ &= (694 \cdot -1,6) - (-70 \cdot -1,08) / -1,6 = \\ &= -1110,4 - 75,6 / -1,6 = 741,25. \end{aligned}$$

Так как все свободные члены положительные, найдено опорное решение

$$ZY3 = (-0,22 \cdot -1,6) - (-0,9 \cdot -1,08) / -1,6 = 0,352 - 0,972 / -1,6 = 0,3875.$$

Так как не все коэффициенты строки целевой функции отрицательные или нулевые, то найденное опорное решение не является оптимальным. Продолжаем расчеты:

$$\begin{aligned} Y_3X_2 &= (0,006 \cdot -1,6) - (-0,9 \cdot -0,016) / -1,6 = \\ &= -0,0096 - 0,0144 / -1,6 = 0,015; \end{aligned}$$

$$X_1Y_3 = (-0,4 \cdot -1,6) - (-0,9 \cdot 0,4) / -1,6 = 0,64 + 0,36 / -1,6 = -0,625;$$

$$\begin{aligned} Y_3Y_4 &= (0,28 \cdot -1,6) - (-0,9 \cdot -0,08) / -1,6 = \\ &= -0,448 - 0,072 / -1,6 = 0,325. \end{aligned}$$

Далее заполняем следующую симплекс-таблицу (табл. 34).

Таблица 35

Симплекс-таблица № 5

Базисные переменные	Свободные члены (СЧ)	Небазисные переменные		Симплексное отношение (СО)
		y_2	y_1	
y_3	77,8	1,78	- 1,1	
x_2	3,33	- 0,027		
x_1	111,1	1,1		
y_4	22,2	- 0,58		
Z (строка целевой функции)	711,1	- 0,69	- 0,25	

Меняем местами $y_2 \leftrightarrow y_3$.

Новый РЭ = $1/0,5625 = 1,78$.

Находим элементы Р столбца:

$$0,015/0,5625 = -0,027 - 0,625/0,5625 = 1,1; 0,325/0,5625 = -0,58; \\ 0,3875/0,5625 = -0,69.$$

Находим элементы Р строки:

$$43,75/0,5625 = 77,8; -0,625/0,5625 = -1,1.$$

Далее для проверки решения на оптимальность находим свободные члены и коэффициенты строки целевой функции по правилу прямоугольника:

$$ZY_1 = (0,5625 \cdot -0,675) - (-0,625 \cdot 0,3875) / 0,5625 = \\ = -0,38 + 0,24 / 0,5625 = -0,25.$$

$$X_2CЧ = (4,5 \cdot 0,5625) - (43,75 \cdot 0,015) / 0,5625 = \\ = 2,53 - 0,66 / 0,5625 = 3,33.$$

$$X_1CЧ = (62,5 \cdot 0,5625) - (43,75 \cdot -0,625) / 0,5625 = \\ = 332,5 + 27,3 / 0,5625 = 111,1.$$

$$Y_4CЧ = (47,5 \cdot 0,5625) - (43,75 \cdot 0,325) / 0,5625 = 26,7 - 14,2 / 0,5625 = 22,2.$$

$$ZCЧ = (741,25 \cdot 0,5625) - (43,75 \cdot 0,3875) / 0,5625 = \\ = 416,95 - 16,95 / 0,5625 = 711,1.$$

Так как все свободные члены положительны и коэффициенты в строке целевой функции отрицательны, то найдено оптимальное решение задачи. Подставим полученные значения в уравнение целевой функции $Z = 2,5 \cdot 111,1 + 130 \cdot 3,33 = 277,75 + 432,9 \approx 711,1$.

Задание. Решите задачу при помощи симплекс-метода: Имеются две возможности лечения рака – лучевая терапия и химиотерапия, причем эффективность обоих методов выражена экспертом в некоторых общих единицах. Например, лекарственный препарат обладает эффективностью в 1000 единиц на грамм препарата, а облучение – 1000 единиц в минуту. Допустим, что для выздоровления больному требуется не менее 3000 единиц эффективности. Однако оба метода токсичны. Поэтому ни тот, ни другой нельзя применять неограниченно. Пусть токсичность методов также выражена в общих единицах, например, токсичность лекарства равна 400 единицам на грамм, а токсичность облучения 1000 единицам в минуту. Допустим, что конкретный больной не должен получить более 2000 таких единиц.

Известно, что введение одного грамма лекарственного препарата причиняет больному в три раза большие неудобства, чем облучение в течение одной минуты, и, следовательно, если мы ввели x_1 единиц веса лекарств и облучали больного в течение x_2 минут, то причинили ему общее неудобство, равное $Z = 3x_1 + x_2$. Задача состоит в том, чтобы подобрать такое соотношение обоих методов лечения (x_1 и x_2), которое удовлетворяло бы сформулированным выше ограничениям и в то же время причиняло как можно меньше неудобства больному.

ТЕМА 24

РАЗРАБОТКА СЛОВЕСНОЙ, ГРАФИЧЕСКОЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

На лекционных занятиях вы познакомились с понятием реальных, концептуальных и знаковых (математических и графических) моделей.

Задание. Необходимо разработать концептуальную, графическую и математическую модели по одной из предложенных тем. Можно использовать любые доступные источники информации, а результаты представить в виде презентации, подготовленной при помощи программы Microsoft Power Point.

Перечень тем:

1. Построить модель роста березняка на месте гари.
2. Построить модель изменения численности зубра в Бело-вежской пуще.
3. Построить модель развития и вредоносности фитофтороза.
4. Построить модель возможного развития интродуцированного вида листогрызущих насекомых в лесах умеренного климата.
5. Построить модель развития интродуцированного вида млекопитающих в заповеднике.
6. Построить модель изменения интенсивности поглощения воды и транспирации у травянистых растений в связи с потеплением климата.
7. Построить модель изменения плодородия почвы возле Солигорска после прекращения добычи ископаемых.
8. Построить модель возникновения жизни на земле в зависимости от концентрации кислорода в атмосфере.
9. Построить модель взаимодействия в системе паразит – хозяин.
10. Построить модель пищевой сети (зона смешанных лесов).

11. Построить модель решения продовольственной проблемы на Земле.

12. Построить модель использования запасов ископаемого топлива.

13. Построить модель выхода из энергетического кризиса.

14. Построить модель появления устойчивости живых организмов к вирусам (гепатит, герпес, СПИД).

15. Построить модель эволюционной адаптации живых организмов к действию радиоактивного излучения.

16. Построить модель поведения синтетических химических веществ (пестициды) в биосфере.

17. Построить модель последствий использования генетически модифицированных продуктов.

18. Построить модель роста искусственной посадки сосен.

19. Построить модель изменения численности черного аиста в Беловежской пуще.

20. Построить модель развития и вредоносности парши картофеля.

21. Построить модель возможного развития интродуцированного вида травоядного животного в лесах умеренного климата.

22. Построить модель развития интродуцированного вида хищных птиц в заповеднике.

23. Построить модель изменения интенсивности фотосинтеза у травянистых растений в связи с потеплением климата.

24. Построить модель изменения качества почвы возле нефтеперерабатывающего завода.

25. Построить модель изменений в озере в связи с эвтрофированием.

ТЕМА 25

КОМПЬЮТЕРНАЯ ИГРА «ОЗЕРО»

Обострение противоречий между обществом и природой, возникновение проблем глобального и регионального характера неизбежно требует перехода к новому экологическому образованию, помогающему человеку осознать свое место в мире и свою ответственность перед ним, наладить правильные отношения с окружающей средой.

В настоящее время в экологическом образовании все чаще применяют имитационное игровое моделирование, в том числе и с использованием компьютерных моделей. При этом обучаемые, как правило, исполняют какую-либо роль, решая профессиональную задачу в игровой постановке, соответствующей реальной деятельности в имитируемой ситуации. Это позволяет не просто усваивать содержание изучаемого вопроса и знакомиться со структурой и функционированием моделируемых природных и природно-технических систем, но и обеспечивает приобретение опыта коллективного принятия решений в тех случаях, когда их апробация в реальных условиях затруднена (например, когда вмешательство в природную среду или производственный процесс связано с риском и может привести к значительному ущербу, аварии, гибели животных и т. д.).

Имитационная игра «Озеро» (Комаров, 1994) предназначена для активного изучения процессов согласования индивидуальных и общественных интересов. В ходе этой игры учащиеся постигают принцип ограниченности природных ресурсов для размещения отходов и принцип коллективной ответственности за качество природной среды.

Действие происходит в условной хозяйственной системе, расположенной на берегу одного озера. Участники игры исполняют роли директоров предприятий. Предприятия производят продукцию, для изготовления которой требуется вода. Эту воду пред-

приятия берут из озера. Отработанная в процессе производства грязная вода сбрасывается в озеро, которое обладает некоторой ограниченной способностью к самоочищению. Главная цель игры с точки зрения ее участников – получить максимальную прибыль. Каждый выбирает свою стратегию получения прибыли и принимает одно из пяти возможных решений. От этих решений зависит состояние Озера. Чем хуже качество воды в озере, тем меньше прибыль отдельного предприятия. Ожидаемую прибыль в следующем месяце можно оценить согласно матрице, в которой каждому уровню качества воды соответствует та или иная прибыль, причем прибыль растет с улучшением качества воды.

Для успешного управления экологической системой «Озеро» нужно усвоить закономерности, лежащие в основе водного баланса, превращений и деструкции веществ, насыщения воды кислородом, влияния метеоусловий на экологические процессы.

Компьютерная программа моделирует естественные процессы, протекающие в системе, включающей в себя:

Водоем средних размеров в черте города, разбитый на три зоны – промышленную, среднюю и культурную. Нормальным считается уровень воды в озере от 9,8 до 10,2 м.

Приближенные предприятия – завод, фабрика, база, использующие воду озера для своих технологических процессов, загрязняя её органикой и неорганикой. Объем забираемой воды равен объёму сбрасываемой. Концентрации органики и неорганики в сбрасываемой воде могут меняться через каждую декаду. Ботанический сад только забирает воду из озера.

Гидрометцентр, обеспечивающий краткосрочный прогноз (до 10 дней): температуры воздуха и воды, осадков, давления и силы ветра.

Две стационарные станции ежедневного взятия проб воды в промышленной и средней зонах и одну передвижную – для взятия проб воды по необходимости в культурной зоне.

Службу управления качеством воды, которая осуществляет подкачку чистой воды в промышленную зону (р), сброс воды из культурной зоны (s), искусственную аэрацию вод средней и культурной зон.

Финансирующий орган. Для управления озером на два месяца выделяется 300 условных рублей. Эти деньги расходуются на

перекачку воды из расчета 0,5 усл. руб. за каждые 1000 куб. м и на искусственную аэрацию из расчета 0,25 руб. за повышение концентрации кислорода в одной зоне на 1 мг/л.

Управление экосистемой циклическое. В начале каждого цикла обучаемый оценивает:

А) состояние озера – качество воды в каждой зоне озера, уровень воды;

Б) прогноз погоды на текущую декаду;

В) прогноз деятельности прибрежных предприятий по объему используемой воды и концепциям органики и неорганики в сточных водах;

Г) имеющуюся в его распоряжении денежную сумму для расхода на перекачку воды и аэрацию.

Игровой цикл состоит из последовательности обращения к режимам меню в таком порядке «состояние – прогноз – управление – работа».

Задание. В течение первого месяца (июня) вывести озеро из запущенного состояния до уровня предельно допустимых концентраций (ПДК) по кислороду, органике и неорганике, а в течение второго месяца (июля) поддерживать в озере качество воды на достигнутом уровне. Не штрафуются превышение по кислороду в 1,5 раза.

В начале каждого игрового цикла с помощью раздела меню «состояние» следует проанализировать текущие концентрации кислорода, органики и неорганики в каждой зоне, уровень воды в озере, оставшуюся денежную сумму для расхода на перекачку воды и аэрацию. Затем необходимо оценить прогноз погоды и прогноз деятельности предприятий.

После этого задачей оказывается выбор:

Продолжительности очередного цикла (от 3 до 10 суток),

Мощность подкачки чистой и откачки загрязненной воды,

Интенсивности искусственной аэрации.

После ввода этих данных в компьютер моделируется естественное поведение экологической системы в течение длительности выбранного цикла.

Весь процесс в целом имеет следующие особенности. Если уровень воды в озере выходит за пределы допустимых норм, то

на одни сутки станции перекачки переводятся автоматически на режим подъема уровня или его снижения. Если выделенная на управление денежная сумма оказывается израсходованной раньше двухмесячного срока, то обучаемый в оставшиеся дни не может воздействовать на систему (экосистема развивается с отключенными станциями воды и её аэрации). Начиная со второго месяца управления экосистемой обучаемому начисляются штрафные баллы: по одному за каждый день, когда не было обеспечено качество воды. Обучаемый отстраняется от должности диспетчера после получения 16-го штрафного балла.

Природоохранные мероприятия:

Подкачка и сброс воды создают в озере течение из промышленной зоны через среднюю в культурную зону. В результате чего в водоеме происходят процессы разбавления, перемешивания и уменьшения концентраций загрязнителей.

Концентрация органики растет за счет сброса сточных вод предприятиями, а убывает за счет деструкции и разложения. Кроме того, концентрация органики изменяется вследствие перетока воды из одних зон в другие. Следует иметь в виду, что чем выше концентрация кислорода в воде, тем сильнее идет разложение органики с образованием неорганических веществ, значит, увеличивается концентрация неорганики.

Концентрацию неорганики можно понизить только проточностью воды. Следует учесть, что станции перекачки воды переводятся автоматически на режим подъема уровня ($p = 5000 \text{ м}^3/\text{сут.}$, $s = 0 \text{ м}^3/\text{сут.}$) или его снижение ($p = 0 \text{ м}^3/\text{сут.}$, $s = 5000 \text{ м}^3/\text{сут.}$), если уровень воды выходит за пределы допустимых норм.

Растворенный в воде кислород как расходуется, так и пополняется ввиду нескольких причин. Пополняется кислородом вода за счет естественной и искусственной аэрации, также за счет дождевой воды и откачки чистой воды.

Расход кислорода обусловлен разложением органики и водообменом с предприятиями. Забирая воду, обогащенную кислородом, и сбрасывая воду без кислорода, предприятие уменьшает концентрацию кислорода в воде.

Однако, сколь бы интенсивной не была искусственная аэрация, она не может дать концентрацию кислорода выше предель-

ного насыщения (эта величина зависит от температуры воздуха и атмосферного давления). Значит, концентрацию кислорода в промышленной зоне можно повышать за счёт подкачки чистой воды, тогда как в средней зоне и культурной это следует делать за счет аэрации, причем аэрация в средней зоне должна быть выше, чем в культурной.

ТЕМА 26

ИМИТАЦИОННАЯ ИГРА «СТРАТЕГИЯ»

Имитационная игра «Strategem» разработана в 1983–1984 гг. группой ученых Международного анализа в Вене под руководством профессора Д. Медоуза (США). Название игры является аббревиатурой трех английских слов – Strategy game managment (игровое стратегическое управление). В русском варианте игра получила название «Стратегия».

Основная цель игры заключается в демонстрации взаимозависимости долгосрочных решений в экономике, охране окружающей среды, использования энергии, повышении благосостояния населения. Имитационная игра «Стратегия» используется при изучении проблем экономики и охраны окружающей среды более чем в 30 странах мира в учебных центрах подготовки государственных служащих, руководителей промышленности и сельского хозяйства, специалистов по проблемам охраны окружающей среды, международной торговли и международных отношений.

В основу игры положена имитационная модель гипотетической страны, разработанная с использованием метода системной динамики, основоположником которой является профессор Дж. Форрестер.

В качестве характеристик такой страны выбраны следующие:

Численность населения и его жизненный уровень.

Производство и эффективность использования энергии.

Промышленное производство товаров и социальные услуги.

Производство продуктов питания и охрана окружающей среды.

Международная торговля и финансы.

Игра «Стратегия» позволяет участникам:

- изучить и почувствовать закономерности развития страны;
- получить знания о внутрисистемных закономерностях развития;

- обрабатывать и обобщать информацию, анализировать причины возникающих сложных ситуаций, ставить цели, планировать стратегические долгосрочные решения;

- работать в группе и принимать групповые решения, выдвигать и оспаривать предложения, убеждать и вести дискуссию, идти на компромиссы;

- устанавливать взаимоотношения, проявлять взаимопомощь, тактичность, коммуникабельность.

Игра «Стратегия» позволяет изучать не только отдельные проблемы, но и влияние их друг на друга. Она может служить основой междисциплинарного обучения, так как в игре требуются знания, полученные в рамках разных курсов.

Правила игры. Участники образуют 2–3 команды по 5–10 человек. В каждой команде один (или два) участника выполняют роль министров гипотетической страны. Цель игры – за 10 шагов, соответствующих 50-летнему периоду развития страны, достичь социально, экономически и экологически устойчивого сбалансированного развития. Для достижения этой цели в распоряжении участников широкий спектр социальных и экономических решений, но к успеху ведут лишь те из них, которые основываются на знании причинно-следственных связей в системе модели страны.

Наибольшего успеха достигает та команда, которой удастся поддерживать устойчивое развитие страны и рост уровня жизни. При этом существует несколько путей к цели. Задача игры показать, какая политика приводит к успеху, а какая – нет.

В игре пять ролей:

«Министр по проблемам населения» должен обеспечить регулирование численности населения и рост жизненного уровня;

«Министр энергетики» отвечает за производство энергоресурсов и внедрения энергосберегающих технологий;

«Министр промышленности и социальных услуг» отвечает за промышленное производство товаров и социальные услуги (медицинское обеспечение и образование);

«Министр сельского хозяйства и охраны окружающей среды» отвечает за производство продуктов питания и состояние окружающей среды;

«Министр внешней торговли и финансов» отвечает за внешнюю торговлю и финансы.

Каждый участник выполняет роль одного из пяти министров (возможно исполнение роли одного министра двумя участниками). Министры работают вместе, как единый кабинет, принимая решения о распределении имеющихся ресурсов продуктов питания, товаров потребления и энергетических ресурсов. Их решения влияют на рост численности населения, расширение производственных мощностей, обеспечение населения социальными услугами (медицинским обеспечением и образованием), состояние окружающей среды, эффективность экономики, уровень экспорта, размер внешнего долга.

В игре 10 шагов или периодов.

Решения, принятые в начале каждого периода, определяют развитие страны в течение 5 лет. Министры записывают свои решения на бланках, одновременно отмечая на специальном игровом поле с помощью фишек свои решения, и передают данные оператору для ввода в компьютер. Компьютер по специальной программе моделирует экономику страны, обрабатывает решения, принятые кабинетом министров, и как результат выдает информацию, характеризующую состояние страны на следующий период.

Активность участников поддерживается соревнованием между командами. Для каждой команды по компьютерной программе вычисляется комплексный индекс уровня жизни, называемый «сводный счет», который зависит от количества продуктов питания и товаров потребления, выделяемых для населения на каждом этапе. Условно принимается, что в начале игры каждая сторона имеет 2 единицы продуктов питания и 2 единицы товаров потребления на душу населения. «Сводный счет» учитывает каждую единицу продуктов питания как 4, а единицу товаров – как 1. Таким образом первоначальный «сводный счет» для всех команд равен $4 \cdot 2 + 2 = 10$. В процессе игры значение «сводного счета» команды за все прошлые периоды усредняется и получается «сводный счет» за текущий период.

Другой способ оценки состояния экономики стран – это сравнение достигнутого состояния страны с желательными значени-

ями ключевых показателей, которые в листе решений каждого министра приведены в разделах «текущая ситуация» и «полезная информация» в колонках «цель». Эти данные не являются оптимальными, а получены на опыте использования игры. Они могут быть даже превзойдены каждым, кто глубоко разобрался в сложной структуре связей игры. Важно, чтобы участники, ориентируясь на эти целевые значения, проводили хорошо продуманную стратегическую политику управления страной.

Так как начальное состояние характеризует слаборазвитую экономику, целевые данные могут трактоваться как данные для развитых стран.

Перемещение по игровому полю осуществляется против часовой стрелки, начиная от Решения 1 к Решению 9, последовательного принимаемого игроками.

Решение 1: связано с распределением имеющихся продуктов питания (на потребление и экспорт).

Решение 2: распределяются имеющиеся товары – на нужды населения, капиталовложения и экспорт.

Решение 3: распределение энергоресурсов – на нужды населения, на производственные нужды, на экспорт и в запас.

Решение 4: распределение выделенных на производственные нужды энергоресурсов между промышленностью и сельским хозяйством.

Решение 5: капиталовложения распределяются по шести секторам экономики.

Решение 6: устанавливается объем всего экспорта.

Решение 7: определяется размер внешнего займа.

Решение 8: устанавливается объем выплат по внешнему долгу.

Решение 9: оставшаяся валюта распределяется для импорта продуктов, товаров и энергоресурсов.

В конце каждого игрового цикла министр внешней торговли и финансов заполняет сводный лист решений команды и передает его оператору компьютера. Получив распечатку результатов, он передает их соответствующим министрам для заполнения очередной колонки листов решений с названиями «Текущая ситуация» и «Полезная информация». В соответствии с этими данными

ми на игровом поле фишками устанавливаются новые значения базовых показателей для следующего цикла игры.

Задание. Студенты группы делятся на команды, каждая проходит не менее пяти циклов игры, результаты сравнивают, определяют победителей.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Значения критерия t на 1 %-ом и 5 %-ом уровнях значимости

Число степеней свободы	Уровни значимости		Число степеней свободы	Уровни значимости	
	0,05	0,01		0,05	0,01
1	12,71	63,66	18	2,10	2,88
2	4,30	9,93	19	2,09	2,86
3	3,18	5,84	20	2,09	2,85
4	2,78	4,60	21	2,08	2,83
5	2,57	4,03	22	2,07	2,82
6	2,45	3,71	23	2,07	2,81
7	2,37	3,50	24	2,06	2,80
8	2,31	3,36	25	2,06	2,79
9	2,26	3,25	26	2,06	2,78
10	2,23	3,17	27	2,05	2,77
11	2,20	3,11	28	2,05	2,76
12	2,18	3,06	29	2,05	2,76
13	2,16	3,01	30	2,04	2,75
14	2,15	2,98	50	2,01	2,68
15	2,13	2,95	100	1,98	2,63
16	2,12	2,92	∞	1,96	2,58
17	2,11	2,90			

Приложение 2

Значения критерия χ^2

Число степеней свободы	Уровень значимости 0,05	Число степеней свободы	Уровень значимости 0,05	Число степеней свободы	Уровень значимости 0,05
1	3,84	6	12,59	11	19,68
2	5,99	7	14,07	12	21,03
3	7,81	8	15,51	13	22,36
4	9,49	9	16,92	14	23,68
5	11,07	10	18,31	15	25,00

Приложение 3

Значения критерия F на 5 %-ом уровне значимости
(вероятность 95 %)

Степени свободы для меньшей дисперсии (знаменателя)	Степени свободы для большей дисперсии (числителя)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,27	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,43
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76
13	4,65	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60
15	4,54	3,70	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,55	2,48	2,43	2,38

Степени свободы для меньшей дисперсии (знаменателя)	Степени свободы для большей дисперсии (числителя)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,47	2,40	2,35	2,30
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,45	2,38	2,32	2,28
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30	2,26
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,41	2,34	2,25	2,24
26	4,22	2,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,36	2,29	2,24	2,19
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21	2,12
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,07
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,02
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,10	2,03	1,97	1,92

Приложение 4

Индивидуальное задание к теме 1 и 2.

**Сгруппировать данные, построить вариационную кривую
и рассчитать основные статистические характеристики
для дискретного количественного признака (число деревьев, шт.)**

Номер учетного участка	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10	10	8	12	12	9	11	12	9	9
2	8	13	11	10	9	13	12	12	9	12
3	11	10	8	11	12	8	9	8	11	12
4	8	9	13	7	9	10	7	11	7	9
5	14	7	12	9	9	9	11	12	8	10
6	9	11	9	10	13	7	11	12	11	6
7	7	10	11	9	6	7	9	13	10	8
8	8	9	9	9	8	14	7	7	13	10
9	12	10	12	8	8	8	10	13	6	10
10	9	11	9	13	12	9	13	8	10	9
11	6	12	9	10	10	8	12	10	8	11
12	9	8	7	10	13	7	11	6	9	7
13	8	8	9	11	10	9	8	9	7	10
14	8	13	12	7	9	10	9	11	9	11
15	10	9	9	14	11	9	12	12	8	11
16	9	12	9	13	7	12	11	11	14	9
17	10	7	10	8	11	8	11	10	10	7
18	13	9	7	12	10	8	6	13	8	14
19	11	14	10	10	7	6	10	14	12	11
20	7	9	14	11	10	9	7	12	7	13
21	10	8	11	12	14	11	14	11	8	11
22	10	11	10	11	10	10	10	9	12	8
23	9	9	6	6	11	11	8	10	10	11
24	8	10	8	10	11	8	8	12	13	10
25	9	6	10	14	10	9	14	12	11	10

Приложение 5

Индивидуальное задание к теме 1 и 2.

Сгруппировать данные, построить гистограмму распределения частот и рассчитать основные статистические характеристики для непрерывного количественного признака (высота растения, см)

Номер учетного растения	вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	106	94	95	105	100	89	86	107	80	95
2	102	89	90	87	87	92	97	96	90	103
3	101	96	92	110	102	90	98	93	104	110
4	100	84	88	96	98	82	101	92	90	87
5	93	95	110	110	103	95	105	101	84	92
6	90	94	110	80	85	106	95	97	99	85
7	95	84	90	97	87	97	86	99	86	87
8	89	102	94	90	103	90	86	99	89	90
9	91	93	82	101	95	90	83	96	86	100
10	96	91	110	97	88	99	92	88	89	101
11	81	97	99	98	91	91	80	96	102	101
12	96	80	103	88	99	95	92	87	89	94
13	89	91	94	89	80	100	92	98	84	80
14	104	91	80	93	107	97	93	105	93	90
15	97	87	99	102	109	104	87	110	95	87
16	97	89	93	93	102	99	100	90	84	91
17	89	91	99	96	99	90	108	92	95	81
18	99	87	101	95	95	101	91	91	96	94
19	95	86	96	107	108	108	99	102	90	83
20	110	100	88	96	105	80	104	106	85	107
21	86	110	100	83	92	96	110	85	110	91
22	80	99	95	84	95	94	93	84	82	87
23	83	108	96	95	96	102	87	89	94	83
24	94	100	91	86	95	95	101	80	86	93
25	93	104	88	102	110	110	99	84	101	109

Приложение 6

Индивидуальное задание к теме 1 и 3.

Сгруппировать данные, построить диаграмму распределения частот и рассчитать основные статистические характеристики для качественного признака (больные, здоровые растения (+, -))

Номер учетного растения	вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-	+	+	-	+	-	+	-	-	+
2	+	-	+	+	+	-	-	-	-	+
3	+	+	-	+	+	-	-	-	-	-
4	+	+	+	-	+	+	+	-	+	-
5	-	+	+	-	+	-	-	+	+	+
6	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
7	-	+	-	-	-	-	+	+	+	+
8	-	-	+	+	+	-	-	+	-	-
9	-	-	-	+	-	-	+	+	+	+
10	-	-	+	+	+	+	+	-	+	+
11	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+
12	-	+	+	-	+	-	+	-	+	-
13	+	+	-	+	-	-	+	+	-	-
14	-	+	-	-	+	+	-	-	-	-
15	-	-	+	+	+	-	-	-	-	-
16	-	-	+	-	+	-	-	+	+	-
17	-	+	-	+	+	+	-	-	+	+
18	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-
19	-	+	-	-	+	+	+	-	+	-
20	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-
21	-	-	+	+	+	+	+	-	-	-
22	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-
23	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-
24	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-
25	-	+	-	+	-	+	-	-	+	+

Приложение 7

Индивидуальное задание к теме 5. Определить, доказывают ли результаты опытов губительное действие инсектицидов на насекомых

Вариант	Вид насекомых	Погибли	Поврежденные	Здоровые
1	1	70	47	60
	2	43	57	62
	3	42	34	46
2	1	62	44	78
	2	31	37	57
	3	98	53	87
3	1	49	37	35
	2	56	43	45
	3	57	33	73
4	1	62	61	61
	2	97	64	95
	3	108	67	70
5	1	54	85	60
	2	80	69	51
	3	70	87	50
6	1	42	36	48
	2	43	32	37
	3	58	105	68
7	1	48	98	49
	2	42	107	97
	3	54	109	78
8	1	107	57	79
	2	54	51	81
	3	80	42	77
9	1	90	86	84
	2	105	59	107
	3	95	39	65

Вариант	Вид насекомых	Погибли	Поврежденные	Здоровые
10	1	61	78	55
	2	85	104	109
	3	61	86	110
11	1	36	71	64
	2	69	64	87
	3	36	46	69
12	1	68	79	52
	2	103	100	41
	3	77	57	47
13	1	85	92	67
	2	85	63	88
	3	51	48	46
14	1	90	85	90
	2	77	76	41
	3	87	87	87
15	1	103	62	71
	2	98	36	40
	3	82	55	62
16	1	73	56	37
	2	106	98	73
	3	83	39	52
17	1	75	88	98
	2	37	49	88
	3	51	50	95
18	1	78	98	71
	2	109	76	88
	3	71	87	60
19	1	38	49	43
	2	75	42	81
	3	92	49	80

Вариант	Вид насекомых	Погибли	Поврежденные	Здоровые
20	1	54	63	56
	2	85	46	57
	3	69	63	63
21	1	37	44	61
	2	54	96	74
	3	64	78	60
22	1	52	65	52
	2	62	40	31
	3	46	30	40
23	1	95	40	35
	2	56	32	53
	3	84	72	84
24	1	90	53	66
	2	92	78	36
	3	52	38	97
25	1	97	60	107
	2	68	81	82
	3	69	76	79

Приложение 8

Индивидуальное задание к теме 6. Провести корреляционно-регрессионный анализ признаков томата разновидности черри

№ образ-ца	Вы-сота расте-ния, см	Количе-ство кистей на глав-ном стебле, шт.	Среднее коли-чество плодов на кисти, шт.	Завязы-вае-мость, %	Товар-ная урожай-ность, кг/м ²	Общая урожай-ность, кг/м ²	Масса плода, г
1	253	10	16	93	4,35	4,58	10,75
2	228	10	13	92	4,34	4,56	11,45
3	195	11	6	89	2,24	2,24	12,50
4	282	10	8	96	6,34	6,34	19,61
5	277	11	16	87	4,93	4,93	11,47
6	233	9	10	94	5,29	5,29	15,39
7	263	12	15	93	5,81	5,81	11,79
8	323	12	10	95	6,42	6,42	10,89
9	282	11	14	91	4,49	4,49	10,75
10	242	11	22	64	5,74	5,74	12,13
11	127	6	8	95	4,41	4,41	32,35
12	283	10	29	90	7,86	7,86	17,17
13	205	9	21	88	4,11	4,11	7,98
14	163	6	66	68	4,32	4,32	9,04
15	283	11	19	88	4,81	4,81	12,66
16	288	11	14	90	6,02	6,02	14,07
17	258	10	7	93	1,37	1,37	5,69
18	225	11	12	91	4,82	4,82	16,29
19	200	8	6	94	2,18	2,18	13,74
20	290	11	18	95	7,02	7,02	10,93
21	187	8	10	87	2,57	2,57	9,86
22	230	10	16	87	5,19	5,19	9,53
23	215	9	11	77	2,48	2,48	12,80
24	163	8	13	94	3,28	3,28	12,99
25	227	9	11	89	4,35	4,35	12,37

Приложение 9

Индивидуальное задание к теме 7. Выполнить однофакторный дисперсионный анализ данных

Варианты	Повторности			
	I	II	III	IV
1	18,5	17,6	19,1	17,7
2	19,9	18,6	19,4	20,2
3	25,9	30,6	30,2	28,0
4	34,9	36,6	36,5	31,6
5	34,7	31,7	33,6	30,9
6	30,7	31,5	33,3	31,2
7	24,4	21,1	21,8	24,1
8	24,6	23	23,9	24,9
9	33,3	31,5	33,2	32,9
10	22,1	23,2	23,8	23,6
11	27,6	24,2	28,1	24,2
12	33,7	35,5	37,8	33,1
13	32,1	34,2	32,5	35
14	34,7	31,5	31,6	33,9
15	24,3	26,8	24,9	24,1
16	29,1	33,6	30,2	29,7
17	38,3	36,8	35,9	36,5
18	24,4	28	28,6	28,5
19	23,3	27,3	27,3	24,6
20	26,3	24,9	26,7	25,7
21	35,5	40,5	40,1	35,5
22	35,2	32,1	38,3	37,4
23	33,1	35,4	32,7	31,5
24	25,7	25,7	23,3	22,7
25	22,8	21,7	23,6	21,8
	28,9	30,2	31,1	32,2
	23,1	22,7	22,3	23,9
	24,7	23,4	25,8	24,1

Приложение 10

Список тем для планирования эксперимента

№	Название темы
1	Изучение влияния вида азотных удобрений на накопление нитратов в капусте белокочанной
2	Изучение влияния вида азотных удобрений на накопление нитратов в зеленой массе клевера
3	Изучение влияния вида азотных удобрений на урожайность зерна пшеницы
4	Изучение влияния различных доз азотных удобрений на динамику роста растений кукурузы
5	Изучение влияния весеннего выжигания травы на всхожесть семян травянистых растений
6	Изучение влияния дозы азотных удобрений на накопление нитратов в капусте цветной
7	Изучение влияния дозы азотных удобрений на накопление нитратов в зеленой массе кукурузы
8	Изучение влияния дозы азотных удобрений на урожайность зерна пшеницы
9	Изучение влияния дозы азотных удобрений на накопление нитратов в картофеле
10	Изучение коэффициента размножения ряски тройчатой в зависимости от времени
11	Изучение влияния дозы внесения доломитовой муки на накопление стронция в зеленой массе злаковых трав в районах Беларуси с разным уровнем радиоактивного загрязнения
12	Изучение влияния дозы внесения доломитовой муки на накопление стронция в зеленой массе клевера в районах Беларуси с разным уровнем радиоактивного загрязнения
13	Изучение влияния дозы внесения доломитовой муки на накопление стронция в картофеле в районах Беларуси с разным уровнем радиоактивного загрязнения
14	Влияние температуры на численность популяции долгоносиков
15	Влияние начального числа особей на изменение численности популяции долгоносиков
16	Влияние вида пищевого субстрата на изменение плотности популяции долгоносиков
17	Изучение концентрации свинца в талой воде, полученной из снега, взятого на различном удалении от автомагистрали
18	Изучение концентрации нефтепродуктов в талой воде, полученной из снега, взятого на различном удалении от автомагистрали

№	Название темы
19	Изучение влияния различных концентраций ауксина (регулятор роста) на прорастание семян моркови (гороха, томата)
20	Изучение влияния различных концентраций почвенного гербицида на прорастание семян моркови (гороха, томата)
21	Изучение влияния вида фосфорных удобрений на накопление меди в яблоках
22	Изучение влияния дозы аммонизированного суперфосфата на накопление меди в корнеплодах моркови
23	Изучение влияния ТЭС, работающей на угле на кислотность почвы в окрестностях
24	Изучение влияния времени учета на транспортную нагрузку в городе
25	Изучение влияния глубины взятия пробы на количество дождевых червей в пахотном горизонте

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Апанасова, З. В.* Проектирование и разработка базы данных компьютерной системы управления склоновой эрозией [Электронный ресурс] / З. В. Апанасова // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 6. – Дата доступа: 26.08.2016. – Режим доступа: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=15356>.

2. *Боровиков, В. П.* Программа STATISTICA для студентов и инженеров / В. П. Боровиков. – М.: Компьютер Пресс, 2001. – 301 с.

3. *Гершензон, В. Е.* Информационные технологии в управлении качеством среды обитания: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. Е. Гершензон, Е. В. Смирнова, В. В. Элиас; под ред. В. Е. Гершензона. – М.: Издат. центр «Академия», 2003. – 288 с.

4. География и мониторинг биоразнообразия [Электронный ресурс] / Н. В. Лебедева [и др.]. – М.: Из-во Науч. и учеб.-метод. центра, 2002. – 432 с. – Режим доступа: http://www.nature.air.ru/biodiversity/book3_1_5.html

5. *Денисова, С. И.* Полевая практика по экологии / С. И. Денисова. – Минск: Універсітэцкае, 1999. – 120 с.

6. *Джефферс, Дж.* Введение в системный анализ: применение в экологии / Дж. Джефферс; пер. с англ. Д. О. Логофета; под ред. и с предисл. Ю. М. Свирижева. – М.: Мир, 1981. – 256 с.

7. *Доспехов, Б. А.* Методика полевого опыта (с основами статистической обработки результатов исследований) / Б. А. Доспехов. – М.: Агропромиздат, 1985. – 351 с.

8. *Каюмов, М. К.* Программирование урожаев сельскохозяйственных культур / М. К. Каюмов. – М.: Агропромиздат, 1989. – 320 с.

9. *Козлов, М. В.* Планирование экологических исследований: теория и практические рекомендации / М. В. Козлов. – М.: Товарищество научных изданий КМК, 2014. – 171 с.

10. *Леньков, И. И.* Экономико-математическое моделирование систем и процессов в сельском хозяйстве / И. И. Леньков. – Минск: ДизайнПРО, 1997. – 304 с.

11. *Монтгомери, Д. К.* Планирование эксперимента и анализ данных / Д. К. Монтгомери; пер. с англ. – Л.: Судостроение, 1980. – 384 с.
12. Основы научных исследований: метод. указания / Белорусская государственная сельскохозяйственная академия; сост. В. З. Шарапо [и др.]. – Горки, 2000. – 60 с.
13. *Пегов, С. А.* Моделирование развития экологических систем / С. А. Пегов, П. М. Хомяков. – Л.: Гидрометеиздат, 1991. – 218 с.
14. *Полуэктов, Р. А.* Динамические модели экологических систем / Р. А. Полуэктов, Ю. А. Пых, И. А. Швытов. – Л.: Гидрометеиздат, 1980. – 288 с.
15. *Полуэктов, Р. А.* Динамические модели агроэкосистемы: монография / Р. А. Полуэктов. – Л.: Гидрометеиздат, 1991. – 311 с.
16. Простейшие методы статистической обработки результатов экологических исследований / сост. А. С. Боголюбов. – М.: Экосистема, 1998. – 13 с.
17. *Самарский, А. А.* Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 320 с.
18. *Смиряев, А. В.* Моделирование: от биологии до экономики: учеб. пособие для студентов специальности «селекция и генетика сельскохозяйственных культур»/ А. В. Смиряев, А. В. Исачкин, Л. К. Харрасова. – М.: Изд-во МСХА, 2002. – 122 с.
19. *Франс, Дж.* Математические модели в сельском хозяйстве / Дж. Франс, Дж. Торнли. – М.: Агропромиздат, 1987. – 400 с.
20. Учебник по статистике [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.statsoft.ru/home/textbook/modules/stcluan.html>.
21. *Энос, А. Р.* Биология окружающей среды. Проблемы и решения / А. Р. Энос, С. Э. Р. Бейли. – М.: Колос, 1997. – 98 с.

СОДЕРЖАНИЕ

КРАТКИЙ УКАЗАТЕЛЬ СИМВОЛОВ	3
ВВЕДЕНИЕ	5
Тема 1. ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ СОВОКУПНОСТИ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ И ЕГО ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ	7
Тема 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ	11
Тема 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ И АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ИЗМЕНЧИВОСТИ	19
Тема 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ И АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КАЧЕСТВЕННОЙ ИЗМЕНЧИВОСТИ	25
Тема 5. ОЦЕНКА СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ ОЖИДАЕМЫМИ И НАБЛЮДАЕМЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ПО КРИТЕРИЮ χ^2 (ХИ-КВАДРАТ)	28
Тема 6. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ И РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ	32
Тема 7. ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ	38
Тема 8. ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЖИЗНЕСПОСОБНОСТИ ПЫЛЬЦЫ ТОМАТА ПРИ РАЗЛИЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ МЕТОДОМ ОДНОФАКТОРНОГО ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА	48

Тема 9. ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ИЗУЧЕНИЮ ПРОРАСТАНИЯ СЕМЯН КУЛЬТУРНЫХ РАСТЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ СОРТОВ ПРИ НЕСКОЛЬКИХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ РЕЖИМАХ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ МЕТОДОМ ДВУХФАКТОРНОГО ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММЫ MICROSOFT EXCEL	49
Тема 10. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА	51
Тема 11. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ БАЗЫ ДАННЫХ	58
Тема 12. КЛАСТЕРНЫЙ АНАЛИЗ В ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ	60
Тема 13. МОДЕЛИРОВАНИЕ УРОЖАЙНОСТИ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ КУЛЬТУР	64
Тема 14. ОЦЕНКА ВИДОВОГО СХОДСТВА СООБЩЕСТВ	68
Тема 15. МОДЕЛИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО И ЛОГИСТИЧЕСКОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИИ	72
Тема 16. МОДЕЛЬ ПИЩЕВОЙ ЦЕПИ ИЗ ДВУХ ЗВЕНЬЕВ	74
Тема 17. МОДЕЛЬ ПИЩЕВОЙ ЦЕПИ ИЗ ТРЕХ ЗВЕНЬЕВ	76
Тема 18. ИМИТАЦИОННАЯ КАРТОЧНАЯ ИГРА «ОСТРОВ»	78
Тема 19. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЗАИМООТНОШЕНИЙ «ХИЩНИК – ЖЕРТВА» И «ПАРАЗИТ – ХОЗЯИН»	81
Тема 20. МОДЕЛЬ ПИЩЕВОЙ КОНКУРЕНЦИИ	85
Тема 21. МОДЕЛИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕСУРСОВ	89
Тема 22. МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ (МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ ГРИППА)	93

Тема 23. ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗВИТИЯ ЭКОСИСТЕМ МЕТОДАМИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИМПЛЕКС-МЕТОДА	95
Тема 24. РАЗРАБОТКА СЛОВЕСНОЙ, ГРАФИЧЕСКОЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ	109
Тема 25. КОМПЬЮТЕРНАЯ ИГРА «ОЗЕРО»	111
Тема 26. ИМИТАЦИОННАЯ ИГРА «СТРАТЕГИЯ»	116
ПРИЛОЖЕНИЯ	121
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	134



ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

Пугачёва Ирина Геннадьевна
Лещина Наталья Юрьевна
Таранова Ирина Николаевна

**МЕТОДЫ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОСИСТЕМ.
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ**

Учебное пособие

Редактор *Н. В. Боярова*
Компьютерная верстка *Ю. Н. Морковко*
Корректор *И. М. Подоматько*

Подписано в печать 24.03.2017. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 8,14. Уч.-изд. л. 4,29. Тираж 234 экз. Заказ 23.

Издатель и полиграфическое исполнение
государственное учреждение образования
«Республиканский институт высшей школы».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/174 от 12.02.2014.
Ул. Московская, 15, 220007, г. Минск.