СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОПЫТА

Математическая статистика– это один из разделов математики. Она позволяет делать умозаключения о всей совокупности на основе наблюдений над выборочной совокупностью, или выборкой. Все статистические методы основаны на теории вероятностей – науке изучающей общие закономерности в массовых случайных явлениях различной природы, и применяются везде, где приходится иметь дело с планированием экспериментов и обследований, с оценкой параметров и проверкой гипотез, с принятием решений при изучении сложных систем.

Главная обязанность экспериментатора – постановка добротных, целенаправленных опытов, а математическая статистика помогает исследователю в выборе оптимальных условий для проведения опыта, дает объективную, количественную оценку экспериментальным данным.

Математическая обработка результатов опыта позволяет определить границы возможных случайных колебаний полученных урожайных данных, т. е. установить достоверность различий между вариантами опыта.

При проведении полевых и вегетационных опытов с удобрениями (как бы тщательно их ни ставили) всегда наблюдается варьирование урожаев параллельных делянок и вегетационных сосудов одноименных вариантов. Причиной такого варьирования являются разного рода ошибки. Различают случайные, систематические и грубые ошибки.

Случайные ошибки — это ошибки, возникающие в результате неоднородности почвенного плодородия, индивидуальной изменчивости растений, случайных механических повреждений растений, поражения растений болезнями и др. Таких ошибок полностью избежать не удается; при соблюдении всех агротехнических приемов и требований при постановке опыта их можно свести к минимуму.

Систематические ошибки в полевом опыте обусловлены различным плодородием почвы опытного участка. Они завышают или занижают урожайность. Различают три типа (вида) систематической ошибки:

– сплошная, захватывающая все варианты всех повторений опыта;

– захватывающая все варианты одного или нескольких повторений;

– затрагивающая лишь некоторые варианты.

При сплошной систематической ошибке сравнимость результатов не нарушается, хотя сами результаты получаются завышенными или заниженными.

Второй вид систематической ошибки определяется различным плодородием почвы разных повторений опыта, при статистической обработке исключается из общего варьирования.

Систематическая ошибка третьего вида нарушает сравнимость вариантов, делает результаты опыта недостоверными.

Для того чтобы избежать систематической ошибки, необходимы детальное почвенное и агрохимическое обследование участка, проведение уравнительных и рекогносцировочных посевов.

Грубые ошибки возникают в результате нарушения основных требований к полевому опыту. Примером грубой ошибки могут служить внесение на делянку неверно рассчитанной дозы удобрений или внесение удобрений дважды на одну делянку, высев на делянке семян другого сорта и т. д. Такие допущенные ошибки устранить нельзя, испорченные делянки исключают, в агрономическую и математическую обработку результаты не вносят.

Для математической обработки и обоснованных выводов можно использовать лишь те результаты полевых опытов, которые не содержат грубых и систематических односторонних ошибок.

Дисперсионный анализ

Результаты опыта можно обрабатывать в целом для всего опыта и получить одну ошибку, которая затем и применяется для характеристики достоверности различных сравнений между вариантами опыта. Такой метод называется обобщенным. К обобщенному методу относится метод анализа рассеяний или дисперсионный анализ, который наиболее широко используется при обработке данных результатов полевого опыта. Этот метод разработан и введен в практику сельскохозяйственных исследований английским ученым Фишером. Этот метод может быть использован для обработки однофакторных и многофакторных опытов. В основе **дисперсионного анализа** лежит предположение, что опыт может считаться достоверным, когда разница (рассеяния) между вариантами больше, чем разница между повторностями одного варианта. Метод анализа рассеяния являясь обобщенным методом, позволяет находить одну общую ошибку средних урожаев (S_x) в среднем для всего опыта и одну общую ошибку разности двух средних (Sd) для любой пары сравниваемых вариантов в опыте.

В любом эксперименте изучаемый признак варьирует под влиянием организованных и случайных факторов.

В полевом опыте изменчивость поделяночных урожаев обусловлена тремя причинами:

1. Действием изучаемого фактора(в частности, виды, дозы, формы удобрений и т.д.) – **рассеяние по вариантам**.
2. Плодородием почвы каждого повторения(систематическая ошибка) – **рассеяние по повторностям**.
3. Случайными причинами(неточность измерений, пестрота почвенного плодородия внутри повторений, индивидуальная изменчивость растений и т.д.) – **остаточное рассеяние**.

Таким образом, общее варьирование (рассеяние) поделяночных урожаев можно разделить на три части:

$$C_y = C_v + C_p + C_z,$$

где C_y – сумма квадратов отклонений общего рассеяния; C_v – сумма квадратов отклонений рассеяния вариантов; C_p – сумма квадратов отклонений рассеяния повторений; C_z – сумма квадратов остаточного рассеяния.

Определение случайного рассеяния C_z, возникающего из-за случайных ошибок, и составляет важнейшую задачу дисперсионного анализа. Оно находится вычитанием из общего рассеяния по вариантам и повторностям.

При вычислении мы в таблицу вписываем поделяночные урожаи. Находим средний урожай по опыту. Затем квадраты отклонений Cy, Cv, Cp, Cz.

При проведении математической обработки методом дисперсионного анализа вводят понятие число степеней свободы, обозначаемой буквой V.

Для общего рассеяния по опыту число степеней свободы следующее:

$$V_y = n \cdot l - 1;$$

для рассеяния вариантов:

$$V_v = l - 1;$$

для рассеяния повторностей:

$$V_p = n - 1;$$

для остаточного рассеяния:

$$V_z = (l - 1)(n - 1),$$

где l – число вариантов; n – число повторений; n · l – общее число делянок в опыте.

Имея сумму квадратов отклонений и число степеней свободы вариантов, повторений и остатка, вычисляют их средние квадраты (дисперсию):

$$S_v^2 = \frac{C_v}{l-1};$$

$$S_p^2 = \frac{C_p}{n-1};$$

$$S_z^2 = \frac{C_z}{(l-1)(n-1)}.$$

Для установления достоверности различий действия изучаемых факторов находят специальный критерий существенности Фишера F. Причем различают F фактическое и F табличное. Фактическое значение критерия равно отношению дисперсии вариантов S_v^2 к случайной дисперсии S_z^2:

$$F_{факт} = \frac{S_v^2}{S_z^2}.$$

Теоретическое значение критерия F для принятого уровня значимости находят по таблицам (приложения 4 и 5). В большинстве случаев избирают 5%-ный, а при более строгом подходе – 1%-ный или даже 0,1%-ный уровень значимости.

Существенность различий в степени вариаций признаков оценивают, сравнивая $F_{факт}$ и $F_{табл}$. Если $F_{факт} \geq F_{теор}$, то различия между урожаями вариантов опыта в целом существенны. Если же $F_{факт} < F_{теор}$, то опыт в целом недостоверен, и тогда нет смысла оценивать частные результаты опыта.

Далее находят квадратическое отклонение:

$$S = \pm\sqrt{S_z^2}\ ;$$

обобщенную ошибку средних урожаев в опыте:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}},$$

где *n* – число повторностей.

Коэффициент вариации (%)

$$V = \frac{100 \cdot S}{\bar{x}},$$

является относительным показателем изменчивости. Изменчивость принято считать незначительной, если коэффициент вариации не превышает 10%, средней, если он находится в пределах 10 – 20%, и значительной – 20%.

Относительная ошибка выборочной средней выражается в процентах от средней арифметической (ее иногда называют точностью):

$$S_{\bar{x}},\% = \frac{100 \cdot S_{\bar{x}}}{\bar{x}}.$$

Ошибка разности:

$$S_d = 1{,}414 \cdot S\bar{x}.$$

Наименьшая существенная разность:

$$НСР_{05} = t_{05} \cdot S_d.$$

Величина критерия t зависит от принятого уровня значимости и числа свободы остатка (l - 1) (n – 1) и находятся по таблицам (приложение 6). Если разность между сравниваемыми вариантами больше или равна НСР, то она существенна, а если меньше, то несущественна.

При использовании дисперсионного анализа в практике экспериментальной работы существенность разности между средними величинами урожайности по вариантам опыта чаще всего определяется по $НСР_{05}$. Для ориентировочных расчетов можно использовать упрощенный показатель $3S_{\bar{x}}$ (утроенную ошибку средних урожаев). Утроенная ошибка средних урожаев будет равняться $НСР_{05}$ при числе степеней свободы для остатка $V_t \geq 16$. Если число степеней свободы остатка менее 16, то использование утроенной ошибки для оценки разности между средними величинами неправомерно. В этом случае В. Н. Перегудов рекомендует использовать следующие коэффициенты:

Остаточное число степеней свободы	2	3	4	5	6–7	8–9	10–12	13–15	16 и более
Коэффициент при $S_{\bar{x}}$	6,08	4,50	3,93	3,64	3,40	3,23	3,11	3,04	3,00

Корреляционный и регрессионный анализ

При характеристике количественной связи между явлениями и отдельными признаками следует различать функциональную (полную) и корреляционную (неполную) связь. При функциональной связи за изменением аргумента (независимая переменная) всегда следует строго определенное значение функции (зависимой переменной). Примером функциональной (полной) зависимости может служить сдельная оплата труда: в два раза больше сделал норму, соответственно в два раза больше получишь заработную плату.

При корреляционной, или статистической, связи изменение аргумента на определенную величину дает несколько значений функции. В отличие от функциональной корреляционная зависимость возникает тогда, когда один из признаков зависит не только от данного второго, но и от ряда случайных факторов. В сельскохозяйственном производстве чаще всего мы имеем дело с корреляционной неполной связью между отдельными признаками. Здесь чаще встречаются такие соотношения между переменными, когда каждому значению признака X соответствует не одно, а множество значений признака Y, т. е. их распределение.

Методы корреляции могут быть применимы к измерению связей между признаками (простая, парная корреляция) или измерению между тремя или большим числом признаков (множественная корреляция). При изучении корреляционных связей возникает два вопроса – о тесноте и форме связи.

Как при простой (парной), так и при множественной корреляции связь по форме может иметь линейный характер, т. е. выражена линейным уравнением, или криволинейный, когда связь выражается любым другим математическим уравнением (параболическим и т. д.).

При линейной корреляционной зависимости между двумя признаками Y и X она выражается уравнением прямой линии y = а + вх. Это уравнение называется уравнением регрессии Y на X, а соответствующая ему прямая линия – выборочной линией регрессии Y на X.

Когда при одинаковых превращениях аргумента функция имеет неодинаковые изменения, регрессия называется криволинейной.

Для анализа линейной корреляции между признаками X и Y проводят n независимых парных наблюдений, исходным каждого для которых является пара чисел X_1 и Y_1, X_2 и Y_2, …, X_n и Y_n.

В качестве числового показателя простой линейной корреляции, указывающей на тесноту (силу) и направление связи X (аргумента) с Y (функцией), используют коэффициент корреляции, обозначаемый буквой r. Он является безразмерной величиной, изменяющейся в области от -1 до +1. Коэффициент корреляции рассчитывают по формуле:

$$r = \frac{\sum (X - \bar{x})(Y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (X - x)^2 \cdot \sum (Y - y)^2}},$$

или, минуя вычисление отклонений и квадратов отклонений, по формуле

$$r = \frac{\sum xy - (\sum x \cdot \sum y) : n}{\sqrt{\left[\sum x^2 - (\sum x)^2 : n\right] \cdot \left[\sum Y^2 - (\sum y)^2 : n\right]}}.$$

Если каждой величине X соответствует только определенная величина Y, то корреляционная связь переходит в функциональную, которую можно считать частным случаем корреляционной. При полных связях, когда корреляционная связь превращается в функциональную, значение коэффициента корреляции равно для положительных или прямых связей +1, а для отрицательных или обратных связей -1. Чем ближе r к +1 или -1, тем теснее прямая линейная корреляционная связь, она ослабевает с приближением r к 0. Когда r = 0, между X и Y нет линейной связи, но криволинейная зависимость может быть. Считается, что при r < 0,3, корреляционная зависимость между признаками слабая, при r = 0,3 – 0,7 – средняя, при r > 0,7 – сильная.

Для оценки надежности выборочного коэффициента корреляции вычисляют его ошибку и критерий существенности. Стандартную ошибку коэффициента корреляции определяют по формуле:

$$S_r = \frac{\sqrt{1 - r^2}}{n - 2},$$

где S_r – ошибка коэффициента корреляции; r – коэффициент корреляции; n – количество пар сравнений, по которым вычислен коэффициент корреляции. Это количество уменьшается на 2, так как для получения коэффициента корреляции используются две средние величины двух рядов.

Для оценки степени достоверности или существенности рассчитывают критерий существенности коэффициента корреляции по формуле:

$$t_r = \frac{r}{S_r}.$$

Если $t_{rфакт} \geq t_{теор}$, корреляционная связь существенная. Теоретическое значение критерия *t* находят по таблице Стьюдента, принимая 5%-ный, а при более строгом подходе – 1%-ный уровень значимости. Число степеней свободы принимается равным n – 2.

Коэффициент корреляции показывает, насколько согласовано происходит варьирование одного ряда с изменением показаний другого.

Корреляционная зависимость показывает, что степень сопряженности в вариации двух рядов более точно измеряется квадратом коэффициента корреляции (r^2). Квадрат коэффициента корреляции называется коэффициентом детерминации и обозначается d_{yx}. Он показывает долю (%) тех изменений, которые в данном явлении зависят от изучаемого фактора. Например, при r = 0,8 не 80%, а около 64% изменчивости зависимой переменной Y (результативного признака) связано с изменчивостью независимой переменной X (факториального признака).

Коэффициент корреляции указывает на направление и степень сопряженности в изменчивости признаков, но не позволяет судить о количественной зависимости между изменениями в двух рядах, что важно в практических целях. В подобных случаях проводят регрессионный анализ. Его основная задача – определить форму корреляционной зависимости, т. е. уравнение прямой линии.

Уравнение линейной регрессии Y по X имеет вид:

$$Y = \bar{y} - в_{yx}(X - \bar{x}),$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$ – средние арифметические для ряда X и Y; $в_{xy}$ – коэффициент регрессии Y по X.

Коэффициент регрессии вычисляют по формуле

$$в_{yx} = \frac{\sum(X-\bar{x})(Y-\bar{y})}{\sum(X-\bar{x})^2}; \quad в_{xy} = \frac{\sum(X-\bar{x})(Y-\bar{y})}{\sum(Y-\bar{y})^2}.$$

Коэффициент регрессии – это число, показывающее, в каком направлении и на какую величину изменяется в среднем признак Y (функция) при изменении признака X (аргумента) на единицу измерения. Коэффициенты регрессии имеют знак коэффициента корреляции.

Бывают случаи, когда существует двухсторонняя зависимость, и тогда можно находить зависимость величины X от Y и наоборот. Однако в ряде случаев это лишено смысла. Например, мы можем находить зависимость между количеством выпавших осадков и урожаем только одностороннюю, т.е. как урожай зависит от количества осадков. Находить зависимость количества осадков от урожая лишено логического смысла.

Произведение коэффициентов регрессии равно квадрату коэффициентов корреляции:

$$в_{ух} \cdot в_{ух} = r^2.$$

Этой формулой можно пользоваться как проверочной при вычислении коэффициентов регрессии.

Ошибку коэффициента регрессии вычисляют по формуле

$$S_{вух} = S_r \sqrt{\frac{\sum (Y - \bar{y})^2}{\sum (X - \bar{x})^2}}; \quad S_{вху} = S_r \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{x})^2}{\sum (Y - \bar{y})^2}}.$$

Критерий существенности коэффициента регрессии определяют по формуле

$$t_в = \frac{в_{ух}}{S_{вух}}.$$

Критерий существенности для коэффициента корреляции может быть использован и для оценки значимости коэффициента регрессии, так как $t_в = t_r$. Существенность коэффициента регрессии оценивают по таблицам Стьюдента (приложение 6), число степеней свободы принимают равным 2.