Приведены информация и методики по изучению основных разделов курса, в которых на основе методов исследования операций осуществляется решение задач по оптимизации управления предприятиями АПК. Для студентов специальности "Экономика и организация производства в отраслях агропромышленного комплекса", а также для подготовки к проведению ими научных исследований с применением методов исследования операций и персональных компьютеров.

Ирина Шафранская. 1997-2010 гг. - доцент кафедры математического моделирования экономических систем АПК; 2010-2013 гг. - декан факультета экономики и права Белорусской государственной сельскохозяйственной академии; 2013 г. и по настоящее время - декан экономического факультета Белорусской государственной сельскохозяйственной академии.

978-3-659-94820-6

Исследование операций

Шафранская

Ирина Шафранская

Исследование операций

LAP LAMBERT Academic Publishing

Ирина Шафранская

Исследование операций

Ирина Шафранская

Исследование операций

LAP LAMBERT Academic Publishing RU

Impressum / Выходные данные
Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу http://dnb.d-nb.de.

Coverbild / Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Verlag / Издатель:
LAP LAMBERT Academic Publishing
ist ein Imprint der / является торговой маркой
OmniScriptum GmbH & Co. KG
Bahnhofstraße 28, 66111 Saarbrücken, Deutschland / Германия
Email / электронная почта: info@omniscriptum.com

Herstellung: siehe letzte Seite /
Напечатано: см. последнюю страницу
ISBN: 978-3-659-94820-6

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Многообразие и возрастающий объем стоящих перед экономистами задач требует использования количественных методов и моделей, которые помогают обосновать и принять оптимальные решения по вопросам управления предприятиями АПК.

В этих условиях важное значение имеет обучение студентов основам моделирования и использованию полученных знаний в практической деятельности для анализа сложившейся экономической ситуации и обработки поступающей информации, отыскания оптимальных решений задач, а также для приобретения навыков самостоятельного моделирования экономических процессов, протекающих на предприятиях АПК.

В пособии излагаются основные понятия и принципы исследования операций, элементы теории графов и сетевого планирования, теории игр, оптимального упорядочения, управления запасами и массового обслуживания. Рассматриваются вопросы линейного программирования, двойственных объективно обусловленных оценок, устойчивости оптимального решения, оптимизации принимаемых целочисленных решений.

Примеры, иллюстрирующие теорию, ориентированы на учет реальных производственных ситуаций, предполагают широкое использование персональных компьютеров и учитывают современные достижения в развитии количественных методов и моделей.

Порядок размещения материала предполагает переход от простых к более сложным темам.

В данном пособии освещены преимущественно те модели и методы, которые реально используются в процессе решения и анализа экономических задач, наиболее часто применяются при написании курсовых, научных и дипломных проектов и работ.

Пособие предназначено для студентов специальности «Экономика и организация производства в отраслях агропромышленного комплекса».

1. ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ КУРСА

1.1. Понятие об исследовании операций

Исследование операций представляет собой комплекс научных методов для решения задач эффективного управления организационными системами.

Как самостоятельное научное направление исследование операций оформилось в начале 40-х годов. Среди первых исследований в этом направлении можно назвать работу Л.В. Кантаровича «Математические методы организации и планировании производства», которая вышла в 1939 году и работа Дж. Данцига, посвященную решению линейных экстремальных задач, которая вышла в 1947 году.

В 1939-40 гг. методы исследования операций применялись для решения в основном военных задач, в частности для анализа и исследования боевых операций. Отсюда и возникло название дисциплины. За разработку метода линейного программирования в 1965 году Л.В. Канторовичу, В.С. Немчинову, В.В. Новожилову была присуждена Ленинская премия. В 1975 году Л.В. Канторович и Т. Купманс (америк.) получили Нобелевскую премию за вклад в теорию оптимизации распределения ресурсов. С увеличением масштабов производства, с развитием форм и методов организации управления экономическими системами совершенствовались и методы исследования операциями, расширялся круг решаемых этой наукой задач.

Сегодня методы исследования операций нашли широкое применение в различных областях. С помощью методов математического программирования решаются задачи функционирования системы транспорта, управления гидросистемами, муниципального хозяйства, электросистем, почтовой службы, нефтяных компаний, банков и т.д. Успешно решаются вопросы профессиональной подготовки кадров для социально-экономических систем, увеличения размера продаж предприятий, оптимизации инвестиций в производство, раскроя материалов при промышленном производстве и т.д.

Большой вклад в формировании и развитии этой науки внесли зарубежные ученые Р. Акоф, Р. Беллман, Г. Данциг, Г. Кун, Дж. Нейман, Т. Саати, Р. Черчмен (США), А. Кофман, Р. Фор (Франция) и др. Среди русских ученых можно назвать таких, как Л.В. Канторович, В.В. Новожилов, Д.Б. Юдин, Н.П. Федоренко и др.

В настоящее время получают развитие модели управления фирмой, позволяющие учесть возрастающую роль учета неопределенности и рисков при анализе конкретной экономической ситуации. Например, модель оптимизации портфеля оптовых закупок торгово-коммерческой фирмы, позволяющая учесть как разницу в оптовой и розничной цене, так и интенсивность продаж по каждому виду товара; модель управления кредитными ресурсами, привлекаемыми, как для пополнения оборотных средств, так и для технической модернизации оборудования с учетом различных вариантов производственной деятельности организации; модель перепрофилирования производства на выпуск новых видов продукции с целью повышения конкурентоспособности продукции предприятия; модель оптимизации диверсифицированного портфеля ценных бумаг, позволяющего обеспечить стабильность получения положительного результата и т.п.

При решении практических труднорешаемых задач исследования операций в последнее время используются алгоритмы. Первые примеры труднорешаемых задач были описаны в начале 60-х годов в работах Хартнаниса и Стирнза, позднее – в работах Фишера и Рабина. К данному классу можно отнести задачи по теории автоматов, математической логике, формальной теории языков. В большинстве случаев для решения труднорешаемых задач используются приближенные методы их решения, в частности метод «ветвей и границ», метод динамического программирования, методы отсечений, метод Лагранжа.

В современных условиях для решения практических задач исследования операций успешно применяются нейросетевые модели, позволяющие преобразовать с помощью весов обученной нейросети входной вектор в выходной. В сложных практических задачах обученная нейросеть выступает как эксперт, обладающий большим опытом и способный правильно ответить на трудные вопросы. Примерами исследования нейросетей служит медицинская диагностика, задачи экспертной оценки, поиска зависимостей в исследуемой базе данных, прогнозирования показателей и т.д.

Исследование операций – это наука, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного (оптимального) управления экономическими организационными системами. Из определения следует, что *предметом* исследования операций являются экономические системы организационного управления (организации, объекты, процессы), которые состоят из большого числа взаимодействующих между собой подразделений (подсистем), причем интересы подсистем (или подразделений) не всегда согласуются между собой и могут быть противоположны.

Целью исследования операций является количественное обоснование принимаемых решений по организации управления системами, объектами или процессами.

Решение, которое оказывается наиболее выгодным для всего объекта (системы), называется оптимальным, а решение, наиболее выгодное одному или нескольким подразделениям (подсистем) этого объекта называется субоптимальным.

Пример. Рассмотрим задачу управления запасами перерабатывающего молоко предприятия.

Производственный отдел предприятия стремится выпускать как можно больше продукции, т.е. молока и молочных продуктов промышленной выработки при наименьших затратах. Поэтому этот отдел заинтересован в выпуске продукции большими партиями, так как такое производство снижает затраты в расчете на единицу продукции. Но выпуск продукции большими партиями требует создания и больших объемов запасов сырья. К тому же данная продукция должна быть реализуемой.

Отдел сбыта тоже заинтересован в больших запасах готовой продукции, чтобы удовлетворять запросы потребителей в любой момент времени и в любом количестве.

Но отдел сбыта, стремясь продать как можно больше готовой продукции и должен одновременно предлагать покупателю и широкий ассортимент продукции, т.е. не только масло, сметану, творог и т.д., а творог, сметану разной жирности и в различной упаковке, разные виды масла: сливочное, крестьянское, шоколадное и т.д.

Поэтому между производственным отделом и отделом сбыта часто возникает конфликт по поводу ассортимента готовой продукции. При этом отдел сбыта настаивает на производстве продукции, выпускаемой в небольших количествах даже тогда, когда эта продукция убыточна, а производственный отдел требует исключения ее из ассортимента.

Финансовый отдел заинтересован в минимизации финансовых средств необходимых для работы предприятия, поэтому он заинтересован в уменьшении объемов запасов, как сырья, так и готовой продукции на складах. Таким образом, требования к размерам запасов у разных подразделений предприятия разные. И в этой ситуации возникает вопрос, какая же стратегия в отношении запасов более выгодна для предприятия в целом. Это одна из задач исследования операций.

Таким образом, для изучения предмета исследования операций необходимы знания таких дисциплин, как: высшая математика, математическая статистика, теория вероятности, вычислительная техника и т.д., а также знания всех дисциплин, которые изучают протекающие в объектах АПК процессы, т.е. таких курсов как растениеводство, животноводство, экономика, организация, управление производством, хранение, переработка продукции и т.д.

1.2. Системный подход – это научная основа принятия решений (понятие системы, строение системы, система и среда, классификация систем)

Системный подход предполагает рассмотрение любого объекта или процесса, протекающего в АПК в качестве целостной сложной динамической системы.

Системный подход представляет собой совокупность методологических принципов и теоретических положений, позволяющих рассматривать каждый элемент системы в его связи и взаимодействии с другими. Его сущность состоит в определенной направленности и последовательности анализа систем путем изучения их структуры, состава систем, характера взаимосвязей между элементами, между подсистемами, их устойчивости и чувствительности. Важно также рассмотрение системы во всех стадиях ее жизненного цикла, что позволяет выяснить ее взаимодействие с другими системами и окружающей средой. Наиболее важным в системном подходе является определение цели системы. Так как цель определяет характер функционирования системы, ее развитие.

Понятия системы связано с наличием некоторого множества совокупности элементов. Но не всякое множество элементов образует систему. Система – это не механический набор, а совокупность взаимодействующих между собой элементов.

Так, взаимосвязи и взаимодействия полей севооборота как системы проявляются в определенном их чередовании с учетом последствия предшественников. В то же время для определения системы недостаточно лишь наличия взаимосвязей и взаимодействия между элементами данного множества. Система обязательно предполагает целенаправленное взаимодействие, т.е. имеет определенную цель, как результат взаимодействия между элементами исследуемого множества.

Так, результатом чередования культур в севообороте является снижение засоренности полей, заболеваемости сельскохозяйственных культур с целью повышения их урожайности.

При этом важно уметь определить систему от среды, с которой взаимодействует система. Т.е. любая система – это конечное множество функциональных элементов и отношений между ними, выделенное из среды в соответствие с определенной целью.

В последнее время при изучении экономических систем наряду с их свойствами и взаимосвязями между элементами, все большее внимание уделяют и наблюдателю, т.е. человеку, выявляющему особенности изучаемого объекта или процесса. Таким образом, *система* – есть отражение в сознании исследователя, наблюдателя свойств системы, ее элементов в решении задач исследования операций. Так изучение товара или прогнозирование рынка не дает должного эффекта, а только комплексный подход позволяет эффективно прорваться на рынок с товарами и услугами, особенно с новыми товарами и оригинальными услугами. Таким образом, к решению любой проблемы необходимо подходить с позиций системного анализа.

Любую систему можно подразделить на подсистемы. Подсистема представляет собой выделенное по определенному правилу из системы целенаправленное подмножество взаимосвязанных элементов, которые взаимодействуют между собой, реализуют определенную функцию, необходимую для достижения цели, поставленной перед системой в целом. Например: биржи, представляя собой совокупность элементов, определенным образом связанных и определяющих главную функцию системы, но биржи, одновременно являются подсистемами более крупной системы – рыночной. Таким образом, подсистема обладает свойствами системы (в частности, свойством целостности). Этим подсистема отличается от группы элементов, для которых не определена подцель и не выполняется свойство целостности.

Расчленяя систему на подсистемы, следует иметь в виду, что выделение подсистем зависит от цели и может меняться по мере ее уточнения и развития представлений исследователя об анализируемом объекте или процессе.

Каждая подсистема состоит из упорядоченной совокупности элементов, имеющих свою постоянную структуру. Подсистему можно расчленять на элементы различными способами в зависимости от формулировки задачи, цели ее уточнения в процессе системного анализа. При необходимости можно изменять принцип расчленения, выделяя другие элементы подсистемы и получать с помощью этого нового расчленения более адекватное представление об анализируемом объекте или процессе. Таким образом, элемент – это предел членения подсистем с точки зрения аспекта рассмотрения системы, решения конкретной задачи, поставленной цели.

Все элементы подсистемы подразделяются на первичные и вторичные. Вторичные элементы можно не рассматривать при исследовании системы. Не включение хотя бы одного первичного элемента в подсистему и систему нарушает установившиеся связи и превращает ее в качественно новый объект. Например: если при создании рыночной системы исключить такой ее элемент как финансовые рынки, то рассматриваемая система уже не будет рыночной.

Каждый элемент выполняет свое собственное назначение в подсистеме. Наряду с этим все элементы находятся между собой в теснейшем взаимодействии и неразрывном единстве. Но отдельные элементы еще не создают целостности структуры подсистемы. Органическое целое образуется тогда лишь, когда между отдельными элементами устанавливаются устойчивые внутренние связи, благодаря которым подсистема и система приобретают целостный характер и новые качества.

Связь одновременно характеризует и строение (статику) и функционирование (динамику) системы. *Связь* – это ограничение степени свободы элементов. Т.е. элементы, вступая в связь друг с другом, утрачивают часть своих свойств, которыми они обладали в свободном состоянии.

Связи в конкретных системах могут быть одновременно охарактеризованы несколькими признаками.

Характеристика связей:

1. по направлению связи делят на направленные и ненаправленные;
2. по силе связи делят на сильные и слабые;
3. по характеру связи подразделяют на связи подчинения (часть-целое), связи порождения (т.е. причинно-следственные связи), равноправные связи, связи управления;
4. по месту приложения связи подразделяют на внутренние и внешние;
5. по направленности процессов в системе в целом или в отдельных ее подсистемах связи делятся на прямые и обратные.

Очень важную роль в моделировании систем играет понятие обратной связи.

Обратная связь может быть положительной, т.е. сохраняющей тенденции происходящих в системе изменений того или иного выходного параметра, и отрицательной, т.е. направленной против сохранения требуемого значения этого параметра.

Обратная связь является основой саморегулирования, развития систем, приспособления их к меняющимся условиям существования.

Теоретически для того, чтобы система не распалась на части, суммарная сила внутренних связей (т.е. связей между элементами системы) должна быть больше, чем суммарная сила внешних связей (т.е. связей между элементами системы и элементами среды).

Среда – это совокупность всех объектов, изменение свойств которых влияет на систему, а также тех объектов, чьи свойства меняются в результате поведения системы.

При исследовании объекта требуется выяснить, что собой представляет объект, что в нем обеспечивает выполнение поставленной цели. При этом цель рассматривают как заранее мыслимый результат сознательной деятельности человека. В этих случаях систему отображают путем расчленения на подсистемы, элементы с взаимосвязями.

При этом любую экономическую систему рассматривают как открытую, постоянно взаимодействующую со средой, учитывая этот факт при исследовании. Но при этом невозможно учесть все объекты, не включенные в систему и отнесенные к среде. Например: среда – это то окружение, в котором действует предприятие (т.е. система). Среда состоит главным образом из участников рыночных отношений. От их поведения, целевых установок и интересов в большей или меньшей степени зависят результаты хозяйственной и коммерческой деятельности предприятия. Все факторы среды подразделяют на управляемые и не управляемые.

Примером управляемого фактора среды является поведение покупателей продукции. С помощью системы формирования спроса и стимулирования сбыта, маркетинговых коммуникаций предприятие в состоянии изменить поведение потребителей в своих интересах, сделать их, например, постоянными клиентами-покупателями своих товаров.

Примером неуправляемых факторов среды являются природно-климатические факторы, влияющие на результаты работы аграрных формирований. Другим примером неуправляемых факторов среды является государственное законодательство, регулирующее предпринимательскую и другие формы хозяйственной деятельности предприятия (в частности налоговое законодательство). И предприятие вынуждено приспосабливаться к неуправляемым факторам среды, которые должны быть отражены при исследовании системы, что поможет выработать мероприятия, позволяющие снизить неблагоприятное воздействие неуправляемых факторов на систему.

При этом при исследовании систем отражают лишь наиболее существенные элементы, подсистемы и связи, которые мало меняются при текущем функционировании системы и обеспечивают существование системы и ее основных свойств, т.е. организованность системы, устойчивую упорядоченность ее элементов и связей. Определенные взаимосвязи, взаиморасположение составных частей системы, ее устройство отражает структура системы (в переводе с латинского означает строение, расположение, порядок). Одна и та же система может быть представлена по-разному в зависимости от стадии познания объекта, от его цели.

Моделируя функционирование системы необходимо разделить ее на определенные части, т.е. подсистемы, которые являются системами более низкого уровня и характеризуются наличием ограниченного и конечного числа элементов, находящихся во взаимосвязях между собой.

Любая система представляет собой нечто целое, в то же время она состоит из подсистем, каждую из которых можно рассмотреть как самостоятельную систему, и наоборот, любая система, представляя собой нечто целое, в то же время является подсистемой некоторой более крупной системы.

С одной стороны, *элементом* считается структурная единица, способная к относительно самостоятельному осуществлению определенной операции, не подлежащая дальнейшему расчленению на части на данном уровне анализа подсистемы.

С другой стороны, *элемент* подсистемы или системы представляет собой динамическую ячейку, изменяющую с течением времени свое состояние под воздействием внешних и внутренних факторов, воспринимающую входные и выдающую выходные сигналы в процессе взаимодействия с другими элементами подсистемы.

Элементы характеризуются следующими особенностями.

1. В каждый данный момент времени состояние элемента может быть количественно описано с помощью некоторой величины, называемой его мгновенной характеристикой. Например: курс акций компании на фондовой бирже составил 100$ на 01.08.2016 года.

2. Мгновенная характеристика элемента изменяется с течением времени по определенным законам функционирования. Например: колебание курса акций компании на фондовой бирже за 3 месяца составило 25%.

3. Характер изменения мгновенной характеристики элемента может описываться вероятностным процессом. Например: неблагоприятные погодные условия в Латинской Америке могут повлиять на мировые цены на кофе.

Известно много различных вариантов *классификации систем*.

Каждый тип систем должен качественно отличаться от других, а так как качественное отличие обеспечивается количеством, составом входящих в систему элементов и характером отношений между ними, то требуется выделить количественные, структурные и составные характеристики.

Количественно все подсистемы некоторой системы подразделяются на моноподсистемы (которые характеризуются одним свойством, одним элементом, одной связью) и на полиподсистемы (т.е. характеризующиеся многими свойствами, связями). Примером моноподсистемы является амеба, полиподсистемы - биржа, как подсистема рынка.

По составу системы подразделяются на статические и динамические. Для статической системы характерно то, что она находится в состоянии покоя, ее состояние с течением времени остается постоянным. Например: построенный дом. Динамическая система изменяет свое состояние во времени. Динамические системы подразделяются на функционирующие и развивающиеся. *Функционирующие* – это те, у которых процесс перехода из состояния в состояние не сопровождается сменой качества, цели. Например: автомобиль, персональный компьютер. *Развивающиеся* – это те, у которых изменение состояния приводит к смене качества. Например: человеческий организм, рыночная система.

Структурно т.е. по характеру взаимоотношений между элементами системы, а также между системой и средой системы могут подразделяться:

1) на открытые и закрытые;
2) детерминированные и вероятностные;
3) простые и сложные

Системы делятся на открытые и закрытые по характеру их взаимоотношений со средой. Большинство систем открытые, так как они постоянно обмениваются энергией, информацией со средой. Например: открытая рыночная система. Система называется закрытой, если в нее не поступают и из нее не выделяются энергия или информация. Например: экономика бывшего СССР.

Система называется детерминированной, если ее поведение полностью объяснимо и предсказуемо на основе информации об элементах системы и отношениях между ними. Например: изменение величины спроса и предложения. Для вероятностной системы (т.е. случайной, стохастической) знание элементов и отношений между ними в данный момент времени позволяет только предсказать вероятность нахождения системы в том или ином состоянии в последующие моменты времени. Например: становление рыночных отношений в РБ.

Характерных черт «сложности» много и до сих пор еще нет общепринятого определения понятия «сложная» система. Примером простой системы является спрос, предложение, а сложной - социальная система.

Несмотря на различия выделенных систем, все они обладают общими свойствами или *характеристиками*. Системы характеризуются следующими свойствами:

1. Свойство целостности, проявляется через взаимодействие эле-

ментов системы в соответствии с целью ее функционирования. Свойство целостности характеризуется появлением качественно новых характеристик у системы, не присущих ее элементам. Так, сельхозорганизация как система характеризуется показателями. Но характеристика отрасли в целом не может быть получена путем суммирования показателей сельхозпредприятий. Отрасль, как система более высокого порядка обладает новыми, не присущими предприятиям свойствами, которые должны получить отражение в новой системе показателей.

2. Свойство связанности системы проявляется в форме упорядоченности отношений между элементами, определенной внутренней структуры. Используя, это свойство и выделяют рассматриваемую систему их окружающей среды.

3. Свойство разнообразия системы зависит от числа элементов системы, возможных состояний каждого элемента и вероятности этих состояний. Каждый элемент обладает разными свойствами и проявляет их по-разному. Целенаправленное функционирование системы возможно только благодаря ограничению разнообразия элементов, в силу их взаимодействия между собой. Такое ограничение лежит в основе управления системой.

4. Свойство сложности системы зависит от ее величины (числа элементов, образующих систему, степени разветвленности внутренней структуры, характера функционирования (т.е. одноцелевое или многоцелевое)). Предприятия и сферы АПК относятся к многоцелевым системам.

5. Свойство организованности системы проявляется в изменении соотношения между нарастающей сложностью и совершенствованием структуры. Благодаря совершенствованию структуры и организованности повышается управляемость системы.

Принципиальной *особенностью экономических систем* является участие в них человека, как пользователя ресурса труда, так и носителя и преобразователя информации. Но в то же время человек стоит над экономической системой, определяя цель ее функционирования, что приводит к проявлению у экономических систем особых свойств.

1. Изменчивость отдельных параметров системы и стохастичности ее поведения, так как масштабы агропромышленного производства как управляемой системы несравненно больше, чем любой управляемой технической системы. Причем, с развитием производительных сил, параметры системы изменяются, что вызывает необходимость исследования новых закономерностей развития производства и их использования в управлении. Участие в агропромышленном производстве биологических систем (сельскохозяйственных растений, живот-

ных) и их зависимость от случайных природных факторов обуславливают вероятностный (стохастический) характер многих производственных процессов, что необходимо учитывать в управлении производством.

2. Уникальность и непредсказуемость поведения системы в конкретных экономических условиях. Благодаря наличию у системы активного элемента, т.е. человека, у системы проявляется «свобода воли». Но в то же время наличие у нее предельных возможностей, которые определяются ограниченными ресурсами (т.е. элементами, их свойствами). Участие человека в агропромышленном производстве обуславливает необходимость учета комплекса социальных, биологических, экономических и других факторов.

3. Способность изменять свою структуру, сохраняя целостность и формировать варианты поведения. Способность адаптироваться к изменяющимся условиям. Агропромышленное производство как система постоянно совершенствуется, что необходимо учитывать при моделировании. С усложнением производства повышаются требования к методам сбора, накопления, переработки информации.

4. Способность и стремление к целеобразованию. В отличие от технических систем, которым цели задаются извне, в экономических системах цели формируются внутри системы. Таким образом, все выявленные особенности экономических систем необходимо учитывать при моделировании, которое является основным способом исследования систем.

1.3. Модели исследования операций (понятие модели, классификация моделей, принципы построения экономико-математических моделей, типовые модели исследования операций)

Для изучения процессов управления производством, нахождения наилучшего решения хозяйственной ситуации в конкретных экономических условиях создаются модели.

Модель позволяет имитировать поведение системы в различных условиях, включая и такие, которые в действительности редко встречаются или сопряжены с большими затратами ресурсов или риском. Отпадает необходимость в дорогостоящих натуральных экспериментах. В общем смысле слова *модель* – это некоторый аналог той системы, которой мы должны управлять, получая знания из исследования данного аналога. При этом следует иметь в виду, что сходство между моделью и оригиналом наблюдается в наиболее существенных чертах с точки зрения цели исследования.

По своей природе модели могут быть физическими и математическими. Физические модели похожи на оригинал по физической природе, но отличаются от оригинала размерами, скоростями и т.д. Математические – это те модели, которые не похожи на оригинал, но с помощью математических уравнений или неравенств описывают протекающие в оригинале экономические процессы. Математическая модель – это способ описания операции, позволяющий исследовать ее математическими методами. При этом под операцией понимают управляемое мероприятие, направленное исследователем на выбор стратегии (параметров, характеризующих изучаемую систему), позволяющей достичь поставленную цель.

В операционных исследованиях применяются только математические модели.

Математическая модель – это концентрированное выражение наиболее существенных взаимосвязей и закономерностей поведения исследуемой системы, записанное в математической форме. Но так как все особенности и условия функционирования системы учесть в модели не возможно, то необходимо и достаточно учесть в модели все основные условия развития системы (первичные элементы и их связи).

Исследование систем на их моделях и перенесение полученных знаний на оригинал при управлении его поведением называется *моделированием*.

Классификация моделей.

По временным характеристикам (т.е. по периоду планирования) все модели делятся на:

1) долгосрочные (срок планирования 5-10 лет);

2) среднесрочные (период планирования 3-5 лет);

3) краткосрочные (1-3 года);

4) модели оперативного планирования (до 1 года).

В современных условиях наибольшее распространение получили модели краткосрочного и оперативного планирования.

По характеру взаимосвязей компонентов модели делятся на:

1) детерминированные – это модели, в которых результат полностью и однозначно определяется набором независимых переменных. Такая модель может быть описанием как вероятностной системы (тогда она является некоторым ее упрощением), так и детерминированной системы.

2) стохастические модели – это модели, которые описывают случайные процессы, подчиненные законам теории вероятности. При

этом стохастические модели более реальнее отражают экономические процессы, которые, как правило, имеют вероятностный характер, так как результаты хозяйственной деятельности зависят не только от управляемых человеком факторов, но и находятся в зависимости от действия случайных факторов (в частности погодно-климатических факторов). Результаты решения стохастической модели позволяют обосновать мероприятия, способствующие снизить влияние случайных факторов на конечные результаты производства: 1) создание страховых фондов кормов; 2) изменение направлений использования сельхозпродукции в зависимости от случайных исходов производства; 3) формирование рационов кормления животных и т.д.

В зависимости от учета фактора времени модели делятся на:

1) статические;

2) динамические.

Модель носит динамический характер, если в процессе решения задачи ряд технико-экономических коэффициентов изменяет свое значение. Если же при решении задачи технико-экономические коэффициенты остаются неизменными, то имеем статическую модель.

В зависимости от уровня управления системами в АПК модели делятся на:

1) межотраслевые, т.е. модели, описывающие взаимоотношения между отдельными отраслями;

2) отраслевые, т.е. модели, описывающие взаимоотношения внутри отрасли;

3) региональные;

4) внутрихозяйственные.

Отличие моделей более низкого уровня управления от более высокого состоит в том, что: 1) они больше зависят от внешней среды; 2) показатели их более дезагрегированы, т.е. такие модели более детально описывают все процессы, протекающие в системе, и изучаемый объект описывается как бы изнутри, изучаются внутренние связи между его элементами, внутренняя структура модели.

Исходя из применяемого математического аппарата модели делятся на:

1) статистические, которые описывают зависимость результата производства от влияния на него одного или нескольких факторов (например, производственные функции). Такие модели предназначены, в основном, для выявления тенденций и закономерностей, которые были в прошлом, чтобы с их помощью оценивать будущее;

2) балансовые, т.е. модели, представляющие собой систему балансов производства и распределения продукции, которая записывается в

виде шахматных матриц;

3) оптимизационные модели базируются на методах математического программирования. Данные модели представляют собой систему уравнений и неравенств, подчиненную целевой функции, т.е. цели решения задачи. Система уравнений и неравенств описывает определенное количество вариантов производства, распределения или потребления, т.е. допустимых решений задачи из которых выбирается наилучшее решение с точки зрения целевой функции. Задачи математического программирования подразделяются на задачи линейного, нелинейного, динамического, дискретного (целочисленного), дробно-линейного, параметрического, сепарабельного, стохастического, геометрического программирования. Если все переменные задачи стоят в первой степени, то имеем задачу линейного программирования, получившие широкое применение при планировании ассортимента выпускаемой продукции, определению загрузки оборудования, планировании транспортных перевозок сырья и готовой продукции, составлении смесей продуктов и т.д.;

Задачу называют нелинейной, если целевая функция и ограничения задачи нелинейны. Задачи нелинейного программирования подразделяются на задачи выпуклого, квадратичного, программирования, многоэкстремальные задачи. Задача считается задачей дискретного программирования, если на систему ограничений задачи накладывается требование целочисленности переменных. Если задача включает в себя фактор времени, то имеем задачу динамического программирования. Если исходные данные задачи зависят от некоторого параметра, то задача относится к задачам параметрического программирования. Задача является задачей дробно-линейного программирования, если ее целевая функция представлена дробью. Если целевая функция и ограничения задачи являются сепарабельными, т.е. представлены в виде суммы функций, каждая из которых является функцией одной переменной, то данная задача относится к задачам сепарабельного программирования. К задачам стохастического программирования относятся задачи, при постановке которых нет исчерпывающих данных об их условиях, т.е. имеющие вероятностный характер.

4) игровые модели – это модели в виде игры, описывающие конфликтную ситуацию, анализ которой осуществляется по определенным правилам, в результате чего определяется наилучшая стратегия игрока, т.е. такие действия игрока, которые при многократном повторении игры обеспечивают данному игроку максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш, причем каждому участнику игры ясно, что результат игры зависит не

только от него, но и от действий партнера, т.е. он принимает решения в условиях неопределенности;

5) имитационные модели получают широкое распространение, так как их решение идет на персональном компьютере в диалоговом режиме, с их помощью проводят имитацию, например, параметров маркетинговой деятельности предприятия при различных производственных условиях. Модель представляет собой программу для персонального компьютера, а эксперимент над ней состоит в наблюдении за результатами расчетов по этой программе при различных значениях вводимых переменных.

6) модели сетевого планирования и управления служат для управления производственной деятельностью коллективов людей, выполняющих комплекс взаимосвязанных работ. Данные модели применяются для планирования, контроля и оперативного руководства такими видами работ, как реконструкция и ремонт цехов производства, монтаж нового промышленного оборудования, проектирование новых видов промышленного оборудования и т.д.;

7) модели массового обслуживания применяются для улучшения качества обслуживания, т.е. сокращения времени ожидания обслуживания, сокращение очередей, уменьшение стоимости обслуживания. Сокращение очередей автомашин, ожидающих разгрузки сырья, получения готовой продукции, позволяют эффективнее использовать автотранспорт и снижать расходы по доставке сырья предприятиям, по развозу готовой продукции;

8) модели управления запасами служат для определения оптимальных значений уровня запасов (точки заказа) и размера заказа.

По степени детализации модели делятся на:

1) структурные;

2) развернутые.

Развернутая модель - это сама задача, которая описывает функционирование конкретной системы, она составлена на основе конкретного цифрового материала.

Структурная же модель описывает систему в виде символов и математических выражений, каждое выражение структурной модели объединяет группу однородных ограничений развернутой модели.

Принципы построения моделей. Так как реальные процессы или объекты АПК представляют собой сложные динамические системы, то для описания их функционирования в современных условиях чаще всего используют интегрированную систему моделей, которая представляет собой совокупность логически, информационно и алгоритмически связанных моделей, которые отражают экономические, организованные и технологические процессы воспроизводства в моделируемой системе.

В систему включаются различные модели, отражающие разные особенности функционирования моделируемого объекта.

При отображении сложных систем основная проблема состоит в том, чтобы найти компромисс между простотой описания, позволяющей составить целостное представление об исследуемом объекте или процессе и детализацией описания, позволяющей отразить многочисленные особенности конкретного объекта или процесса. Одним из путей решения этой проблемы является использование системы моделей, каждая из которых описывает поведение подсистемы. Например, функционирование птицефабрики можно представить следующей системой взаимосвязанных моделей: на первом уровне решить модель оптимизации рецептов комбикормов для различных видов и полувозрастных групп птицы. На втором уровне обосновать оптимальный оборот стада. На третьем уровне решить модель оптимизации производства мяса птицы и яиц. На четвертом уровне - модель оптимизации работы убойного цеха птицефабрики и заготовки мяса в убойном весе и субпродуктов I и II категории. На 5-м уровне с помощью модели оптимизируется работа колбасного цеха и цеха копчения. На 6-м уровне - оптимизируются параметры работы торговли, включая фирменные магазины и марки птицефабрики. Таким образом, функционирование птицефабрики можно представить системой шести моделей. Взаимосвязь которых обеспечивается взаимосвязью показателей, т.е. выходные параметры модели предыдущего уровня являются входными параметрами модели последующего уровня.

При построении системы моделей необходимо соблюдать следующие принципы.

1. Принцип развития требует постоянного совершенствования системы моделей, включения в ее состав новых моделей, использование которых становится необходимым по мере совершенствования планирования и управления.

2. Принцип единства означает представление системы моделей в единой структуре блоков, которые взаимосвязаны между собой логически, информационно и алгоритмически.

3. Принцип относительной автономии позволяет выделить из общей системы моделей относительно самостоятельные модели, результаты решения по которым можно внедрять в производство, не ожидая расчетов по всей системе моделей.

4. Принцип соответствия и адаптации означает соответствие системы моделей реальной действительности.

5. Принцип ориентации на выходные плановые показатели означает, что система моделей и ее решение должны обеспечивать выход на утвержденные плановые показатели.

6. Принцип разнообразия состоит в том, что для адекватного отражения действительности в состав системы моделей должны быть включены разнообразные модели (статистические, оптимизационные, сетевые модели и т.д.).

7. Принцип взаимного дополнения требует, чтобы модели, различающиеся по своему функциональному назначению, дополняли друг друга и были увязаны в единую систему логически, алгоритмически и информационно.

Наибольшее распространение получили следующие *типы моделей исследования операций*:

1) задачи теории управления запасами составляют самый распространенный тип задач исследования операций. Они обладают следующей особенностью. С увеличением запасов увеличиваются расходы на их хранение, но уменьшаются потери из-за возможной их нехватки. Необходимо определить такой уровень запасов при котором сумма ожидаемых затрат по их хранению и сумма потерь из-за их дефицита была бы минимальной.

В зависимости от условий задачи управления запасами делятся на 3 группы:

1. моменты поставок или оформление заказов на пополнение запасов фиксированы. Необходимо определить объемы производимой или закупаемой партии запасов;

2. объемы производимой или закупаемой партии заказов фиксированы. Надо определить моменты оформления заказов;

3. моменты оформления заказов и объемы производимых или закупаемых партий не фиксированы. Необходимо их определить.

2) задачи распределения также решаются методами исследования операций. Они делятся на 3 основные группы:

1. к задачам первого типа относятся задачи такого распределения ресурсов по работам, при котором достигается наибольший эффект (максимум прибыли или минимум издержек) (транспортная задача). Эти задачи усложняются, если для выполнения некоторых работ требуется более одного вида ресурсов или если один и тот же ресурс может пойти для выполнения нескольких работ;

2. второй тип задач связан с распределением ограниченных ресурсов, которых не хватает для выполнения всех наличных работ. При этом могут быть использованы следующие подходы: а) заявки на ограниченные ресурсы урезаются пропорционально величине заяв-

ленной потребности; б) ограниченные ресурсы распределяются путем последовательного удовлетворения различных направлений в порядке убывания их значимости, определенной экспертами; в) продукция распределяется с учетом потерь от дефицитности. При этом строится функция дефицитности, выражающая потери, которые несет система при недопоставке продукции;

3. в третьем типе задач имеется возможность в некоторой степени регулировать состав ресурсов.

3) задачи теории массового обслуживания рассматривают вопросы образования и функционирования очередей. Например, очереди в системе торговли, в системе материально-технического снабжения и т.д. Очереди возникают из-за того, что поток требований или клиентов на обслуживание неуправляем и случаен. Если количество приборов обслуживания (касс в магазине) достаточно велико, то очередь образуется редко, но в этом случае имеются простои оборудования. С другой стороны, при малом количестве приборов обслуживания создается очередь и следовательно будут потери из-за ожидания в очереди (т.е. издержки, связанные с потерей покупателя). Поэтому необходимо определить, какое количество приборов обслуживания нужно иметь, чтобы суммарные ожидаемые потери от несвоевременного обслуживания и простоев оборудования были бы минимальными.

4) задачи теории расписаний изучают порядок следования операций. Например, имеется множество полуфабрикатов, которые должны пройти определенные технологические маршруты, также имеется несколько единиц оборудования (например, пароварочное и обжарочное оборудование). Так как одновременно обрабатывать более одного полуфабриката на одном оборудовании невозможно, у некоторого оборудования может образовываться очередь полуфабрикатов, ждущих обработки. Время обработки каждого вида полуфабриката известно. При этом надо обосновать такую очередность обработки полуфабрикатов на каждом из оборудовании, при которой, например, суммарные простои оборудования наименьшие;

5) в задачах сетевого планирования рассматриваются моменты начала и окончания работ всего комплекса или программы. Порядок следования работ определяется технологией производства. Он зафиксирован в виде сетевого графика, но время начала, окончания и сроки выполнения работ не фиксированные. И требуется так выбрать сроки начала работ и сроки их выполнения, чтобы общие затраты по реализации работ всей программы были бы самые наименьшие. С помощью задач этого типа также можно определить потребность в ресурсах при заданных сроках выполнения работ;

6) при решении ряда задач приходится анализировать ситуации, в которых две или более конфликтующие стороны, преследуют противоположные цели. Причем, результат одной из сторон зависит от того, какие действия выберет противник. Такие задачи решаются с помощью теории игр. Цель игры – выработать рекомендации по рациональным действиям каждого из противников в ходе конфликтной ситуации;

7) задачи смешанного типа представляют собой системы взаимосвязанных моделей различного типа.

Но данная классификация задач исследования операций не является окончательной. Детализация некоторых типов задач приводит к появлению новых задач. Некоторые же типы задач объединяются и решаются совместно.

1.4. Этапы исследования операций

Для исследования системы необходимо выполнить следующие этапы.

1. *Постановка (формулировка) задачи*. От решения вопросов первого этапа во многом зависит качество получаемых результатов. Постанова задачи включает решение следующих вопросов:

а) выбор и формулировка цели задачи, решение которой наиболее важно в данный момент времени;

б) выбор периода планирования (т.е. краткосрочный, среднесрочный, долгосрочный или текущего планирования);

в) определение объемов основных ресурсов моделируемой системы и тех параметров, которые оказывают влияние на функционирование системы;

г) выявление возможных альтернатив решения применительно к исследуемой конкретной ситуации.

2. *Построение математической модели функционирования системы*. На этом этапе изучаются уже имеющиеся математические модели, которые позволяют описать данную проблему. Для построения модели надо определить множество известных и неизвестных параметров, которые необходимы для записи зависимостей исследуемой операции. Цель решения задачи выражается с помощью критерия эффективности. При построении модели необходимо учитывать только основные факторы и отбрасывать второстепенные. При этом математическое описание системы должно отражать все ее основные закономерности и множество возможных стратегий функционирования.

3. *Определение алгоритма решения модели*. Алгоритмом называет-

ся система правил, указывающих, как и в какой последовательности эти правила применять к исходным данным модели, чтобы получать ее решение. Тут может быть три варианта: а) модель известна и известен ее алгоритм решения; б) модель новая, но ее можно решить, сведя к какой-либо известной модели; в) модель новая и алгоритм решения ее неизвестен и ее, например, можно решить методами имитационного моделированиями. На этом этапе, кроме нахождения оптимального решения, целесообразно провести анализ модели на чувствительность, который показывает, как изменяется решение задачи при изменении значений входной информации системы.

4. *Проверка адекватности модели и экономическая интерпретация решения задачи*. Проверка адекватности модели состоит в сопоставлении оптимального решения при заданных входных параметров с характеристиками системы, которые она имела в прошлом.

5. *Внедрение результатов решения в производство*. На этом этапе может возникнуть необходимость корректировки модели и улучшения полученного решения.

1.5. Понятие о критерии эффективности

Исследователь операций должен иметь возможность оценивать различные варианты функционирования системы, соответствующие разным стратегиям. Для оценки этих стратегий используется критерий эффективности. Наряду с этим понятием в экономической литературе можно встретить термины «критерий оптимальности», «показатель эффективности», «критерий качества». *Под критерием эффективности понимается* экономическая категория, выражающая предельную меру экономического эффекта принимаемого хозяйственного решения. Критерий эффективности должен обладать следующими свойствами:

– быть простым, т.е. не содержать большого количества факторов;

– быть представительным, т.е. отражать основную цель поставленной задачи;

– быть критичным, т.е. сильно реагировать на изменения параметров исследуемых стратегий функционирования системы;

– быть единственным, т.е. каждой модели соответствует единственный критерий эффективности.

Критерий эффективности подразделяется на глобальный и локальный.

Глобальный критерий эффективности является народнохозяйственным, он вытекает из действия основного экономического закона любой системы, т.е. интенсивного использования ресурсов с целью максимального производства продукции, снижения издержек производства, создания условий для нормального функционирования общества.

Локальный – это частный критерий эффективности, он связан с детализацией глобального. Этот критерий используют для решения задач более низкого уровня. Требуется, чтобы локальный критерий эффективности учитывал основные положения глобального критерия эффективности и не противоречил ему.

Критерий эффективности может быть выражен как количественно, так и качественно. Математически критерий эффективности, соответствующий качественной цели, записывается следующим образом:

$$\varPhi = \begin{cases} 1, & \text{если цель достигается;} \\ 0, & \text{если цель не достигается.} \end{cases}$$

В литературе такие критерии называются порядковыми или ранговыми критериями эффективности. Они определяют, какая стратегия лучше или хуже других, но не поясняют насколько.

В основном критерий эффективности носит количественный характер, состоящий в стремлении к увеличению (максимизации) или уменьшению (минимизации) показателя, характеризующего уровень достижения поставленной цели и зависящего от рассматриваемых стратегий и входных параметров модели.

Количественным выражением критерия эффективности в экономико-математических моделях является целевая функция. Особенность ее в том, что она однозначна. Это означает, что если при одних и тех же условиях задачи изменить целевую функцию, то получим новое ее решение. В силу специфики своего развития агропромышленное производство многокритериально, т.е. общество заинтересовано в получении максимальной прибыли, в росте производительности труда, снижении издержек и т.д.

Возникает необходимость поиска многих решений, отвечающих разным критериям эффективности. В этом случае критерий оказывается векторным, т.е. включающим несколько показателей. Многоцелевой характер критерия эффективности чаще всего выражается в модели следующим образом:

1) *применяют прием ведущего критерия*, т.е. один из наиболее предпочтительных критериев используется в качестве целевой функции задачи, а требования всех оптимальных учитываются при составлении ограничений задачи;

2) *прием последовательных уступок*. Сущность данного приема состоит в замене многокритериальной задачи оптимизации последова-

тельностью однокритериальных задач. Вначале исследуемые критерии ранжируются в порядке убывания их значимости. Задача решается с первым по значимости критерием f_1 и определяется его экстремальное значение f_1^*. Затем назначается величина допустимого отклонения критерия от его оптимального значения, т.е. уступка Δf_1 и решается задача еще раз, но уже со вторым по значимости критерием f_2, при условии, что отклонение первого критерия от его оптимального значения не превзойдет величины уступки. Далее назначается уступка для второго критерия и задача решается с третьим критерием и т.д. Таким образом, решение каждой исследуемой задачи основано на решении предыдущей задачи, так как оно содержит дополнительные ограничения, характеризующие величину уступки по критериям.

3) используют *прием скаляризации векторного критерия* (приведения его к скаляру), которая может быть осуществлена следующими способами:

1) аддитивная свертка критериев:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \upsilon_i f_i$$

2) мультипликативная свертка:

$$\Phi = \prod_{i=1}^{n} f_i^{\upsilon_i}$$

3) логарифмически-аддитивная свертка:

$$\ln \Phi = \sum_{i=1}^{n} \upsilon_i \ln f_i \,,$$

где f_i – локальный критерий вида i, $i = \overline{i,n}$

υ_i – вес критерия вида i, $i = \overline{i,n}$.

При этом $\sum_{i=1}^{n} \upsilon_i = 1$ и $\upsilon_i \geq 0$, $i = \overline{i,n}$.

Вектор весов критериев $\upsilon_i = (\upsilon_1,\ \upsilon_2 \ldots \upsilon_n)$ обычно определяется на основе экспертных оценок.

Сущность экспертных методов заключается в выработке коллективного мнения группы специалистов (экспертов). Формируется экспертная группа из специалистов в конкретной области. Путем анонимного анкетирования может быть сделан отбор специалистов, которые, по мнению большинства, не могут выступать экспертами в данной области. Опрос экспертов является существенным элементом получения качественной информации. В зависимости от целей и методов обработки результатов опроса применяются различные способы организации работы экспертов, касающиеся их взаимных контактов, анонимности опроса, дозирования информации и т.п. Коллективно выбираются критерии эффективности, характеризующие цель исследуемой системы. В практике наиболее часто применяются следующие методы установления весов критериев:

1. *Метод непосредственной оценки* состоит в том, что эксперт каждому критерию присваивает определенную оценку (балл), например от 1 до 10. Балльные оценки нормируются, для этого определяется сумма оценок, выставленных каждым экспертом, по всем критериям, а затем каждая из оценок делится на полученную сумму. Далее нормированные оценки всех экспертов по каждому критерию суммируются, а полученная сумма делится на число экспертов. Например, $\upsilon_{11} = \frac{8}{34} = 0{,}235$, а $\upsilon_{21} = \frac{8}{33} = 0{,}242$, тогда $\upsilon_1 = \frac{0{,}235 + 0{,}242}{2} = 0{,}239$ (табл. 1.1).

Т а б л и ц а 1.1. **Оценка (вес) критериев**

Эксперты	Критерии					
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	Сумма
Оценки, выставленные экспертами №1 №2	 8 8	 7 6	 10 9	 4 3	 5 7	 34 33
Нормированные оценки №1 №2	 0,235 0,242	 0,206 0,182	 0,294 0,273	 0,118 0,091	 0,147 0,212	 1,0 1,0
Усредненная оценка (вес) критерия	0,239	0,194	0,283	0,105	0,179	1,0

Таким образом, вес *i*-го критерия определяется по формуле:

$$\upsilon_i = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{Б_{ij}}{Б_j}}{m},$$

где υ_i – вес критерия вида *i*;

i – номер критерия, $i = \overline{i,n}$;

j – номер эксперта, $j = \overline{i,m}$;

$Б_{ij}$ – балл, присвоенный *i*-му критерию *j*-м экспертом;

$Б_j$ – сумма баллов, присвоенных всем критериям *j*-м экспертом.

2. *Метод последовательных сравнений* позволяет не только оценить вес каждого критерия, но и выявить зависимости между их количественными оценками. Процедура последовательных сравнений, разработанная У. Черчменом и Р. Акофом состоит в следующем. Эксперт должен оценить исследуемые критерии по их относительной важности. При этом наиболее важному критерию дается оценка $\upsilon_i = 1$, а

остальным критериям присваиваются оценки υ_i в пределах от 0 до 1 в зависимости от относительной важности критериев.

Далее эксперт сравнивает значимость более важного критерия (критерия, получившего оценку 1) с комбинацией остальных критериев. Если этот критерий более значим, то его оценка увеличивается так, чтобы она была больше, чем суммарная оценка остальных критериев:

$$\upsilon_1 > \sum_{i=2}^{n} \upsilon_i \ .$$

Далее аналогичную процедуру проделывают со вторым и последующими критериями, получившими более низкие оценки. Последовательное сравнение продолжается до (n–1)-го критерия.

Например, рассматриваем критерии f_1, f_2, f_3 и f_4. Эксперт присвоил им следующие оценки υ_1=1,0; υ_2=0,7; υ_3=0,5; υ_4=0,2.

Проведем последовательное сравнение этих оценок. Допустим, эксперт считает, что υ_1 предпочтительнее $\upsilon_2+\upsilon_3+\upsilon_4$, тогда значение υ_1 должно быть больше, чем 0,7+0,5+0,2=1,4. Эксперт корректирует оценку υ_1, например, до 1,5. Далее сравниваются оценки υ_2 и $\upsilon_3+\upsilon_4$. Допустим, значимость $\upsilon_3+\upsilon_4$ предпочтительнее, чем υ_2, тогда эксперт корректирует оценку υ_2 до 0,6. Сравнивают υ_3 и υ_4. Эксперт считает, что $\upsilon_3>\upsilon_4$, следовательно, первоначальные оценки не изменяют.

После процедуры последовательного сравнения получены следующие оценки: υ_1=1,5; υ_2=0,6; υ_3=0,5; υ_4=0,2. Если эти оценки не противоречат мнениям экспертов, их нормируют, разделив каждую из них на сумму всех оценок, которая равна 2,8.

Получим следующие нормированные оценки критериев $\upsilon_1^{/}$=1,5:2,8=0,536; $\upsilon_2^{/}$=0,214; $\upsilon_3^{/}$=0,179; $\upsilon_4^{/}$=0,071. Сумма нормированных оценок равна 1: $\sum_{i'=1}^{n} \upsilon_i^{/} = 1$.

Информация, полученная от экспертов, может считаться достаточно надежной только при условии хорошей согласованности оценок экспертов.

Степень согласованности оценок 2-х экспертов или 2-х групп экспертов характеризуется *коэффициентом ранговой корреляции Ч. Спирмана (p)*:

$$p = 1 - \left(\frac{6\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}{n \cdot (n^2 - 1)} \right),$$

где $x_i - y_i$ – разность между рангами (оценками);

n – число критериев.

Коэффициент корреляции рангов Спирмена (p) равен +1, если все ранги совпадают, и равен –1, если ранговые ряды имеют обратное направление. Чем ближе p к единице, тем более согласованы решения. Обычно согласованность считается удовлетворительной при p=0,85-0,9 и хорошей при $p \geq 0{,}95$.

Например, оценим с помощью коэффициента Спирмена (p) согласованность оценок критериев (см. табл. 1.1), предварительно проранжировав оценки экспертов (табл. 1.2).

Т а б л и ц а 1.2. **Расчет коэффициента Спирмена (p)**

Показатели	Критерии				
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
Оценки, выставляемые экспертами №1 №2	 8 8	 7 6	 10 9	 4 3	 5 7
Ранг оценок эксперта №1 (x_i) №2 (y_i)	 4 4	 3 2	 5 5	 1 1	 2 3
Разность между рангами (x_i–y_i)	0	1	0	0	–1
Квадрат разности между рангами (x_i–y_i)^2	0	1	0	0	1

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = 2$$

$$p = 1 - \left(\frac{6 \cdot 2}{5(5^2 - 1)}\right) = 1 - \frac{12}{120} = 0{,}9\,.$$

Величина коэффициента ранговой корреляции p=0,9 свидетельствует об удовлетворительной согласованности оценок экспертов.

Для оценки согласованности мнений группы из m экспертов n применяется *коэффициент конкордации Кендалла W* (общий коэффициент ранговой корреляции для группы, состоящей из m экспертов.

В случае отсутствия равных рангов (оценок) в оценках любого из экспертов коэффициент конкордации определяется по формуле:

$$W = \frac{12\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \frac{1}{2}m(n+1)\right)^2}{m^2(n^3 - n)}\,,$$

где m – число экспертов;

n – число критериев;

x_{ij} – оценка i-м экспертом j-го критерия.

В случае если какой-либо эксперт не может установить ранговое различие между несколькими критериями и присваивает им одинаковые ранги (баллы), коэффициент конкордации определяется по формуле:

$$W = \frac{12\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \frac{1}{2}m(n+1)\right)^2}{\left(m^2(n^3-n) - m\sum_{i=1}^{m} T_i\right)},$$

где $T_i = 1/12\sum_{i=1}^{h}(t_1^3 - t_i)$, где t_i – число равных рангов в оценках i-го эксперта, h – число групп равных рангов в оценках i-го эксперта.

Коэффициент конкордации принимает значения в интервале от 0 до 1. При отсутствии согласованности мнений экспертов W=0, при полной согласованности W=1. Практически, согласованность считается удовлетворительной, если $W \geq 0{,}5$ и хорошей, если $W \geq 0{,}7$.

Например, пять экспертов (m=5) оценивают четыре критерия (n=4) по 10-балльной шкале (табл. 1.3).

Т а б л и ц а 1.3. **Расчет коэффициента конкордации**

Показатели	Критерии			
	f_1	f_2	f_3	f_4
Оценки экспертов: 1	3	10	7	6
2	4	7	8	5
3	2	9	8	4
4	2	5	6	3
5	2	7	6	3
Ранги оценок экспертов: 1	1	4	3	2
2	1	3	4	2
3	1	4	3	2
4	1	3	4	2
5	1	4	3	2
Сумма рангов	5	18	17	10

Рассчитаем для m=5 и n=4 значение выражения $\frac{1}{2}m(n+1) = 12{,}5$.

Найдем значение коэффициента конкордации:

$$W = \frac{12\left[(5-12{,}5)^2 + (18-12{,}5)^2 + (17-12{,}5)^2 + (10-12{,}5)^2\right]}{5^2(4^3-4)} = 0{,}904$$

Коэффициент конкордации W=0,904 показывает, что оценки экспертов не случайны и согласованность их хорошая. Для проверки значимости коэффициента конкордации вычислим статистику χ^2 с числом степеней свободы $v = n - 1$.

$$\chi^2 = W \cdot m(n-1) = 0{,}904 \cdot 5(4-1) = 13{,}56\,.$$

Сравнение расчетного значения $\chi^2_{расч} = 13{,}56$ с его табличным значением $\chi^2_{табл} = 12{,}838$ при уровне значимости $\alpha = 0{,}005$ позволяет признать, что коэффициент конкордации значим (так как $\chi^2_{расч} > \chi^2_{табл}$) (приложение А) и мнения экспертов согласованы.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение исследованию операций.
2. Какие ученые внесли свой вклад в развитие исследования операций?
3. Что является предметом исследования операций?
4. Какова цель исследования операций?
5. Что представляет собой системный подход?
6. Дайте понятие системы, подсистемы, элемента.
7. Какими связями характеризуется система?
8. Что такое среда?
9. Дайте классификацию систем.
10. Приведите характеристики систем.
11. Перечислите особенности экономических систем.
12. Дайте определение модели.
13. Что понимают под математической моделью?
14. Приведите классификацию моделей.
15. Чем отличаются детерминированные от стохастических моделей?
16. В чем состоит отличие статических от динамических моделей?
17. Приведите особенности статистических, балансовых, оптимизационных, игровых, сетевых, имитационных моделей, моделей упорядочения, массового обслуживания и управления запасами.
18. Охарактеризуйте принципы построения моделей.
19. Перечислите основные типы моделей исследования операций.
20. Охарактеризуйте этапы исследования операций.
21. Дайте определение критерия эффективности.
22. Какие приемы позволяют учесть многоцелевой характер критерия эффективности?
23. В чем состоит сущность экспертных методов?
24. С помощью какого коэффициента и как проверяют степень согласованности оценок 2-х экспертов или 2-х групп экспертов?
25. Каким образом и какой коэффициент используется для оценки согласованности мнений группы экспертов?

2. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

2.1. Предмет и задачи теории игр. Классификация игр

На практике часто появляется необходимость согласования интересов двух или более разумных противников, каждый из которых стремиться оптимизировать свои решения за счет других. Теория, занимающаяся принятием решения в условиях конфликта, получила название теории игр. Элементы теории игр были применены в исследованиях Курно (1838г.), Бертрана (1883г.) и Эджворта (1897г.), в статьях которых рассматривались проблемы производства и ценообразования в олигополии. Первым математическим результатом в выработке решений салонных игр явилась работа Э. Цермело (1912г.) «О применении теории множеств к шахматной игре». Возникновение теории игр как науки относится к 1944 г., когда вышла монография Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение». В ней была обоснована возможность анализа различных экономических вопросов с помощью игровых моделей. В 1950г. Джон Нэш ввел понятие ситуации равновесия, как метода решения бескоалиционных игр. Равновесие по Нэшу гласит, что ситуация, образованная в результате выбора всеми игроками некоторых своих стратегий, является равновесной, если ни одному из игроков невыгодно изменять свою стратегию при условии, что остальные игроки придерживаются равновесных стратегий. В настоящее время главное внимание в теории игр уделяется ее экономическим приложениям.

Теория игр – это математическая теория конфликтных ситуаций, разрабатывающая рекомендации по наиболее рациональному образу действий каждого из участников в ходе конфликтной ситуации, т.е. таких действий, которые обеспечивали бы игроку наилучший результат при многократном повторении игры. При этом *игра* рассматривается как упрощенная математическая модель конфликтной ситуации, отличающаяся от реального конфликта тем, что ведется по определенным правилам, которые устанавливают:

– выбор действий игроков на каждом этапе игры;

– информацию, которой обладает каждый игрок при осуществлении своих выборов;

– выигрыши или проигрыши каждого игрока после завершения игры.

Суть игры состоит в том, что каждый из участников принимает такие решения в развивающейся конфликтной ситуации, которые, как он полагает, могут обеспечить ему наилучший ход игры, т.е. величина выигрыша зависит от стратегии, применяемой игроком.

Стратегия – это совокупность правил, однозначно определяющих последовательность действий игрока в каждой конкретной ситуации, складывающейся в процессе игры.

При этом оптимальной считается та стратегия, которая обеспечивает игроку при многократном повторении игры максимально возможный выигрыш или минимальный возможный проигрыш.

Принятие решений может происходить в условиях определенности, неопределенности и риска.

Если имеется полная информация о стратегиях выбора, то такую задачу относят к задаче принятия решений в условиях определенности. Задачи, решение которых определяется при ограниченности данных о самой системе или о ее внешней среде, получили название задач принятия решений в условиях неопределенности.

При этом под неопределенностью понимают отсутствие, неполноту, недостаточность информации об изучаемой системе, ограниченность в сборе информации, ее постоянная изменчивость или неуверенность в достоверности информации.

По степени полноты информации риск определяет промежуточную ситуацию между определенностью и неопределенностью и характеризует возможность количественного определения степени вероятности проявления анализируемых стратегий.

Практически риск выступает в виде совокупности вероятностных, экономических, политических и других последствий, которые наступают для системы при реализации выбранных решений.

Конфликтные ситуации, встречающиеся на практике, порождают различные виды игр.

В зависимости от количества игроков игры подразделяются на парные (с двумя игроками) и множественные (имеющие не менее трех игроков).

По количеству стратегий игры делятся на конечные (где каждый из игроков имеет конечное число возможных стратегий) и бесконечные (в которых хотя бы один из игроков имеет бесконечное число возможных стратегий).

По взаимоотношениям между конфликтующими сторонами игры подразделяются на кооперативные, коалиционные и бескоалиционные. Бескоалиционными считают такие игры, в которых игроки не имеют права вступать в соглашения. Если же участники конфликта вступают в соглашения и создают коалицию, то данную ситуацию описывают коалиционной игрой. Кооперативная игра описывает конфликт, в котором заранее определены группы участников, т.е. коалиции.

По характеру выигрышей игры делятся на игры с нулевой и ненулевой суммой. В игре с нулевой суммой сумма выигрышей равна сумме проигрышей всех игроков, т.е. общая сумма перераспределяется между игроками, но величина ее не изменяется. Такие игры относятся к классу антагонистических игр. Игра, в которой вносится взнос за право участия в ней, является игрой с ненулевой суммой.

В зависимости от вида функции выигрышей игры подразделяются на матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные и т. д. Матричная игра – это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой выигрыши или проигрыши (выигрыш первого игрока эквивалентен проигрышу второго игрока) игроков заданы элементами матрицы $\|a_{ij}\|$. Если игроки имеют противоположные интересы, то игра с нулевой суммой относится к антагонистическим играм. Биматричная игра – это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши первого и второго игроков заданы элементами соответствующих двух матриц. Если функция выигрышей каждого игрока непрерывна или выпуклая, то игра называется непрерывной или выпуклой. Если функция выигрышей разделяется на сумму произведений функций одного аргумента, то игра носит название сепарабельной.

По количеству ходов игры можно подразделить на одношаговые (которые заканчиваются после одного хода каждого игрока) и многошаговые (в которых игрок делает более одного хода).

По информированности сторон различают игры с полной (т. е. каждый игрок на каждом ходу знает ранее примененные другими игроками стратегии) и не полной информацией (т.е. игроку не все стратегии предыдущих ходов других игроков известны).

По степени неполноты информации игры подразделяются на статистические (в условиях частичной неопределенности) и стратегические (в условиях полной неопределенности).

2.2. Статистические игры

В отдельную группу игр выделяют статистические игры. Их особенностью является то, что сознательный игрок *А* (его еще называют статистиком) заинтересован в наиболее выгодном для него исходе игры и играет он против игрока В, который совершенно безразличен к результату игры (его еще называют природой и обозначают *П*). Стратегии игрока *П* обозначают совокупность внешних условий, в которых игрок A выбирает свою стратегию. Поэтому, при решении статистической игры находят только наилучшие рекомендации для игрока A.

При поиске оптимальных стратегий для игрока A в условиях неопределенности и риска обращаются к различным критериям. Так как критерии формируются на основе здравого смысла, интуиции и практической целесообразности, то они помогают оценить принимаемое решение с различных позиций.

Примерами статистических игр являются, например: а) выбор агрономической службой сельскохозяйственного предприятия участков для посева той или иной культуры с целью получения в будущем году наилучших урожаев с учетом различных погодных исходов (в качестве второго игрока выступает природа; б) определение объема выпуска сезонной продукции в ожидании наиболее выгодного для ее реализации уровня спроса (в качестве второго игрока принят спрос на продукцию); в) формирование пакета ценных бумаг в расчете на высокие дивиденды (в качестве второго игрока взяты размеры ожидаемой прибыли).

Пример. Требуется обосновать вариант производства модификации товара, величина предложения которого обеспечит предприятию среднюю прибыль при любом уровне спроса.

Исходная информация: Предприятие планирует производство нового товара в трех модификациях (T_1, T_2, T_3). Производство каждой модификации товара требует различного уровня затрат. Спрос на новый товар не может быть точно определен. Планируется, что его величина будет характеризоваться тремя возможными состояниями (C_1, C_2, C_3). Прибыль, получаемая предприятием с единицы товара изображена в табл. 2.1.

Т а б л и ц а 2.1. **Прибыль в расчете на единицу товара, у.д.е.**

Модификация товара	Состояние спроса		
	C_1	C_2	C_3
T_1	2,2	2,3	2,2
T_2	2,1	2,4	2,3
T_3	2,0	2,2	2,5

Рассмотрим несколько критериев определения оптимальной стратегии игрока:

1. По критерию Лапласа оптимальной является та стратегия, которая обеспечивает максимальную среднюю прибыль или минимальный средний риск.

В нашем примере прибыль будет равна:

1. (2,2+2,3+2,2):3=2,23
2. (2,1+2,4+2,3):3=2,27
3. (2,0+2,2+2,5):3=2,23
max (2,23; 2,27; 2,23)=2,27

Для выбора оптимальной стратегии по второму случаю предварительно рассчитаем матрицу риска. Риск – это разность между результатом, который можно получить, если знать состояние «природы», и результатом, который будет получен при *j*-й стратегии игрока. Для формирования элементов выбираем наибольший элемент в столбце и от него отнимаем все другие элементы столбца (табл. 2.2.).

Т а б л и ц а 2.2. **Матрица риска**

Модификация товара	Состояние спроса		
	C_1	C_2	C_3
T_1	2,2-2,2=0	0,1	0,3
T_2	2,2-2,1=0,1	0	0,2
T_3	2,2-2,0=0,2	0,2	0

Для нашего примера значение средних рисков для каждой стратегии игрока будет следующим:

1. (0+0,1+0,3):3=0,133
2. (0,1+0+0,2):3=0,100
3. (0,2+0,2+0):3=0,133
min (0,133; 0,100; 0,133)=0,100

По критерию Лапласа оптимальной является вторая стратегия игрока. И предприятию для получения максимальной прибыли, с минимальным риском необходимо производить вторую модификацию товара.

2. По критерию Байеса оптимальная стратегия игрока характеризуется максимальным математическим ожиданием выигрыша или минимальным математическим ожиданием риска и определяется с учетом вероятностей всех возможных исходов. Допустим, выпускаемые модификации новых товаров будут пользоваться спросом с вероятностями p_1-0,2; p_2-0,4; p_3=0,4.

Тогда математическое ожидание прибыли будет равно:

1. 2,2·0,2+2,3·0,4+2,2·0,4=2,24
2. 2,1·0,2+2,4·0,4+2,3·0,4=2,30
3. 2,0·0,2+2,2·0,4+2,5·0,4=2,28
max (2,24; 2,30; 2,28)=2,30.

А математическое ожидание риска будет следующее:

1. 0·0,2+0,1·0,4+0,3·0,4=0,16
2. 0,1·0,2+0·0,4+0,2·0,4=0,10

$$3.\ 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$$

$$\min\ (0{,}16;\ 0{,}10;\ 0{,}12) = 0{,}10$$

Согласно критерия Байеса предприятие получит максимальную прибыль, если будет производить новый товар во второй модификации.

3. По критерию Вальда оптимальной будет стратегия, которая в наихудших условиях обеспечивает наибольшую прибыль. Этот критерий опирается на принцип «наибольшей осторожности». Если элементы платежной матрицы игры характеризуют выигрыш (в нашем случае – прибыль) игрока, то при выборе оптимальной стратегии используется максиминный критерий:

$$1.\ \min\ (2{,}2;\ 2{,}3;\ 2{,}2) = 2{,}2$$

$$2.\ \min\ (2{,}1;\ 2{,}4;\ 2{,}3) = 2{,}1$$

$$3.\ \min\ (2{,}0;\ 2{,}2;\ 2{,}5) = 2{,}0$$

$$\max\ (2{,}2;\ 2{,}1;\ 2{,}0) = 2{,}2.$$

По критерию Вальда оптимальной является первая стратегия, которая гарантирует в наихудших условиях максимальный выигрыш, т.е. независимо от колебания спроса, наибольшую гарантированную прибыль можно получить, производя новый товар в первой модификации.

Если элементы платежной матрицы игры определяют потери лица, принимающего решение (например, затраты на производство различных видов модификаций товаров при разном уровне спроса), то при выборе оптимальной стратегии используется минимаксный критерий.

4. При использовании критерия Сэвиджа, строят матрицу рисков (для нашего примера – табл. 2.2). Если в платежной матрице игры элементы характеризуют потери игрока, то для определения коэффициентов матрицы риска от элементов каждого столбца отнимают наименьший элемент этого столбца.

Оптимальной является стратегия с наименьшим максимальным риском.

Определяем максимальное значение риска по каждой строке. Для нашего примера:

$$1.\ \max\ (0;\ 0{,}1;\ 0{,}3) = 0{,}3$$

$$2.\ \max\ (0{,}1;\ 0;\ 0{,}2) = 0{,}2$$

$$3.\ \max\ (0{,}2;\ 0{,}2;\ 0) = 0{,}2$$

$$\min\ (0{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}2) = 0{,}2.$$

По критерию Сэвиджа предприятие должно заняться производством нового товара во второй или в третьей модификации.

5. Для проверки вышеизложенных выводов используют критерий Гурвица, по которому, если в качестве результата игры выступает

прибыль, полезность, доход и т.д., выбирают оптимальную стратегию по формуле:

$$\max[\lambda \min_i a_{ij} + (1-\lambda)\max_i a_{ij}],$$

где λ – коэффициент, характеризующий степень доверия, 0≤λ≤1. Значение λ определяется в зависимости от склонности игрока к пессимизму или к оптимизму.

Если элементы платежной матрицы игры представляют затраты или потери игрока, то по критерию Гурвица оптимальную стратегию игрока выбирают следующим образом:

$$\min_j[\lambda \min_i a_{ij} + (1-\lambda)\max_i a_{ij}].$$

При отсутствии ярко выраженной склонности игрока, целесообразно при расчетах применять λ=0,5.

Критерий Гурвица устанавливает баланс между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма, используя определенную величину коэффициента λ.

При λ=0 имеем критерий крайнего оптимизма. Определим оптимальную стратегию игрока для нашего примера:

1. $\max[0\cdot 2{,}2 + (1-0)\cdot 2{,}3] = 2{,}3$
2. $\max[0\cdot 2{,}1 + (1-0)\cdot 2{,}4] = 2{,}4$
3. $\max[0\cdot 2{,}0 + (1-0)\cdot 2{,}5] = 2{,}5$

$$\max(2{,}3;2{,}4;2{,}5) = 2{,}5$$

Таким образом, оптимальным является производство товара в третьей модификации и прибыль при этом может составить 2,5 у.д.е. на единицу нового товара.

Если λ=1, то имеем критерий крайнего пессимизма:

1. $\max[1\cdot 2{,}2 + (1-1)\cdot 2{,}3] = 2{,}2$
2. $\max[1\cdot 2{,}1 + (1-1)\cdot 2{,}4] = 2{,}1$
3. $\max[1\cdot 2{,}0 + (1-1)\cdot 2{,}5] = 2{,}0$

$$\max(2{,}2;2{,}1;2{,}0) = 2{,}2$$

Таким образом, в наихудших условиях наибольший гарантированный доход можно получить, организовав производство нового товара в первой модификации.

Если λ=0,4, то

1. $\max[0{,}4\cdot 2{,}2 + (1-0{,}4)\cdot 2{,}3] = 2{,}26$
2. $\max[0{,}4\cdot 2{,}1 + (1-0{,}4)\cdot 2{,}4] = 2{,}28$
3. $\max[0{,}4\cdot 2{,}0 + (1-0{,}4)\cdot 2{,}5] = 2{,}30$

$$\max(2{,}26;2{,}28;2{,}30) = 2{,}30$$

т.е. предприятию целесообразно заниматься производством нового товара в третьей модификации.

В результате решения игры по различным критериям в качестве оптимальной большее число раз выпала вторая и третья стратегии, т.е. предприятию в зависимости от спроса и предложения товара на рынках для получения максимальной прибыли можно заниматься выпуском нового товара во второй или третьей модификации.

Анализ игр по нескольким критериям позволяет более достоверно принять ту или иную стратегию игрока с наилучшей функцией выигрыша.

2.3. Решение матричных игр в чистых стратегиях

Рассмотрим игры, в которых у каждого из двух игроков A и B конечное число возможных действий, т.е. чистых стратегий. Пусть игрок А располагает m чистыми стратегиями – $A_1, A_2 \dots A_m$, а игрок B – n-чистыми стратегиями – B_1, $B_2 \dots B_n$. Рассмотрим антагонистическую игру с нулевой суммой, в которой выигрыш одного игрока равен проигрышу другого, тогда число a_{ij} – примем за выигрыш игрока A за счет игрока B или проигрыш игрока B.

Если известны значения a_{ij} для каждой пары (A_i, B_j) чистых стратегий, то можно составить матрицу игры, которая получила название платежной матрицы:

A_i	B_j			
	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Если выигрыши выражаются отрицательными числами, то это означает, что фактически выигрывает игрок B, а игрок A проигрывает.

Игра протекает следующим образом: игрок A выбирает одну из строк платежной матрицы (т.е. свою чистую стратегию, характеризуемую числом α_i). А игрок B, не зная результата его выбора, выбирает один из столбцов (свою чистую стратегию, характеризуемую числом β_j). На пересечении строки и столбца будет стоять элемент матрицы, определяющий выигрыш игрока A или проигрыш игрока B:

A_i	B_j				α_i
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	α_2
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	…	β_n	

Пример. Для отопления зданий центральной усадьбы хозяйства в зимний период используется уголь, цена на который зависит от времени года и характера зимы. Летом тонна угля стоит 30 у.д.е., в мягкую зиму 40 у.д.е., в обычную зиму – 45, а в холодную 50 у.д.е. Расход угля за отопительный сезон зависит от характера зимы: в мягкую зиму расходуется 40 т, в обычную – 50 т, в холодную – 60 т угля. Необходимо определить минимальные затраты на приобретение угля при условии, что уголь можно закупать летом, докупить недостающее количество угля зимой, но продавать неиспользованный уголь зимой нельзя, так как он не пользуется спросом.

В качестве игрока A будут выступать работники хозяйства, в качестве игрока B примем исход погоды. Составим платежную матрицу.

Рассмотрим три исхода погоды (B_1 – мягкая зима, B_2 – обычная, B_3 – холодная зима). Заготавливая летом уголь, хозяйство ориентируется на мягкую зиму (чистая стратегия A_1), обычную (чистая стратегия A_2), холодную (чистая стратегия A_3) зиму.

Вычисляем элементы платежной матрицы a_{ij} (табл. 2.3).

Т а б л и ц а 4.3. **Платежная матрица игры**

Стратегии	B_1	B_2	B_3
A_1	40·30=–1200	40·30+10·45=–1650	40·30+20·50=–2200
A_2	50·30=–1500	50·30=–1500	50·30+10·50=–2000
A_3	60·30=–1800	60·30=–1800	60·30=–1800

1) Хозяйство в расчете на мягкую зиму купило летом 40 т угля (чистая стратегия A_1): а) зима оказалась мягкой (чистая стратегия B_1), дополнительных затрат не потребовалось; б) зима оказалась обычной (чистая стратегия B_2), пришлось зимой докупить 10 т угля; в) зима оказалась холодной (чистая стратегия B_3), пришлось зимой докупить 20 т угля;

2) Хозяйство в расчете на обычную зиму заготовило 50 т угля (чистая стратегия A_2): а) зима мягкая (чистая стратегия B_1) 10 т угля лишних, но продавать их нет возможности; б) зима обычная (чистая стратегия B_2) угля хватило; в) зима холодная (чистая стратегия B_3) следовательно, надо докупить 10 т угля;

3) Хозяйство в расчете на холодную зиму заготовило 60 т угля и при любых исходах природы (B_1, B_2, B_3) угля хватит, но затраты будут везде одинаковы 1800 у.д.е.

Целью игры является выбор наиболее выгодных стратегий, доставляющих игроку А максимальный выигрыш, а игроку В – минимальный проигрыш. Оптимальной для игрока А будет такая стратегия, при которой выигрыш игрока А не будет уменьшаться, какими бы стратегиями не пользовался игрок В. Оптимальной для игрока В будет та стратегия, при которой его проигрыш не будет увеличиваться, какими бы стратегиями не пользовался бы игрок А.

При поиске оптимальных стратегий игроки опираются на основной принцип теории игр – принцип осторожности, в соответствии с которым каждый игрок считает, что играет с очень умным противником, который может воспользоваться любой его ошибкой в своих интересах. Поэтому игрок A находит для каждой стратегии минимальный выигрыш $\alpha_i = \min_j a_{ij} (i = \overline{1,m})$, а затем их всех α_i выбирает наибольшее значение $\alpha = \max \alpha_i$, которое определяет чистую стратегию игрока A, ее называют максиминной стратегией, так как она определяется по формуле:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} .$$

При этом число α называют нижней чистой ценой игры (максимином). Оно показывает, какой минимальный выигрыш может получить игрок A, правильно применяя свои чистые стратегии при любых действиях игрока B.

Игрок B, стремясь минимизировать проигрыш, тоже при выборе стратегии использует принцип осторожности. Он сначала выбирает по столбцу максимально возможный проигрыш $\beta_j = \max_i a_{ij} (j = \overline{1,n})$, а затем среди β_j выбирает минимальное значение $\beta = \min_j \beta_j$, которое определит его чистую стратегию, т.е. минимаксную стратегию, так как она выбирается по формуле:

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} .$$

Число β называется верхней чистой ценой игры или минимаксом. Оно показывает, какой максимальный проигрыш может быть у игрока B при правильном выборе стратегии независимо от действий игрока A (табл. 2.4).

Т а б л и ц а 2.4. **Решение матричной игры в чистых стратегиях**

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	–1200	–1650	–2200	–2200
A_2	–1500	–1500	–2000	–2000
A_3	–1800	–1800	–1800	–1800
β_j	–1200	–1500	–1800	–1800

$\alpha_i = \min$ элементы матрицы по строкам (–2200, –2000, –1800).

$\alpha = \max(-2200, -2000, -1800) = -1800$.

A_3 – оптимальная чистая стратегия игрока А.

$\beta_j = \max$ элементы матрицы по столбцам $(-1200, -1500, -1800)$.

$\beta_j = \min(-1200, -1500, -1800) = -1800$.

B_3 – оптимальная чистая стратегия игрока B.

Если в матричной игре нижняя и верхняя чистые цены игры совпадают, т.е. $\alpha = \beta$, то говорят, что игра имеет *седловую точку* и чистую цену игры, равную значению или седловому элементу платежной матрицы:

$$\upsilon = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} .$$

Для нашего примера чистая цена игры равна $\upsilon = -1800$. При этом седловой элемент является наименьшим в строке i и наибольшим в столбце j. Таким образом хозяйству целесообразно закупать 60 т угля летом, что позволит минимизировать затраты по закупке угля.

2.4. Решение матричных игр геометрическим способом

Матричная игра описывает конфликт, отвечающий следующим условиям:

1. Конфликт определяется антагонистическим взаимодействием двух сторон (игроков), каждая из которых располагает лишь конечным числом возможных действием (стратегий).

2. Свои действия (стратегии) игроки предпринимают независимо друг от друга, т.е. каждый из игроков не имеет информации о действии, совершаемом другой стороной. Результат этих действий оценивается числом равным элементу платежной матрицы, который определяет полезность (выгодность) сложившейся ситуации для одного из игроков (игрока A).

3. Каждый из игроков оценивает как для себя, так и для противника выгодность применения любой возможной ситуации, которая сложится в результате применения той или иной стратегии.

4. Действия конфликтующих сторон отличаются друг от друга лишь по степени полезности сложившейся ситуации, которая характеризуется величиной элементов платежной матрицы.

Пример. Сельскохозяйственная организация должна выращивать картофель на определенном участке земли. Урожайность картофеля зависит от количества внесенных удобрений и от состояния погоды. Имеется два состояния погоды: 1) лето сухое и 2) лето влажное. Возможны следующие варианты внесения удобрений: 1) количество удобрений на 1 га посева картофеля равно фактическому за прошлый год; 2) количество удобрений на 1 га соответствует рекомендуемой норме внесения удобрений и больше на 20% фактического уровня за прошлый год.

Пусть первым игроком (игроком *A*) будет сельскохозяйственная организация, а природу примем игрока *B*. У первого игрока имеется две стратегии, соответствующие вариантам внесения удобрений. Второй игрок имеет две стратегии в соответствии с видом лета. Цена реализации 1 ц картофеля в панируемом году будет величиной постоянной. Следовательно, прибыль сельскохозяйственной организации будет зависеть от урожайности выращенного картофеля и затрат на его производство и реализацию. Сельскохозяйственной организации необходимо определить оптимальное количество внесения удобрений на 1 га картофеля с целью получения максимальной прибыли при любых погодных условиях. Сельскохозяйственная организация, в зависимости от различных норм внесения удобрений и вида лета, планирует получить с 1 га картофеля следующую прибыль, представленную коэффициентами платежной матрицы:

Стратегии	B_1	B_2
A_1	60	30
A_2	40	50

Найдем седловую точку игры, определив нижнюю и верхнюю цену игры:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 40$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 50$$

Так как $\alpha \neq \beta$, т.е. 40≠50, то игра не имеет седловой точки и должна быть решена в смешанных стратегиях. *Смешанная стратегия* игрока представляет собой полный набор его чистых стратегий при многократном повторении игры в одних и тех же условиях с заданными вероятностями. Решим данную игру в смешанных стратегиях геометрическим способом.

Алгоритм геометрического решения игры.

1. Матрицу игры, если это необходимо и есть такая возможность, приводим к размерности 2 x n или m x 2. Это достигается путем сравнения между собой почленно элементов столбцов или строк платежной матрицы. При этом вычеркивается, если имеются, дублирующие и заведомо невыгодные стратегии.

2. Проверяем платежную матрицу на наличие седловой точки. Если она есть – решение игры найдено, если ее нет – то находим оптимальные смешаные стратегии игроков.

3. Строим прямые, соответствующие стратегиям первого (второго) игрока.

4. Определяем нижнюю (верхнюю) границу выигрыша.

5. Находим две стратегии первого (второго) игрока, которым соответствуют две прямые, пересекающиеся в точке с максимальной (минимальной) ординатой.

6. Определяем цену игры и оптимальные смешанные стратегии игроков.

Для этого в системе координат на оси X (абсциссе) отложим отрезок единичной длины $[A_1, A_2]$ и через его концы A_1 и A_2 проведем перпендикулярные прямые к оси абсцисс, на которых будем откладывать выигрыш игрока A (рис. 2.1).

Если игрок A применяет свою первую стратегию при первой стратегии игрока B, то выигрыш игрока A будет 60 у.д.е. (отложим его на оси ординат A_1, получим точку B_1). При второй стратегии игрока B, выигрыш игрока A будет 30 у.д.е. (отложим его на оси ординат A_1, получим точку B_2). Игрок A применяет свою вторую стратегию при первой стратегии игрока B. Его выигрыш будет 40 у.д.е. (точка B'_1) и при второй стратегии игрока B – его выигрыш будет 50 у.д.е. (точка B'_2). Любая точка отрезка $[B_1, B'_1]$ характеризует величину выигрыша игрока A при применении им первой и второй стратегии при условии, что игрок В применяет свою первую стратегию. Любая точка отрезка $[B_2, B'_2]$ характеризует величину выигрыша игрока A при применении им первой и второй стратегии, когда игрок В применяет свою вторую стратегию. Точки ломаной линии $B_2MB'_1$ соответствуют нижней границе выигрыша игрока A. А максимальный выигрыш игрок A достигает в точке M. Длина отрезка MN является ценой игры υ. Расстояния от точки N до концов единичного отрезка оси абсцисс равны вероятностям p_1^* и p_2^* чистых стратегий A_1 и A_2 в оптимальной смешанной стратегии игрока A.

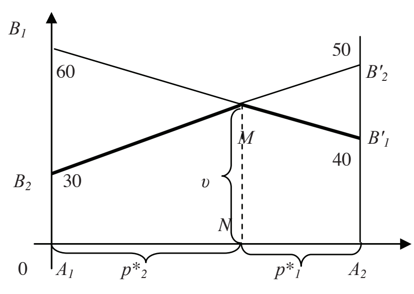


Рис. 2.1. Геометрическое решение матричной игры для игрока A

Рассчитаем вероятности, с которыми игрок *A* должен смешивать свои чистые стратегии для получения максимального выигрыша, составим систему уравнений, исходя из следующих соображений.

Если игрок *B* будет применять свою первую стратегию, то выигрыш игрока *A* можно описать так: $60\,p_1 + 40\,p_2 = \upsilon$, а если игрок *B* применит вторую стратегию, то выигрыш игрока *A* характеризуется уравнением: $30\,p_1 + 50\,p_2 = \upsilon$. Игрок *A* применит свою первую стратегию с вероятностью p_1, а вторую – с вероятностью p_2, сумма которых равна единицы: $p_1 + p_2 = 1$.

Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 60\,p_1 + 40\,p_2 = \upsilon \\ 30\,p_1 + 50\,p_2 = \upsilon \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

Решим ее, выразив p_1: $p_1 = 1 - p_2$ и подставим в систему уравнений:

$$\begin{cases} 60 - 60\,p_2 + 40\,p_2 = \upsilon \\ 30 - 30\,p_2 + 50\,p_2 = \upsilon \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} 60 - 20\,p_2 = \upsilon \\ 30 + 20\,p_2 = \upsilon \end{cases}$$

Почленно просуммируем первое и второе уравнения, получим:

$$90 = 2\upsilon\,.$$

Отсюда, цена игры равна $\upsilon = 45$.

Найдем вероятности, с которыми игрок *A* смешивает свои чистые стратегии:

$$60 - 20\,p_2 = 45$$

$$20\,p_2 = 15$$

$$p_2 = 0{,}75$$

$$p_1 = 1 - p_2 = 0{,}25$$

Для получения максимального выигрыша игрок *A* должен применять свои чистые стратегии с вероятностями $p_1 = 0{,}25$, $p_2 = 0{,}75$, т.е. оптимальная смешанная стратегия $\overline{p}^* = (0{,}25;\, 0{,}75)$. Отклонение игрока *A* от этой оптимальной смешанной стратегии приведет к уменьшению выигрыша.

Пример. Решим геометрическим способом матричную игру, заданную следующей платежной матрицей:

Стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	10	15	9
A_2	12	7	6	11
A_3	6	7	10	8

Приведем платежную матрицу игры к виду 2 х n или m х 2. Сравнивая элементы третьей и первой строк видим, что все элементы третьей строки соответственно меньше элементов первой строки, следовательно, выбор третьей стратегии игроку А не выгоден и ее можно убрать из рассмотрения, тогда платежная матрица будет иметь вид:

Стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	10	15	9
A_2	12	7	6	11

Таким образом, первоначальную матрицу заменим на платежную матрицу меньшей размерности, используя правило доминирования, согласно которому можно отбросить те стратегии, которые заведомо не выгодны игрокам.

Таким образом, игрок A имеет две стратегии, а игрок B – четыре стратегии. Геометрическое решение игры изобразим на рис. 2.2.

Из рис. 2.2 видно, что пересекаются отрезки $[B_1, B'_1]$ и $[B_2, B'_2]$, характеризующие первую и вторую стратегии игрока B. Составим для игрока A систему уравнений, характеризующую решение игры:

$$\begin{cases} 8p_1 + 12p_2 = \upsilon \\ 10p_1 + 7p_2 = \upsilon \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

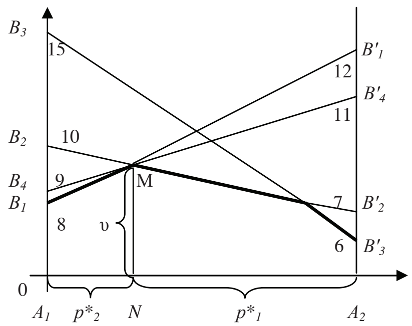


Рис. 2.2. Геометрическое решение игры для игрока A

Выразим p_1 через p_2: $p_1 = 1 - p_2$ и подставим в систему уравнений:

$$\begin{cases} 8 + 4p_2 = \upsilon \\ 10 - 3p_2 = \upsilon \end{cases}$$

Отсюда υ=9,14; p_2=0,286; p_1=0,714.

Игрок A имеет следующую оптимальную смешанную стратегию: $\overline{p}^* = (0{,}714; 0{,}286)$

При этом выигрыш игрока А составит 9,14.

Пример. Найдем решение игры геометрическим способом.

Игра задана следующей платежной матрицей:

Стратегии	B_1	B_2
A_1	7	1
A_2	4	6
A_3	2	8
A_4	3	8

В этой игре игрок A имеет 4 стратегии, а игрок B – две, строим прямые, соответствующие стратегиям игрока B.

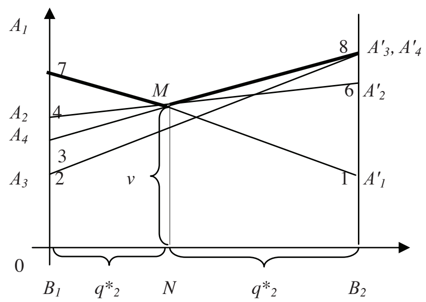


Рис. 2.3. Решение матричной игры для игрока B

Ломаная $A_1MA'_4$ соответствует верхней границе выигрыша (проигрыша) игрока B. А минимальный проигрыш игрок B получит в точке M.

Из рисунка 2.3 видно, что пересекаются отрезки $[A_1, A'_1]$ и $[A_4, A'_4]$. Исходя из этого, для игрока B составим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 7q_1 + 1q_2 = \upsilon \\ 3q_1 + 8q_2 = \upsilon \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

Выразим q_1 через q_2: $q_1 = 1 - q_2$ и подставим в систему уравнений.

Получим:

$$\begin{cases} 7 - 7q_2 + 1q_2 = \upsilon \\ 3 - 3q_2 + 8q_2 = \upsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 - 6q_2 = \upsilon \\ 3 + 5q_2 = \upsilon \end{cases}$$

Отсюда υ=4,818; q_2=0,364; q_1=0,636.

Оптимальная смешанная стратегия игрока B равна $\overline{q}^*$=(0,636; 0,364), при которой проигрыш игрока В будет наименьшим и составит 4,818.

2.5. Решение матричных игр в смешанных стратегиях

Рассмотрим на примерах решение матричных игр в смешанных стратегиях.

Пример. Допустим, на базе торгового предприятия имеется n видов товаров какой-либо товарной группы. В магазин надо завести определенный объем товаров данной группы равный 1000 ед. Известно, что если конкретный товар пользуется спросом, то от его реализации магазин получит прибыль, а если нет – то убыток, связанный с хранением и порчей товара (табл. 2.5).

Т а б л и ц а 2.5. **Финансовые показатели работы магазина**

Показатели	Вид товара						
	1	2	3	4	5	6	7
Доход от реализации товара, у.д.е.	42	42	42	42	42	42	42
Издержки, у.д.е.	2	6	7	8	5	1	3

Требуется определить объемы товаров каждого вида, которые целесообразно завести в магазин для гарантированного получения им дохода.

В качестве игрока A примем магазин, в качестве игрока B будет выступать спрос населения. Каждый из игроков имеет по 7 стратегий, т.е. A_i – стратегии игрока A по заводу конкретного товара и B_j – стратегии игрока B, т.е. спрос на конкретный товар. Составим платежную матрицу игры:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
A_1	42	–2	–2	–2	–2	–2	–2
A_2	–6	42	–6	–6	–6	–6	–6
A_3	–7	–7	42	–7	–7	–7	–7
A_4	–8	–8	–8	42	–8	–8	–8
A_5	–5	–5	–5	–5	42	–5	–5
A_6	–1	–1	–1	–1	–1	42	–1
A_7	–3	–3	–3	–3	–3	–3	42

Определим верхнюю и нижнюю чистую цену игры:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = -1$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 42$$

Так как $\alpha \neq \beta$, т.е. –1≠42, то игра не имеет седловой точки, следовательно, должна быть решена в смешанных стратегиях. Согласно основной теореме игр – теореме Джона фон Неймана – каждая матричная игра двух лиц с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях.

Т.е. игроки будут применять не одну чистую стратегию, а несколько и будут смешивать их случайным образом. Пусть $p_i(p_1, p_2...p_m)$ вероятности, с которыми игрок A использует в ходе игры свои чистые стратегии $A_1, A_2...A_m$. При этом $p_i \geq 0 (i = \overline{1,m})$ и $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ и $q_j(q_1, q_2...q_n)$ – вероятности, с которыми игрок B использует в ходе игры свои чистые стратегии $B_1, B_2...B_n$. При этом $q_i \geq 0 (i = \overline{1,n})$ и $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$.

При использовании смешанных стратегий игра приобретает случайный характер, случайной становится и величина выигрыша игрока A (проигрыша игрока B), которая является функцией от смешанных стратегий (обозначим их через $\overline{p}, \overline{q}$) $\overline{p}$ и $\overline{q}$ и определяется по формуле:

$$f(\overline{p}, \overline{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j .$$

По аналогии с решением матричных игр в чистых стратегиях нижней ценой игры будет число α, которое определяется по формуле:

$$\alpha = \max_{\overline{p}} \min_{\overline{q}} f(\overline{p}, \overline{q}) ,$$

Верхней ценой игры будет число β, которое определяется по формуле:

$$\beta = \min_{\overline{q}} \max_{\overline{p}} f(\overline{p}, \overline{q}) .$$

Цена игры при этом будет равна:

$$\upsilon = f(\overline{p}^*, \overline{q}^*) = \alpha = \beta \text{ или}$$

$$\upsilon = \max_{\overline{p}} \min_{\overline{q}} f(\overline{p}, \overline{q}) = \min_{\overline{q}} \max_{\overline{p}} f(\overline{p}, \overline{q}) .$$

При этом $\overline{p}^*, \overline{q}^*$ называется оптимальными смешанными стратегиями игроков A и B. А цена игры υ характеризует средний выигрыш первого игрока или средний проигрыш второго игрока при использовании обоими игроками смешанных стратегий.

Практически матричные игры в смешанных стратегиях решают сведя их к решению двух взаимно симметричных двойственных задач линейного программирования.

Так как оптимальная смешанная стратегия игрока *A* определяется по формуле $\alpha = \max\limits_{\bar{p}} \min\limits_{\bar{q}} f(\bar{p}, \bar{q})$, то пусть $\upsilon = \min\limits_{\bar{q}} f(\bar{p}, \bar{q})$. Так как при оптимальной стратегии средний выигрыш не меньше υ (цены игры) при любой стратегии противника, то математическое ожидание цены игры по каждой стратегии для игрока *A* будет равно:

$$1)\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geq \upsilon,\ j = \overline{1,n}$$

при условии

$$2)\ p_i \geq 0, i = \overline{1,m}.$$

При этом требуется максимизировать выигрыш игрока *A*: $F_{\max} = \upsilon$.

Разделим левые и правые части ограничений на υ, получим:

$$1)\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \frac{p_i}{\upsilon} \geq 1,\ j = \overline{1,n}$$

$$2)\ \frac{p_i}{\upsilon} \geq 0, i = \overline{1,m}.$$

Обозначим $\frac{p_i}{\upsilon} = x_i$.

Получим:

$$1)\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1,\ j = \overline{1,n}$$

$$2)\ x_i \geq 0, i = \overline{1,m}.$$

Известно, что $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$. Разделим данное выражение на υ, получим $\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{p_i}{\upsilon} = \frac{1}{\upsilon}$. Обозначив $\frac{p_i}{\upsilon} = x_i$, получим $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{\upsilon}$. Так как $F_{\max} = \upsilon$, то можно записать что

$$F_{\max} = \upsilon \text{ равнозначно } F_{\min} = \frac{1}{\upsilon}, \text{ т.е. } F_{\min} = \sum_{i=1}^{m} x_i.$$

Таким образом, *задача линейного программирования для игрока A* запишется следующим образом:

$$1)\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1,\ j = \overline{1,n}$$

$$2)\ x_i \geq 0, i = \overline{1,m}$$

$$F_{\min} = \sum_{i=1}^{m} x_i.$$

Оптимальная смешанная стратегия игрока *B* определяется по формуле $\beta = \min_{\overline{q}} \max_{\overline{p}} f(\overline{p};\overline{q})$. Допустим $\upsilon = \max_{\overline{p}} f(\overline{p};\overline{q})$, следовательно, при оптимальной стратегии средний проигрыш игрока *B* будет не больше υ при любой стратегии игрока *A*, поэтому математическое ожидание цены игры по каждой стратегии для игрока *B* будет равно:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le \upsilon, i = \overline{1,m}$$

при условии $q_j \ge 0, j = \overline{1,n}$

При этом требуется минимизировать проигрыш игрока *B*: $F_{\min} = \upsilon$.

Левые и правые части ограничений разделим на υ, получим:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij} q_j}{\upsilon} \le \frac{\upsilon}{\upsilon}, i = \overline{1,m}$$

$$\frac{q_j}{\upsilon} \ge 0, j = \overline{1,n}.$$

Обозначим $y_j = \frac{q_j}{\upsilon}$.

Получим: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1, i = \overline{1,m}$, $y_j \ge 0, j = \overline{1,n}$.

Так как известно, что $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$, то разделим это выражение на υ, получим:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\upsilon} = \frac{1}{\upsilon}, \text{ т.е. } \sum_{j=1}^{n} y_j = \frac{1}{\upsilon}.$$

Так как $F_{\min} = \upsilon$, то это равнозначно $F_{\max} = \frac{1}{\upsilon}$ или $F_{\max} = \sum_{j=1}^{n} y_j$.

Таким образом, *задача линейного программирования для игрока B* запишется следующим образом:

$$1)\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1, i = \overline{1,m};$$

$$2)\ y_j \ge 0, j = \overline{1,n}.$$

$$F_{\max} = \sum_{j=1}^{n} y_j.$$

Составим задачу линейного программирования для игрока *A*. Так как среди элементов платежной матрицы имеются отрицательные, то преобразуем их в положительные путем прибавления к каждому элементу платежной матрицы величины *C*, значение которой больше максимального по модулю отрицательного элемента платежной матрицы. Преобразуем платежную матрицу, прибавив к ее элементам *C*=8:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
A_1	50	6	6	6	6	6	6
A_2	2	50	2	2	2	2	2
A_3	1	1	50	1	1	1	1
A_4	0	0	0	50	0	0	0
A_5	3	3	3	3	50	3	3
A_6	7	7	7	7	7	50	7
A_7	5	5	5	5	5	5	50

Для игрока A задача будет иметь вид:

$$\begin{cases} 50x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 3x_5 + 7x_6 + 5x_7 \geq 1 \\ 6x_1 + 50x_2 + 1x_3 + 3x_5 + 7x_6 + 5x_7 \geq 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 50x_3 + 3x_5 + 7x_6 + 5x_7 \geq 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 50x_4 + 3x_5 + 7x_6 + 5x_7 \geq 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 50x_5 + 7x_6 + 5x_7 \geq 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 3x_5 + 50x_6 + 5x_7 \geq 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 3x_5 + 7x_6 + 50x_7 \geq 1 \end{cases}$$

$$F_{\min} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \,.$$

В результате решения задачи линейного программирования, получены следующие значения неизвестных величин:

$$x_1 = 0{,}0148$$
$$x_2 = 0{,}0136$$
$$x_3 = 0{,}0133$$
$$x_4 = 0{,}0130$$
$$x_5 = 0{,}0139$$
$$x_6 = 0{,}0151$$
$$x_7 = 0{,}0145$$
$$F_{min} = 0{,}0981.$$

Задачи линейного программирования решаются, используя пакеты прикладных программ: Excel, LPX.88.

От результатов решения задачи линейного программирования необходимо перейти к результатам решения матричной игры:

Так как для игрока B: $\frac{q_j}{\upsilon} = y_j$, а $F_{\max} = \frac{1}{\upsilon}$, то $\frac{q_j}{\frac{1}{F_{\max}}} = y_j$, следовательно

$q_j \cdot F_{\max} = y_j$, отсюда:

$$q_j = \frac{y_j}{F_{\max}} \quad .$$

Так как для игрока A: $\frac{p_i}{\upsilon} \geq x_i$, а $F_{\min} = \frac{1}{\upsilon}$, то $\upsilon = \frac{1}{F_{\min}}$ и $\frac{p_i}{\frac{1}{F_{\min}}} = x_i$, следовательно $p_i \cdot F_{\min} = x_i$, отсюда:

$$p_i = \frac{x_i}{F_{\min}}.$$

Используя выше изложенные преобразования, определяют вероятности, с которыми игроки должны смешивать свои чистые стратегии.

$$p_1 = 0{,}0148 : 0{,}0981 = 0{,}150$$
$$p_2 = 0{,}0136 : 0{,}0981 = 0{,}138$$
$$p_3 = 0{,}0133 : 0{,}0981 = 0{,}135$$
$$p_4 = 0{,}0130 : 0{,}0981 = 0{,}133$$
$$p_5 = 0{,}0139 : 0{,}0981 = 0{,}142$$
$$p_6 = 0{,}0151 : 0{,}0981 = 0{,}154$$
$$p_7 = 0{,}0145 : 0{,}0981 = 0{,}148$$
$$F_{\max} = \frac{1}{F_{\min}} - C = \frac{1}{0{,}0981} - 8 = 2{,}19 \text{ у.д.е.}$$

Вероятности p_i трактуются как доли каждого вида товара, завозимого в магазин. Если магазин завозит весь ассортимент товара в объеме 1000 единиц, то согласно оптимальной стратегии $\bar{p}^*$=(0,150; 0,138; 0,135; 0,133; 0,142; 0,154; 0,148) необходимо завести 150 единиц товара первого вида, 138 – второго; 135 – третьего; 133 – четвертого; 142 – пятого; 154 – шестого; 148 – седьмого товара.

В этом случае доход магазина будет равен значению игры, т.е. $\upsilon = F_{\max}$ = 2,19 у.д.е.

Пример. В городе имеются два предприятия, которые помимо основных своих товаров могут выпускать побочную продукцию одного назначения для населения (жидкие чистящие средства для мытья посуды, раковин и т.д.). Продукцию реализуют в городе. Виды чистящих средств разные. Первое предприятие (игрок A) выпускает 6 видов товаров (A_1, A_2…A_6). Второе предприятие (игрок B) – тоже 6 видов товаров (B_1, B_2…B_6). Себестоимость и цена сбыта всех видов изделий одинакова. Маркетологи установили, что емкость рынка этой продукции в городе равна 1000 единиц. Примем за p_{ij} вероятность сбыта товара вида i игроком A при реализации товара вида j игроком B, тогда $p_{ij} \cdot$ 1000 – это количество товаров реализованных игроком A, а выражение (1– p_{ij})$\cdot$ 1000 – количество товаров реализованных игроком B. Допустим, доход от продажи единицы товара равен 1 у.д.е. В любой ситуации сумма доходов игрока A и B равны 1000: $p_{ij}\cdot$ 1000+(1–

$p_{ij})\cdot 1000=1000$, т.е. увеличение выигрыша игрока A эквивалентно проигрышу игрока B.

Прогнозируемая доля сбыта товаров игроком A представлена в табл. 2.6.

Т а б л и ц а 2.6. **Доля сбыта товаров игроком *A***

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	0,5	0,5	0,4	0,3	0,2	0,6
A_2	0,1	0,4	0,7	0,1	0,6	0,5
A_3	0,2	0,3	0,4	0,2	0,7	0,5
A_4	0,3	0,6	0,1	0,3	0,2	0,4
A_5	0,4	0,4	0,3	0	0,1	0,6
A_6	0,7	0,2	0,2	0,4	0,5	0,1

Если объем сбыта товара равен 1000 единиц, то платежная матрица игры будет иметь вид:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	500	500	400	300	200	600
A_2	100	400	700	100	600	500
A_3	200	300	400	200	700	500
A_4	300	600	100	300	200	400
A_5	400	400	300	0	100	600
A_6	700	500	200	400	500	100

Для удобства расчетов можно элементы платежной матрицы преобразовать, т.е. разделить на 100, следовательно, она будет иметь вид:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	5	5	4	3	2	6
A_2	1	4	7	1	6	5
A_3	2	3	4	2	7	5
A_4	3	6	1	3	2	4
A_5	4	4	3	0	1	6
A_6	7	5	2	4	5	1

Легко установить, что элементы пятой строки матрицы (A_5) не больше соответствующих элементов первой строки (A_1), следовательно, вычеркиваем пятую стратегию, она для игрока A не выгодна.

Кроме того, элементы второго столбца (B_2) не меньше соответствующих элементов четвертого столбца (B_4), следовательно, вычеркиваем вторую стратегию для игрока B, она ему не выгодна. Платежная матрица игры будет иметь вид:

B_j / A_i	B_1	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	5	4	3	2	6
A_2	1	7	1	6	5
A_3	2	4	2	7	5
A_4	3	1	3	2	4
A_6	7	2	4	5	1

Элементы первого столбца (B_1) не меньше соответствующих элементов четвертого столбца (B_4), следовательно вычеркиваем первый столбец.

Элементы четвертой строки (A_4) не больше соответствующих элементов первой строки (A_4), следовательно вычеркиваем четвертую строку, матрица имеет вид:

B_j / A_i	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	4	3	2	6
A_2	7	1	6	5
A_3	4	2	7	5
A_6	2	4	5	1

Игра не имеет седловой точки, так как α=2, а β=4, и должна быть решена в смешанных стратегиях.

Составим задачу линейного программирования для игрока A:

$$\begin{cases} 4x_1+7x_2+4x_3+2x_6 \ge 1 \\ 3x_1+1x_2+2x_3+4x_6 \ge 1 \\ 2x_1+6x_2+7x_3+5x_6 \ge 1 \\ 6x_1+5x_2+5x_3+1x_6 \ge 1 \end{cases}$$

$$F_{\min} = x_1+x_2+x_3+x_6 .$$

Составим задачу линейного программирования для игрока B:

$$\begin{cases} 4y_3+3y_4+2y_5+6y_6 \le 1 \\ 7y_3+1y_4+6y_5+5y_6 \le 1 \\ 4y_3+2y_4+7y_5+5y_6 \le 1 \\ 2y_3+4y_4+5y_5+1y_6 \le 1 \end{cases}$$

$$F_{\max} = y_3+y_4+y_5+y_6 .$$

Результаты решения задачи линейного программирования для игрока A:

$$x_1 = 0{,}172$$
$$x_2 = 0{,}011$$
$$x_3 = 0$$
$$x_4 = 0$$

$$x_5 = 0$$
$$x_6 = 0{,}1183$$
$$F_{min} = 0{,}301.$$

Значения неизвестных величин задачи линейного программирования для игрока B равны:

$$y_1 = 0$$
$$y_2 = 0$$
$$y_3 = 0{,}1075$$
$$y_4 = 0{,}1828$$
$$y_5 = 0{,}01075$$
$$y_6 = 0$$
$$F_{max} = 0{,}301.$$

Перейдем от решения задач линейного программирования к решению матричной игры. Результаты решения игры для игрока A:

$$p_i = \frac{x_i}{F_{\min}}$$
$$p_1 = 0{,}571$$
$$p_2 = 0{,}036$$
$$p_3 = 0$$
$$p_4 = 0$$
$$p_5 = 0$$
$$p_6 = 0{,}393 .$$

Выигрыш игрока A составит: $F_{\max} = \frac{1}{F_{\min}} \cdot 100 = 3{,}322 \cdot 100 = 332{,}2$.

Результаты решения для игрока B.

$$q_j = \frac{y_j}{F_{\max}}$$
$$q_1 = 0$$
$$q_2 = 0$$
$$q_3 = 0{,}357$$
$$q_4 = 0{,}607$$
$$q_5 = 0{,}036$$
$$q_6 = 0 .$$

Проигрыш игрока B равен $F_{\min} = \frac{1}{F_{\max}} \cdot 100 = 332{,}2$, а выигрыш равен: 1000–332,2=667,8.

Таким образом оптимальная стратегия игрока A равна $\overline{p}^*$= (0,571; 0,036; 0; 0; 0; 0,393), а оптимальная стратегия игрока B – $\overline{q}^*$= (0; 0; 0,357; 0,607; 0,036; 0).

Следовательно, первое предприятие (игрок A) должно выбрать выпуск первого, второго и шестого товара с вероятностями соответственно 0,571; 0,036; 0,393, а игрок B, т.е. второе предприятие должно выбрать выпуск третьего, четвертого и пятого товаров с вероятностями равными соответственно 0,357; 0,607; 0,036.

В этом случае игрок A получит доход равный 332,2 у.д.е. Так как решение данной игры позволило найти оптимальные стратегии игроков A и B и определить математическое ожидание выигрыша игрока A равное υ. Следовательно, в этой игре проигрыш игрока B равен $-\upsilon$, а так как сумма общего дохода от продажи товаров равна 1000 шт $\cdot$ 1 у.д.е. = 1000, то математическое ожидание дохода от реализации товаров второго предприятия будет равно 1000–332,2=667,8 у.д.е.

Пример. Предприятие $П_1$ и $П_2$ производят однородный сезонный товар, пользующийся спросом с течении n единиц времени. Прибыль от продажи товара в единицу времени составляет p у.д.е. Предприятие $П_2$, будучи более состоятельным, хочет вытеснить предприятие $П_1$ с рынка сбыта. Оно не снижая цены на товар, вкладывает дополнительные средства и повышает его качество. Для этого требуется дополнительное время на совершенствование технологии производства товара, на переналадку оборудования, следовательно, будем полагать, что чем выше качество товара, тем он позже поступает на рынок. А от качества товара зависит уровень спроса и реализуется тот товар, качество которого выше.

Необходимо дать рекомендации предприятиям $П_1$ и $П_2$ по оптимальным срокам поставки товара на рынок сбыта, обеспечивающие предприятию $П_1$ максимальную среднюю прибыль, а предприятию $П_2$ – наименьшие потери.

Решение: 1) составим платежную матрицу игры.

Предприятие $П_1$ и $П_2$ примем соответственно за игроков A и B. Через $A_i (i=\overline{1,m})$ обозначим чистую стратегию игрока A, состоящую в том, что он поставляет свой товар на рынок в i-единицу времени, через $B_j (j=\overline{1,n})$ – чистую стратегию игрока B, в соответствии с которой он поставляет свой товар для сбыта в j-ю единицу времени. Игрок A, выбирая i-единицу времени поставки товара, стремится максимизировать свой доход, а игрок B, выбирая j-ю единицу времени поставки своего товара, старается минимизировать доход игрока A.

Элементы платежной матрицы рассчитаем, исходя из следующих соображений:

1) если предприятие $П_1$ предложит свой товар в момент времени i, а предприятие $П_2$ позже, в момент времени j (где $i < j$), то предприятие $П_1$, не имея конкурента в течение $(j - i)$ единиц времени, получит при-

быль за этот период равную $p(j–i)$ у.д.е. В момент времени j на рынке появляется товар предприятия $П_2$ более высокого качества и предприятие $П_1$ теряет рынок и прибыли не получает;

2) если $i>j$, то предприятие $П_1$, предлагая свой товар более высокого качества, будет единолично получать доход на отрезке времени от i до n, состоящем из $(n–i+1)$ единиц времени. Доход предприятия $П_1$ будет равен $p(n–i+1)$ у.д.е.;

3) если $i=j$, т.е. на рынок одновременно поступает товар обоих предприятий и он реализуется с одинаковым спросом, следовательно, прибыль и предприятие $П_1$ и предприятия $П_2$ будет равна $0{,}5\cdot p(n–i+1)$ у.д.е.

Следовательно выигрыши предприятия $П_1$ могут быть найдены по следующим формулам:

$$a_{ij} = \begin{cases} p(j-i), i<j \\ 0{,}5\,p(n-i+1), i=j \\ p(n-i+1), i>j \end{cases}.$$

Допустим n=6, тогда платежная матрица будет иметь вид:

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	0,5p (6–1+1)	p(2–1)	p(3–1)	p(4–1)	p(5–1)	p(6–1)
A_2	p(6–2+1)	0,5p(6–2+1)	p(3–2)	p(4–2)	p(5–2)	p(6–2)
A_3	p(6–3+1)	p(6–3+1)	0,5p(6–3+1)	p(4–3)	p(5–3)	p(6–3)
A_4	p(6–4+1)	p(6–4+1)	p(6–4+1)	0,5p(6–4+1)	p(5–4)	p(6–4)
A_5	p(6–5+1)	p(6–5+1)	p(6–5+1)	p(6–5+1)	0,5p(6–5+1)	p(6–5)
A_6	p(6–6+1)	p(6–6+1)	p(6–6+1)	p(6–6+1)	p(6–6+1)	0,5p(6–6+1)

Элементы платежной матрицы игры будут следующими:

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	α_i
A_1	3p	p	2p	3p	4p	5p	p
A_2	5p	2,5p	p	2p	3p	4p	p
A_3	4p	4p	2p	p	2p	3p	p
A_4	3p	3p	3p	1,5p	p	2p	p
A_5	2p	2p	2p	2p	p	p	p
A_6	p	p	p	p	p	0,5p	0,5 p
β_j	5p	4p	3p	3p	4p	5p	

Найдем нижнюю и верхнюю цену игры:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = p$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 3p$$

$$(\alpha = p) \neq (\beta = 3p)$$

$$\alpha \neq \beta .$$

Следовательно, игра не имеет седловой точки и должна быть решена в смешанных стратегиях.

Запишем вышеизложенную задачу в терминах линейного программирования, предварительно преобразовав элементы платежной матрицы. Так как все они содержат постоянную величину p, то все элементы платежной матрицы разделим на p, получим:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	3	1	2	3	4	5
A_2	5	2,5	1	2	3	4
A_3	4	4	2	1	2	3
A_4	3	3	3	1,5	1	2
A_5	2	2	2	2	1	1
A_6	1	1	1	1	1	0,5

Составим задачу линейного программирования для игрока A:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 1 \\ x_1 + 2{,}5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 1{,}5x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 1x_5 + 0{,}5x_6 \geq 1 \end{cases}$$

$$F_{\min} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 .$$

Задача линейного программирования для игрока B будет иметь вид:

$$\begin{cases} 3y_1 + 1y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 4y_5 + 5y_6 \leq 1 \\ 5y_1 + 2{,}5y_2 + y_3 + 2y_4 + 3y_5 + 4y_6 \leq 1 \\ 4y_1 + 4y_2 + 2y_3 + y_4 + 2y_5 + 3y_6 \leq 1 \\ 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 + 1{,}5y_4 + y_5 + 2y_6 \leq 1 \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5 + y_6 \leq 1 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + 0{,}5y_6 \leq 1 \end{cases}$$

$$F_{\max} = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 .$$

Решение исходных задач будет следующим для игрока A:

$$F_{\max} = \frac{1}{F_{\min}} = \frac{1}{0{,}4583} \cdot p = 2{,}182 \cdot p$$

$$p_1 = \frac{0,25}{0,4583} = \left(\frac{x_1}{F_{\min}}\right) = 0,545$$

$$p_2 = p_5 = p_6 = 0$$

$$p_3 = \frac{x_3}{F_{\min}} = \frac{0,125}{0,4583} = 0,273$$

$$p_4 = \frac{x_4}{F_{\min}} = \frac{0,0833}{0,4583} = 0,182$$

$$p_1 + p_3 + p_4 = 1,0 \text{ .}$$

Решение исходных задач будет следующим для игрока *B*:

$$F_{\min} = \frac{1}{F_{\max}} = \frac{1}{0,4583} \cdot p = 2,182 \cdot p$$

$$q_1 = 0, q_5 = 0, q_6 = 0$$

$$q_2 = \frac{y_2}{F_{\max}} = \frac{0,1667}{0,4583} = 0,364$$

$$q_3 = \frac{y_3}{F_{\max}} = \frac{0,0417}{0,4583} = 0,091$$

$$q_4 = \frac{y_4}{F_{\max}} = \frac{0,25}{0,4583} = 0,545$$

$$q_2 + q_3 + q_4 = 1,0 \text{ .}$$

Таким образом, вторая, пятая и шестая стратегии игрока *A* бесполезны, так как p_2, p_5, p_6=0. При случайном использовании первой, третьей и четвертой стратегий с относительными частотами $p_1 = 0,545; p_3 = 0,273; p_4 = 0,182$ игроку *A* обеспечен средний выигрыш в размере $F_{\max} = 2,182 \cdot p$ у.д.е.

При случайном чередовании второй, третьей и четвертой стратегий игроком *B* с относительными частотами $q_2 = 0,364; q_3 = 0,091;$ $p_4 = 0,545$ игроку *B* обеспечен средний проигрыш в размере $F_{\min} = 2,182 \cdot p$ у.д.е.

Таким образом, первое предприятие должно выбрасывать свой товар на рынок в первую, третью и четвертую единицы времени, с вероятностями равными соответственно 0,545; 0,273 и 0,182, а второе предприятие должно выбрасывать свой товар во вторую, третью и четвертую единицы времени с вероятностями равными соответственно 0,364; 0,091; 0,545. В этом случае математическое ожидание дохода первого предприятия будет равно 2,182·*p* у.д.е.

2.6. Позиционные игры

В реальной действительности игроки наблюдают за динамикой конфликта, имеют информацию о фактически складывающейся обстановке. Конфликты, в которых детализируется поведение участников конфликта во времени можно моделировать позиционными играми.

Позиция – это элемент дерева игры. В каждой позиции делает ход один из игроков (1, 2 или 0, при этом цифрой «0» обозначен фиктивный игрок (природа), который делает ход согласно заданному распределению вероятностей.

Дерево игры изображается графически с помощью плоской фигуры, состоящей из конечного числа вершин (рис. 2.4). Вершины или позиции соединяются ребрами. Ребра, соединяющие некоторую позицию с непосредственно следующим за ней, называются *альтернативами* этой позиции.

Альтернативы каждой позиции нумеруются натуральными числами по часовой стрелке (1 или 2).

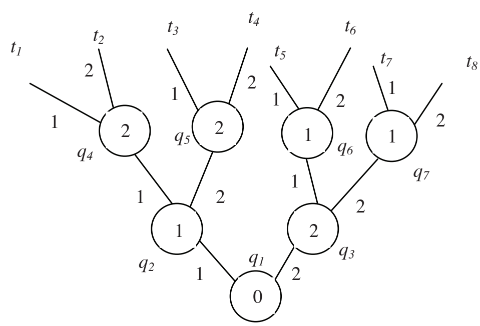


Рис. 2.4. Дерево игры

Позиции, не имеющие последующих, называются *окончательными*, а остальные позиции считаются *неокончательными*. Построение диаграммы игры начинается с начальной позиции, в которой указывается, какой из игроков делает ход. Из вершины q_1 проводят ребра, соответствующие альтернативам игрока, который делает первый ход. Они соединяют вершину q_1 с вершинами (позициями) игроков, которые делают следующий ход и т.д. до тех пор, пока не будут обозначены окончательные вершины.

Каждая окончательная вершина характеризуется элементом t_i, который указывает, сколько выиграет игрок 1, если игра закончится в данной вершине.

Если в игре используется ход, осуществляемый не игроком, а случайным механизмом (природой), то позиции (или узлу), соответствующему данному ходу, присваивается номер «0».

Ветвью дерева называется ломаная линия, состоящая из отрезков дерева (т.е. ребер), идущая с нижней позиции последовательно через соответствующие позиции до вершины дерева. Каждая ветвь отображает партию игры. Для изображения необходимых сведений о сделанных выборах при определенных ходах игроков на дереве игры отмечают кружком, овалом и т.д. информационные множества позиций или узлов конкретного игрока. В каждое информационное множество входят те позиции (узлы), для которых соответствующий игрок не может точно указать, в какой точке дерева он находится, делая этот ход.

Таким образом, позиционная игра состоит из:

1. дерева игры;

2. функций, определяющих в каждой вершине сумму, которая должна быть уплачена игроку 1, если партия заканчивается в точке t;

3. набора чисел (количество которых равно числу игроков игры), указывающих в каждой позиции, какой из игроков делает очередной ход;

4. сопоставления каждой позиции альтернатив, т.е. выборов конкретных игроков, (обозначенных ребрами) и помеченных натуральными числами (1 и 2);

5. разбивки позиций на информационные множества, которые должны удовлетворять следующим условиям:

а) все позиции, принадлежащие данному информационному множеству, относятся к одному игроку;

б) все позиции, принадлежащие одному информационному множеству, имеют одинаковое число альтернатив, которые нумеруют натуральными числами;

в) для игрока 0 (природы), если он участвует в игре, информационное множество всегда состоит из одной позиции (начальной);

г) для конкретной партии игры (т.е. ломаной линии, идущей от основания дерева к одной из его вершин) имеется одна позиция из конкретного информационного множества (для этой партии).

Пример. Имеются две организации, которые хотят установить между собой деловые связи. И они решают вопрос о строительстве перерабатывающего модуля, причем первая организация может построить перерабатывающий модуль для второй организации. Эту ситуацию упрощенно можно представить в виде позиционной игры и изобразить следующим деревом (рис. 2.5).

Игра состоит из трех ходов, которые делают два игрока. Первый ход делает первый игрок: он выбирает число x из множества двух чисел: 1 или 2. Второй ход делает второй игрок: зная, какое число x выбрал первый игрок в первом ходе, он выбирает число y из множества двух чисел: 1 или 2. Третий ход делает первый игрок: зная, какое число y выбрал второй игрок, и, помня, какое число x он выбрал при первом ходе, первый игрок на третьем ходе выбирает число z из множества двух чисел: 1 или 2.

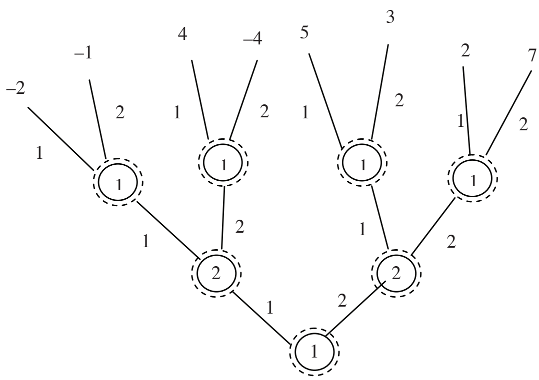


Рис. 2.5. Диаграмма игры в три хода с полной информацией

Таким образом, на первом ходе первый игрок (первая организация) делает выбор из 2-х альтернатив: 1-я – предложить второй организации построить перерабатывающий модуль по производству молочных продуктов, 2-я – предложить построить модуль для производства мясных продуктов. Второй игрок (организация 2) на втором ходе, зная, какую альтернативу выбрала первая организация на первом ходе, делает выбор из двух альтернатив: 1-я – строить перерабатывающий модуль по производству молочных продуктов и согласиться с предложением первой организации и заключить договор с ней; 2-я – строить модуль по производству мясных продуктов и согласиться с предложением первой организации и заключить с ней договор. Первая организация, зная выбор второй организации на втором ходу и помня свой выбор на первом ходу, делает на третьем ходе выбор из двух альтернатив: 1-я – согласиться с предложением второй организации и заключить договор, 2-я – не согласиться с предложением второй организации.

Таким образом, после того, как сделаны 3 хода, первая организация получит сумму, определенную функций $f(x; y; z)$, где x – выбор числа 1 или 2 на первом ходу; y – выбор 1 или 2 на втором ходу; z – выбор 1 или 2 на третьем ходу.

Так как второму игроку известен выбор первого на первом ходе, то он, делая свой выбор, знает, в каком месте дерева он находится, следовательно, в этой игре каждая позиция образует отдельное информационное множество.

Для нашего примера игра заканчивается и происходит распределение выигрышей, второй игрок платит первому игроку сумму, определенную функцией:

$$f(x;y;z)$$
$$f(1;1;1)=-2$$
$$f(1;1;2)=-1$$
$$f(1;2;1)=4$$
$$f(1;2;2)=-4$$
$$f(2;1;1)=5$$
$$f(2;1;2)=3$$
$$f(2;2;1)=2$$
$$f(2;2;2)=7$$

Для того, чтобы найти решение позиционной игры, необходимо ее свести к матричной игре. Процесс сведения позиционной игры к матричной называется *нормализацией позиционной игры*.

Для этого рассмотрим различные стратегии игроков. Так, у второго игрока имеется возможность выбора одного из двух чисел 1 или 2, т.е. есть две стратегии. Кроме этого, он имеет информацию о выбранном числе x при первом ходе игроком 1, следовательно, он, выбирая число y, может учитывать или не учитывать эту информацию, т.е. для каждого числа y есть еще два значения x, следовательно, всего второй игрок имеет четыре стратегии:

1-я – выбрать число y=1, не взирая на число x;

2-я – выбрать число y=2, не взирая на число x;

3-я – выбрать число y равное числу x;

4-я – выбрать число y=1, если число x=2 и выбрать число y=2, если число x=1.

Рассмотрим стратегии первого игрока.

При каждом выборе на первом ходе может быть два выбора на втором ходе, т.е. первый игрок имеет четыре стратегии, и для этих четырех вариантов может быть сделано еще два выбора, следовательно, первый игрок имеет восемь возможных стратегий.

Стратегию первого игрока обозначим через $(i_0; i_1; i_2)$, где i_0 – означает выбор игроком 1 на первом ходе; i_1 – выбор первым игроком на третьем ходе, если второй игрок на втором ходе выбрал число 1; i_2 –

выбор первым игроком на третьем ходе, если второй игрок на втором ходе выбрал число 2.

Выигрыши первого игрока определяем следующим образом:

$(i_0; i_1; i_2)$	y=1, не взирая на x	y=2, не взирая на x	y=x	y=1, если x=2; y=2, если x=1
1, 1, 1	1, 1, 1= –2	1, 2, 1= 4	1, 1, 1= –2	1, 2, 1= 4
1, 1, 2	1, 1, 1= –2	1, 2, 2= –4	1, 1, 1= –2	1, 2, 2= –4
1, 2, 1	1, 1, 2= –1	1, 2, 1= 4	1, 1, 2= –1	1, 2, 1= 4
1, 2, 2	1, 1, 2= –1	1, 2, 2= –4	1, 1, 2= –1	1, 2, 2= –4
2, 1, 1	2, 1, 1= 5	2, 2, 1= 2	2, 2, 1= 2	2, 1, 1= 5
2, 1, 2	2, 1, 1= 5	2, 2, 2= 7	2, 2, 2= 7	2, 1, 1= 5
2, 2, 1	2, 1, 2= 3	2, 2, 1= 2	2, 2, 1= 2	2, 1, 2= 3
2, 2, 2	2, 1, 2= 3	2, 2, 2= 7	2, 2, 2= 7	2, 1, 2= 3

Платежная матрица игры будет выглядеть следующим образом:

A_i \ B_j	1	2	3	4
1	–2	4	–2	4
2	–2	–4	–2	–4
3	–1	4	–1	4
4	–1	–4	–1	–4
5	5	2	2	5
6	5	7	7	5
7	3	2	2	3
8	3	7	7	3

Преобразуем элементы платежной матрицы игры в положительные, путем прибавления c=4:

A_i \ B_j	1	2	3	4	α_i
1	2	8	2	8	2
2	2	0	2	0	0
3	3	8	3	8	3
4	3	0	3	0	0
5	9	6	6	9	6
6	9	11	11	9	9
7	7	6	6	7	6
8	7	11	11	7	7
β_j	9	11	11	9	9

Найдем нижнюю и верхнюю чистую цену игры:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 9$$
$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 9$$

Так как $\alpha = \beta = \upsilon = 9 - c = 9 - 4 = 5$, то игра имеет седловую точку и решается в чистых стратегиях.

Оптимальной является шестая стратегия для первого игрока.

Первая организация должна предложить второй построить модуль для производства мясных продуктов (ход 1 первого игрока альтернатива 2), но второй игрок (вторая организация) рассматривает возможность построить модуль по производству молочных продуктов (ход 2 второго игрока альтернатива 1), первая организация не соглашается с будущим партнером и не заключает договор на строительство модуля по производству молочных продуктов (ход 3 первого игрока альтернатива 2).

Пример. Допустим первый игрок на третьем ходе не знает выборов, сделанных вторым игроком на втором ходе и забыв, какой выбор он сделал сам на первом ходе.

В этом случае первого игрока можно представить в виде двух лиц, которые не имеют возможности обмениваться информацией, т.е. первый ход делает первое лицо, а третий ход – второе лицо.

При графическом представлении игры эти обстоятельства учитываются таким образом, что первый игрок на третьем ходе не знает, в каком из узлов третьего уровня он находится, поэтому все четыре узла третьего уровня образуют информационное множество (рис. 2.6).

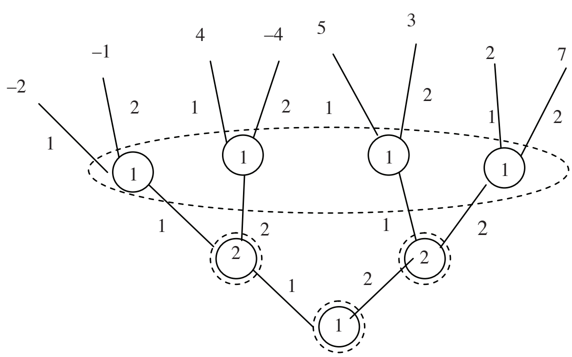


Рис. 2.6. Диаграмма игры с неполной информацией

Сведем позиционную игру к матричному виду. У второго игрока имеется четыре таких же стратегии, как в предыдущем примере. У первого игрока возможности уменьшаются за счет недостатка информации, так как он на третьем ходе не знает предыдущих выборов, то его стратегия состоит из пары чисел (x, z), т.е. на первом ходе он может выбрать x=1 или x=2, и на третьем ходе он может выбрать z=1 или z=2, следовательно, первый игрок имеет четыре стратегии: (1,1); (1,2); (2,1); (2,2).

Составим матрицу выигрышей первого игрока:

(x, z)	y=1, не взирая на x	y=2, не взирая на x	y=x	y=1, если x=2; y=2, если x=1
(1,1)	1, 1, 1= –2	1, 2, 1= 4	1, 1, 1= –2	1, 2, 1= 4
(1,2)	1, 1, 1= –1	1, 2, 2= –4	1, 1, 2= –1	1, 2, 2= –4
(2,1)	2, 1, 1= 5	2, 2, 1= 2	2, 2, 1= 2	2, 1, 1= 5
(2,2)	2, 1, 2= 3	2, 2, 2= 7	2, 2, 2= 7	2, 1, 2= 3

Преобразуем элементы платежной матрицы в положительные, прибавив постоянное слагаемое C=4, получим:

A_i \ B_j	1	2	3	4	α_i
1	2	8	2	8	2
2	3	0	3	0	0
3	9	6	6	9	6
4	7	11	11	7	7
β_j	9	11	11	9	

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 7;$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 9.$$

Так как $\alpha_i \neq \beta_j$ – игра не имеет седловой точки и должна быть решена в смешанных стратегиях.

Составим задачу линейного программирования для первого игрока:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 7x_4 \geq 1 \\ 8x_1 + 6x_3 + 11x_4 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 11x_4 \geq 1 \\ 8x_1 + 9x_3 + 7x_4 \geq 1 \end{cases}$$

$$F_{\min} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

Задача линейного программирования для второго игрока:

$$\begin{cases} 2y_1 + 8y_2 + 2y_3 + 8y_4 \le 1 \\ 3y_1 + 3y_3 \le 1 \\ 9y_1 + 6y_2 + 6y_3 + 9y_4 \le 1 \\ 7y_1 + 11y_2 + 11y_3 + 7y_4 \le 1 \end{cases}$$

$$F_{\max} = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$$

Приведем результаты решения симметричных двойственных задач линейного программирования:

для первого игрока:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 0{,}702$$
$$x_4 = 0{,}0526$$
$$F_{min} = 0{,}1228$$

для второго игрока:

$$y_1 = 0{,}0877$$
$$y_2 = 0{,}0351$$
$$y_3 = 0$$
$$y_4 = 0$$
$$F_{max} = 0{,}1228.$$

Найдем оптимальные смешанные стратегии игроков:

для первого игрока:

$$p_1 = 0$$
$$p_2 = 0$$
$$p_3 = 0{,}57$$
$$p_4 = 0{,}43$$

для второго игрока:

$$q_1 = 0{,}71$$
$$q_2 = 0{,}29$$
$$q_3 = 0$$
$$q_4 = 0$$

Если первый игрок использует свою оптимальную смешанную стратегию $\overline{p}*$=(0; 0; 0,57; 0,43), а второй игрок – стратегию $\overline{q}*$=(0,71; 0,29;0,0), то выигрыш первого игрока составит:

$$F_{\max} = \frac{1}{F_{\min}} - 4 = 4{,}14 \text{ млн. у.д.е.}$$

Как видим, потеря информации уменьшает цену игры.

Пример. Допустим, второму игроку не известен выбор первого игрока на первом ходе и, следовательно, выполняя свой ход, он не знает точно, в каком узле он находится. Поэтому узлы второго уровня образуют информационное множество, такое образовано и для первого игрока на третьем ходе. Графическое изображение игры будет выглядеть следующим образом (рис. 2.7).

Первый игрок в этой игре имеет четыре стратегии (1,1); (1,2); (2,1); (2,2) обозначенных парой чисел (x, z).

А у второго игрока есть две стратегии: 1-я – выбрать число 1 и 2-я выбрать число 2.

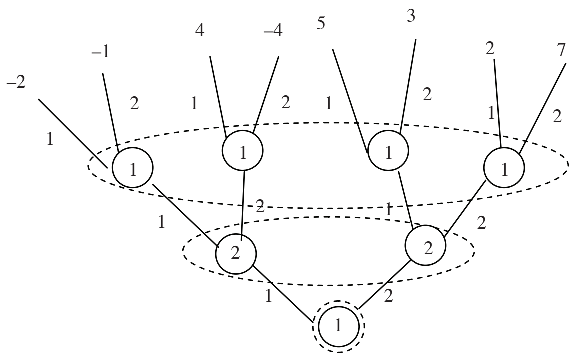


Рис. 2.7. Диаграмма игры с неполной информацией

Сформируем матрицу выигрышей для первого игрока:

(x, z)	y	
	1	2
(1,1)	1,1,1=–2	1,2,1=4
(1,2)	1,1,2=–1	1,2,2=–4
(2,1)	2,1,1=5	2,2,1=2
(2,2)	2,1,2=3	2,2,2=7

Прибавим к элементам платежной матрицы C=4, получим:

(x, z)	y		α_i
	1	2	
(1,1)	2	8	2
(1,2)	3	0	0
(2,1)	9	6	6
(2,2)	7	11	7
β_j	9	11	

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 7\,;\ \ \beta = \min_j \max_i a_{ij} = 9\ .$$

Так как игра не имеет седловой точки, т.е. $\alpha_i \neq \beta_j$, то ее необходимо решить в смешанных стратегиях

Решим игру геометрически (рис 2.8).

Ломаная $A_3MA'_4$ соответствует верхней границе проигрыша игрока 2. А минимальный проигрыш игрок 2 получит в точке M. Из графика видно, что пересекается четвертая и третья прямые.

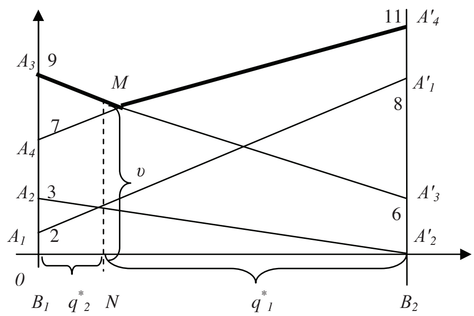


Рис. 2.8. Геометрическое решение игры

Исходя из этого соображения, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 9q_1 + 6q_2 = \upsilon \\ 7q_1 + 11q_2 = \upsilon \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

Отсюда $q_1 = 1 - q_2$. Подставим значение q_1 в систему уравнений, получим:

$$\begin{cases} 9 - 3q_2 = \upsilon \\ 7 + 4q_2 = \upsilon \end{cases}$$

Уравняем коэффициенты при q_2, сложим два уравнения и решим. Получим, что q_2=0,286, тогда q_1=0,714, а υ=8,143–4=4,143 млн. у.д.е.

Таким образом, оптимальная смешанная стратегия для игрока 2 равна $\overline{q}*$=(0,714; 0,286), она обеспечивает игроку 2 проигрыш в сумме 4,143 млн. у.д.е.

Пример. В игре участвуют два игрока. Первый игрок – один человек, второй – команда из двух человек A и B. Три человека изолированы друг от друга и не могут обмениваться информацией. Сначала первый игрок выбирает число x из множества двух чисел {1,2}. После этого, если первый игрок выбрал число 1, то предлагается на втором ходе сделать выбор игроку A, который выбирает число y из множества двух чисел {1,2}, после этого свой выбор делает игрок B на третьем ходе, где он выбирает число z из множества двух чисел {1,2}. Если же первый игрок выбрал число 2, то выбор предлагается сделать на втором ходе игроку B, который должен выбрать число y из множества чисел {1,2}, а затем на третьем ходе – игроку A для выбора им числа z на множества двух чисел {1,2}. После выбора трех чисел x, y, z второй игрок платит первому сумму $f(x, y, z)$, определенную следующим образом:

$$f(1,1,1)=-2$$
$$f(1,1,2)=-1$$
$$f(1,2,1)=4$$
$$f(1,2,2)=-4$$
$$f(2,1,1)=5$$
$$f(2,1,2)=3$$
$$f(2,2,1)=2$$

Графическое представление игры изображено следующим деревом (рис. 2.9). Информационные множества игрока 2 охватывают второй и третий уровень, так как каждый член его команды, делая свой ход, не знает, делает ли он второй или третий ход. Так как игроку 1 никто не мешает сделать свой выбор, то он имеет две стратегии: 1-я – выбрать число 1; 2-я – выбрать число 2.

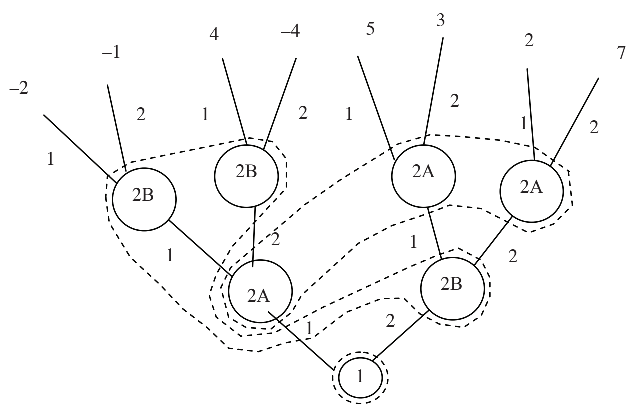


Рис. 2.9. Диаграмма игры с неполной информацией

Игрок 2 имеет четыре стратегии:

1-я – игрок A и B выбирает число 1

2-я – игрок A выбирает число 1, а B число 2

3-я – игрок B выбирает число 1, а A число 2

4-я – игрок *A* и *B* выбирает число 2.

Сведем позиционную игру к матричной. Составим платежную матрицу игры:

Стратегии	*AB*=1	*A*=1; *B*=2	*A*=2; *B*=1	*AB*=2
1	111=–2	112=–1	121=4	122=–4
2	211=5	221=2	212=3	222=7

Преобразуем элементы платежной матрицы, прибавив *c*=4:

Стратегии	*AB*=1	*A*=1; *B*=2	*A*=2; *B*=1	*AB*=2	α_i
1	2	3	8	0	0
2	9	6	7	11	6
β_j	9	6	8	11	6

Эта игра имеет седловую точку, так как α=6 и β=6. Таким образом, игра решается в чистых стратегиях. Оптимальной является стратегия (212), обеспечивающая выигрыш 6–4=2 млн. у.д.е.

Пример. Первый ход производится случайно, т.е. выбирается число *x* равное 1 с вероятностью 0,5 и число 2 с такой же вероятностью. Второй ход делает первый игрок. Зная, какое число *x* выбрано, он выбирает число *y* из множества двух чисел {1,2}. Третий ход делает второй игрок, не зная числа *x*, но зная выбор числа *y*, он выбирает число *z* из множества двух чисел {1,2}. После чего второй игрок платит первому сумму равную *f(x,y,z)*. Изобразим графическое представление игры (рис. 2.10). Нижняя позиция или узел обозначен «0», так как первый ход случайный.

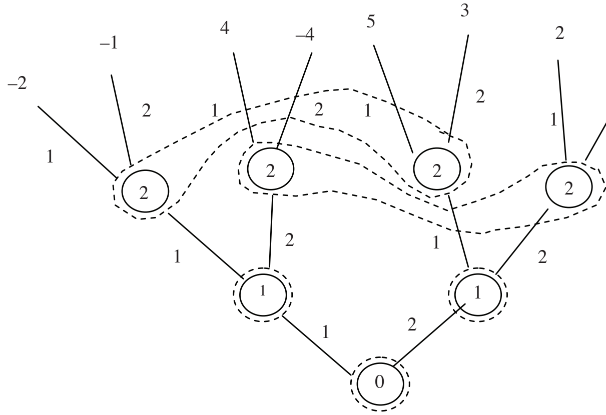


Рис. 2.10. Диаграмма игры с неполной информацией

По аналогии этот узел также считается образующим информационное множество и, следовательно, он окружен пунктиром.

Игрок 1 имеет четыре стратегии.

1-я – выбрать число y=1 независимо от выбора числа x;

2-я – выбрать число y равное числу x;

3-я – выбрать число y=1, если число x=2 и число y=2, если число x=1;

4-я – выбрать число y=2 независимо от выбора числа x.

Второй игрок имеет аналогичные стратегии.

1-я – выбрать число z=1 независимо от числа y;

2-я – выбрать число z равное числу y;

3-я – выбрать число z=1, если число y=2 и число z=2, если число y=1;

4-я – выбрать число z=2 независимо от числа y. Составим платежную матрицу игры (табл. 2.7)

Так как первый ход игроком 0 производится случайно с вероятностями равными 0,5, то элементы платежной матрицы (т.е. выигрыши игрока 1) также проявляются с этими же вероятностями и, следовательно, средний выигрыш игрока 1 рассчитывается как его математическое ожидание.

Т а б л и ц а 2.7. **Формирование элементов платежной матрицы игры**

Стратегии	z=1, независимо от y	z=y	z=1, если y=2; z=2, если y=1	z=2, независимо от y
y=1, независимо от x	111·0,5+ +211·0,5= =–2·0,5+5·0,5= =1,5	111·0,5+ +211·0,5= =1,5	112·0,5+ +212·0,5= =–1·0,5+ +3·0,5=1	112·0,5+212·0, 5==1
y=x	111·0,5+ +221·0,5= =–2·0,5+2·0,5= =0	111·0,5+ +222·0,5= =–2·0,5+7·0,5= =2,5	112·0,5+ +221·0,5= =–1·0,5+2·0,5= =0,5	112·0,5+ +222·0,5= =–1·0,5+ +7·0,5=3
y=1, если x=2; y=2, если x=1	121·0,5+ +211·0,5= =4·0,5+5·0,5= =4,5	122·0,5+ +211·0,5= =–4·0,5+5·0,5= =0,5	121·0,5+ +212·0,5= =4·0,5+3·0,5= =3,5	122·0,5+ +212·0,5= =–4·0,5+ +3·0,5=–0,5
y=2, независимо от x	121·0,5+ +221·0,5= =4·0,5+2·0,5=3	122·0,5+ +222·0,5= =–4·0,5+7·0,5= =1,5	121·0,5+ +221·0,5=3	122·0,5+ +222·0,5==1,5

Таким образом, платежная матрица игры выглядит следующим образом:

Стратегии	1	2	3	4
1	1,5	1,5	1	1
2	0	2,5	0,5	3
3	4,5	0,5	3,5	–0,5
4	3	1,5	3	1,5

Преобразуем элементы платежной матрицы, прибавив к элементам матрицы c=0,5.

Получим элементы платежной матрицы:

Стратегии	1	2	3	4	α_i
1	2	2	1,5	1,5	1,5
2	0,5	3	1	3,5	0,5
3	5	1	4	0	0
4	3,5	2	3,5	2	2
β_j	5	3	4	3,5	

Игра не имеет седловой точки, так как α=2, а β=3 и должна быть решена в смешанных стратегиях.

Составим задачу линейного программирования для первого игрока

$$\begin{cases} 2x_1 + 0{,}5x_2 + 5x_3 + 3{,}5x_4 \ge 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \ge 1 \\ 1{,}5x_1 + x_2 + 4x_3 + 3{,}5x_4 \ge 1 \\ 1{,}5x_1 + 3{,}5x_2 + 2x_4 \ge 1 \end{cases}$$
$$F_{\min} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

Для второго игрока задача линейного программирования выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 1{,}5y_3 + 1{,}5y_4 \le 1 \\ 0{,}5y_1 + 3y_2 + y_3 + 3{,}5y_4 \le 1 \\ 5y_1 + y_2 + 4y_3 \le 1 \\ 3{,}5y_1 + 2y_2 + 3{,}5y_3 + 2y_4 \le 1 \end{cases}$$
$$F_{\max} = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$$

Приведем результаты решения задач линейного программирования:

для первого игрока:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0{,}1579$$
$$x_3 = 0$$
$$x_4 = 0{,}2632$$
$$F_{min} = 0{,}421$$

для второго игрока:

$$y_1 = 0{,}1053$$
$$y_2 = 0{,}3458$$
$$y_3 = 0$$
$$y_4 = 0$$
$$F_{max} = 0{,}421.$$

Результаты решения позиционной игры

для первого игрока:

$$p_1 = 0$$
$$p_2 = 0{,}375$$
$$p_3 = 0$$
$$p_4 = 0{,}625$$
$$F_{max} = 2{,}375–0{,}5=1{,}875$$

для второго игрока:

$$q_1 = 0{,}25$$
$$q_2 = 0{,}75$$
$$q_3 = 0$$
$$q_4 = 0$$
$$F_{min} = 1{,}875.$$

Пример. Позиционная игра представлена следующим деревом игры (рис. 2.11).

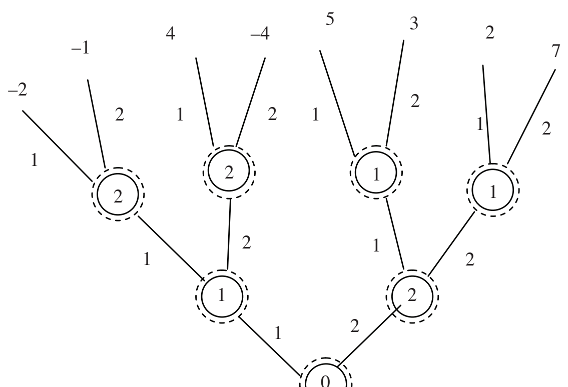


Рис. 2.11. Диаграмма игры

Первый ход делает игрок «0» – природа, который с вероятностью 1/3 выбирает из множества двух чисел {1,2} первую альтернативу, и с вероятностью 2/3 из множества двух чисел {1,2} выбирает вторую альтернативу (т.е. выбирает число x).

Если игрок «0» на первом ходе выбрал первую альтернативу, то второй ход делает игрок 1, который из множества двух чисел {1,2} выбирает число y и третий ход делает игрок 2, который тоже из множества двух чисел {1,2} выбирает число z.

Если же игрок «0» на первом ходе выбрал вторую альтернативу, то второй ход делает игрок 2, который из множества двух чисел {1,2} выбирает число y и третий ход делает игрок 1, который тоже из множества двух чисел {1,2} выбирает число z.

После этого выигрыш первого игрока составляет $f(x,y,z)$.

Рассмотрим стратегии каждого игрока.

Игрок 1 имеет восемь стратегий, каждую из которых запишем как систему чисел (i_0, i_1, i_2),

где i_0 – альтернатива, которую игрок 1 выбирает на втором ходе, если на первом ходе игрок «0» выбрал первую альтернативу;

i_1 – альтернатива, которую игрок 1 выбирает на третьем ходе, если на первом ходе игрок «0» выбрал вторую альтернативу, а на втором ходе – первую альтернативу выбрал игрок 2;

i_2 – альтернатива, которую игрок 1 выбирает на третьем ходе, если на первом и втором ходах выбрана вторая альтернатива.

Для второго игрока также будет 8 стратегий. Запишем их как систему чисел $j = (j_0, j_1, j_2)$,

где j_0 – альтернатива, которую игрок 2 выбирает на втором ходе, если на первом ходе выбрана игроком «0» вторая альтернатива;

j_1 – альтернатива, которую игрок 2 выбирает на третьем ходе, если на первом ходе игрок «0» выбрал первую альтернативу, а на втором – игрок 1 тоже выбрал первую альтернативу;

j_2 – альтернатива, которую игрок 2 выбирает на третьем ходе, если на первом ходе игрок «0» выбрал первую альтернативу, а на втором – игрок 1 выбрал вторую альтернативу. Сведем позиционную игру к матричному виду.

Сформулируем алгоритм расчета элементов платежной матрицы игры (табл. 2.8).

Рассчитаем коэффициенты платежной матрицы игры (табл. 2.9).

Найдем нижнюю и верхнюю чистую цену игры:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 2{,}67;$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 2{,}67.$$

Т а б л и ц а 2.8. **Формирование элементов платежной матрицы игры**

Стратегии	(1,1,1)	(1,1,2)	(1,2,1)	(1,2,2)	(2,1,1)	(2,1,2)	(2,2,1)	(2,2,2)
(1,1,1)	1/3·1,1,1+ 2/3·2,1,1	1/3·1,1,1+ 2/3·2,1,1	1/3·1,1,2+ 2/3·2,1,1	1/3·1,1,2+ 2/3·2,1,1	1/3·1,1,1+ 2/3·2,2,1	1/3·1,1,1+ 2/3·2,2,1	1/3·1,1,2+ 2/3·2,2,1	1/3·1,1,2+ 2/3·2,2,1
(1,1,2)	1/3·1,1,1+ 2/3·2,1,1	1/3·1,1,1+ 2/3·2,1,1	1/3·1,1,2+ 2/3·2,1,1	1/3·1,1,2+ 2/3·2,1,1	1/3·1,1,1+ 2/3·2,2,2	1/3·1,1,1+ 2/3·2,2,2	1/3·1,1,2+ 2/3·2,2,2	1/3·1,1,2+ 2/3·2,2,2
(1,2,1)	1/3·1,1,1+ 2/3·2,1,2	1/3·1,1,1+ 2/3·2,1,2	1/3·1,1,2+ 2/3·2,1,2	1/3·1,1,2+ 2/3·2,1,2	1/3·1,1,1+ 2/3·2,2,1	1/3·1,1,1+ 2/3·2,2,1	1/3·1,1,2+ 2/3·2,2,1	1/3·1,1,2+ 2/3·2,2,1
(1,2,2)	1/3·1,1,1+ 2/3·2,1,2	1/3·1,1,1+ 2/3·2,1,2	1/3·1,1,2+ 2/3·2,1,2	1/3·1,1,2+ 2/3·2,1,2	1/3·1,1,1+ 2/3·2,2,2	1/3·1,1,1+ 2/3·2,2,2	1/3·1,1,2+ 2/3·2,2,2	1/3·1,1,2+ 2/3·2,2,2
(2,1,1)	1/3·1,2,1+ 2/3·2,1,1	1/3·1,2,2+ 2/3·2,1,1	1/3·1,2,1+ 2/3·2,1,1	1/3·1,2,2+ 2/3·2,1,1	1/3·1,2,1+ 2/3·2,2,1	1/3·1,2,2+ 2/3·2,2,1	1/3·1,2,1+ 2/3·2,2,1	1/3·1,2,2+ 2/3·2,2,1
(2,1,2)	1/3·1,2,1+ 2/3·2,1,1	1/3·1,2,2+ 2/3·2,1,1	1/3·1,2,1+ 2/3·2,1,1	1/3·1,2,2+ 2/3·2,1,1	1/3·1,2,1+ 2/3·2,2,2	1/3·1,2,2+ 2/3·2,2,2	1/3·1,2,1+ 2/3·2,2,2	1/3·1,2,2+ 2/3·2,2,2
(2,2,1)	1/3·1,2,1+ 2/3·2,1,2	1/3·1,2,2+ 2/3·2,1,2	1/3·1,2,1+ 2/3·2,1,2	1/3·1,2,2+ 2/3·2,1,2	1/3·1,2,1+ 2/3·2,2,1	1/3·1,2,2+ 2/3·2,2,1	1/3·1,2,1+ 2/3·2,2,1	1/3·1,2,2+ 2/3·2,2,1
(2,2,2)	1/3·1,2,1+ 2/3·2,1,2	1/3·1,2,2+ 2/3·2,1,2	1/3·1,2,1+ 2/3·2,1,2	1/3·1,2,2+ 2/3·2,1,2	1/3·1,2,1+ 2/3·2,2,2	1/3·1,2,2+ 2/3·2,2,2	1/3·1,2,1+ 2/3·2,2,2	1/3·1,2,2+ 2/3·2,2,2

Т а б л и ц а 2.9. **Коэффициенты платежной матрицы игры**

Стратегии	1	2	3	4	5	6	7	8	α_i
1	2,67	2,67	3,00	3,00	0,67	0,67	0	0	0
2	2,67	2,67	3,00	3,00	4,00	4,00	4,33	4,33	2,67
3	1,33	1,33	1,67	1,67	0,67	0,67	0	0	0
4	1,33	1,33	1,67	1,67	4,00	4,00	4,33	4,33	1,33
5	4,67	2,00	4,67	2,00	2,67	2,67	1,67	1,67	1,67
6	4,67	2,00	4,67	2,00	3,33	3,33	6,00	6,00	2,00
7	3,33	0,67	3,33	0,67	2,67	2,67	1,67	1,67	0,67
8	3,33	0,67	3,33	0,67	3,33	3,33	6,00	6,00	0,67
β_j	4,67	2,67	4,67	3,00	4,00	4,00	6,00	6,00	2,67

Игра имеет седловую точку, так как $\alpha = \beta = 2{,}67$.

Оптимальной является вторая стратегия игроков (1,1,2), обеспечивающая первому игроку выигрыш равный 2,67 млн. у.д.е.

Пример. С помощью позиционной игры можно обосновать оптимальное чередование посевов сельхозкультур разных сортов в зависимости от ожидаемого характера метеорологических условий каждого года планового периода. При этом за игрока 1 принимают сельхозорганизацию, за игрока 2 – природу. Для уменьшения расчетов выделим два варианта метеорологических условий (Π_1^1 и Π_2^1 в первый год планового периода и Π_1^2, Π_2^2 во второй год планового периода). У организации тоже имеется две альтернативы. В первый год планового периода засеять определенную площадь однолетними травами (альтернатива 1, т.е. культура 1), или яровыми зерновыми (альтернатива 2, т.е. культура 4). Если засеять площадь однолетними травами и метеорологические условия первого года планового периода будут $П_1^1$ или $П_2^1$, то на следующий год первый игрок может посеять яровые (альтернатива 1, т.е. культура 2), или озимые зерновые культуры (альтернатива 2, т.е. культура 3). При этом сельхозкультуры 1 и 2 при условиях $П_1^2$ погоды второго года планового периода дадут стоимость валовой продукции t_1, а для условий $П_2^2$ погоды равную t_2. Культуры 1 и 3 дадут результат, равный t_3 и t_4 соответственно для $П_1^2$ и $П_2^2$ условий погоды. Если же в первый год планового периода игрок 1 посеет яровые зерновые, а метеорологические условия окажутся $П_1^1$ или $П_2^1$, то на второй год вся площадь отводится соответственно под многолетние травы (альтернатива 1, т.е. культура 5), или корнеплоды (альтернатива 2, т.е. культура 6). При этом культуры 4 и 5 в условиях $П_1^2$ и $П_2^2$ второго года дадут стоимость валовой продукции соответственно t_9 и t_{10}, а культуры 4 и 6 – результат равный t_{11} и t_{12} соответственно для условий погоды $П_1^2$ и $П_2^2$ второго года планового периода.

Игру представим в виде дерева игры (рис. 2.12).

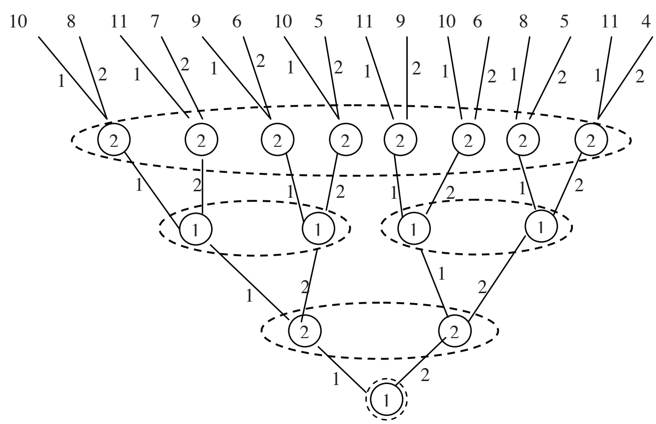


Рис. 2.12. Диаграмма игры в четыре хода

Первый ход делает игрок 1, находясь в информационном множестве первого узла, выбирая две альтернативы: посеять однолетние травы или яровые зерновые. Второй ход принадлежит игроку 2, который находится в информационном множестве узлов второго уровня и имеет 2 альтернативы: $П_1^1$ – погодные условия благоприятные для возделывания культуры (альтернатива 1) и $П_2^1$ – условия погоды не благоприятные для выращивания культуры (альтернатива 2).

Третий ход делает игрок 1, выбирая одну из двух альтернатив: в третьем информационном множестве посеять яровые зерновые или озимые зерновые; в четвертом информационном множестве посеять многолетние травы или корнеплоды.

Четвертый ход делает игрок 2, находясь в информационном множестве четвертого уровня и выбирая одну из двух альтернатив: погодные условия второго года $П_1^2$ (альтернатива 1), или погодные условия второго года $П_2^2$ (альтернатива 2).

Чистую стратегию игрока 2 запишем как систему чисел (j_1, j_2),

где j_1 – альтернатива, выбираемая на втором ходе (j_1=1,2);

j_2 – альтернатива, выбираемая на четвертом ходе (j_1=1,2).

Чистые стратегии игрока 1 запишем как систему чисел (i_0, i_1, i_2),

где i_0 – альтернатива, выбираемая на первом ходе (i_0=1,2);

i_1 – альтернатива, выбираемая на третьем ходе, если игрок 2 на втором ходе выбрал первую альтернативу (i_1=1,2);

i_2 – альтернатива, выбираемая на третьем ходе, если игрок 2 на втором ходе выбрал вторую альтернативу (i_2=1,2).

Сведем позиционную игру к матричному виду. Функцией выигрыша первого игрока будет платежная матрица вида (табл. 2.10).

Т а б л и ц а 2.10. **Платежная матрица игры**

j_1, j_2 / i_0, i_1, i_2	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
(1,1,1)	1,1,1,1	1,1,1,2	1,2,1,1	1,2,1,2
(1,1,2)	1,1,1,1	1,1,1,2	1,2,2,1	1,2,2,2
(1,2,1)	1,1,2,1	1,1,2,2	1,2,1,1	1,2,1,2
(1,2,2)	1,1,2,1	1,1,2,2	1,2,2,1	1,2,2,2
(2,1,1)	2,1,1,1	2,1,1,2	2,2,1,1	2,2,1,2
(2,1,2)	2,1,1,1	2,1,1,2	2,2,2,1	2,2,2,2
(2,2,1)	2,1,2,1	2,1,2,2	2,2,1,1	2,2,1,2
(2,2,2)	2,1,2,1	2,1,2,2	2,2,2,1	2,2,2,2

Рассчитаем элементы платежной матрицы игры (табл. 2.11).

Игра имеет седловую точку, так как $\alpha = \beta$=6, т.е. в неблагоприятных погодных условиях, придерживаясь стратегии (1,2,1,2) сельхозорганизация может получить с 1 га посева стоимость валовой продукции t_6=6.

Т а б л и ц а 2.11. **Элементы платежной матрицы игры**

Стратегии	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	α_i
(1,1,1)	10	8	9	6	6
(1,1,2)	10	8	10	5	5
(1,2,1)	11	7	9	6	6
(1,2,2)	11	7	10	5	5
(2,1,1)	11	9	8	5	5
(2,1,2)	11	9	11	4	4
(2,2,1)	10	6	8	5	5
(2,2,2)	10	6	11	4	4
β_j	11	9	11	6	6

2.7. Биматричные игры

С помощью биматричных игр разрабатывают рекомендации для игроков, интересы которых необязательно являются противоположными. Допустим, игрок A может в процессе игры выбрать любую из своих стратегий $A_i = (A_1, A_2, ..., A_m)$, где $i = \overline{1,m}$, а игрок B – любую из стратегий $B_j = (B_1, B_2, ..., B_n)$, где $i = \overline{1,n}$. Выигрыш игроков A и B характеризуются соответствующими платежными матрицами:

B_j / A_i	B_1	…	B_k	…	B_n
A_1	a_{11}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
…	…	…		…	
A_r	a_{r1}	…	a_{rk}	…	a_{rn}
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}

B_j / A_i	B_1	…	B_k	…	B_n
A_1	$в_{11}$	…	$в_{1k}$	…	$в_{1n}$
…	…	…		…	
A_r	$в_{r1}$	…	$в_{rk}$	…	$в_{rn}$
…	…	…	…	…	…
A_m	$в_{m1}$	…	$в_{mk}$	…	$в_{mn}$

Первая платежная матрица описывает выигрыш игрока A, а вторая – выигрыш игрока B. Когда интересы игроков не противоположны, а только различны, то при выборе игроком A r-й стратегии, а игроком B – k-й стратегии, выигрыш игрока A будет характеризоваться элементом a_{rk}, а выигрыш игрока B – элементов $в_{rk}$. Так как интересы игроков не совпадают, то необходимо найти такое решение, которое в одинаковой мере удовлетворяло обоих игроков. Другими словами, требуется определить такую равновесную ситуацию (точку равновесия), отклонение от которой уменьшает выигрыш игрока.

Рассмотрим решение простой биматричной игры. Выигрыши игроков представлены платежными матрицами размерностью 2x2:

платежная матрица игрока *A*

B_j \ A_i	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

платежная матрица игрока *B*

B_j \ A_i	B_1	B_2
A_1	$в_{11}$	$в_{12}$
A_2	$в_{21}$	$в_{22}$

Игроки могут смешивать свои чистые стратегии A_i, $i=\overline{1,2}$ и B_j, $j=\overline{1,2}$ с вероятностями соответственно p и q.

Для нашего примера, допустим $p=p_1$, тогда $p_2=1–p$, а $q=q_1$, тогда $q_2=1–q$.

Средние выигрыши игроков *A* и *B* определяются следующим образом:

$$f_A(p,q)=a_{11}pq+a_{12}p(1-q)+a_{21}(1-p)q+a_{22}(1-p)(1-q)\ ,$$

$$f_B(p,q)=b_{11}pq+b_{12}p(1-q)+b_{21}(1-p)q+b_{22}(1-p)(1-q)\ ,$$

где $0\le p\le 1$ и $0\le q\le 1$.

Согласно теореме Дж. Нэша, всякая биматричная игра имеет хотя бы одну равновесную ситуацию (точку равновесия) в смешанных стратегиях.

Считается, что пара чисел (p^*, q^*), где $0\le p^*\le 1$, $0\le q^*\le 1$, характеризует равновесную ситуацию, если для любых p и q, где $0\le p\le 1$ и $0\le q\le 1$, одновременно выполняются следующие неравенства:

$$f_A(p,q^*)\le f_A(p^*,q^*)$$

$$f_B(p^*,q)\le f_B(p^*,q^*)\ .$$

Иными словами, отклонение от равновесной ситуации невыгодно самому игроку.

Практически, для того чтобы убедиться, что пара чисел (p^*, g^*) определяет равновесную ситуацию, достаточно проверить справедливость неравенства $f_A(p,q^*)\le f_A(p^*,q^*)$ только для двух чистых стратегий игрока *A* для $p=0$ и $p=1$, а неравенства $f_B(p^*,q)\le f_B(p^*,q^*)$ проверяют для двух чистых стратегий игрока *B* для $q=0$ и $q=1$.

Рассчитаем среднее значение выигрыша игрока *A*:

$$\begin{aligned}&f_A(p,q)=a_{11}pq+a_{12}p(1-q)+a_{21}(1-p)q+\\&+a_{22}(1-p)(1-q)=a_{11}pq+a_{12}p-a_{12}qp+a_{21}q-\\&-a_{21}pq+a_{22}-a_{22}q-a_{22}p+a_{22}pq=(a_{11}-a_{12}-\\&-a_{21}+a_{22})pq+(a_{12}-a_{22})p+(a_{21}-a_{22})q+a_{22}.\end{aligned}$$

Аналогичным образом запишем среднее значение выигрыша игрока:

$$\begin{aligned}&f_B(p,q)=b_{11}pq+b_{12}p(1-q)+b_{21}(1-p)q+\\&+b_{22}(1-p)(1-q)=(b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22})pq+\\&+(b_{12}-b_{22})p+(b_{21}-b_{22})q+b_{22}.\end{aligned}$$

Приведем расчеты для игрока *A*:

При p=1, получим, что

$$f_A(1,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})q + a_{12} + (a_{21} - a_{22})q \ .$$

При p=0, получим:

$$f_A(0,q) = (a_{21} - a_{22})q + a_{22} \ .$$

Рассмотрим разности:

$$\begin{aligned}
&f_A(p,q) - f_A(1,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + \\
&+ (a_{12} - a_{22})p + (a_{21} - a_{22})q + a_{22} - (a_{11} - a_{12} - \\
&- a_{21} + a_{22})q - a_{12} - (a_{21} - a_{22})q = (a_{11} - a_{12} - \\
&- a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p - (a_{11} - a_{12} - a_{21} + \\
&+ a_{22})q + a_{22} - a_{12} \\
&f_A(p,q) - f_A(0,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + \\
&(a_{12} - a_{22})p + (a_{21} - a_{22})q + a_{22} - (a_{21} - a_{22})q - \\
&- a_{22} = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p
\end{aligned}$$

Обозначим через $C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$, а через $\alpha = a_{22} - a_{12}$.

Подставим значение C и α в выше изложенные выражения, получим:

$$\begin{aligned}
&f_A(p,q) - f_A(1,q) = Cpq - \alpha p - Cq + \alpha = Cq(p-1) - \\
&- \alpha(p-1) = (p-1)(Cq - \alpha)
\end{aligned}$$

$$f_A(p,q) - f_A(0,q) = Cpq - \alpha p = p(Cq - \alpha) \ .$$

Если пара чисел (p*, q*) определяют равновесную ситуацию, то $(p-1)(Cq - \alpha) \geq 0$ и $p(Cq - \alpha) \geq 0$.

Для игрока B аналогично вычисляем средний выигрыш при q=1 и q=0:

$$f_B(p,1) = (b_{11} - b_{12} - a_{21} + a_{22})p + b_{12} + (b_{21} - b_{22})p$$

$$f_B(p,0) = (b_{21} - b_{22})p + b_{22} \ .$$

Определим следующие разности, обозначив через $D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$ и $\beta = b_{22} - b_{21}$:

$$f_B(p,q) - f_B(p,1) = (q-1)(Dp - \beta) \ ;$$

$$f_B(p,q) - f_B(p,0) = q(Dp - \beta) \ .$$

Если пара чисел (p*, q*) определяют точку равновесия, то $(q-1)(Dq - \beta) \geq 0$ и $q(Dp - \beta) \geq 0$.

Таким образом, для того, чтобы в биматричной игре 2 x 2 пара чисел (p, q) определяла равновесную ситуацию, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$(p-1)(Cq - \alpha) \geq 0 \ ,$$

$$p(Cq - \alpha) \geq 0 \ ,$$

$$(q-1)(Dp - \beta) \geq 0 \ ,$$

$$q(Dp - \beta) \geq 0 \ ,$$

$$0 \leq p \leq 1 \ ,$$

$$0 \le q \le 1,$$

где $C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$,

$$\alpha = a_{22} - a_{12},$$
$$D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$$
$$\beta = b_{22} - b_{21}.$$

Пример. Небольшое предприятие (игрок *A*) планирует, развернув рекламную компанию, сбывать свои товары на одном из двух рынков, контролируемых более сильным предприятием-конкурентом (игроком *B*).

Если предприятие (игрок *B*) на одном из рынков проводит рекламную компанию, то предприятие (игрок *A*) терпит поражение. В противном случае, не встречая противодействия на рынке со стороны конкурента (игрока *B*), предприятие (игрок *A*) захватывает большую долю рынка. У игрока *A* имеется две стратегии: A_1 – выбор первого рынка, A_2 – выбор второго рынка. Игрок *B* тоже имеет две стратегии: B_1 – выбор первого рынка, B_2 – выбор второго рынка.

Приведем элементы платежных матриц для игрока *A* и *B*, характеризующих выигрыш (доход) или проигрыш (затраты, связанные с борьбой за рынок):

для игрока *A*:

Стратегии	B_1	B_2
A_1	–200	30
A_2	10	–10

для игрока *B*:

Стратегии	B_1	B_2
A_1	100	–30
A_2	–10	20

Анализируя величину элементов матриц видно, что для игрока *A* выгоднее проникнуть на первый рынок, но и борьба за него требует больших вложений денежных средств. Если оба игрока выберут один и тот же рынок, то победа останется за более сильным предприятием (игроком *B*). Первый рынок более выгоден и для второго предприятия. Для игрока *B* в ситуации (A_1, B_1 при выборе первого рынка) выигрыш составляет 100 млн. у.д.е., а в ситуации (A_2, B_2 – при выборе второго рынка) выигрыш игрока *B* в 5 раз меньше. Для игрока *A* выбор первого (A_1, B_1) или выбор второго (A_2, B_2) рынка при условии выбора этого же рынка игроком *B* приведет к банкротству (в первом случае затраты составят 200 млн. у.д.е., во втором – 10 млн. у.д.е.).

Если же предприятия отдадут предпочтение разным рынкам (ситуации (A_1, B_2) и (A_2, B_1), то второе предприятие (игрок *B*) понесет потери равные 30 млн. у.д.е. при выборе первого рынка и 10 млн. у.д.е. при выборе второго рынка. Первое предприятие (игрок *A*) в этой ситуации получит соответственно 30 и 10 млн. у.д.е. дохода.

Необходимо найти решение игры, которое в определенной мере удовлетворяло бы обоих игроков.

Рассмотрим различные ситуации, предварительно определив значение C, α, D и β:

$$C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = -200 - 30 - 10 - 10 = -250$$

$$\alpha = a_{22} - a_{12} = -10 - 30 = -40$$

$$D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = 100 - (-30) - (-10) + 20 = 160$$

$$\beta = b_{22} - b_{21} = 20 - (-10) = 30$$

Подставим значения величин C, α, D и β в условия необходимости и достаточности существования равновесной ситуации:

для игрока A

$$(p-1)(Cq-\alpha) = (p-1)(-250q+40) \ge 0\ ,$$

$$p(Cq-\alpha) = p(-250q+40) \ge 0$$

для игрока B

$$(q-1)(Dp-\beta) = (q-1)(160p-30) \ge 0\ ,$$

$$q(Dp-\beta) = q(160p-30) \ge 0\ .$$

Необходимо рассмотреть три случая для игрока A:

1) p=1

2) p=0

3) 0<p<1.

1. Пусть p=1, тогда $0 \ge 0$ и $-250q + 40 \ge 0$.

Отсюда $250q - 40 \le 0$,

$$q \le \frac{40}{250}$$

$$q \le 0{,}16\ .$$

2. Пусть p=0, тогда $-(-250q + 40) \ge 0$ и $0 \ge 0$,

Откуда $250q - 40 \ge 0$,

$$q \ge \frac{40}{250}$$

$$q \ge 0{,}16\ .$$

3. Примем 0<p<1, получим:

$$-250q + 40 \ge 0,$$

$$-250q + 40 \le 0$$

Два неравенства выполняются при условии q=0,16.

Три случая решения игры для игрока B:

1) q=1,

2) q=0,

3) 0<q<1,

приводит к следующим результатам

1) p≥0,19

2) p≤0,19

3) p=0,19

Изобразим графически полученные результаты.

В системе координат выделим единичный квадрат, соответствующий неравенствам: $0 \le p \le 1, 0 \le q \le 1$ (рис. 2.13).

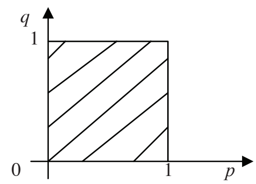


Рис. 2.13. Возможные результаты решения игры

На график нанесем оптимальные решения игры для игрока *A* (рис. 2.14).

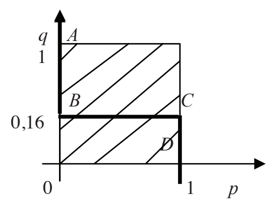


Рис. 2.14. Результаты решения игры для игрока *A*

Множество точек, удовлетворяющее требованиям вышеизложенных неравенств для игрока *A* лежат на отрезках [*AB*], [*BC*] и [*СД*].

Изобразим на отдельном графике множество точек, удовлетворяющих требованиям вышеизложенных неравенств для игрока *B* (рис. 2.15).

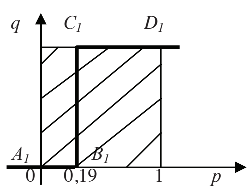


Рис. 2.15. Результаты решения игры для игрока *B*

Для игрока B оптимальными будут стратегии, характеризующиеся парой чисел, принадлежащих отрезкам $[A_1B_1]$, $[B_1C_1]$ и $[C_1D_1]$.

Совместим рисунки 2.14 и 2.15, получим (рис. 2.16).

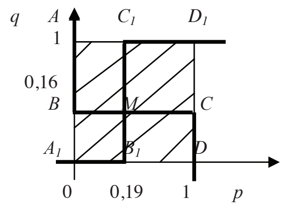


Рис. 2.16. Результаты решения биматричной игры

Точка пересечения двух фигур является точкой равновесия. Координаты точки M (0,19; 0,16) определяют равновесную ситуацию.

В этих условиях игроки имеют следующие оптимальные смешанные стратегии:

игрок A – p*(0,19; 0,81), игрок B – q*(0,84; 0,16).

Средние выигрыши игроков составят:

$$f_A(0{,}19;0{,}16) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p +$$
$$+ (a_{21} - a_{22})q + a_{22} = (-200 - 30 - 10 - 10) \cdot 0{,}19 \cdot 0{,}16 +$$
$$+ (30 + 10) \cdot 0{,}19 + (10 + 10) \cdot 0{,}16 - 10 = -6{,}8 \text{ млн. у.д.е.}$$
$$f_B(0{,}19;0{,}16) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})pq + (b_{12} - b_{22})p +$$
$$+ (b_{21} - b_{22})q + b_{22} = (100 + 30 + 10 + 20) \cdot 0{,}19 \cdot 0{,}16 +$$
$$+ (-30 - 20) \cdot 0{,}19 + (-10 - 20) \cdot 0{,}16 + 20 = 10{,}6 \text{ млн. у.д.е.}$$

Таким образом, первому предприятию (игроку A) целесообразно реализовывать свои товары на первом и втором рынке с вероятностями соответственно 0,19 и 0,81, что соответствует долям товаров, поступающих на каждый рынок. В этом случае, затраты первого предприятия, связанные с рекламными мероприятиями на этих рынках будут наименьшими и составят 6,8 млн. у.д.е. Второе предприятие (игрок B) для получения наибольшего дохода равного 10,6 млн. у.д.е. должно сбывать свои товары на первом и втором рынке соответственно с вероятностями 0,84 и 0,16.

2.8. Кооперативные игры

Кооперативные игры – это игры с нулевой суммой, в которых игроки могут принимать решения по согласованию друг с другом, вправе вступать в коалицию. Кооперативные игры отличаются от коалиционных игр тем, что могут и не содержать коалиций. По форме платежа кооперативные игры подразделяются на игры с побочными платежами и без побочных платежей. В первом случае допускается заключение взаимосвязывающих соглашений о стратегиях, а платежи могут перераспределяться между игроками. Во втором случае – игроки согласуют свои стратегии, а платежи делят в соответствии с оптимумом по Парето, т.е. не существует такого решения игры (такой набор платежей), которое было бы лучше, чем данное. На рис. 2.17 графически представлено решение кооперативной игры.

Исходы кооперативной игры представлены выпуклым, замкнутым и ограниченным сверху множеством *К*. Кривая A_1A_2 содержит парето-оптимальные решения, при которых увеличение выигрыша одного из игроков возможно только за счет уменьшения выигрыша другого игрока. Точки T_1 и T_2 соответствует выигрышам игроков, которые они могут получить без кооперации с партнером. Точки кривой T''_1 и T'_2 обозначают переговорное множество *N*, т.е. игроки, ведя переговоры, могут улучшить положение одного из них без ущерба для партнера.

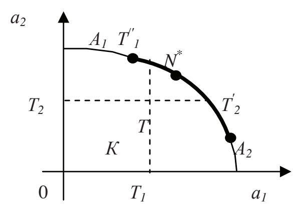


Рис. 2.17. Результаты решения кооперативной игры

На переговорном множестве выделяется точка N^*, соответствующая равновесию по Нэшу (точка Нэша), в которой достигается максимум произведения:

$$\max(a_1 - T_1)(a_2 - T_2)$$

Сомножители произведения характеризуют превышение выигрышей игроков над платежами, которые они могли бы получить без кооперации. Точка Нэша является решением кооперативной игры.

Например. Решим кооперативную игру, заданную матрицей:

$$\begin{Vmatrix} (10,4) & (0,0) \\ (5,5) & (3,7) \end{Vmatrix}$$

Изобразим в системе координат выпуклое, замкнутое множество *К*, определяющее игру (рис. 2.18). На треугольнике $0A_1A_2$ сторона A_1A_2

представляет собой парето-оптимальное множество, т.е. увеличение выигрыша одного игрока возможно только за счет другого игрока.

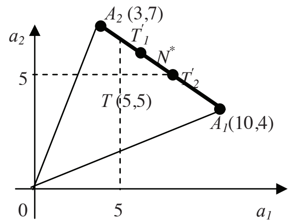


Рис. 2.18. Решение кооперативной игры

Точка T(5,5)определяет выигрыши, которые игроки могут получить без взаимодействия с партнером. На отрезке [A_1, A_2] лежит переговорное множество N (отрезок [T'_1, T'_2]). На середине отрезка [T'_1, T'_2] находится точка Нэша N^* (5,5; 5,5). В этой точке произведение (a_1–5,5) (a_2–5,5) для точек (a_1, a_2) принимает максимальное значение. Решение игры найдено, так как игрокам важно максимизировать суммарный выигрыш, который могут распределить между собой произвольным образом.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение теории игр.
2. Что Вы понимаете под игрой?
3. Дайте понятие оптимальной стратегии игрока.
4. Приведите классификацию игр.
5. Чем отличаются кооперативные, коалиционные и бескоалиционные игры?
6. Чем отличаются матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные игры?
7. Приведите особенности статистических и стратегических игр.
8. Охарактеризуйте критерии определения оптимальной стратегии игрока в статистической игре.
9. Дайте понятие седловой точки, верхней и нижней чистой цены матричной игры.
10. Приведите алгоритм геометрического решения игры.
11. Как практически решаются матричные игры в смешанных стратегиях?

12. Приведите структурные модели линейного программирования, позволяющие обосновать оптимальные стратегии игроков при решении матричной игры в смешанных стратегиях.

13. Каким образом от результатов решения задач линейного программирования перейти к результатам решения матричной игры в смешанных стратегиях?

14. Дайте понятие позиции информационного множества, игрока «0», дерева игры.

15. Что такое процесс нормализации позиционной игры?

16. Как происходит обоснование оптимальной стратегии игрока в позиционной игре?

17. Какими способами можно решать позиционные игры?

18. Как происходит формирование элементов платежной матрицы позиционной игры?

19. Дайте понятие точки равновесия биматричной игры.

20. Какие неравенства должны выполняться для пары чисел, характеризующих равновесную ситуацию биматричной игры.

21. Как геометрически происходит выбор оптимальных стратегий игроков в биматричной игре?

22. Дайте понятие равновесию по Нэшу (точки Нэша), чем оно характеризуется?

3. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

3.1. Общая характеристика линейных моделей

Под *экономико-математической линейной моделью* понимают программу вычислений, обеспечивающую нахождение наилучшего, т.е. оптимального решения задачи, условия которой заданы в виде линейных уравнений или неравенств, сведены в единую систему, подчиненную цели решения задачи (т.е. целевой функции записанной в виде линейного уравнения).

В зависимости от характера моделируемых объектов и процессов структура моделей может быть различной. Но имеются и общие элементы модели, включающие следующие 4 группы:

1) неизвестные величины, значения которых определяются в результате решения задачи. Обычно их обозначают x_j, где i=1…m или y_i, где j=1…n. Решить задачу, значит найти величины неизвестных переменных;

2) технико-экономические коэффициенты, т.е. известные величины при переменных, они служат для отображения закономерных взаимо-

связей ресурсов с результатами решения задачи. Технико-экономические коэффициенты обычно характеризуются двумя индексами и обозначаются малыми латинскими буквами. Например, индексы при a_{ij} показывают, что коэффициент a стоит в i-ой строке (или в ограничении вида i) и в j-ом столбце (или при переменной вида j), где i=1…n; j=1…m;

3) известные величины, стоящие в правой части ограничений (т.е. уравнений или неравенств). Они отображают возможные объемы ресурсов и ограничивающие условия, влияющие на результаты решения задачи. Эти элементы обозначаются большими латинскими буквами. Например, A_i, где i=1…m. Известных величин столько, сколько ограничений в экономико-математической задаче.

4) коэффициенты целевой функции, или коэффициенты F-строки, которая определяет цель решения задачи. Они обозначаются малыми латинскими буквами. Например, $p_j(p_1, p_2 ... p_n)$, где j=1…n. Коэффициентов целевой функции столько, сколько переменных в экономико-математической задаче;

Элементы второй, третьей и четвертой групп составляют исходную информацию экономико-математической задачи. Чтобы получить достоверное решение, необходимо правильно количественно описать моделируемый объект, т.е. надо правильно обосновать исходную информацию задачи.

Используя приведенные четыре группы элементов, запишем общую задачу линейного программирования.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq A_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq A_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3n}x_n = A_3 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq A_m \end{cases}$$

$$F_{\max} = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$$

Решить данную задачу, значит найти такие значения переменных, которые удовлетворяют требованиям всех ограничений и придают целевой функции минимальное или максимальное (в нашем случае максимальное) значение.

Для того, чтобы задача имела решение, а полученные значения переменных отвечали интересам экономики предприятий АПК, необходимо соблюдать при составлении задач следующие требования:

1) составленная модель должна адекватно отображать все взаимосвязи в моделируемом процессе или объекте;

2) математические требования к содержанию системы ограничений выражаются через теорию определителей, матриц, векторов, выпуклых множеств линейных неравенств, уравнений (приложение B-D);

3) при решении задачи на максимум, в системе ограничений должно быть хотя бы одно ограничение типа ≤ или =, при решении задачи на минимум должно быть хотя бы одно ограничение типа ≥ или =.

В противном случае, если при решении задачи на максимум нет ни одного ограничения типа ≤ или =, то с экономической точки зрения достижение максимума не ограничивается никаким ресурсом или ресурсами, что противоречит требованиям реальной экономике, так как достижение максимальных результатов всегда связано с использованием ограниченных ресурсов. Если при решении задачи на минимум нет ни одного ограничения типа ≥ или =, то в этом случае минимум может быть достигнут в начальной точке системы координат, т.е. неизвестные величины задачи будут равны нулю. В действительности минимум функции достигается при соблюдении определенных требований, которые выражаются в наличии ограничений типа ≥ или =.

В общем виде задача линейного программирования может быть записана в следующей форме:

1. скалярной:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le A_i, i = 1,2..m$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,...,m$$

$$F_{\max} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

2. матричной:

$$A \cdot X \le A_0$$

$$X \ge 0$$

$$P \cdot X \to \max,$$

где A – матрица системы ограничений

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \ \dots \ \dots \\ a_{mn} & a_{\mathrm{m}n} \dots a_{mn} \end{pmatrix},$$

X – матрица неизвестных величин:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

A_0 – матрица свободных членов:

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{pmatrix},$$

P – матрица коэффициентов целевой функции:

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

3. векторной:

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{A}_j x_j = \vec{A}_i$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,\dots,n,$$

$$F_{\max} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

где $\vec{A}, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n$ – векторы

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ \dots,\ \vec{A}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Задачи линейного программирования имеют следующие свойства, сформулированные теоремами:

Теорема 3.1. Множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым.

Теорема 3.2. Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то линейная функция принимает максимальное (минимальное) значение в одной из угловых точек многогранника решений. Если линейная функция принимает максимальное (минимальное) значение более чем в одной угловой точке, то она принимает его в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих точек.

Теорема 3.3. Каждому допустимому базисному решению задачи линейного программирования соответствует угловая точка многогранника решений, и наоборот, каждой угловой точке многогранника решений соответствует допустимое базисное решение.

Из теорем 3.2 и 3.3 следует, что, если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то оно совпадает, по крайней мере, с одним из ее допустимых базисных решений.

Отсюда следует, что оптимум линейной функции задачи линейного программирования следует искать среди конечного числа ее допустимых базисных решений.

Методика поиска оптимального решения задачи линейного программирования симплексным методом изложена в приложениях E и F.

3.2. Примеры моделей планирования производства и макроэкономики

Линейные модели нашли применение в планировании производства и макроэкономики.

В экономической литературе выделяются следующие базовые модели:

1. *Модели оптимизации производственной программы* (программы развития перерабатывающей, сельскохозяйственной организаций). Общая постановка этой задачи состоит в обосновании оптимального плана производства нескольких видов продукции, обеспечивающего наиболее рациональное использование имеющихся ресурсов и максимизирующего конечные результаты деятельности.

Формально задача оптимизации производственной программы описывается следующей моделью:

1) по использованию ресурсов –

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le A_i, i = 1,2,...,m;$$

2) неотрицательность переменных –

$$x_j \ge 0, j = 1,2,...,n$$

Целевая функция – максимум прибыли от реализации продукции:

$$F_{\max} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j,$$

где n – количество выпускаемой продукции;

m – количество ресурсов (трудовых, материально-денежных, производственных мощностей, сырья и т.д.);

i – индекс ресурса;

j – индекс продукции;

x_j – количество выпускаемой продукции вида j;

a_{ij} – расход сырья вида i на единицу производства продукции вида j;

A_i – количество имеющегося ресурса вида i;

p_j – прибыль от реализации единицы продукции вида j.

2. *Модели оптимального составления смеси* (пищевого рациона; рецепта комбикорма скота, рецептуры производства продовольственных товаров и т.д.).

Требуется оптимизировать выбор наилучшего способа смешения исходных ингредиентов для получения смеси с заданными свойствами при минимизации стоимости ингредиентов.

Однопродуктовая модель оптимального составления смеси имеет вид:

1. по соблюдению заданных свойств смеси –

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq A_i, i = 1,2,...,m,$$

2. по сумме долей различных ингредиентов смеси –

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1,$$

3. неотрицательность переменных:

$$x_j \geq 0, j = 1,2,...,n.$$

Целевая функция – минимум затрат на производство смеси:

$$F_{mn} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j,$$

где n – число ингредиентов смеси;

m – число компонентов (свойств, характеристик) смеси;

i – индекс ингредиента;

j – индекс ингредиента;

x_j – количество ингредиента вида j, входящего в смесь;

a_{ij} – доля компонента вида i в ингредиенте вида j;

A_i – минимально допустимое количество компонента вида i в смеси;

p_j – стоимость единицы ингредиента вида j.

3. *Модели оптимального раскроя материала*. Необходимо оптимизировать способы раскроя материала, получив запланированное количество заготовок, с целью минимизации расхода материала или минимизации его отходов.

Модель имеет следующий вид:

1. по количеству заготовок каждого вида –

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq A_i, i = 1,2,...,m,$$

2. неотрицательность и целочисленность переменных –

$$x_j \geq 0,\ \ x_j \text{ – целочисленное},\ j = 1,2,...,n$$

Целевая функция – минимум расхода материала по всем способам его раскроя:

$$F_{mn} = \sum_{j=1}^{n} x_j,$$

или минимум отходов материала по всем способам его раскроя:

$$F_{min} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j,$$

где j – индекс вида материала;

i – индекс вида заготовки;

n – количество материала вида j;

m – количество заготовок вида i;

x_j – количество материала, раскраиваемого способом вида j;

a_{ij} – количество заготовок вида i, получаемых при раскрое единицы материала, способом вида j;

A_i – количество заготовок вида i;

p_j – величина отходов при раскрое материала способом вида j.

4. *Модель максимальной загрузки промышленного оборудования.*

Необходимо максимально загрузить промышленное оборудование с целью минимизации неиспользуемых остатков его полезного фонда рабочего времени:

$$F_{mn} = \sum_{i=1}^{n} x_i \ .$$

При условиях:

1. по использованию фонда рабочего времени оборудования –

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = A_i - x_{\text{i}}, i = 1,2,...,m \ ,$$

2. неотрицательность переменных:

$$x_j, x_i \geq 0, \ j = 1,2,...,n; \ i = 1,2,...,m \ .$$

где j – индекс вида производимой продукции;

i – индекс вида оборудования;

n – количество продукции вида j;

m – количество производственного оборудования вида i;

x_j – величина остатков полезного фонда рабочего времени оборудования вида i;

x_j – количество выпускаемой продукции вида j;

a_{ij} – расход полезного фонда рабочего времени оборудования вида i на производство единицы продукции вида j;

A_i – полезный фонд рабочего времени оборудования вида i.

5. *Транспортные (распределительные) модели*. Для удовлетворения спроса во всех пунктах потребления требуется оптимизировать план перевозок с целью минимизации суммарных транспортных затрат:

$$F_{\min} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \ .$$

При условиях:

1. по использованию ресурсов поставщиков –

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = A_i, i = 1,2,...,m \ ,$$

2. по удовлетворению спроса потребителей –

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = B_j, j = 1,2,...,n$$

3. объем ресурсов у поставщиков должен равняться потребностям потребителей:

$$\sum_{i=1}^{m} \text{A}_i = \sum_{j=1}^{n} B_j$$

4. неотрицательность переменных:

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,2,...,m; j = 1,2,...,n \ ,$$

где i – индекс вида поставщика;

j – индекс вида потребителя;

m – количество поставщиков вида i;

n – количество потребителей вида j;

x_{ij} – объем перевозки ресурса поставщика вида i потребителю j;

A_i – количество ресурсов у поставщика вида i;

B_j – потребности потребителя вида j;

c_{ij} – затраты на перевозку единицы ресурса поставщиком вида i потребителю вида j.

6. *Модели планирования финансов*.

а) Требуется обосновать портфель срочных вкладов для выплаты по займу с целью минимизации размера целевого фонда:

$$F_{\min} = \underset{t=0}{y_t} \ .$$

При условиях:

1) по распределению целевого фонда по вкладам в нулевой момент времени –

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jt} = y_t, t = 0 \ ,$$

2) по балансу вложений и выплат:

$$\sum_{j=1}^{n} (1 + r_j) x_{jt} - \sum_{j=1}^{n} x_{jt} = b_t, t = 1,2...T - 1 \ ,$$

3) по выплатам по займу

$$\sum_{j=1}^{n} (1 + r_j) x_{jt} = b_t, t = T$$

4) неотрицательность переменных

$$y_t \geq 0; \ x_{jt} \geq 0; \ j = 1,2...n; \ t = 0,1,...,T \ ,$$

б) при фиксированном размере целевого фонда необходимо обосновать портфель срочных вкладов с целью максимизации дохода от их использования:

$$F_{\max} = \underset{t=T}{\overline{y_t}} \ ,$$

При условиях:

1) по распределению вклада в нулевой момент времени –

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jt} = \overline{B}_t, t = 0 \ ,$$

2) по балансу выплат и вложений –

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jt} - \sum_{j=1}^{n} (1 + r_j) x_{jt} = \overline{b}_t, t = 1,2..T - 1 \ ,$$

3) по формированию величины дохода –

$$\sum_{j=1}^{n} (1 + r_j) x_{jt} = \overline{y}_t, t = T$$

4) неотрицательность переменных

$$\overline{y}_t \geq 0 ; \ x_{jt} \geq 0 ; \ j = 1,2...n ; \ t = 0,1,...,T \ ,$$

где j – индекс вида срочного вклада;

t – текущий момент времени;

n – количество видов срочных вкладов вида j;

0 – нулевой момент времени;

x_{jt} – объем вложений по срочному вкладу вида j в момент времени t;

y_t – размер целевого фонда, создаваемого в момент времени t (при этом t =0);

$\overline{y}_t$ – размер дохода, который получит вкладчик в момент времени t (при этом $t = T$);

r_j – доходность срочного вклада вида j (проценты по вкладу);

b_t – размер выплаты по займу, которую производят в момент времени t;

$\overline{b}_t$ – размер вклада в момент времени t.

3.3. Двойственные оценки и их экономическая интерпретация

Любой задаче линейного программирования можно определенным образом сопоставить некоторую другую задачу такого же класса, называемую двойственной (обратной) по отношению к исходной (прямой) задаче. Принято считать, что прямой будет та задача, в результате решения которой получают размеры отраслей и другие параметры. Решение *двойственной задачи* дает систему двойственных оценок (объективно обусловленных оценок, теневых цен ресурсов) (приложение G). Прямая и двойственная задачи линейного программирования могут образовывать пару как симметричных, так и несимметричных задач. Несимметричная пара задач может быть в том случае, если одно или несколько ограничений прямой задачи представлено уравнений, а в двойственной задаче система ограничений сформирована неравенствами одного вида. При этом двойственная оценка, относящаяся к данному уравнению, может принимать как положительное, так и отрицательное значение.

Пример. Требуется определить оптимальное сочетание следующих отраслей в фермерском хозяйстве: молочное животноводство, зерновые, картофель и многолетние травы с целью получения максимальной прибыли.

Исходная информация.

Фермер располагает 60 га пашни, запасом кормов на пастбищах и сенокосах – 808 ц к. ед., ресурсами годового труда – 1800 чел.-дней. Согласно бизнес-плану в фермерском хозяйстве расход ресурсов и выход продукции дан в табл. 3.1. Требования севооборота предполагают, что площадь зерновых культур должна быть не более 60% от площади пашни.

Запишем условия задачи в виде линейной модели. Введем следующие переменные:

x_1 – посевная площадь зерновых культур, га;

x_2 – посевная площадь картофеля, га;

x_3 – посевная площадь многолетних трав, га;

x_4 – поголовье коров, гол.

Таблица 3.1. **Экономические показатели развития производства**

Показатели	На 1 гол., на 1 га			
	зерновые	картофель	многолетние травы	коровы
Расход пашни, га	1	1	1	–
Расход годового труда, чел.-дн.	6	26	2	25
Расход кормов, ц к.ед.	–	–	–	50
Выход кормов, ц к.ед.	12	15	25	–
Прибыль, у.д.е.	50,0	20	–	70

Система ограничений задачи имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 60 \\ 6x_1 + 26x_2 + 2x_3 + 25x_4 \le 1800 \\ 50x_4 \le 12x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 808 \\ x_1 \le 36. \end{cases}$$

По своему экономическому содержанию переменные x_1, x_2, x_3, и x_4 могут быть только неотрицательными величинами:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

Среди всех допустимых решений системы неравенств требуется найти такое, при котором целевая функция принимает максимальное значение:

$$F_{\max} = 50x_1 + 20x_2 + 70x_4.$$

Решение прямой задачи найдем симплексным методам (см. приложение H, I и J) (табл. 3.2).

Т а б л и ц а 3.2. **Оптимальное решение прямой задачи**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		y_4	y_1	x_3	y_3
x_2	24	–1	–1	1	0
y_2	160	21,5	–33,5	–19	-0,5
x_4	32	–0,06	0,3	–0,2	0,02
x_1	36	1	0	0	0
F_{max}	4520	25,8	41	6	1,4

Ответ задачи находится в столбце значений базисных переменных пятой симплексной таблицы. Из нее видно, что x_2=24 га, y_2=160 чел.-дней, x_4=32 голов, x_1=36 га. Все остальные переменные, не вошедшие в базис, равны 0. Максимальное значение целевой функции F=4520 у.д.е.

На базе прямой задачи составим двойственную задачу, используя методику, изложенную в приложении G.

Построим двойственную модель, предварительно приведя ограничения прямой задачи к одному виду (обычно, к преобладающему):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 60 \\ 6x_1 + 26x_2 + 2x_3 + 25x_4 \le 1800 \\ -12x_1 - 15x_2 - 25x_3 + 50x_4 \le 808 \\ x_1 \le 36 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

$$F_{\max} = 50x_1 + 20x_2 + 70x_4.$$

Введем двойственные оценки (их столько, сколько ограничений в прямой задаче). Переменные u_1, u_2, u_3 обозначают двойственную или объективно обусловленную оценку единицы каждого вида ресурса (пашни, труда, кормов). Так u_1 – двойственная оценка 1 га пашни; u_2 – оценка 1 чел.-дня труда; u_3 – оценка 1 ц к.ед. корма, кроме того, u_4, u_5 – соответственно оценка доходности возделывания зерновых культур при минимальной и максимальной их площади. Эти величины показывают, на сколько увеличится значение целевой функции при росте имеющегося запаса ресурсов соответствующего вида на единицу.

Целевая функция двойственной задачи минимизирует общую стоимость используемого сырья:

$$F_{\min} = 60u_1 + 1800u_2 + 808u_3 + 36u_4 .$$

При этом должна соблюдаться такая система ограничений:

– по средней величине покрытия от зерновых культур:

$$u_1 + 6u_2 - 12u_3 + u_4 \geq 50$$

– по средней величине покрытия от картофеля:

$$u_1 + 26u_2 - 15u_3 \geq 20$$

– по средней величине покрытия от многолетних трав:

$$u_1 + 2u_2 - 25u_3 \geq 0$$

– по средней величине покрытия от молочного скотоводства:

$$25u_2 + 50u_3 \geq 70$$

– неотрицательность переменных:

$$u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0 .$$

Каждая из задач двойственной пары является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена симплексным методом (приложение I и J). Представим решение двойственной задачи в табл. 3.3.

Таким образом, суммарная количественная оценка ограничивающих производство ресурсов равна 4520 у.д.е.

Т а б л и ц а 3.3. **Оптимальное решение двойственной задачи**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		y_1	u_2	y_4	y_2
u_1	41,0	0	33,5	–0,3	1
u_4	25,8	1	–21,5	0,06	1
y_3	6,0	0	19	0,2	–1
u_3	1,4	0	0,5	–0,02	0
F_{min}	4520	–36	–160	–32	–24

Из таблицы видно, что u_1 – оценка 1 га пашни равна 41 у.д.е., т.е., если фермерское хозяйство будет иметь не 60, а 61 га пашни, то это приведет к росту прибыли на 41 у.д.е.; u_2 – оценка трудовых ресурсов равна нулю, так этот ресурс в данных экономических условиях является избыточным; u_3 – оценка кормов показывает, что 1 ц к.ед. обеспечивает приращение прибыли в размере 1,4 у.д.е.; u_4 – оценка доходности возделывания зерновых культур при максимальной их площади посева показывает, что при увеличении площади зерновых культур на 1 га за счет перераспределения посевов культур, прибыль фермерского хозяйства может возрасти на 25,8 у.д.е.

В теории линейного программирования доказывается несколько теорем о взаимосвязи решений прямой и двойственной задач. Знание этих взаимосвязей важно не только с теоретической, но и с прикладной точки зрения. Важнейшие из них такие:

а) взаимодвойственность: прямая задача и двойственная к ней являются взаимодвойственными;

б) теорема двойственности: если взаимодвойственные задачи имеют хотя бы одно допустимое решение, то они имеют одинаковые значения целевых функций в оптимуме;

в) полнота симплекс-таблицы: последняя симплексная таблица, соответствующая прямой задаче, содержит всю информацию о решении двойственной и наоборот.

Свойство взаимодвойственности заключается в следующем. Если двойственную задачу рассматривать в качестве прямой и применить к ней правила построения двойственной, то получим исходную прямую задачу.

Теорема двойственности для рассматриваемой задачи иллюстрируется следующим образом. Так, для прямой задачи F_{max}=4520, для двойственной – F_{min}=4520, т.е. F_{max}=F_{min}=4520.

Свойство полноты симплекс-таблицы продемонстрируем на основе изучения последней симплексной таблицы рассматриваемой двойственной задачи:

1. дополнительные небазисные переменные двойственной задачи равны соответствующим основным переменным прямой задачи и их значение, взятое со знаком плюс, находится в строке целевой функции:

$$y_i^g = x_j^n = (+)c_j;$$

$$y_1 = x_1 = 36; y_4 = x_4 = 32; y_2 = x_2 = 24;$$

2. двойственные переменные, стоящие в небазисных переменных, равны соответствующим дополнительным переменным прямой задачи и их значение, взятое со знаком плюс, находится в строке целевой функции:

$$u_i^g = y_i^n = (+)c_j,$$

$$u_2 = y_2 = 160$$

Свойства объективно обусловленных оценок.

Использование двойственных оценок в анализе связано со следующим их значением:

1. *Двойственные оценки индивидуальны.* В современных рыночных условиях важно оценить роль отдельных ресурсов в формировании результата конкретного товаропроизводителя, так как одинаковые ресурсы в каждой организации АПК играют различную роль и их двойственные оценки будут различны. Это обусловлено такими факторами, как климатические условия, формы собственности, организации и

оплаты труда, применяемые производственные технологии и т.д. Поэтому двойственные оценки рассчитывают индивидуально для каждой аграрной организации при решении задачи линейного программирования.

2. *Двойственные оценки устойчивы*. Они имеют единицы измерения целевой функции. Двойственные оценки получают только лимитированные, т.е. недостающие ресурсы. Избыточные ресурсы, то есть те, которые в данных производственных условиях используются неполностью в рассматриваемой организации, имеют нулевые двойственные оценки. Но этот факт не означает отсутствия хозяйственной ценности таких ресурсов, а лишь указывает на их нерациональное использование. При изменении производственных условий избыточный ресурс может стать недостающим и иметь двойственную оценку.

3. *Двойственные оценки позволяют соизмерить затраты и результаты производства*, определить конечный эффект от принятия того или иного управленческого решения, так как двойственная оценка показывает насколько изменится величина целевой функции, если ресурс изменится на единицу сверх имеющегося объема. Нулевые двойственные оценки по ресурсам свидетельствуют о том, что изменение их объема на единицу не повлияет на конечные результаты целевой функции. Ненулевые двойственные оценки подсказывают, объем какого ресурса необходимо увеличить для повышения конечных результатов организации. При этом ресурсы, получившие ненулевую оценку, должны быть ранжированы по своей эффективности, которую определяют с учетом затрат, необходимых для привлечения единицы дополнительного ресурса.

4. *Двойственные оценки позволяют определить нормы взаимозаменяемости между ресурсами*. В данном случае речь идет только об относительной заменяемости с учетом влияния ресурсов на конечные результаты.

5. *Двойственные оценки позволяют расположить отрасли сельскохозяйственной организации и производимую продукцию по степени ее эффективности* и тем самым достоверно обосновать направления ее дальнейшего развития. Аналогично, если анализируется роль расчетного или планового задания, то двойственная оценка может рассматриваться как цена увеличения задания в плане потерь при достижении требуемого эффекта.

Свойства двойственных оценок базируются на содержании первой и второй теорем двойственности. Сформулируем *первую теорему двойственности*:

если одна из задач, или прямая или двойственная, имеет оптимальное решение, то и другая задача имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения целевых функций равны, то есть, если целевая функция прямой задачи записана в виде $F_{\max} = \sum_{j \in J_0} c_j x_j$, а двойственной задачи – в виде $F_{\min} = \sum_{i \in I_0} A_i u_i$,то согласно первой теоремы двойственности $\max \sum_{j \in J_0} c_j x_j = \min \sum_{i = I_0} A_i u_i$.

Экономическое содержание первой теоремы двойственности состоит в том, что программа производства (значения переменных прямой задачи) и система двойственных оценок являются оптимальными только тогда, когда стоимость (прибыль) сельскохозяйственной продукции и суммарная оценка ограничивающих производство ресурсов совпадают. То есть, фермерское хозяйство может получить максимально возможную прибыль, равную 4520 у.д.е., если количественная оценка лимитированных ресурсов хозяйства равна 4520 у.д.е. В этом случае двойственные оценки выступают как инструмент балансирования затрат и результатов производства.

Суть *второй теоремы двойственности* в следующем:

1. если двойственные оценки положительны, то производственные ресурсы, для которых они рассчитаны, используются полностью, т.е. если $u_i > 0$, то $\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j = A_i, i \in I_0$;

2. двойственные оценки равны нулю, если производственные ресурсы, к которым они относятся, недоиспользуются, т.е. $u_i = 0$, при условии $\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j < A_i, i \in I_0$.

Выпишем двойственные оценки ресурсов фермерского хозяйства: $u_1 = 41; u_2 = 0; u_3 = 1{,}4; u_4 = 25{,}8$. Как уже отмечалось, если площадь пашни фермерского хозяйства возрастет на 1 га сверх имеющейся, то прибыль фермера увеличится на 41 у.д.е. $(u_1 = 41)$. Дополнительное использование 1 ц к.ед. кормов позволяет увеличить прибыль на 1,4 у.д.е. $(u_3 = 1{,}4)$. Если ограничение на посев зерновых культур будет увеличено на 1 га, то за счет перераспределения ресурсов пользу более выгодной отрасли фермер дополнительно получит 41 у.д.е. $(u_4 = 41)$. В этом случае двойственные оценки выступают как мера влияния ресурсов на функционал.

Второй ресурс (труд) в условиях фермерского хозяйства избыточный, он имеет нулевую двойственную оценку $(u_2 = 0)$. Согласно содержанию второй теоремы двойственности ресурсы, двойственные оценки которых равны нулю, недоиспользуются. Из решения прямой задачи (табл. 3.2) видно, что избыток трудовых ресурсов при условии оптимального решения составляет 160 чел.-дней $(y_2 = 160)$. Нулевая двойственная оценка показывает, что этот ресурс можно перераспределить: использовать избыток труда для улучшения социальной сферы фермерского хозяйства, на нужды другой сельскохозяйственной организации, испытывающей дефицит трудовых ресурсов, и т.д.

Ресурсы, получившие ненулевые двойственные оценки, сдерживают производство, так как используются полностью (согласно второй теоремы двойственности). Из оптимального решения прямой задачи видно, что их дополнительные переменные (обозначающие недоиспользование ресурсов) попали в небазисные и равны нулю: $y_1 = 0, y_3 = 0, y_4 = 0$. Следовательно, двойственные оценки выступают мерой дефицитности ресурсов.

В свою очередь ресурсы, получившие ненулевые двойственные оценки, должны быть ранжированы по своей эффективности. При этом эффективность определяют с учетом затрат, необходимых для привлечения единицы ресурса. С первого взгляда кажется, что наибольшую отдачу дает увеличение площади пашни, имеющей самую высокую двойственную оценку.

Вместе с тем известно, что материально-денежные затраты на увеличение 1 га пашни составят 500 у.д.е., а на прирост 1 ц к.ед. – 1,8 у.д.е. Что касается четвертого ресурса, то затраты на его осуществление связаны с технологией производства, с требованиями севооборотов, поэтому эффективность этого мероприятия здесь не оценивается.

Рассчитаем окупаемость денежных вложений:

по пашне – $\frac{500}{41} = 12{,}2$ лет;

по кормам – $\frac{1{,}8}{1{,}4} = 1{,}3$ года.

Отсюда следует, что в данных экономических условиях быстрее окупятся инвестиции, вложенные в оборотные средства (корма). Таким образом, двойственные оценки позволяют обосновать очередность вложения денежных средств в производство.

В практическом отношении для задач линейного программирования важно выявление альтернативных оптимальных решений. Оно основывается на том теоретическом положении, что если $\sum_{i \in I_0} a_{ij} u_i > c_j$, то отрасль не выгодно вводить в базис, а если $\sum_{i \in I_0} a_{ij} u_i < c_j$, то отрасль для сельскохозяйственной организации будет прибыльна.

Допустим, в связи с избытком трудовых ресурсов и исходя из спроса и предложения на рынке фермер принимает решение заняться в будущем году овощеводством или свиноводством. Запишем предполагаемые затраты ресурсов и выход прибыли для этих отраслей (табл. 3.4).

Т а б л и ц а 3.4. **Характеристика отраслей**

Ресурсы	Двойственные оценки, u_i	В расчете на единицу отрасли	
		овощеводство	свиноводство
Пашня, га	41	1	–
Труд, чел.-дн.	0	30	10
Корма, ц к.ед.	1,4	–	8
Технологическое ограничение по площади посева зерновых культур, га	25,8	–	–
Прибыль, у.д.е.		50	10

Оценим эффективность отдельных отраслей, рассчитав суммарную оценку ресурсов и сравним ее с результатом производства:

овощеводство – $1 \cdot 41 + 30 \cdot 0 < 50$,

свиноводство – $10 \cdot 0 + 8 \cdot 1{,}4 > 10$.

В этом случае фермер должен отдать предпочтение развитию в хозяйстве овощеводства, так как полученная прибыль будет покрывать издержки на производство овощей.

Таким образом, двойственные оценки становятся важным инструментом анализа оптимальных решений и в этом качестве могут служить для обоснования действий, направленных на повышение эффективности производства.

3.4. Устойчивость оптимального плана

Анализ устойчивости (чувствительности) оптимального плана основывается на изменении параметров задачи: a_{ij}, A_i и p_j, где $i = 1,2...m$; $j = 1,2...n$.

Влияние изменения параметров задачи на оптимальный план можно посмотреть, если найти интервалы устойчивости оценок, в пределах которых они измеряют влияние ограничений на целевую функцию задачи.

Допустимый интервал устойчивости оценок имеет вид:

$$\left[A_i - \Delta A_i^{\min}; A_i + \Delta A_i^{\max}\right],\ i = 1,2...m,$$

где $\Delta A_i^{\min}$ – нижний предел уменьшения ресурса вида i, который находится по формуле:

$$\Delta A_i^{\min} = \min_{\substack{j \\ d_{ij}>0}} \left\{ \frac{x_j^*}{d_{ij}} \right\},$$

$\Delta A_i^{\max}$ – верхний предел увеличения ресурса вида i, который находится по формуле: $\Delta A_i^{\max} = \left| \max_{\substack{j \\ d_{ij}<0}} \left\{ \frac{x_j^*}{d_{ij}} \right\} \right|$,

где d_{ij} – элементы матрицы $A^{-1} = \|d_{ij}\|$, обратной к матрице $A = \|a_{ij}\|$ в оптимальном решении прямой задачи;

x_j^* - оптимальное решение.

Пример. Согласно оптимальному решению прямой задачи (см. табл. 3.2 и приложение Н) в базис вошли переменные x_1, x_2, x_4 и y_2.

Выпишем прямую матрицу, состоящую из коэффициентов ограничений прямой задачи базисных переменных (см. приложение Н, табл. 1):

$$A = \|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 26 & 25 & 1 \\ -12 & -15 & 50 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Используя алгоритм вычисления обратных матриц (см. приложение В), найдем ее элементы. Элементы обратной матрицы можно найти и используя Excel.

Введем элементы прямой матрицы в диапазон ячеек B3:E6. Выделим область (диапазон из 16 ячеек) F3:16 для размещения обратной матрицы. Найдем обратную матрицу с помощью функции МОБР, для чего выполним один щелчок левой кнопки мыши по кнопке f_x (вставка функции) стандартной панели инструментов (на экране диалоговое окно «Мастер функций»).

В левом окне подведем курсор на категорию «Математические» и выделим ее щелчком кнопки мыши. В поле «Функция» этого окна с помощью кнопок прокрутки найдем функцию МОБР и выделим ее щелчком мыши, нажмем кнопку «ОК» (рис. 3.1).

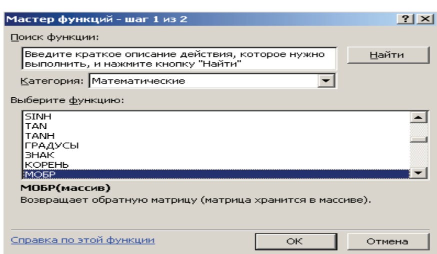


Рис. 3.1. Диалоговое окно активизации команды обращения матрицы

В поле «Массив» с мигающим курсором введем диапазон размещения элементов прямой матрицы A4:D7 и нажмем клавиши <Ctrl> + <Shift> + <Enter> (тем самым укажем программе, что она должна выполнить операцию над массивами) (рис. 3.2).

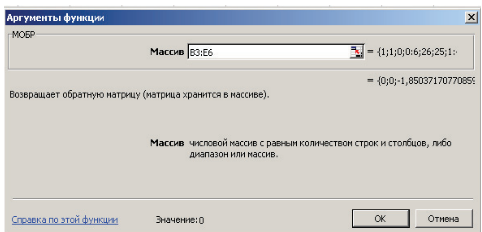


Рис. 3.2. Диалоговое окно ввода данных инструмента МОБР

На экране в выделенном диапазоне получим обратную матрицу (рис. 3.3).

1	1	0	0	0	0	0	1
6	26	25	1	1	0	0	–1
–12	–15	50	0	0,3	0	0,02	–0,06
1	0	0	0	–33,5	1	–0,5	21,5

Рис. 3.3. Результат применения инструмента МОБР

Выпишем элементы матрицы, обратной к данной прямой матрицы A:

$$A^{-1} = \left\| d_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}02 & -0{,}06 \\ -33{,}5 & 1 & -0{,}5 & 21{,}5 \end{pmatrix}$$

Приведем другой способ определения элементов обратной матрицы.

Например, используя модификацию симплексного метода (позволяющего найти элементы обратной матрицы) найдем оптимальное решение прямой задачи (см. вопрос 3):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 60 \\ 6x_1 + 26x_2 + 2x_3 + 25x_4 \le 1800 \\ 50x_4 \le 12x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 808 \\ x_1 \le 36 \end{cases}$$

$$F_{\max} = 50x_1 + 20x_2 + 70x_4 .$$

Приведем прямую задачу к каноническому виду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + y_1 = 60 \\ 6x_1 + 26x_2 + 3x_3 + 25x_4 + y_2 = 1800 \\ -12x_1 - 15x_2 - 25x_3 + 50x_4 + y_3 = 808 \\ x_1 + y_4 = 36 \end{cases}$$

$$F_{\max} = 50x_1 + 20x_2 + 70x_4 .$$

Все дополнительные переменные y_i имеют тот же знак, что и свободные члены, в противном случае для решения задачи используется М-метод (метод искусственного базиса).

Информацию задачи занесем в первую симплексную таблицу (табл. 3.5).

Коэффициенты строки целевой функции записываются в таблицу с противоположным знаком.

Оптимального решения нет, так как в строке целевой функции имеются отрицательные коэффициенты. Наибольший по модулю отрицательный коэффициент F-строки определит разрешающий столбец (см. поиск оптимального решения в приложении G).

Т а б л и ц а 3.5. **Первая симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены	Переменные							
		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
y_1	60	1	1	1	0	1	0	0	0
y_2	1800	6	26	2	25	0	1	0	0
y_3	808	–12	–15	–25	$\boxed{50}$	0	0	1	0
y_4	36	1	0	0	0	0	0	0	1
F_{max}	0	–50	–20	0	–70	0	0	0	0

Минимальное положительное симплексное отношение укажет на разрешающую строку. На пересечении разрешающего столбца и строки находим разрешающий коэффициент (k=50).

В столбец переменных вместо y_3 ставим основную переменную x_4 и рассчитываем коэффициенты новой симплексной таблицы (табл. 3.6).

Используем следующие правила расчета коэффициентов новой симплексной таблицы.

Т а б л и ц а 3.6. **Вторая симплексная таблица**

Базисные перемен-ные	Сво-бодные члены	Переменные							
		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
y_1	60	1	1	1	0	1	0	0	0
y_2	1396	12	33,5	14,5	0	0	1	–0,5	0
x_4	16,16	–0,24	–0,3	–0,5	1	0	0	0,02	0
y_4	36	$\boxed{1}$	0	0	0	0	0	0	1
F_{max}	1131,2	–66,8	–41	–35	0	0	0	1,4	0

1. В новом столбце, вместо разрешающего, проставляют везде нули, кроме переменной, которая вошла в базис. Против нее ставим единицу.

2. Новые коэффициенты разрешающей строки находят в результате деления старых коэффициентов на разрешающий коэффициент (см. приложение G).

3. Все остальные коэффициенты вычисляют по правилу прямоугольника (см. приложение G).

Во второй симплексной таблице нет оптимального решения, следовательно, продолжает его поиск, используя выше изложенный алгоритм (табл. 3.7 и 3.8).

Т а б л и ц а 3.7. **Третья симплексная таблица**

Базисные перемен-ные	Свобод-ные члены	Переменные							
		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
y_1	24	0	$\boxed{1}$	1	0	1	0	0	–1
y_2	964	0	33,5	14,5	0	0	1	–0,5	–12
x_4	24,8	0	–0,3	–0,5	1	0	0	0,02	0,24
x_1	36	1	0	0	0	0	0	0	1
F_{max}	3536	0	–41	–35	0	0	0	1,4	66,8

В строке целевой функции все коэффициенты положительные, оптимальное решение найдено, оно совпадает с ранее полученным (см. приложение H).

В табл. 3.8 имеем коэффициенты обратной матрицы и оптимальное решение задачи.

Т а б л и ц а 3.8. **Четвертая симплексная таблица**

Базисные перемен-ные	Свобод-ные члены	Переменные							
		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
x_2	24	0	1	1	0	1	0	0	–1
y_2	160	0	0	–19	0	–33,5	1	–0,5	21,5
x_4	32	0	0	–0,2	1	0,3	0	0,02	–0,06
x_1	36	1	0	0	0	0	0	0	1
F_{max}	4520	0	0	6	0	41	0	1,4	25,8

Используя табл. 3.8 и вышеизложенные формулы определим допустимый интервал устойчивости оценок по отношению к ограничениям по ресурсам:

$$\Delta A_1^{\min} = \min\left\{\frac{24}{1}; \frac{32}{0{,}3}\right\} = 24$$

$$\Delta A_1^{\max} = \left|\max\left\{\frac{160}{-33{,}5}\right\}\right| = 4{,}776 .$$

Таким образом, интервал устойчивости двойственных оценок по отношению к ресурсам пашни равен:

$$\left[A_1 - \Delta A_1^{\min}; A_1 + \Delta A_1^{\max}\right] = [60 - 24; 60 + 4{,}776] = [36; 64{,}776]$$

Трудовые ресурсы в данных производственных условиях используются неполностью (y_2=160), следовательно, их увеличение не окажет влияние на величину целевой функции задачи. Поэтому определим нижний предел уменьшения трудовых ресурсов:

$$\Delta A_2^{\min} = \min\left\{\frac{160}{1}\right\} = 160 ,$$

$$\left[A_2 - \Delta A_2^{\min}; \text{нет}\right] = [1800 - 160; \text{нет}] = [1640; \text{нет}] .$$

Определим интервал устойчивости по отношению к ресурсам кормов и технологическому требованию по максимальной площади посева зерновых культур:

$$\Delta A_3^{\min} = \min\left\{\frac{32}{0{,}02}\right\} = 1600 ,$$

$$\Delta A_3^{\max} = \left|\max\left\{\frac{160}{-0{,}5}\right\}\right| = 320 ,$$

$$\left[A_3 - \Delta A_3^{\min}; A_3 + \Delta A_3^{\max}\right] = [808 - 1600; 808 + 320] = [-792; 1128];$$

$$\Delta A_4^{\min} = \min\left\{\frac{160}{21{,}5}; \frac{36}{1}\right\} = 7{,}442 ,$$

$$\Delta A_4^{\max} = \left| \max\left\{ \frac{24}{-1}; \frac{32}{-0,06} \right\} \right| = 24 ,$$

$$\left[A_4 - \Delta A_4^{\min}; A_4 + \Delta A_4^{\max} \right] = [36 - 7,442; 36 + 24] = [28,558; 60].$$

Изменение объемов ресурсов в данных границах позволит сохранить допустимое решение задачи.

Так как изменения ресурсов находится в пределах устойчивости оценок, то их раздельное влияние на изменение целевой функции $(\Delta F_{\max})_i$ определим произведением соответствующей двойственной оценки u_i^* на величину изменения ресурса ΔA_i .

Из табл. 3.3 выпишем оптимальное значение двойственных оценок и целевой функции:

$$u_1^* = 41,0; u_2^* = 0; u_3^* = 1,4; u_4^* = 25,8; F_{\min} = 4520 .$$

Определим изменение значения целевой функции при уменьшении ресурсов по сравнению с имеющимся уровнем:

$$(\Delta F_{\max})_1 = 41 \cdot (36 - 60) = -984 ,$$

$$(\Delta F_{\max})_2 = 0 \cdot (1640 - 1800) = 0 ,$$

$$(\Delta F_{\max})_3 = 1,4 \cdot (-792 - 808) = -2240 ,$$

$$(\Delta F_{\max})_4 = 25,8 \cdot (28,558 - 36) = -192,0 .$$

Суммарное влияние уменьшения ресурсов на значение целевой функции составит:

$$\Delta F_{\max} = \sum_{i=1}^{m} (\Delta F_{\max})_i = -984 + 0 - 2240 - 192,0 = -3416 .$$

Рассчитаем изменение значения целевой функции при увеличении ресурсов по сравнению с имеющимся уровнем:

$$(\Delta F_{\max})_1 = 41 \cdot (64,776 - 60) = 195,8 ,$$

$$(\Delta F_{\max})_3 = 1,4 \cdot (1128 - 808) = 448,0 ,$$

$$(\Delta F_{\max})_4 = 25,8 \cdot (60 - 36) = 619,2 ,$$

$$\Delta F_{\max} = \sum_{i=1}^{m} (\Delta F_{\max})_i = 195,8 + 448,0 + 619,2 = 1263,0 .$$

Анализ устойчивости по ресурсам позволяет оценить степень влияния изменения объемов ресурсов A_i на значение целевой функции и дает возможность определения наиболее целесообразного варианта возможных изменений свободных членов задачи.

В послеоптимизационном анализе результатов решения задач линейного программирования чаще всего используют информационные технологии LPX.88 (приложение I) и Excel (приложение J).

Программа LPX.88 позволяет найти оптимальное значение неизвестных величин задачи (функциональная клавиша F_1 (PRIMAL VALUES OUTPUT MENU)); значение двойственных оценок ресурсов (функциональная клавиша F_2 (DUAL VALUES OUTPUT MENU)); устойчивость по критерию (функциональная клавиша F_3 (COST RANCES OUTPUT MENU)); устойчивость по ресурсам (функциональная клавиша F_4 (RHS RANCES OUTPUT MENU)); обратную матрицу (функциональная клавиша F_5 (INVERSE MATRIX)).

В отчете по устойчивости по критерию указаны значения неизвестных величин задачи, коэффициенты критерия задачи при неизвестных и в последних столбцах даны пределы устойчивости критериальных коэффициентов.

В модель заложена априорная информация о прибыли с единицы отрасли. С течением времени она может изменяться под влиянием изменения себестоимости продукции, цен на сырье и продукцию и полученное оптимальное решение в результате влияния различных факторов на процесс производства может оказаться неоптимальным.

Поэтому, зная нижнюю и верхнюю границы устойчивости коэффициентов критерия, оценивают устойчивость решения задачи. Если коэффициенты критерия при соответствующих неизвестных величинах задачи не выходят за границы устойчивости (от нижней границы до верхней), то оптимальное решение останется неизменным. Например, коэффициент критерия при неизвестной переменной X_2 равен 20 и может изменяться в пределах [14; 45,8] и соответственно прибыль от 24 га картофеля может изменяться в пределах [336; 1099,2], в этом случае неизвестная переменная X_2 будет базисной и равной 24 га.

В отчете по устойчивости по ресурсам указаны двойственные оценки ресурсов, их запасы, нижняя и верхняя границы изменения устойчивости их двойственных оценок. Если наличие ресурса находится в границах устойчивости двойственной оценки, то можно определить величину изменения значения критерия. Например, объем первого ресурса может изменяться в пределах [36; 64,776], что повлечет за собой колебание значения критерия (прибыли) на 1179,82 у.д.е.:

$$(\Delta F_{\max})_1 = u_1^* \cdot \Delta A_i = 41 \cdot (64{,}776 - 36) = 1179{,}82 \text{ у.д.е.}$$

Если же значение объема ресурса будет увеличено сверх верхней границы, то ресурс из дефицитного (ограниченного) перейдет в недефицитный и дополнительная его переменная y_i будет больше нуля, а двойственная его оценка u_i=0.

3.5. Иерархические системы и методы декомпозиции

При моделировании параметров развития сложных систем исследователь сталкивается с трудностью поиска оптимального решения задач линейного программирования большой размерностью. С целью упрощения процедуры расчета применяют методы декомпозиции, которые основаны на рациональном расчленении сложной экономико-математической задачи и решением отдельных подзадач с последующим согласованием частных решений для получения общего оптимального решения. При этом каждую сложную систему, к которой относится и экономическая система (для микроэкономики – это предприятие, для макроэкономики – отрасли, регионы), состоящую из большого числа взаимосвязанных объектов, представляют в виде совокупности подсистемы изучаемой системы. Таким образом, любая сложная система имеет иерархическую структуру, в которой существует множество составляющих ее подсистем и элементов разного уровня, обладающих определенными взаимосвязями и взаимоотношениями. Например, реальная экономическая система, представляет собой сочетание разных иерархических систем (отраслевой, территориальной, функциональной), в которой наряду с вертикальными связями действуют горизонтальные, роль которых с развитием в стране рынка возрастает. Для повышения управляемости иерархической системы часть прав и обязанностей по принятию решений доверяется нижестоящим звеньям (акционерным обществам, предприятиям и т.д.). Но, превратившись в относительно самостоятельную подсистему или элемент системы, такое звено обретает и собственные интересы, которые могут не совпадать с интересами руководства системой. Для устранения таких расхождений в экономике применяются меры экономического стимулирования, которые направлены на объединение личных, коллективных и общегосударственных интересов в экономике. Обосновать мероприятия по экономическому стимулированию интересов системы и подсистем можно с помощью методов декомпозиции.

Методы декомпозиции или разложения эффективны для задач линейного программирования большой размерности, у которых матрица задачи может быть приведена к блочной структуре (рис. 3.4).

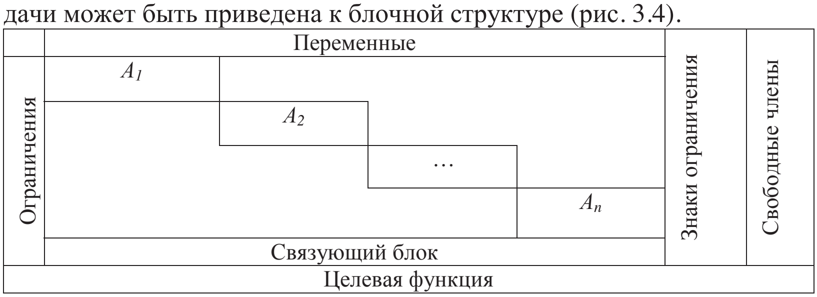


Рис. 3.4. Схема матрицы блочной экономико-математической задачи линейного программирования.

Допустим, имеется n секторов экономики (отраслей, подсистем), деятельность которых характеризуется различными технологическими способами производства ($x_j = (x_1, x_2, ..., x_n)$). Каждый сектор экономики вида j имеет определенные запасы ресурсов A_i ($A_i = (A_1, A_2, ..., A_m)$), расход которых в технологических способах задается соответствующими коэффициентами a_{ij} (a_{ij} – расход ресурса вида i на единицу технологического способа производства вида j). В качестве ресурсов данной задачи могут выступать производственные мощности, сырье, трудовые ресурсы, запасы кормов, денежных средств и т.д. Т.е. функционирование конкретного сектора экономики описывается ограничениями одного из основных блоков модели. При этом в модели количество основных блоков соответствует числу секторов экономики.

Основные блоки модели связаны между собой ограничениями связующего блока и целевой функцией задачи. Ограничения связующего блока включают балансовые соотношения, наложенные на деятельность всех n секторов экономики. Например, задаваемые извне минимальные уровни потребления товаров или максимальный расход ограниченных ресурсов (топлива). И каждый технологический способ производства вида j наряду с коэффициентами a_{ij} характеризуется и коэффициентами b_{ij} (b_{ij} – потребление глобального ресурса вида i на единицу технологического способа производства вида j).

Таким образом, блочную экономико-математическую модель можно записать следующим образом: требуется найти максимальное значение целевой функции

$$F_{\max} = \sum_{j \in J_0} c_j x_j \ ,$$

При условиях:

по использованию ресурсов

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j = A_i, i \in I_0 ; \tag{3.1}$$

по использованию глобальных ресурсов

$$\sum_{j \in J_0} b_{ij} x_j = B_i, i \in I_1 ;$$

по неотрицательности неизвестных величин

$$x_j \geq 0, j \in J_0 .$$

Индексация:

i – номер ресурса;

I_0 – множество видов ресурсов;

I_1 – множество видов глобальных ресурсов;

j – номер технологического способа производства;

J_0 – множество видов технологических способов производства;

Неизвестные величины:

x_j – размер технологического способа производства вида *j*;

Известные величины:

a_{ij} – расход ресурса вида *i* на единицу технологического способа производства вида *j*;

A_i – объем ресурса вида *i*;

b_{ij} – расход глобального ресурса вида *i* на единицу технологического способа производства вида *j*;

B_i – объем глобального ресурса вида *i*;

c_j – эффект (прибыль, выручка от реализации продукции и т.д.) с единицы технологического способа производства вида *j*.

Существует два основных подхода к декомпозиции системы (3.1):

1. *Прямая декомпозиция* путем перераспределения между секторами глобальных ресурсов. Этот метод получил название метода Корнаи-Липтака (Я. Корнаи и Т. Липтак – венгерские ученые). Схема Корнаи-Липтака построена по принципу сравнения централизованного маштабирования возможностей с децентрализованным выявлением эффекта от их использования.

При прямой декомпозиции строится итеративный процесс определения лимитов глобальных ресурсов вида i, т.е. y_i, удовлетворяющих условию:

$$\sum_{i\in I_1} y_j \le B_i, i\in I_1$$

и таких, что оптимальные решения подзадач (блоков матрицы):

$$\sum_{j\in J_0} a_{ij}x_j = A_i, i\in I_0 \tag{3.2}$$

$$\sum_{j\in J_0} b_{ij}x_j = y_i, i\in I_1$$

$$F_{\max} = \sum_{j\in J_0} c_j x_j$$

являются одновременно решением задачи (3.1).

2. *Двойственная декомпозиция* или декомпозиция через двойственные оценки – метод Данцига-Вульфа. (Дж. Данциг и П. Вульф – американские ученые). Схема Данцига-Вульфа построена по принципу сравнения централизованно определенных цен с децентрализованным определением наилучших возможностей.

Секторам экономики задаются зависящие от цен (двойственных оценок) целевые функции, которые заставляют сектора выбирать решения, способствующие достижению общей цели прямой задачи (3.1).

Т.е. строится итеративный процесс определения двойственных оценок u_i таких, что оптимальные решения подзадач (задач блоков):

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j = A_i, i \in I_0 \qquad (3.3)$$

$$F_{\max} = (c_j + u_i B_i) \cdot x_j$$

являются в тоже время решением исходной прямой задачи (3.1).

В общих подходах алгоритм решения общей задачи (3.1) состоит из двух этапов: на первом этапе находится допустимое решение для системы в целом (как совокупность допустимых решений подзадач), на втором этапе полученное решение шаг за шагом улучшается, приближаясь к оптимальному.

Первоначальные значения лимитов глобальных ресурсов y_i или цен u_i выбираются априорно, и на каждом шаге корректируются и скорректированные подзадачи (3.2) или (3.3) решаются заново. Критерием корректировок является минимизация отклонений двойственных оценок глобальных ограничений в локальных подзадачах.

Практически, через 4-5 шагов полученное приближенное решение становится экономически приемлемым. При этом оценки одноименных ограничений в локальных задачах приблизительно равны и совокупность решений локальных подзадач образует решение исходной задачи (3.1).

Следует отметить, что рассмотрение методов декомпозиции представляет интерес в теоретическом плане, в практических целях они теряют свою значимость в связи с развитием вычислительной техники и пакетов прикладных программ, позволяющих в короткие сроки решать экономико-математические задачи большой размерности.

3.6. Целочисленные линейные модели

Среди практических задач линейного программирования важное место занимают задачи с требованием целочисленности переменных (все или части неизвестных величин). Экстремальные задачи, в которых на переменные накладываются условия целочисленности, а область допустимых решений конечна, являются предметом изучения целочисленного или дискретного программирования. Они возникают в случае, когда искомые переменные определяют неделимые объекты: тракторы, животные и т.д.

В общем виде задача целочисленного программирования имеет следующий вид.

Требуется найти экстремальное (максимальное или минимальное) значение целевой функции:

$$F_{\max(\min)} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j .$$

При условиях:

1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\le, =, \ge\} A_i, i = \overline{1,m}$ (3.4)

2) $x_j \ge 0$ и x_j – целые для всех $j = \overline{1,n}$.

Можно выделить следующие основные классы задач дискретного программирования.

1. *Транспортная задача и ее варианты*: требуется обосновать план перевозки грузов от поставщиков до потребителей с целью минимизации транспортных затрат. При этом оптимальный объем груза x_{ij} перевозимого от поставщиков вида i к потребителю вида j есть число целое ($x_{ij} \ge 0, x_{ij}$ – целые числа).

К этому классу задач можно отнести и задачу о назначениях. Требуется так распределить работников по работам, чтобы общая их выработка была наибольшей.

Введем переменные задачи:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если работник вида } i \text{ выполняет работу вида } j; \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Переменные, принимающие только два значения – 0 или 1, называются булевыми переменными.

Математическая запись задачи:

$$F_{\max} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} .$$

При ограничениях

по закреплению работ за работниками:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n}$$

по выполнению работ работниками:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = \overline{1,n} ,$$

где c_{ij} – доход при выполнении работником вида i работы вида j.

2. *Задачи с неделимостями*. Классическим примером задач данного класса является задача о ранце, суть которой состоит в следующем: школьник, собираясь в школу, складывает ранец, вес которого не должен превышать A_i килограмм. В ранец можно положить n предметов, каждый из которых весит a_{ij} килограмм и характеризуется полезностью p_j. Требуется выбрать так предметы, чтобы их общий вес не

превышать максимально допустимый (A_i) и суммарная полезность содержимого ранца была максимальной.

Обозначим через x_j неизвестные параметры задачи, при этом

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{если } j \text{ - ый предмет помещают в ранец } (j = \overline{1,n}) \\ 0 \text{ - в противном случае.} \end{cases}$$

Математическая формулировка задачи имеет вид:

$$F_{\max} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \ .$$

При условиях:

1) по предельному весу ранца:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq A_i, i = \overline{1,m}$$

2) по неотрицательности и целочисленности переменных:

$$x_j \geq 0; x_j \in \{0;1\}, j = \overline{1,n} \ .$$

3) *Комбинаторные задачи*. Классическим представителем комбинаторных задач является задача о коммивояжере. Торговый агент должен выехать из определенного города и вернуться в него, побывав в каждом городе один раз и при этом проехав минимальное расстояние.

Введем переменные задачи:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если в маршрут входит переезд из города } i \text{ в город } j; \\ 0 \text{ - в противном случае } (i, j = \overline{1,n}; i \neq j) \end{cases}$$

Математическая запись задачи:

$$F_{\min} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \ .$$

При условиях:

1) по въезду в город:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n}$$

2) по выезду из города:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = \overline{1,n} \ .$$

К приведенным ограничениям добавляют условия на недопустимость подциклов (повторного посещения городов, за исключением исходного):

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1, i = \overline{2,n}; \ j = \overline{1,n} \ (i \neq j) \ ,$$

где x_{ij} – решение коммивояжера о переезде из города i в город j;

c_{ij} – расстояние между городами i и j.

4) *Задачи с разрывными целевыми функциями*. Экономические системы характеризуются наличием постоянных затрат, величина которых не зависит от объема производства продукции. Учет такого факта в модели приводит к появлению целевых функций, не обладающих свойством непрерывности. В качестве примера рассмотрим транспортную задачу с фиксированными доплатами. Она отличается от транспортной задачи, рассмотренной в вопросе 2 тем, что в ней затраты по перевозке груза от поставщика i к потребителю вида j определяются следующим образом:

$$\bar{c}_{ij}x_{ij} = \begin{cases} c_{ij}x_{ij} + d_{ij}, \text{если } x_{ij} > 0, \\ 0, \text{если } x_{ij} = 0, \end{cases},$$

где c_{ij} – издержки на перевозку груза от поставщика вида i к потребителю вида j;

d_{ij} – фиксированная доплата за аренду транспорта при перевозке груза от поставщика вида i к потребителю вида j.

Целевая функция суммарных транспортных затрат имеет вида:

$$F_{\min} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\bar{c}_{ij}x_{ij}$$

и изменяется скачкообразно, что затрудняет нахождение ее минимума.

Для решения такой задачи вводят вспомогательные переменные y_{ij}, которые принимают два значения – 0 и 1:

$$y_{ij} = 0 \vee y_{ij} = 1,$$

тогда $x_{ij} \le (\min\{a_i, b_j\})y_{ij}$

и целевая функция имеет вид:

$$F_{\min} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}x_{ij} + d_{ij}y_{ij}).$$

Данная задача является задачей частично-целочисленного программирования.

Для решения задач линейного целочисленного программирования может использоваться симплексный метод, с помощью которого получают оптимальное решение задачи. Если значения переменных задачи получены нецелочисленными, их округляют до ближайших целых чисел. Этот метод применяется только тогда, когда отдельная единица совокупности составляет относительно малую часть объема совокупности. В противном случае округление может привести к неоптимальному решению задачи (рис. 3.5).

Допустим, точка C является точкой оптимума обычной задачи линейного программирования. При округлении ее координат до целых значений получаются точки M или N, не принадлежащие области допустимых решений задачи.

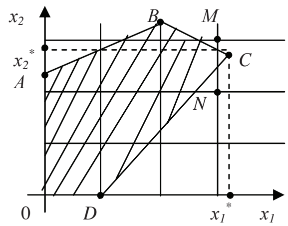


Рис. 3.5. Графическое решение задачи дискретного программирования

Поэтому для решения линейных задач целочисленного программирования используются следующие методы:

1. методы отсечения;
2. комбинаторные методы;
3. приближенные методы.

Сущность методов отсечения состоит в том, что сначала задача решается симплексным методом без условия целочисленности. Если полученные значения переменных не является целочисленными, то к ограничениям задачи добавляется новое ограничение, обладающее следующими свойствами: – оно должно быть линейным; – отсекать найденное оптимальное нецелочисленное решение задачи; – не затрагивать ни одного целочисленного решения.

Геометрическая иллюстрация этого метода показана на рис. 3.6, на котором нанесена целочисленная решетка.

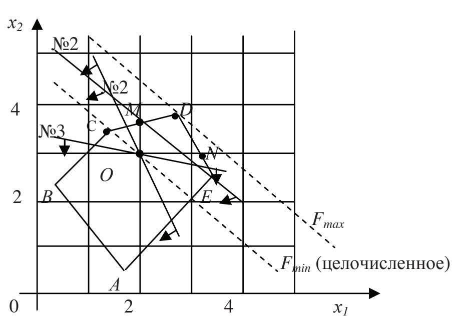


Рис. 3.6. Графическое решение задачи дискретного программирования методом отсечения

На рисунке видно, что максимальное значение функции в многоугольнике *ABCDE* достигается в нецелочисленной точке *D*. После построения первого дополнительного ограничения, целевая функция достигает максимальное значение в нецелочисленной точке *N*. Включение в задачу второго дополнительного ограничения позволит получить нецелочисленную точку оптимума – точку *M*.

После включения в задачу третьего дополнительного ограничения найдено максимальное значение функции в целочисленной точке *O* с координатами (2, 2).

Алгоритм Р. Гомери позволяет за конечное число шагов (итераций) прийти к оптимальному целочисленному решению, если оно существует. Главное – сформировать дополнительное ограничение, называемое правильным отсечением.

Допустим, симплексным методом без условия целочисленности решим задачу (3.4).

Система ее ограничений, после получения оптимального решения будет иметь вид:

$$x_i = A_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, i = \overline{1,m} \tag{3.5}$$

где x_i – базисная переменная, стоящая в *i*-ой строке, последней симплексной таблицы;

x_j – небазисная переменная, стоящая в *j*-м столбце, последней симплексной таблицы;

a_{ij} – коэффициент пропорциональности, стоящий в *i*-ой строке *j*-го столбца последней симплексной таблицы;

A_i – свободные члены, стоящие в *i*-ой строке последней симплексной таблицы.

Предположим, что некоторые A_i и a_i – нецелые числа. Обозначим наибольшую часть чисел A_i и a_{ij} их не превосходящую, через $[A_i]$ и $[a_{ij}]$, а дробную положительную часть – через $\{A_i\}$ и $\{a_{ij}\}$. При этом:

$$\begin{aligned} A_i &= [A_i] + \{A_i\} \\ a_{ij} &= [a_{ij}] + \{a_{ij}\} \end{aligned} \tag{3.6}$$

и $0 < \{A_i\} < 1$; $\{A_i\} \geq 0$;

$0 < \{a_{ij}\} < 1$; $\{a_{ij}\} \geq 0$.

Подставим (3.6) в уравнение (3.5), получим:

$$x_i = ([A_i] - \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}] \cdot x_j) + (\{A_i\} - \sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} \cdot x_j). \tag{3.7}$$

Так как выражение $[A_i]-\sum_{j=1}^{n}[a_{ij}]\cdot x_j$ – есть целое число, то для того чтобы x_i было целым числом, необходимо, чтобы величина $\{A_i\}-\sum_{j=1}^{n}\{a_{ij}\}\cdot x_j$ тоже была целым числом. Предположим, что

$$\{A_i\}-\sum_{i=1}^{n}\{a_{ij}\}\cdot x_j<0\,, \tag{3.8}$$

зная, что $0\le\{A_i\}\le 1$; $0\le\{a_{ij}\}$ и $\{a_{ij}\}\ge 0$, $x_j\ge 0$, должно выполняться неравенство:

$$\{A_i\}-\sum_{i=1}^{n}\{a_{ij}\}\cdot x_j<1 \tag{3.9}$$

Но неравенства (3.8) и (3.9) противоречат требованиям целочисленности дробной части неравенства (3.7). Следовательно, для целочисленных решений должно выполняться условие, противоположное неравенству (3.8):

$$\{A_i\}-\sum_{j=1}^{n}\{a_{ij}\}\cdot x_j\le 0 \text{ или } \sum_{j=1}^{n}\{a_{ij}\}\cdot x_j\ge\{A_i\} \tag{3.10}$$

Соотношение (3.10) определяет правильное отсечение Гомори.

Таким образом, для решения задач целочисленного линейного программирования *методом Гомори* используется следующий алгоритм:

1. Решают искомую задачу (3.4) симплексным методом без учета условия целочисленности. Если все переменные задачи – целочисленные, то получено искомое решение. Если задача без условия целочисленности не имеет решения, то и целочисленная задача решения не имеет.
2. Если среди оптимальных значений переменных есть нецелые, то выбирают компоненту с наибольшей целой частью и по соответствующему уравнению системы формируют правильное отсечение.
3. В неравенство, формирующее правильное отсечение, вводят дополнительную переменную и, превращая его в равенство, включают его в систему ограничений задачи.
4. Полученную расширенную задачу решают симплексным методом до тех пор, начиная с пункта 2, пока значения базисных переменных не будут целочисленными.

Пример. Фермер имеет 680 тыс. у.д.е. для приобретения оборудования по очистке и сортировке зерна, которое предполагает разместить на площади не более 60 м^2. Фермер может заказать оборудование двух типов (табл. 3.9). При этом фермер может приобрести не более 8 единиц оборудования типа *В*.

Т а б л и ц а 3.9. **Характеристика оборудования по очистке и сортировке зерна**

Характеристики	Оборудование	
	типа *A*	типа *B*
Производительность за смену, т	4	3
Производственная площадь, м^2	5	3
Стоимость оборудования, тыс. у.д.е.	80	60

Требуется обосновать стратегию покупки оборудования по очистке и сортировке зерна с целью максимизации его производительности.

Решение. Введем неизвестные величины задачи:

x_1 и x_2 – соответственно количество единиц оборудования типа A и B.

Математическая модель имеет вид:

$$F_{\max} = 4x_1 + 3x_2 .$$

При условиях:

по использованию производственной площади:

$$5x_1 + 3x_2 \le 60$$

по стоимости оборудования:

$$80x_1 + 60x_2 \le 680$$

по количеству второго оборудования:

$$x_2 \le 8$$

по неотрицательности переменных:

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

по целочисленности переменных:

x_1, x_2 – целые числа.

Приведем задачу к каноническому виду, введя дополнительные переменные. Получим:

$$5x_1 + 3x_2 + y_1 = 60$$
$$80x_1 + 60x_2 y_2 = 680$$
$$x_2 + y_3 = 8$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$
$$F_{\max} = 4x_1 + 3x_2$$

Запишем задачу в первую симплексную таблицу (табл. 3.10).

Воспользуемся алгоритм симплексного метода, изложенном в вопросе 3 (приложение 8), получим табл. 3.11.

Во второй симплексной таблице получено оптимальное решение задачи, но значение переменной x_1 не является целым (x_1=8,5).

Т а б л и ц а 3.10. **Первая симплексная таблица задачи без учета целочисленности переменных**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		x_1	x_2
y_1	60	5	3
y_2	680	$\boxed{8}$	60
y_3	8	0	1
F_{max}	0	–4	–3

Т а б л и ц а 3.11. **Вторая симплексная таблица задачи без учета целочисленности переменных**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		y_2	x_2
y_1	17,5	–0,0625	–0,75
x_1	8,5	0,0125	0,75
y_3	8	0	1
F_{max}	34	0,05	0

Найдем дробную часть числа 8,5 (8,5–8=0,5), учитывая дробные части чисел 0,0125 и 0,75 (второй строки табл. 3.11) (0,0125–0=0,0125; 0,75–0=0,75), составляем дополнительное ограничение целочисленности для второй строки табл. 3.11:

$$0{,}0125y_2+0{,}75x_2\geq 0{,}5.$$

Ограничение отсечения преобразуем в равенство:

$$-0{,}0125y_2-0{,}75x_2+y_4=-0{,}5.$$

И добавим его во вторую симплексную табл. 3.11, получим табл. 3.12.

Т а б л и ц а 3.12. **Первая симплексная таблица задачи с учетом целочисленности переменной x_1**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		y_2	x_2
y_1	17,5	–0,0625	–0,75
x_1	8,5	0,125	0,75
y_3	8	0	1
y_4	–0,5	$\boxed{-0{,}0125}$	–0,75
F_{max}	34	0,05	0

Так как с дополнительным ограничением полученное решение недопустимое, то ищем опорное решение задачи, взяв за разрешающий коэффициент (–0,0125), находим новые коэффициенты симплексной таблицы (табл. 3.13).

В табл. 3.13 нет оптимального решения, ищем его, взяв за разрешающий коэффициент 60 (табл. 3.14).

В табл. 3.14 получено оптимальное решение, но базисная переменная x_2=0,667 не является целой.

В табл. 3.14 вводим ограничение отсечения, сформированное по коэффициентам четвертой строки.

Найдем дробные части чисел: 0,667; –1,333; 0,0167, получим:

$$0{,}667-0=0{,}667;$$
$$-1{,}333+2=0{,}667;$$
$$0{,}0167-0=0{,}0167.$$

Таблица 3.13. **Вторя симплексная таблица задачи с учетом целочисленности переменной x_1**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		y_4	x_2
y_1	17,25	–5	3
x_1	8	1	0
y_3	8	0	1
y_2	40	–80	$\boxed{60}$ ←
F_{max}	32	4	–3 ↑

Таблица 3.14. **Третья симплексная таблица задачи с учетом целочисленности переменной x_1**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		y_4	y_2
y_1	15,25	–1	–0,05
x_1	8	1	0
y_3	7,333	1,333	–0,0167
x_2	0,667	–1,333	0,0167
F_{max}	34	0	0,05

Сформируем дополнительное ограничение целочисленности для четвертой строки табл. 3.14:

$$0{,}667y_4+0{,}0167y_2\geq 0{,}667,$$

представим его в канонической форме:

$$-0{,}667y_4-0{,}0167y_2+y_5=-0{,}667 \text{ и}$$

внесем его в табл. 3.14, получим табл. 3.15.

Т а б л и ц а 3.15. **Первая симплексная таблица задачи с учетом целочисленности переменной x_2**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		y_4	y_2
y_1	15,25	–1	–0,05
x_1	8	1	0
y_3	7,333	1,333	–0,0167
x_2	0,667	–1,333	0,0167
y_5	–0,667	$\boxed{-0{,}667}$	–0,0167
F_{max}	34	0	0,05

В табл. 3.15 нет опорного решения, найдем его (табл. 3.16).

Т а б л и ц а 3.16. **Вторая симплексная таблица задачи с учетом целочисленности переменной x_2**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		y_5	y_2
y_1	16,25	–1,499	0,025
x_1	7	1,499	–0,025
y_3	6	1,999	–0,050
x_2	2	–1,999	0,050
y_4	1	–1,499	0,025
F_{max}	34	0	0,05

В табл. 3.16 получено целочисленное значение переменных:

$$x_1=7;$$
$$x_2=2;$$
$$F_{max}=34 \text{ т.}$$

Одним из комбинированных методов является метод ветвей и границ. Впервые этот метод для решения целочисленных задач линейного программирования предложили в 1960г. Лэнг и Дойг, далее в 1963 г. он был применен в работах Литтла, Мурти, Суини и Кэрел для решения задачи о коммивояжере.

Суть метода состоит в упорядоченном переборе вариантов и рассмотрении только перспективных, отбрасывая бесперспективные варианты.

Алгоритм метода ветвей и границ:

1. Решаем искомую задачу (3.4) симплексным методом без учета условия целочисленности.

2. Если в полученном симплексном решении некоторые переменные имеют дробные значения, то выбираем любую из них и по ней строим два ограничения.

3. В одном ограничении величина переменной меньше или равна наибольшему целому числу, не превышающему значения дробной переменной в оптимальном решении, в другом ограничении она больше или равна наименьшему целому значению, но не меньше значение дробной переменной (например: x_1=3,5, первое ограничение будет $x_1 \leq 3$, а второе $x_1 \geq 4$, что исключает промежуток с дробным значением x_1).

4. В каждую из искомых задач добавляем по выше изложенному ограничению, в результате получаем две задачи (подзадачи) линейного программирования и решаем их.

5. Если снова получены оптимальные решения с дробным значением переменной, то, сравнив значения целевых функций задач, выбираем задачу с большим значением целевой функции и с пункта 2 продолжаем до тех пор пока не получим целочисленные значения переменных.

В результате получим ветви (рис. 3.7).

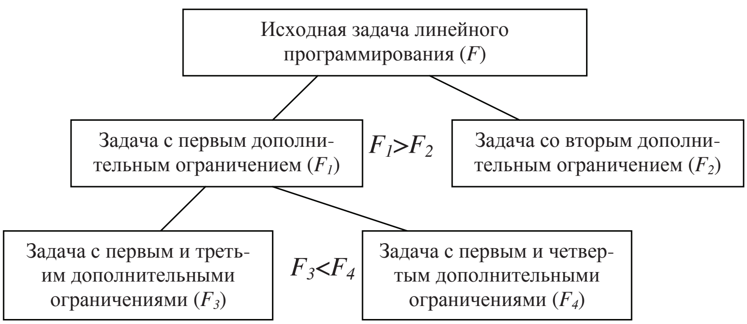


Рис. 3.7. Алгоритм решения целочисленной задачи линейного программирования методом ветвей и границ

Иллюстрация метода ветвей и границ выполнена на условном примере (приложение К).

Решение линейной задачи целочисленного программирования можно найти средствами Excel.

Пример. Необходимо обосновать размеры отраслей фермерского хозяйства, т.е. определить оптимальную площадь посева зерновых культур, картофеля, многолетних трав на сено и поголовье коров, обеспечивающих получение максимального маржинального дохода.

Исходная информация:

1. Ресурсы фермерского хозяйства составляют: площадь пашни – 40 га, запасы годового труда – 1400 чел.-дней, запасы кормов – 1000 ц к.ед.

2. Расход ресурсов на единицу отрасли приведен в табл. 3.17

Т а б л и ц а 3.17. **Расход ресурсов и выход продукции на единицу отрасли**

Показатели	Отрасли			
	Зерно-вые	Карто-фель	Многолетние травы на сено	Коровы
Годовой труд, чел.-дн.	8	25	5	20
Потребность в кормах, ц к. ед.	–	–	–	50
Выход кормов с 1 га, ц к. ед.	10	8	15	–
Переменные издержки, у.д.е.	600	3500	200	1300
Выход товарной продукции, ц	30	250	–	40

3. Фермерское хозяйство заключило договора на поставку продукции в следующих объемах, ц: зерно – 500; картофель – 4000; молоко – 800.

4. Цены реализации, у.д.е./ц: зерно – 30; картофель – 20; молоко – 60.

5. Имеется помещение для содержания 30 коров.

Для составления экономико-математической модели вводим переменные: x_1 – площадь посева зерновых культур, га; x_2 – площадь посева картофеля, га; x_3 – площадь посева многолетних трав на сено, га; x_4 – поголовье коров, гол.

Цель решения задачи:

$$F_{max}=30\cdot 30x_1+250\cdot 20x_2+40\cdot 60x_3-600x_1-3500x_2-200x_3-1300x_4.$$

При условиях:

1) по использованию пашни, га

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 40;$$

2) по использованию трудовых ресурсов, чел.-дн.

$$8x_1 + 25x_2 + 5x_3 + 20x_4 \le 1400;$$

3) по балансу кормов, ц к. ед.

$$50x_4 \le 10x_1 +8x_2 +20x_3 +1000;$$

4) по реализации зерна, ц

$$30x_1 \ge 500;$$

5) по реализации картофеля, ц

$$250x_2 \ge 4000;$$

6. по реализации молока, ц

$$40x_4 \ge 800;$$

7) по поголовью коров, чел.

$$x_4 \leq 30.$$

Для решения задачи на компьютере информацию задачи можно представить на рабочем листе Excel в следующем виде:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Расчет оптимальных размеров отраслей						
2	Показатели	Зерновые	Картофель	Многолетние травы на сено	Коровы	Итого	Имеется
3	Площадь, га	0	0	0		=СУММ(B3:D3)	40
4	Поголовье, гол.				0		
5	Затраты труда, чел.-дн.	=8*B3	=25*C3	=5*D3	=20*E4	=СУММ(B5:E5)	1400
6	Выход кормов, ц к.ед.	=10*B3	=8*C3	=20*D3		=СУММ(B6:D6)	=F6+1000
7	Потребность в кормах, ц к.ед.				=50*E4	=E7	
8	Реализация зерна, ц	=30*B3				=B8	
9	Реализация картофеля, ц		=250*C3			=C9	
10	Реализация молока, ц				=40*E4	=E10	
11	Переменные издержки, у.д.е.	=600*B3	=3500*C3	=200*D3	=1300*E4	=СУММ(B11:E11)	
12	Выручка от реализации, у.д.е.	=30*B8	=20*C9		=60*E10	=B12+C12+E12	
13	Маржинальный доход, у.д.е.					=F12-F11	

Изначально, ячейки, значение которых необходимо найти (изменяемые ячейки), должны быть равны нулю. После этого необходимо установив табличный курсор в целевую ячейку, которая должна принимать максимальное, минимальное либо конкретное значение. В рассматриваемом случае это ячейка F13 (маржинальный доход), выполнить команду «Сервис → Поиск решения…». Появится диалоговое окно «Поиск решения» (приложение J).

В поле «Изменяя ячейки» указывают ячейки или диапазоны ячеек, значения которых необходимо найти (в рассматриваемом случае B3, C3, D3 и E4). Если ячеек либо диапазонов ячеек несколько, они указываются через точку с запятой.

Для учета ограничений, которые накладываются на условия задачи, используют диалоговое окно «Добавление ограничения», щелкнув по кнопке «Добавить». Командой «Добавить» вводим условия целочисленности переменных величин. Для этого в диалоговом окне «Добавление ограничения» вводим в окно «Ссылка на ячейку» адреса ячеек B3:D3; E4. Далее курсор переводим в среднее окно, в котором находятся виды ограничений и требования (целое и двоичное) и устанавливаем курсор на требование «Целое».

В нашем случае необходимо учесть следующие ограничения:

Ограничение	Описание
B3:D3 $\geq$ 0	Площадь посева не может принимать отрицательные значения
F3 $\leq$ G3	Общая площадь посева культур не должна превышать площадь имеющихся пахотных земель
F5 $\leq$ G5	Затраты труда на возделывание культур и содержание животных не могут превышать имеющиеся ресурсы труда

F8 ≥ 500 F9 ≥ 4000 F10 ≥ 800	Фермерское хозяйство должно произвести продукции каждого вида не менее объемов, на которые были заключены договора
E4 ≥ 0	Поголовье коров не может принимать отрицательные значения
F7 ≤ G6	Потребность в кормах отрасли животноводства не должна превышать выхода этих кормов с отрасли растениеводства
E4 ≤ 30	Поголовье коров не может превышать имеющиеся ското-места
B3:D3; E4	Площадь посева сельскохозяйственных культур и поголовье коров характеризуются целыми числами

После ввода последнего ограничения, щелкнув на кнопке «ОК», получим диалоговое окно «Поиск решения» следующего вида (рис. 3.8).

Щелкнув по кнопке «Выполнить», получим оптимальное решение целочисленной задачи линейного программирования (табл. 3.18).

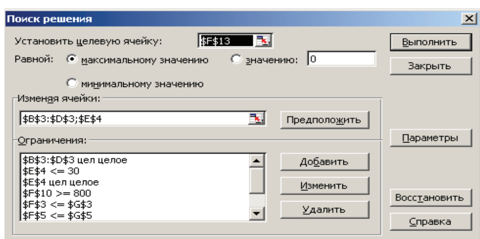


Рис. 3.8. Диалоговое окно «Поиск решения»

В табл. 3.18 видны значения неизвестных величин задачи:

$$x_1=17;\ x_2=23;\ x_3=0;\ x_4=27,\ F_{max}=69300 \text{ у.д.е.}$$

Т а б л и ц а 3.18. **Результаты решения целочисленной задачи линейного программирования**

Показатели	Зерновые	Картофель	Многолетние травы на сено	Коровы	Итого	Имеется
1	2	3	4	5	6	7
Площадь, га	17	23	0		40	40
Поголовье, гол.				27		
Затраты труда, чел.-дн.	136	575	0	540	1251	1400
Выход кормов, ц к.ед.	170	184	0		354	1354
Потребность в кормах, ц к.ед.				1350	1350	
Реализация зерна, ц	510				510	

Окончание табл. 3.18

1	2	3	4	5	6	7
Реализация картофеля, ц		5750			5750	
Реализация молока, ц				1080	1080	
Переменные издержки, у.д.е.	10200	80500	0	35100	125800	
Выручка от реализации, у.д.е.	15300	115000		64800	195100	
Маржинальный доход, у.д.е.					69300	

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение экономико-математической линейной модели.
2. Охарактеризуйте группы исходной информации экономико-математической модели.
3. Приведите разные формы записи задачи линейного программирования в общем виде.
4. Сформулируйте теоремы, характеризующие основные свойства задач линейного программирования.
5. Дайте понятие матрицы и определителя экономико-математической модели.
6. Приведите классификацию матриц экономико-математических моделей.
7. Какая матрица используется при определении неизвестных величин экономико-математической задачи?
8. Перечислите свойства определителей.
9. Дайте понятие линейно-зависимых и линейно-независимых векторов.
10. Приведите алгоритм геометрического решения экономико-математической линейной модели в двухмерном пространстве.
11. Перечислите разные случаи решения задач линейного программирования в двухмерном пространстве.
12. Приведите алгоритм решения задач линейного программирования симплексным методом.
13. Перечислите правила расчета коэффициентов новой симплексной таблицы.
14. Дайте определение опорного (допустимого) и оптимального решения задачи линейного программирования симплексным методом.

15. Приведите примеры базовых моделей линейного программирования, применяемых при планировании производства и макроэкономики.

16. Дайте понятие двойственных экономико-математических оценок.

17. Приведите методику составления двойственной экономико-математической задачи.

18. Перечислите характеристики и свойства двойственных экономико-математических оценок.

19. Охарактеризуйте сущность первой и второй теорем двойственности.

20. Приведите структурные модели двойственных задач линейного программирования.

21. Дайте понятие устойчивости оптимального плана экономико-математической задачи.

22. Приведите допустимый интервал устойчивости оценок, нижний и верхний пределы уменьшения или увеличения ресурса.

23. Дайте понятие иерархической системы.

24. Перечислите подходы к декомпозиции системы.

25. Охарактеризуйте алгоритм прямой и двойственной декомпозиции.

26. Перечислите особенности задач дискретного программирования.

27. Дайте классификацию целочисленных линейных моделей.

28. Перечислите методы решения задач дискретного программирования.

29. Охарактеризуйте алгоритм решения целочисленных линейных моделей методом отсечения.

30. Приведите алгоритм решения задач дискретного программирования методом ветвей и границ.

4. СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ

4.1. Экстремальные задачи на графах

На практике существует ряд проектов, выполнение работ которых характеризуется неупорядоченными между ними связями. На микроэкономическом уровне можно выделить такие проекты, как: внедрение нового вида товара на рынок сбыта, организация пробных продаж, подготовка и проведение сбытовых организаций и рекламных компаний, реализация инвестиционных проектов, мероприятий по реконструкции и модернизации производства, посевная компания, уход за сельскохозяйственными посевами, заготовка кормов, комплекс строительных работ и т.д.

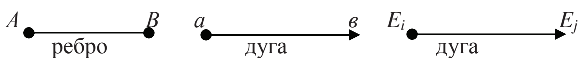
Для схематического представления зависимостей между различными работами проекта используется теория графов.

Основы теории графов были заложены Л. Эйлером в 1736 г. (приложение L). Теория графов как математическая дисциплина сформировалась к середине 30-х годов прошлого века благодаря работам венгерского математика Д. Кенига.

Графом называется совокупность двух конечных множеств: множества точек, которые называются вершинами, и множества соединенных пар вершин, которые называются ребрами.

Вершины обозначаются буквами русского или латинского алфавита (A, B...) или (a, $в$...), нумеруются арабскими числами (1, 2...), или буквами E с индексами ($E_1, E_2, \dots, E_m$).

Пары точек, для которых установлено соответствие, соединяются непрерывной линией, которая называется *ребром*, если направление линии не указано, или *дугой* – если ее направление указано стрелкой:



Оба конца ребра или дуги принадлежат множеству вершин графа.

Ребра или дуги обозначаются парами вершин (A, B); (1 ,3); (a, $в$); $(E_i, E_j) = \vec{e}$. Если множество вершин обозначить через X или E, множество дуг (ребер) графа через U или $\vec{e}$, то граф обозначается символом $G = (X, U)$ или $G = (E, \vec{e})$.

Если пары вершин графа соединены направленными линиями (т.е. дугами), то такой граф называется ориентированным или *орграфом*. Любые две вершины графа, соединенные ребром или дугой, называются *смежными*. В этом случае говорят, что вершины инцидентны ребру (дуге), а ребро (дуга) инцидентно вершинам. Если начало и конец ребра совпадают, то получается *петля* (рис. 4.1).

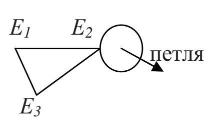


Рис. 4.1. Граф с петлей

Граф называется *полный*, если каждые две различные вершины его соединены только одним ребром (рис. 4.2).

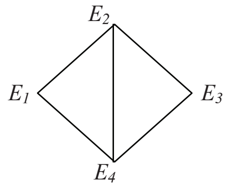


Рис. 4.2. Полный граф

Граф, состоящий только из изолированных вершин, называется *нуль-граф*. Граф, у которого любые две вершины соединены в одном направлении называется *полным ориентированным графом*.

Число ребер графа, которым принадлежит (инцидентна) вершина называется *степенью вершины*. Степень вершины X_i (или E_i) может быть четной или нечетной, она обозначается $\rho(X_i)$ или $\rho(E_i)$. В орграфе *степень вершины* X_i (или E_i) определяется количеством дуг, выходящих из вершины X_i (или E_i), и количеством дуг, входящих в X_i (или в E_i).

Путем в орграфе называется последовательность сцепленных дуг, позволяющих переместиться из одной вершины в другую. Путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной, называется контуром или *циклом* в неориентированном графе (рис. 4.3).

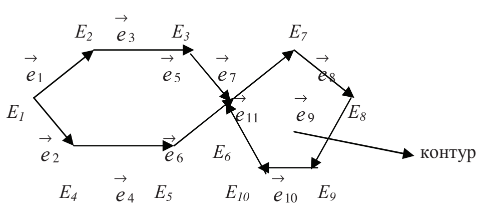


Рис. 4.3. Граф с контуром

Аналогом пути в неориентированном графе служит *цепь*. *Граф* называется *связным*, если для каждой пары вершин существует соединяющая их цепь или путь.

Длина пути определяется числом его ребер или дуг. *Петля* – это путь имеющий длину равную единице.

Если граф не имеет циклов, то он называется *деревом* (рис. 4.4).

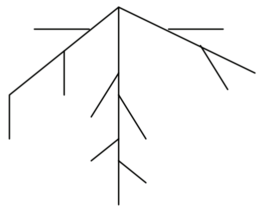


Рис. 4.4. Дерево

Для каждой пары вершин дерева существует только один соединяющий их путь. *Вершина* дерева степень которой равно единице, называется *висячей*, а *ветвями дерева* называются ребра графа, входящие в дерево.

Изображают графы на плоскости произвольно и один и тот же граф может выглядеть на плоскости по-разному (рис. 4.5).

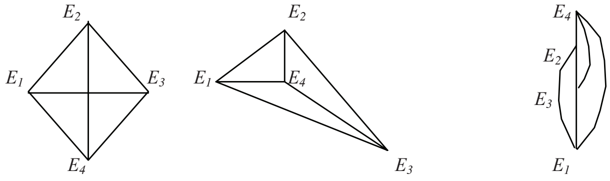


Рис. 4.5. Изоморфные графы

Эти графы изоморфны, так как между множествами их вершин наблюдается взаимно однозначное соответствие, т.е. вершины одного графа соединены ребрами также как и соответствующие им вершины другого графа.

Аналитически граф можно задать двумя способами: списковым и матричным.

Списковый способ используют в виде:

1) перечня списка вершин и множество ребер или дуг (например, табл. 4.1);

2) перечня списка ребер или дуг и информации о их следовании (табл. 4.2; 4.3).

Граф можно задать в виде:

1) матрицы смежности вершин;

2) матрицы смежности дуг (ребер) (приложение M);

3) матрицы инциденций (приложение N).

Т а б л и ц а 4.1. **Перечень дуг**

Дуга (работа (i, j))	Продолжительность, дней
1, 2	3
1, 3	5
2, 3	4
2, 4	2
2, 5	6
3, 4	3
4, 5	2
4, 6	1
5, 6	7

Т а б л и ц а 4.2. **Перечень дуг и информация об их следовании**

Дуга орграфа	Опирается на дуги
$\vec{e}_1$	–
$\vec{e}_2$	–
$\vec{e}_3$	–
$\vec{e}_4$	$\vec{e}_1$
$\vec{e}_5$	$\vec{e}_1$
$\vec{e}_6$	$\vec{e}_2$, $\vec{e}_4$
$\vec{e}_7$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_8$	$\vec{e}_6$, $\vec{e}_7$
$\vec{e}_9$	$\vec{e}_5$, $\vec{e}_8$
$\vec{e}_{10}$	$\vec{e}_6$, $\vec{e}_7$

Т а б л и ц а 4.3. **Список работ проекта**

Дуги	(i, j)	Наименование работ	Опирается на дуги	Продолжительность, час
1	2	3	4	5
$\vec{e}_1$	(1,2)	Отбор образцов товара для выставки	–	2
$\vec{e}_2$	(2,6)	Изготовление буклетов и других рекламных материалов	$\vec{e}_1$	28
$\vec{e}_3$	(2,5)	Изготовление стендов для установки образцов товаров в демонстрационном зале	$\vec{e}_1$	34
$\vec{e}_4$	(2,3)	Доставка в зал выставки образцов товаров	$\vec{e}_1$	4
$\vec{e}_5$	(3,4)	Доставка в зал выставки стендов	$\vec{e}_1$	6

Окончание табл. 4.3

1	2	3	4	5
$\vec{e}_6$	(4,5)	Монтаж стендов	$\vec{e}_5$	5
$\vec{e}_7$	(5,6)	Установка образцов товаров на стендах	$\vec{e}_3$, $\vec{e}_6$	3
$\vec{e}_8$	(6,7)	Оформление зала и стендов рекламными материалами	$\vec{e}_2$, $\vec{e}_7$	2
$\vec{e}_9$	(7,8)	Репетиция открытия выставки	$\vec{e}_8$	1

Для практического использования теории графов важную роль играет задача: разбить множество всех вершин связного графа без контуров на слои (ранги) так, что:

1) элементы первого слоя не должны иметь предшествующих вершин, а элементы последнего слоя не должны иметь последующих вершин;

2) все вершины рассматриваемого слоя не должны иметь предыдущих вершин в последующем слое;

3) порядок вершин внутри одного и того же слоя безразличен, т.е. вершины не соединяются между собой дугами.

Существует несколько способов упорядочения вершин (и дуг) графа.

Суть *графического способа* упорядочения вершин графа состоит в последовательном нахождении вершин, степень входящих дуг которых равна нулю: $\rho^{+}(E)=0$. Вершины, для которых $\rho^{+}(E)=0$, отбрасываются и вычеркивают выходящие из них дуги. Находят вершины, в которые входят вычеркнутые дуги, они составляют второй ранг. Вычеркивают выходящие из них дуги и т.д. Процесс продолжают до тех пор, пока не доберутся до конечной вершины.

Таким образом, мы двигаемся слева направо. Можно двигаться и справа налево. Тогда находят вершины, для которых степень выходящих дуг равна нулю: $\rho^{-}(E)=0$, с последующим вычеркиванием входящих в них дуг и т.д. Результат будет тот же. Например, для графа, изображенного на рис. 4.6 проведем упорядочение его по слоям (рангам).

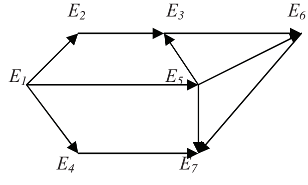


Рис. 4.6. Связанный граф

Найдем вершины, степень входящих дуг, которых равно нулю, т.е. $\rho^{+}(E)=0$. Это вершина E_1. Отбросим ее и вычеркнем выходящие из нее дуги, а вершину E_1 отнесем к первому рангу. Без входящих дуг остались вершины E_2, E_5, E_4. Отнесем их ко второму рангу и вычеркнем выходящие из них дуги. Без входящих дуг остались вершины E_3, E_6, E_7, которые отнесем к третьему рангу.

Изобразим упорядоченный по рангам граф (рис. 4.7).

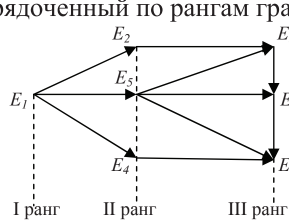


Рис 4.7. Упорядоченный по рангам граф

Более достоверно можно упорядочить вершины графа с помощью матрицы смежности (вершин). Данный прием получил название метода Демукрона (приложение О).

Для упорядочения дуг графика можно воспользоваться матрицей смежности дуг.

4.2. Задача о минимальных покрывающих деревьях

Покрывающее дерево – это дерево, содержащее все вершины (узлы) сети (рис. 4.8).

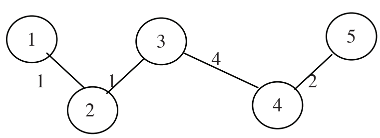


Рис. 4.8. Покрывающее дерево для сети, изображенной на рис. 4.9

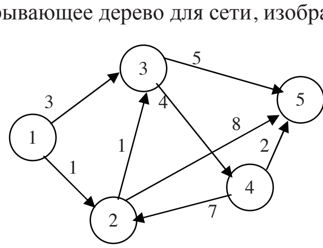


Рис. 4.9. Пример сети

Алгоритм построения минимального покрывающего дерева предполагает соединение всех вершин сети с помощью путей наименьшей длины. На практике данный алгоритм наиболее часто применяется для проектирования сети дорог с твердым покрытием, соединяющих населенные пункты в сельской местности с целью минимизации общей длины дорог с твердым покрытием.

Пусть сеть имеет множество вершин равное N. Через E_k – обозначим множество вершин сети, соединенных алгоритмом после выполнения k-ой итерации алгоритма, а через $\overline{E}_k$ – множество вершин сети, не соединенных с узлами множества E_k после выполнения k-ой итерации алгоритма.

Алгоритм построения покрывающего дерева.

1. Из множества всех вершин сети выбираем любую вершину i и считаем $E_1 = \{i\}$, тогда $\overline{E}_1 = N - \{i\}$.

2. В множестве вершин E_1 выбираем вершину j, которая соединена самой короткой дугой (ребром) с какой-либо вершиной из множества $\overline{E}_1$. Вершину j присоединяем к множеству E_1 и удаляем из множества $\overline{E}_1$, получим новые множества вершин: $E_2 = E_1 + \{j\}$; $\overline{E}_2 = \overline{E}_1 - \{j\}$.

3. Алгоритм продолжаем выполнять с пункта 2 до тех пор пока множество $\overline{E}_k$ будет пусто.

Пример. Сельскохозяйственное предприятие планирует газифицировать шесть своих населенных пунктов. Структура планируемой газовой сети и расстояние между центральной усадьбой сельскохозяйственного предприятия и населенными пунктами приведены на рис. 4.10. Требуется спланировать наиболее экономичную газовую сеть.

Решение. Выбираем любую вершину. Допустим, выбрали вершину 1 (центральную усадьбу сельскохозяйственного предприятия). Тогда $E_1 = \{1\}$, а $\overline{E}_1 = \{2,3,4,5,6\}$.

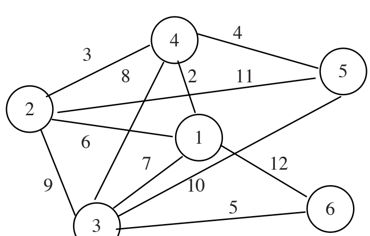


Рис. 4.10. Газовая сеть сельскохозяйственного предприятия

Вершина 1 соединена ребрами с вершинами 2, 3, 4 и 6, принадлежащим множеству $\overline{E}_1$, среди которых ищем ребро с минимальной длиной. На первой итерации ребро (1,4) имеет наименьшую длину (т.е. наименьшее расстояние между центром предприятия и населенным пунктом). Данное ребро выделяем жирной сплошной линией (рис. 4.11). Вершину 4 добавляем в множество E_1 и отнимаем из множества $\overline{E}_1$, получим новые множества вершин $E_2 = \{1,4\}$ и $\overline{E}_2 = \{2,3,5,6\}$.

На второй итерации ищем наименьшее расстояние между вершинами множеств E_2 и $\overline{E}_2$. Ребро (4,2) имеет минимальную длину, равную 3. Вершину 2 добавляем в множество E_2 и отнимаем из множества вершин $\overline{E}_2$, получим $E_3 = \{1,4,2\}$ и $\overline{E}_3 = \{3,5,6\}$. На третьей итерации ищем наименьшее расстояние между вершинами $\{1,4,2\}$ и $\{3,5,6\}$. Это ребро (4,5), оно имеет наименьшую длину, равную 4. Получаем новые множества вершин $E_4 = \{1,4,2,5\}$ и $\overline{E}_4 = \{3,6\}$. На четвертой итерации ищем наименьшую длину ребра между множеством вершин E_4 и $\overline{E}_4$. Данному требованию отвечает ребро (1,3) с длиной, равной 7. Вершину 3 прибавляем к множеству вершин E_4 и отнимаем из множества $\overline{E}_4$. Получим $E_5 = \{1,4,2,5,3\}$ и $\overline{E}_5 = \{6\}$. На пятой итерации находим ребро (3,6) с длиной, равной 5 (рис. 4.11).

Решение в виде минимального покрывающего дерева получено на пятой итерации (рис. 4.12). Минимальная длина газовой сети предприятия равна 2+3+4+7+5=21 км.

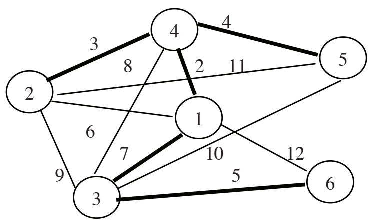


Рис. 4.11. Построение минимального покрывающего дерева

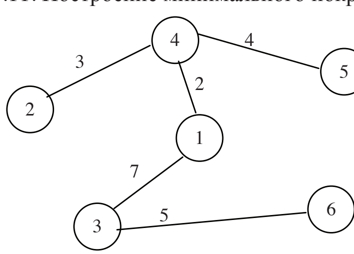


Рис. 4.12. Минимальное покрывающее дерево для сети (рис. 4.10)

4.3. Задача о кратчайших цепях

Задача состоит в определении кратчайшего маршрута, который необходимо проложить от исходного пункта до пункта назначения, используя существующую сеть дорог. Допустим, что движение из исходного пункта к пункту назначения возможно по различным маршрутам. Совокупность всех допустимых маршрутов представим в виде графа (рис. 4.13).

Над дугами приведены расстояния между населенными пунктами.

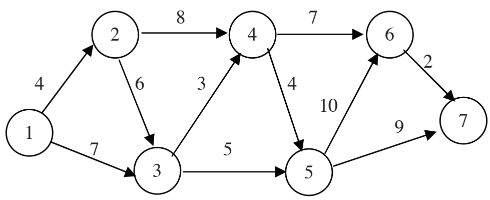


Рис. 4.13. Сеть дорог

Кратчайший путь можно найти, используя:

1) алгоритм Дейкстры,

2) алгоритм Флойда.

Алгоритм Дейкстры применим для поиска кратчайшего пути между заданной исходной вершиной и любой другой вершиной сети. В процессе определения кратчайшего пути по алгоритму Дейкстры помечают вершины сети. Метка для вершины j определяется следующим образом:

$$\lfloor u_j, i \rfloor = \lfloor u_i + t_{ij}, i \rfloor, \text{ при } t_{ij} \geq 0,$$

где i – номер начальной вершины дуги (ребра) (i, j);

j – номер конечной вершины дуги (ребра) (i, j);

u_j – расстояние к вершине j;

u_i – кратчайшее расстояние к вершине i;

t_{ij} – длина дуги (ребра) (i, j).

Метки вершин подразделяются на временные и постоянные. Временная метка может заменяться на другую временную метку, если к данной вершине найден более короткий путь. Если такого пути не найдено, то временная метка заменяется на постоянную.

Алгоритм Дейкстры состоит из следующих этапов.

1. Исходной вершине присваиваем постоянную метку [0, –].

2. Считаем, что i=1. Определяем временные метки для всех вершин j, которых можно достичь непосредственно из вершины i и которые не имеют постоянных меток:

$$\lfloor u_i + t_{ij}; i \rfloor .$$

3. Если вершина j имеет метку $\lfloor u_j, r \rfloor$, полученную от вершины r, то эту метку заменяют на метку $\lfloor u_i + t_{ij}; i \rfloor$, если $u_i + t_{ij} < u_j$.

4. Процесс пометок вершин продолжают до тех пор, пока все вершины не будут иметь постоянных меток.

5. Если какая-то вершина s имеет временные метки $[u_r, s]$, то среди них выбираем ту, которая имеет наименьшее значение расстояния u_r , и процедуру повторяем с п. 1.

6. Определяем кратчайшую цепь, проходя этот путь в обратном направлении, используя постоянные метки.

Пример. Допустим, вершине 1 присвоим постоянную метку [0, –] (1), пометив в круглых скобках номер шага (рис. 4.14).

Из вершины 1 можно попасть в вершины 2 и 3. Этим вершинам присвоим временные метки. Сравниваем расстояние между вершинами 1, 2 и 1, 3. Видим, что 4 < 7, следовательно, временную метку вершины 2 меняем на постоянную. Из последней вершины с постоянной меткой (вершины 2) можно попасть в вершины 3 и 4. Определим метки этих вершин. Они соответственно равны: [10,2] (2) и [12,2] (2), сравним расстояние между вершинами 2, 3 и 2, 4.

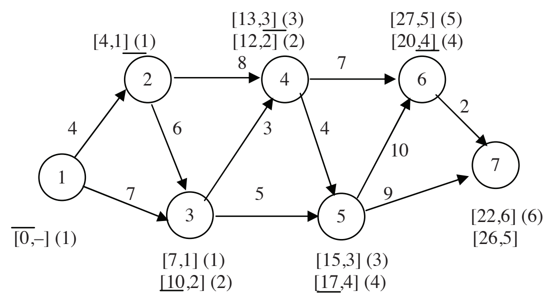


Рис. 4.14. Применение алгоритма Дейкстры

Так как 10 < 12, то вершина 3 получает постоянную метку. Из вершины 3 можно попасть в вершины 4 и 5. Их метки равны [13,3] (3) и [15,3] (3) соответственно. Вершина 4 получает постоянную метку, так как 13 < 15. Из вершины 4 можно передвинуться в вершины 5 и 6. Их временные метки равны [17,4] (4) и [20,4] (4). Так как 17 < 20, то временную метку вершины 5 заменяем на постоянную.

Из вершины 5 передвигаемся в вершину 6 и 7, которые получают метки [27,5] (5) и [26,5] (5) соответственно. Так как вершина 6 имеет только временную метку и 26 < 27, то вершина 7 получает временную метку [26,5] (5). Но из этой вершины нельзя попасть ни в какую другую, поэтому процесс вычислений заканчиваем. Но с временными метками остались вершины 6 и 7. Вершина 6 имеет две временные метки: [20,4] (4) и [27,5] (5). Из них выбираем ту, которая имеет наименьшее расстояние, т.е. метку [20,4] (4). Она получает статус постоянной метки, и вычисления повторяем сначала. Из вершины 6 можно попасть в вершину 7, которая получит временную метку: [22,6] (6). Для вершины 7 оставляем временную метку [22,6] (6), так как 22 < 26. Из вершины 7 нельзя передвинуться в другую вершину, поэтому процесс вычислений заканчиваем. С временной меткой остались только вершина 7.

Определим кратчайший маршрут между вершинами 1 и 7, пройдя этот путь в обратном направлении, используя постоянные метки.

$$(7) \rightarrow [22{,}6] \rightarrow (6) \rightarrow [20{,}4] \rightarrow (4) \rightarrow [13{,}3] \rightarrow (3) \rightarrow [10{,}2] \rightarrow (2) \rightarrow [4{,}1] \rightarrow (1).$$

Таким образом, получили найкратчайший маршрут 1 → 2 → 3 → 4→ 6 → 7 равный 22 км.

Алгоритм Флойда более общий, так как он позволяет одновременно найти минимальные пути между любыми двумя вершинами сети.

Пример. Необходимо найти кратчайшие пути между любыми двумя вершинами сети, заданной следующим сетевым графиком (рис. 4.15).

На сетевом графике под дугами или ребрами представлены расстояния между вершинами i и j (u_{ij}). Следует отметить, что дуга (3.5) предполагает движение только от вершины 3 к вершине 5, остальные ребра допускают движение в обе стороны.

Алгоритм Флойда представляет сетевой график в виде двух матриц: матрицы расстояний U_0 и матрицы последовательности вершин E_0, диагональные элементы в вычислениях не участвуют и отсутствуют.

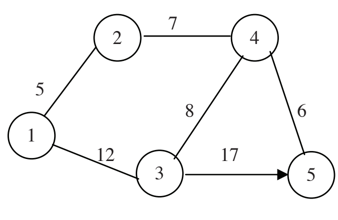


Рис. 4.15. Сетевой график

Над элементами матрицы расстояний выполняется процедура замены $U_{ik}+U_{kj}$ на U_{ij}, если $U_{ij} > U_{ik}+U_{kj}$ (рис. 4.16). Такая замена получила название *треугольного оператора*.

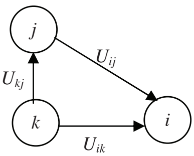


Рис. 4.16. Треугольный оператор Флойда

Для нашего примера построим матрицу расстояний U_0 и матрицу последовательности вершин E_0 (табл. 4.4 и 4.5).

Т а б л и ц а 4.4. **Матрица расстояний U_0**

U_0

E_i \ E_j	1	2	3	4	5
1	–	5	12	∞	∞
2	5	–	$\boxed{\infty}$	7	∞
3	12	$\boxed{\infty}$	–	8	17
4	∞	7	8	–	6
5	∞	∞	∞	6	–

Матрица последовательности вершин E_0 также, как и матрица расстояний U_0 не имеет элементов на главной диагонали.

Т а б л и ц а 4.5. **Матрица последовательности вершин E_0**

E_0

E_i \ E_j	1	2	3	4	5
1	–	2	3	4	5
2	1	–	$\boxed{3}$	4	5
3	1	$\boxed{2}$	–	4	5
4	1	2	3	–	5
5	1	2	3	4	–

При определении элементов матрицы расстояний учитываем следующее: если вершина i связана с вершиной j путем $i \rightarrow j$, то его расстояние U_{ij} заносим в таблицу, в противном случае такое расстояние принимаем равное бесконечности. Элементы матрицы U_0 симметричны относительно главной диагонали, за исключением пары элементов U_{35}=17 и $U_{53}=\infty$, так как событие 3 и 5 соединены дугой, а не ребром.

Алгоритм Флойда.

1. Принимаем k=1. В матрице расстояний U_0 задаем ведущую строку R и ведущий столбец k. При этом рассматриваем возможность применения треугольного оператора ко всем элементам U_{ij} матрицы U_0.

Принимаем за ведущие первую строку и первый столбец, рассчитываем какие элементы матрицы U_0 можно улучшить, применив треугольный оператор. Видим, что $U_{12} + U_{31} < U_{32}$, следовательно. улучшить можно элемент U_{32}. Также $U_{13} + U_{23} < U_{23}$, т.е. улучшить можно элемент U_{23}. Перебрав все другие варианты, видим, что при k=1 можно улучшить только элементы матрицы U_0.

2. Рассчитываем новые элементы U_{32} и U_{23} матрицы расстояний U_1, возьмем эти элементы и соответствующие элементы матрицы последовательности вершин E_0 путем замены в матрице расстояний элемента U_{ij} на сумму элементов $U_{ik} + U_{kj}$.

В нашем случае, элемент матрицы $U_{23}=\infty$ заменяется на $U_{21} + U_{13}$ = 5+12, а элемент матрицы $U_{32}=\infty$ заменяется на $U_{31} + U_{12} = 12$+5. Получим матрицу расстояний U_1 (табл. 4.6).

Т а б л и ц а 4.6. **Матрица расстояний U_1**

U_1

E_i \ E_j	1	2	3	4	5
1	–	5	12	$\boxed{\infty}$	∞
2	5	–	17	7	∞
3	12	17	–	8	17
4	$\boxed{\infty}$	7	8	–	6
5	∞	∞	∞	6	–

3. Определяем новые элементы матрицы последовательности вершин E_1, меняя в матрице последовательности вершин E_0, элемент e_{ij} на k. В нашем случае k=1 и элементы e_{32}=2 и e_{23}=3 меняем в матрице E_1 на единицы (табл. 4.7).

Т а б л и ц а 4.7. **Матрица последовательности вершин E_1**

E_1

E_i \ E_j	1	2	3	4	5
1	–	2	3	$\boxed{4}$	5
2	1	–	1	4	5
3	1	1	–	4	5
4	$\boxed{1}$	2	3	–	5
5	1	2	3	4	–

4. Принимаем k=k+1 и повторяем расчеты с пункта 1 до тех пор, пока ни один элемент матрицы расстояний улучшить нельзя.

В нашем примере, рассматриваем матрицу расстояний U_1. В качестве ведущих возьмем вторую строку и второй столбец. Получим, что $u_{31}+u_{42}<u_{41}$ и $u_{13}+u_{24}<u_{14}$. Выделим элементы соответствующих матриц. Полагая, что k=2, произведем замену элементов матрицы расстояний U_1 и матрицы последовательности вершин E_1, получим матрицы U_2 и E_2 (табл. 4.8 и 4.9).

Т а б л и ц а 4.8. **Матрицы расстояний U_2**

U_2

E_i \ E_j	1	2	3	4	5
1	–	5	12	12	$\boxed{\infty}$
2	5	–	17	7	$\boxed{\infty}$
3	12	17	–	8	17
4	12	7	8	–	6
5	∞	∞	∞	6	–

Т а б л и ц а 4.9. **Матрица последовательности вершин E_2**

E_2

E_i \ E_j	1	2	3	4	5
1	–	2	3	2	$\boxed{5}$
2	1	–	1	4	$\boxed{5}$
3	1	1	–	4	5
4	2	2	3	–	5
5	1	2	3	4	–

Полагая, что k=3, выбираем третью ведущую строку и третий ведущий столбец. Улучшаем элементы U_{15} и U_{25} матрицы расстояний U_2, получим матрицы U_3 и E_3 (табл. 4.10 и 4.11).

Т а б л и ц а 4.10. **Матрица расстояний U_3**

U_3

E_i \ E_j	1	2	3	4	5
1	–	5	12	12	$\boxed{29}$
2	5	–	$\boxed{17}$	7	$\boxed{34}$
3	12	$\boxed{17}$	–	8	$\boxed{17}$
4	12	7	8	–	6
5	$\boxed{\infty}$	$\boxed{\infty}$	$\boxed{\infty}$	6	–

При k=4, ведущими принимаем четвертую строку и четвертый столбец. Делаем расчеты и получаем матрицы U_4 и E_4 (табл. 4.12 и 4.13).

Т а б л и ц а 4.11. **Матрица последовательности вершин E_3**

E_2

E_i \ E_j	1	2	3	4	5
1	–	2	3	2	$\boxed{3}$
2	1	–	$\boxed{1}$	4	$\boxed{3}$
3	1	$\boxed{1}$	–	4	$\boxed{5}$
4	2	2	3	–	5
5	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	4	–

Т а б л и ц а 4.12. **Матрица расстояний U_4**

U_4

E_i \ E_j	1	2	3	4	5
1	–	5	12	12	18
2	5	–	15	7	13
3	12	15	–	8	14
4	12	7	8	–	6
5	18	13	14	6	–

Принимаем k=5, но в матрице нет элементов, которые можно улучшить, вычисления закончены. Матрицы U_4 и E_4 содержат информацию для определения кратчайших путей между любыми двумя вершинами сетевого графика.

Т а б л и ц а 4.13. **Матрица последовательности вершин E_4**

E_4

E_i \ E_j	1	2	3	4	5
1	–	2	3	2	4
2	1	–	4	4	4
3	1	4	–	4	4
4	2	2	3	–	5
5	4	4	4	4	–

5. Используя конечные матрицы расстояний и последовательности вершин можно найти кратчайшее расстояние как между двумя соседними вершинами, так и между исходной и завершающей вершиной сети. При этом сегмент маршрута (i, j) матрицы последовательности вершин состоит из ребра (i, j) только тогда, когда элемент матрицы e_{ij} равен j. в противном случае, вершины i и j связаны между собой через одну или более промежуточные вершины. В нашем случае, найдем кратчайший путь из вершины 1 в вершину 5. Так как элемент e_{15} матрицы E_4 равен 4, то вершины 1 и 5 связаны между собой через вершину 4. Определим промежуточную вершину между вершинами 1 и 4. Элемент e_{14} матрицы E_4 равен 2. Определим промежуточную вершину между вершинами 1 и 2. Элемент e_{12} равен 2, следовательно, вершина 1 связана непосредственно с вершиной 2 без промежуточных вершин. Определяем кратчайший путь: 1 → 2 → 4 → 5. Длина этого пути равна 18 км (элемент U_{15}=18 матрицы расстояний U_4).

Найти кратчайший путь между исходной и завершающей вершинами сети можно, используя задачи линейного программирования.

При составлении прямой задачи предполагают, что в исходную вершину сети входит одна единица внешнего потока, которая выходит из завершающей вершины сети. В качестве неизвестных величин выступает x_{ij} – величина потока, проходящего по дуге (i, j) длина которой равна c_{ij}.

Переменные x_{ij} – двоичные, они могут принимать значения 0 или 1: $x_{ij} = 0 \cup 1, (i = \overline{1,n})$. Прямая задача линейного программирования состоит в том, чтобы минимизировать длину сети:

$$F_{\min} = \sum_{(i,j)\in \overset{\rho}{e}} c_{ij} x_{ij} .$$

В качестве ограничений задачи записывают баланс потока, проходящего через каждую вершину сети: общий входной поток минус общий выходной поток равен нулю.

Например, составим прямую задачу определения кратчайшего пути сети.

Требуется определить кратчайший путь из вершины 1 в вершину 7. Единица потока входит в вершину 1 и выходит из вершины 7 (рис. 4.17).

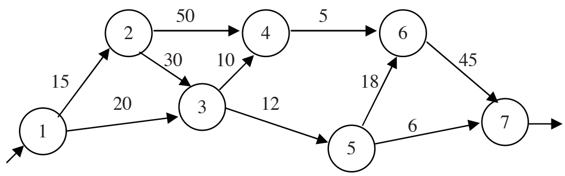


Рис. 4.17. Входные и выходные потоки сети

Составим балансы потоков, проходящих через каждую вершину сети:

1. для вершины 1: $1 - x_{12} - x_{13} = 0$;
2. для вершины 2: $x_{12} - x_{23} - x_{24} = 0$;
3. для вершины 3: $x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} = 0$;
4. для вершины 4: $x_{24} + x_{34} - x_{46} = 0$;
5. для вершины 5: $x_{35} - x_{56} - x_{57} = 0$;
6. для вершины 6: $x_{46} + x_{56} - x_{67} = 0$;
7. для вершины 7: $x_{67} + x_{57} - 1 = 0$;
8. Ограничения на переменные: $x_{ij} = 0 \cup 1, (i = \overline{1,7})$.

$$F_{\min} = 15x_{12} + 20x_{13} + 30x_{23} + 50x_{24} + 10x_{34} + 12x_{35} + 5x_{46} +$$
$$+ 18x_{56} + 6x_{57} + 45x_{67}.$$

Оптимальное решение, полученное с помощью программы Excel является:

$x_{12} = 0$	$x_{34} = 0$	$x_{57} = 1$
$x_{13} = 1$	$x_{35} = 1$	$x_{67} = 0$
$x_{23} = 0$	$x_{46} = 0$	$F_{min} = 38$
$x_{24} = 0$	$x_{56} = 0$	

Кратчайший путь $1 \to 3 \to 5 \to 7$ из вершины 1 в вершину 7 имеет длину 38 км.

Кратчайший путь между исходной и завершающей вершинами сети можно найти, используя двойственную задачу. В качестве неизвестных величин двойственной задачи выступают U_i – расстояние от исходной вершины до вершины i. Требуется максимизировать величину $F_{\max} = u_n - u_1$, при условиях: $u_j - u_i \le c_{ij}$.

Это ограничение показывает, что расстояние от вершины i до вершины j не может превышать длину дуги (i, j). Это расстояние может быть меньше длины этого маршрута, если вершину j можно достичь из вершины i через другие промежуточные вершины.

Пример. Составим двойственную задачу для определения кратчайшего пути сети (рис. 4.18).

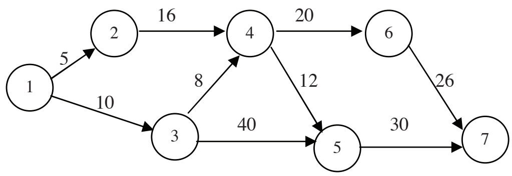


Рис. 4.18. Сетевой график для выбора кратчайшей цепи

Составим ограничения двойственной задачи.

1. для дуги (1,2) $u_2 - u_1 \le 5$
2. для дуги (1,3) $u_3 - u_1 \le 10$
3. для дуги (2,4) $u_4 - u_2 \le 16$
4. для дуги (3,4) $u_4 - u_3 \le 8$
5. для дуги (3,5) $u_5 - u_3 \le 40$
6. для дуги (4,5) $u_5 - u_4 \le 12$
7. для дуги (4,6) $u_6 - u_4 \le 20$
8. для дуги (5,7) $u_7 - u_5 \le 30$
9. для дуги (6,7) $u_7 - u_6 \le 26$
10. Расстояние до вершины 1 равно нулю: $u_1 = 0$. $F_{\max} = u_7 - u_1$.

Используя Excel, получено следующее оптимальное решение:

$u_1 = 0$	$u_4 = 18$	$u_7 = 60$
$u_2 = 3$	$u_5 = 30$	$F_{max} = 60$
$u_3 = 10$	$u_6 = 35$	

Подставляя значения u_I в ограничения задачи, получим:

1. для дуги (1,2) $3 - 0 \le 5$
2. для дуги (1,3) $10 - 0 = 10$
3. для дуги (2,4) $18 - 3 \le 16$
4. для дуги (3,4) $18 - 10 = 8$
5. для дуги (3,5) $30 - 10 \le 40$
6. для дуги (4,5) $30 - 18 = 12$
7. для дуги (4,6) $35 - 18 \le 20$
8. для дуги (5,7) $60 - 30 = 30$
9. для дуги (6,7) $60 - 35 \le 26$

Ограничения двойственной задачи, выполненные в виде равенства, определяют кратчайший путь: 1 → 3 → 4 → 5 → 7.

Кратчайший путь можно определить по значениям соответствующих двойственных переменных данной задачи, значение которых равны 1, так как ресурсы, согласно второй теоремы двойственности, использованы полностью. Обозначим двойственную оценку данной задачи через y_i, тогда:

$y_1 = 0$	$y_4 = 1$	$y_7 = 0$
$y_2 = 1$	$y_5 = 0$	$y_8 = 1$
$y_3 = 0$	$y_6 = 1$	$y_9 = 0$.

Кратчайший путь: 1 → 3 → 4 → 5 → 7 имеет расстояние 60 км.

4.4. Задача о максимальном потоке в сетях и ее обобщения

Задача состоит в обосновании максимального потока (например, комбикормов, т) из источника или источников (комбикормовых заводов) до стока или стоков (пунктов назначения – птицефабрик, комплексов по откорму свиней и т.д.). При этом под источником понимают исходную вершину сети, под стоком – завершающую вершину сети. По путям сети направляется однородное вещество (комбикорм, природный газ, нефть, транспорт и т.д.) из источников в стоки. Каждая дуга сети характеризуется числом b_{ij}, называемым пропускной способностью дуги, под которой понимают максимальное количество вещества, пропускаемое за единицу времени. Ставится задача определить для данной сети максимальную величину потока из источника в сток, под которым понимают совокупность потоков x_{ij} по всем дугам сети, равный количеству вещества, перемещаемого по ней в единицу времени.

Важную роль в решении этой задачи играет понятие разреза. Разрез определяет множество дуг (ребер), при удалении которых из сети полностью прекращается поток от источника к стоку. При этом пропускная способность разреза равна сумме пропускных способностей дуг (ребер) разреза. Среди всех разрезов сети разрез с минимальной пропускной способностью определяет максимальный поток в сети.

Но перебор всех разрезов сети – непростая задача, поэтому для поиска максимального потока целесообразно использовать алгоритм Форда. Для его применения предварительно формируется матрица пропускных способностей дуг (ребер) сети. В таблицу в клетку (i, j) записывают пропускную способность дуги b_{ij}, если она больше нуля, а если пропускная способность симметричной ей дуги равна нулю, то в клетку (j, i) ставим нуль. Если $b_{ij} = b_{ji} = 0$, то клетки (i, j) и (j, i) не заполняются.

Пример. Сформируем матрицу пропускных способностей дуг (ребер) сети, изображенной на рисунке 4.19 (табл. 4.14).

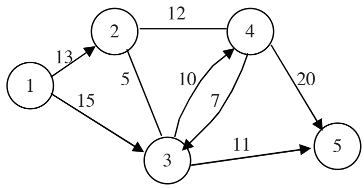


Рис. 4.19. Сеть для определения максимального потока

Т а б л и ц а 4.14. **Матрица пропускных способностей дуг V_0**

	(*)	(1)	(1)	(2)	(3)
E_j / E_i	E_1	E_2	E_3	E_4	$E5$
E_1		13	15^-		
E_2	0		5	12	
E_3	0^+	5		10	11^-
E_4		12	7		20
E_5			0^+	0	

Алгоритм Форда:

1. Используя матрицу пропускных способностей, находим путь из исходной вершины E_1 в завершающую E_n с пропускной способностью больше нуля. Для этого столбец E_1 помещаем значком *. И в строке E_1 ищем положительные элементы матрицы ($b_{ij} > 0$) и столбцы, в которых они находятся, помечаем номером просматриваемой строки. В нашем случае, просмотрев строку E_1, столбцы E_2 и E_3 помечаем цифрой 1. Таким образом, выбрали дуги, которые являются первыми дугами пути из E_1 в E_n.

Процедуру пометок продолжаем до тех пор, пока:

а) не будет помечен столбец E_n, т.е. сток;

б) нельзя пометить новые столбцы, что означает отсутствие пути из E_1 в E_n, проходящего по дугам с положительной пропускной способностью.

В нашем случае просматриваем строку E_2, в котором можно пометить столбец E_4, просматривая строку E_3, помечаем столбец E_5, который является стоком.

2. Находим путь из E_1 в E_n, используя пометки столбцов. При этом соответствующий элемент b_{ij} искомой дуги помечаем знаком «–», а симметричный ему элемент b_{ji} – знаком «+». Данный процесс продолжаем до тех пор, пока не придем к истоку (вершине E_1) и не отметим знаком «–» элемент этой строки и знаком «+» – симметричный ему элемент.

Пометив столбцы и расставив знаки, находим путь (E_1, E_3, E_5), при этом элементы b_{13}, b_{35} помечены знаком минус.

3. Определяем пропускную способность пути, она равна наименьшей из пропускных способностей дуг, входящих в этот путь: $Q_i = \min\limits_{(i,j)}\{b_{ij}^{-}\}$.

В нашем примере $Q_i = \min\{b_{13}; b_{35}\} = \min\{15;11\} = 11$.

4. Определяем остаточные пропускные способности дуг пути и симметричных к ним дуг. Для этого из элементов таблицы b_{ij}^{-}, получивших знак «–» вычитаем выбранный минимальный элемент Q_i, а к элементам b_{ij}^{+}, получивших знак «+» прибавляем элемент Q_i. Все изменения заносим в новую матрицу пропускных способностей дуг V_1 (табл. 4.15) и вычисления повторяем сначала до тех пор пока не получим таблицу, в которой нет ни одного пути из E_1 в E_n с пропускной способностью больше нуля.

5. Пометив столбцы табл. 4.15, расставив знаки, находим путь из E_1 в E_n: (E_1, E_2, E_4, E_5). Среди элементов матрицы, получивших знак «–» выбираем наименьший:

$$Q_1 = \min\{b_{12}; b_{24}; b_{45}\} = \min\{13,12,20\} = 12 .$$

Изменяем пропускную способность дуг на Q_1, получим табл. 4.16.

Т а б л и ц а 4.15. **Матрица пропускных способностей дуг V_1**

	(*)	(1)	(1)	(2)	(4)
E_i \ E_j	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1		13^{-}	4		
E_2	0^{+}		5	12^{-}	
E_3	11	5		10	0
E_4		12^{+}	7		20^{-}
E_5			11	0^{+}	

6. Выполнив выше изложенный алгоритм, находим путь: (E_1, E_2, E_4, E_5). Величина потока равна: $Q_2 = \min\{4,10,8\} = 4$. Определяем новую пропускную способность дуг (табл. 4.17).

Т а б л и ц а 4.16. **Матрица пропускных способностей дуг V_2**

	(*)	(1)	(1)	(3)	(4)
E_j / E_i	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1		1	4^-		
E_2	12		5	0	
E_3	11^+	5		10^-	0
E_4		24	7^+		8^-
E_5			11	12^+	

Т а б л и ц а 4.17. **Матрица пропускных способностей дуг V_3**

	(*)	(1)	(2)	(3)	(4)
E_j / E_i	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1		1^-	0		
E_2	12^+		5^-	0	
E_3	15	5^+		6^-	0
E_4		24	11^+		4^-
E_5			11	16^+	

7. Находим путь: (E_1, E_2, E_3, E_4, E_5). Величина потока по этому пути равна: $Q_3 = \min\{1,5,6,4\} = 1$. Находим новые элементы матрицы V_3 (табл. 4.18).

Т а б л и ц а 4.18. **Матрица пропускных способностей дуг V_4**

	(*)				
E_j / E_i	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1		0	0		
E_2	13		4	0	
E_3	15	6		5	0
E_4		24	12		3
E_5			11	17	

8. Помечаем столбец E_1 знаком *. Просматриваем строку E_1, убеждаемся, что никакие столбцы пометить нельзя, так как не существует ни одного пути с положительной пропускной способностью из вершины E_1 в вершину E_5.

9. Из элементов первоначальной табл. 4.14 вычитаем соответствующие элементы последней табл. 4.18, получим табл. 4.19.

Положительные элементы табл. 4.19 характеризуют величины дуговых потоков, т.е. x_{12}=13; x_{13}=15; x_{23}=1; x_{24}=12; x_{34}=5; x_{35}=11; x_{45}=17, по остальным дугам потоки равны нулю.

Т а б л и ц а 4.19. **Матрица пропускных способностей дуг**

E_i \ E_j	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1		13	15		
E_2	–13		1	12	
E_3	–15	–1		5	11
E_4		–12	–5		17
E_5			–11	–17	

Для определения максимального потока сети необходимо просуммировать элементы строки E_1 (источника) или элементы столбца E_5 (стока):

$$\sum_{j=1}^{n} x_{0j} = 13 + 15 = 28\,;\ \sum_{i=0}^{n} x_{in} = 11 + 17 = 28\,.$$

Разрез с минимальной пропускной способностью образован дугами, начальные вершины которых характеризуют элементы строки E_1, а конечные вершины – элементы столбца E_5. Т.е., разрез с минимальной пропускной способностью образован совокупностью дуг: $\{(E_2,E_4);(E_3,E_4);(E_3,E_5)\}$. Удалив дуги разреза, блокируем все пути из источника в сток. Пропускная способность разреза равна: $b_{24}+b_{34}+b_{35}$ = 12+5+11=28. Дуги разреза насыщены потоком.

Если имеется сеть с несколькими источниками и стоками, то для ее решения с помощью алгоритма Форда необходимо свести данную задачу с одним источником и одним стоком путем введения фиктивного источника (вершины E_0) и фиктивного стока (вершины E_{n+1}), а также фиктивных дуг (E_0, E_j) и (E_i, E_{n+1}).

Задачу определения максимального потока в сети можно свести к задаче линейного программирования. Обозначим через x_{ij} – поток по дуге (E_i, E_j), равный количеству вещества, перемещаемого по ней в единицу времени.

Требуется найти значения x_{ij} максимизирующие одну из целевых функций:

1) максимальный поток, равный количеству вещества, вытекающего из источника:

$$F_{\max} = \sum_{j=1}^{n} x_{0j}\ ,$$

2) или максимальный поток, равный количеству вещества, притекающего в сток

$$F_{\max} = \sum_{i=1}^{n-1} x_{in}\ .$$

При условиях:

1. По предельной пропускной способности дуг

$$0 \le x_{ij} \le b_{ij}\ ,\ i, j = \overline{0,n}\ ,\ i \ne j\ .$$

2. По балансу вещества, притекающего в любую промежуточную вершину и вытекающего из нее

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} x_{kj} = 0\ ,\ k = \overline{1, n-1}\ .$$

3. Неотрицательность переменных

$$x_{ij} \ge 0\ .$$

Пример. Используя структурную экономико-математическую модель, составить развернутую модель определения максимального потока в сети, изображенной, сетевым графиком (рис. 4.20).

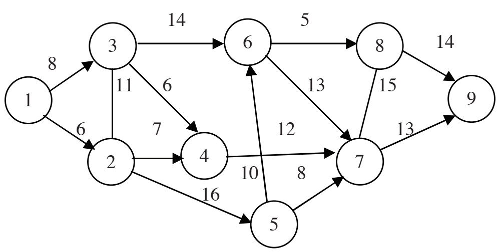


Рис. 4.20. Сетевой график

Составим развернутую экономико-математическую модель.

Целевая функция: $F_{1\max} = x_{13} + x_{12}$ или $F_{2\max} = x_{89} + x_{79}$.

При условиях:

I. По предельной пропускной способности дуг:

1. $x_{12} \le 6$	9. $x_{47} \le 12$
2. $x_{13} \le 8$	10. $x_{56} \le 10$
3. $x_{23} \le 11$	11. $x_{57} \le 8$
4. $x_{32} \le 11$	12. $x_{67} \le 13$
5. $x_{24} \le 7$	13. $x_{68} \le 5$
6. $x_{25} \le 16$	14. $x_{78} \le 15$
7. $x_{34} \le 6$	15. $x_{87} \le 15$
8. $x_{36} \le 14$	16. $x_{89} \le 14$
	17. $x_{79} \le 13$.

II. По балансу вещества:

18. для вершины 2: $x_{12}+x_{32}-x_{23}-x_{24}-x_{25}=0$

19. для вершины 3: $x_{13}+x_{23}-x_{32}-x_{34}-x_{36}=0$

20. для вершины 4: $x_{24}+x_{34}-x_{47}=0$

21. для вершины 5: $x_{25}-x_{56}-x_{57}=0$

22. для вершины 6: $x_{56}+x_{36}-x_{67}-x_{68}=0$

23. для вершины 7: $x_{47}+x_{57}+x_{67}+x_{87}-x_{78}-x_{79}=0$

24. для вершины 8: $x_{68}+x_{78}-x_{87}-x_{89}=0$

Решение задачи с разными целевыми функциями дает следующие результаты:

$F_{1\max}=14$		$F_{2\max}=14$	
$x_{12}=6$	$x_{47}=9$	$x_{12}=6$	$x_{47}=9$
$x_{13}=8$	$x_{56}=0$	$x_{13}=8$	$x_{56}=0$
$x_{23}=0$	$x_{57}=0$	$x_{23}=0$	$x_{57}=0$
$x_{32}=1$	$x_{67}=0$	$x_{32}=1$	$x_{67}=0$
$x_{24}=7$	$x_{68}=5$	$x_{24}=7$	$x_{68}=5$
$x_{25}=0$	$x_{78}=9$	$x_{25}=0$	$x_{78}=9$
$x_{34}=2$	$x_{87}=0$	$x_{34}=2$	$x_{87}=0$
$x_{36}=5$	$x_{89}=14$	$x_{36}=5$	$x_{89}=14$
	$x_{79}=0$.		$x_{79}=0$.

Положительные элементы характеризуют величины дуговых потоков. Максимальный поток сети равен 14. Имеется два разреза, состоящие из совокупности дуг $\{(E_2,E_4);(E_3,E_4);(E_3,E_6)\}$ и $\{(E_6,E_8);(E_7,E_8)\}$, которые насыщены потоком.

Задача о потоке минимальной стоимости.

Задача нахождения потока минимальной стоимости в сети с ограниченной пропускной способностью обобщает задачу определения максимального потока, так как каждой дуге соответствует определенная стоимость прохождения единицы потока по этой дуги (c_{ij}).

Требуется найти поток по дугам, заданной величины B, минимизирующий общую стоимость прохождения потока по сети. При этом должны удовлетворяться ограничения на пропускные способности дуг и на баланс вещества, притекающего в промежуточную вершину и вытекающего из нее.

Используя условные обозначения предыдущей задачи, запишем структурную модель определения потока минимальной стоимости в сети:

$$F_{\min}=\sum_{(i,j)\in\wp} c_{ij}x_{ij}\,.$$

При условиях:

1. По предельной пропускной способности дуг:

$$0\le x_{ij}\le b_{ij}\,,\; i,j=\overline{0,n}\,,\; i\ne j\,.$$

2. По балансу вещества, притекающего в любую промежуточную вершину и вытекающего из нее:

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} x_{kj} = 0, \; k = \overline{1, n-1}.$$

3. По количеству вещества, вытекающего из источника и притекающего в сток:

$$\text{а)} \; \sum_{j=1}^{n} x_{0j} = B;$$

$$\text{б)} \; \sum_{i=0}^{n-1} x_{in} = B.$$

4. Неотрицательность переменных:

$$x_{ij} \geq 0.$$

Пример. Требуется минимизировать стоимость в сети (см. рис. 4.20) с ограниченной пропускной способностью B=12. Дополним сетевой график рис. 4.20 стоимостью прохождения единицы потока по дугам этой сети, которую запишем над дугами графика в скобках (рис. 4.21).

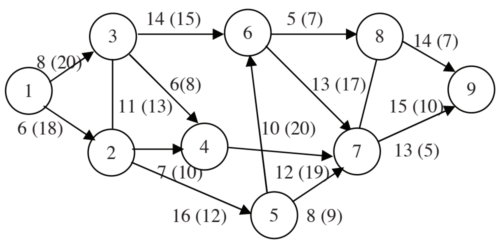


Рис. 4.21. Сетевой график

В развернутую экономико-математическую модель предыдущей задачи добавим следующие ограничения:

III. По количеству вещества, вытекающего из источника и притекающего в сток:

25. $x_{12}+x_{13}=12$

26. $x_{79}+x_{89}=12$

В качестве целевой функции возьмем:

$$F_{\min} = 20x_{13} + 18x_{12} + 13x_{23} + 13x_{32} + 10x_{24} + 8x_{34} + 12x_{25} + 15x_{36} +$$
$$+ 19x_{47} + 20x_{56} + 9x_{57} + 17x_{67} + 7x_{68} + 15x_{78} + 15x_{87} + 5x_{79} + 7x_{89}$$

В результате решения задачи получим:

$F_{\min} = 561$ у.д.е.

x_{12}=6	x_{47}=1
x_{13}=6	x_{56}=0
x_{23}=0	x_{57}=6

x_{32}=0 x_{67}=0
x_{24}=0 x_{68}=5
x_{25}=6 x_{78}=0
x_{34}=1 x_{87}=0
x_{36}=5 x_{89}=5
x_{79}=7.

Поток сети равен 12, минимальная стоимость в сети – 561 у.д.е. Разрезы с пропускной способностью 12 образованы совокупностью дуг $\{(E_2,E_5);(E_3,E_4);(E_3,E_6)\}$ и $\{(E_4,E_7);(E_5,E_7);(E_6,E_8)\}$. Дуги разрезов насыщены потоком.

4.5. Элементы сетевого и календарного планирования

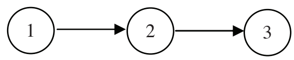
Математический аппарат теории сетевого планирования и управления базируется на теории графов. Граф $G=(X,U)$ считается заданным, если заданы все его вершины и дуги. Отождествим вершины орграфа с событиями, а дуги – с работами. События и работы, составляющие сетевой график являются основными понятиями в сетевом планировании и управлении (СПУ).

Сетевой график – это динамическая модель, в которой моделируется совокупность взаимосвязанных работ и событий, отображающих процесс достижения определенной цели. *Работа* характеризует материальное действие, требующее использования ресурсов или времени, или логическое действие, требующее лишь взаимосвязи событий. При графическом представлении работа изображается стрелкой с указанием продолжительности работы в каких-либо единицах времени. Работа обозначается парой заключенных в скобки чисел (i,j), где i – номер события, из которого работа выходит, а j – номер события, в которое она входит. Работа не может начаться раньше, чем свершится событие, из которого она выходит. Каждая работа имеет определенную продолжительность $t(i,j)$. Например, запись $t(2,5)=4$ обозначает, что работа (2,5) имеет продолжительность 4 единицы времени.

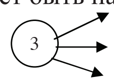
К работам также относятся также такие процессы, которые не требуют ни ресурсов, ни времени для их выполнения. Это *фиктивные работы*. Они показывают, что одна работа не может совершиться, пока не закончена другая, связанная с ней логически. На сетевых графиках фиктивные работы изображают пунктирными стрелками. Работа на графике соединяет два события.

Событиями называют результаты выполнения одной или нескольких работ. Событие свершается в тот момент, когда оканчиваются все работы, входящие в него. Оно становится предпосылкой для начала следующих за ним работ. События обозначаются одним числом, на графике изображаются кружком (реже точкой, ромбом и т.д.), внутри которого проставляют его порядковый номер ($i = 1,2,...N$). Событие с номером 1 называется *исходным*. Событие под номером *n* называется *завершающим*.

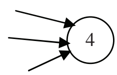
Работа на сетевом графике соединяет два события – начальное (№1) и конечное (№2). Причем конечное событие (№2) данной работы является начальным событием последующей работы, т.е. №3:



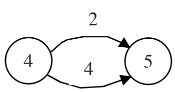
Начальное событие может быть началом нескольких работ:



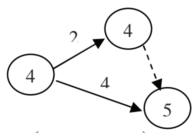
Конечное событие может обозначать завершение нескольких работ:



Если две работы выполняются параллельно, но имеют разную продолжительность, то их надо изображать так, чтобы любая работа могла соединяться только с двумя событиями. Для того, чтобы показать взаимосвязь работ, вводят дополнительное событие (4) и фиктивную работу.



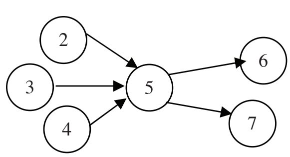
(неправильно)



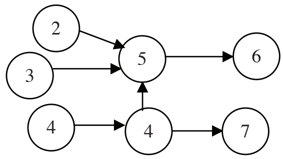
(правильно)

При построении сетевых графиков могут встречаться и такие ситуации, когда для выполнения одной из работ (5,6) надо выполнить предварительно работы (2,5); (3,5); (4,5), а для выполнения работы (5,7) выходящей из общего события 5 надо выполнить только работу 4,5.

Нельзя так изображать взаимосвязь событий и работ, так как получится, что для выполнения работы (5,7) надо выполнить все предыдущие три работы:

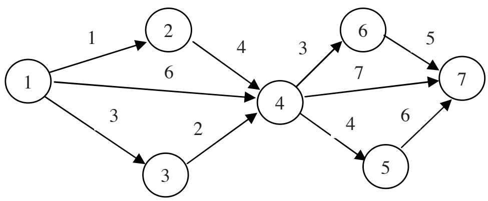


В этом случае вводят дополнительное событие $4^{/}$ и фиктивную работу ($4^{/}$,5):



При построении сетевых графиков иногда бывает целесообразным укрупнить работы, если какая-то группа имеет одно начальное и одно конечное событие:

Любая непрерывная логическая (технологическая) последовательность работ от исходного события до завершающего называется *путем*. Один и тот же путь не проходит дважды через одно и то же событие. Через одно и то же событие могут проходить несколько путей:



При построении сетевых графиков надо соблюдать правила:

1) в сетевом графике не должно быть тупиков, т.е. событий, из которых не выходит ни одна работа (за исключением завершающего события);

2) в сетевом графике не должно быть и событий (кроме исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа;

3) не должно быть двух событий, связанных двумя или большим количеством работ;

4) в сети не должно быть контуров, т.е. цепей, соединяющих некоторые события с ними же самими;

5) не должно быть петель, т.е. начало выполнения работы является и условием ее окончания.

Длина пути определяется суммой продолжительности лежащих на нем работ. От исходного события до завершающего может быть много путей. В результате анализа сетевого графика определяют такой путь, суммарная продолжительность работ на котором будет максимальной. Он называется *критическим* и характеризует время, необходимое для выполнения всех работ, включенных в сетевой график. В графике могут быть несколько критических путей. Работы, лежащие на критическом пути, не имеют резервов времени. Пути, близкие по времени к критическому, называются *подкритическими*, остальные пути являются *некритическими* или ненапряженными. Работы, лежащие на некритическом пути, имеют резерв времени, т.е. сроки их выполнения можно сдвигать. Наличие резервов времени у некритических работ дает возможность маневрировать внутренними ресурсами и этим ускорять выполнения критических и подкритических работ. На этом основана оптимизация сетевых графиков.

4.6. Сетевые графики и их параметры

Расчет параметров сетевого графика рассмотрим на примере (рис. 4.22).

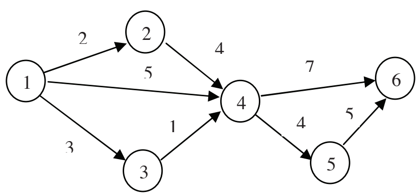


Рис. 4.22. Сетевой график

На основе сетевого графика рассчитаем критический путь (табл. 4.20). Путь №3, проходящих по работам 1, 2, 4, 5, 6 является критическим, так как его продолжительность максимальная и равна 16 дней. Путь №4, проходящий по работам 1, 4, 5, 6 является подкритическим, его продолжительность равна 15 дней.

Т а б л и ц а 4.20. **Продолжительность путей сетевого графика**

№ пути	Совокупность работ	Продолжительность пути
1	1, 4, 6	12
2	1, 2, 4, 6	13
3	1, 2, 4, 5, 6	16
4	1, 4, 5, 6	15
5	1, 3, 4, 6	11
6	1, 3, 4 5, 6	14

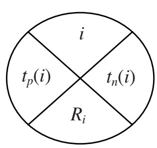
Растягивание сроков выполнения работ на этом направлении на один день приведет к тому, что путь №4 станет критическим.

Имеется 10 основных временных параметров сетевого графика. Введем условные обозначения:

Элемент сети	Наименование параметра	Условное обозначение
Событие	Ранний срок свершения	$t_p(i)$
	Поздний срок свершения	$t_n(i)$
	Резерв времени события	$R(i)$
Работа	Продолжительность работы	$t_{(i,j)}$
	Ранний срок начала работы	$t_{рн}(i,j)$
	Ранний срок окончания работы	$t_{ро}(i,j)$
	Поздний срок начала работы	$t_{пн}(i,j)$
	Поздний срок окончания работы	$t_{по}(i,j)$
	Полный резерв времени	$R_п(i,j)$
	Свободный резерв времени	$R_c(i,j)$
	Независимый резерв времени	$R_н(i,j)$

Когда рассчитываем ранние сроки свершения событий $t_p(i)$, двигаемся с начала в конец графика, когда рассчитываем поздние сроки свершения событий $t_n(i)$, двигается с конца в начало сетевого графика.

Расчет временных параметров событий выполняется на сетевом графике, для этого каждое событие укрупняется и разбивается на 4 сектора:



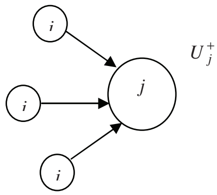
i – номер события;
$t_p(i)$ – ранний срок свершения события i;
$t_n(i)$ – поздний срок свершения события i;
R_i – резерв времени события i;

Приведем *формулы для расчета временных параметров событий*.

Если какому-то событию j предшествует свершение нескольких событий i, то *ранний срок свершения события* j определяется как максимальная сумма ранних сроков свершения событий i и продолжительность работ, входящих в событие j (рис. 4.23).

Если нескольким событиям j предшествуют свершение одного события i, то *поздний срок свершения события* i определяется как минимальная разность поздних сроков свершения событий j и продолжительности работ, выходящих из события i (рис. 4.24).

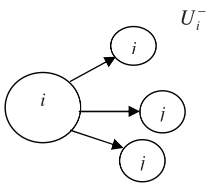
$$t_p(j)=\max_{(i,j)\in u_j^+}\{t_p(i)+t_{(i,j)}\}.$$



U_j^+ – множество всех работ, входящих в событие j.

Рис. 4.23. Фрагмент сетевого графика

$$t_n(j)=\min_{(i,j)\in u_i^-}\{t_n(i)-t_{(i,j)}\}.$$



U_i^- – множество всех работ, выходящих из события i.

Рис. 4.24. Фрагмент сетевого графика

Резерв времени события определяется как разность между поздним и ранним срокам его свершения:

$$R_i=t_n(i)-t_p(i).$$

Значение временных характеристик событий приведены на сетевом графике (рис. 4.25).

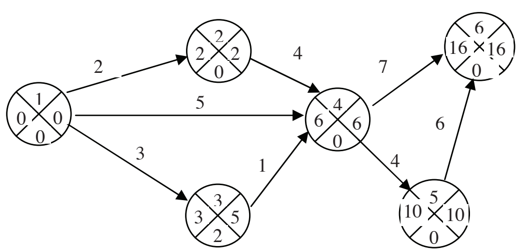


Рис. 4.25. Сетевой график с указанием временных характеристик событий

У критических работ резерв времени начального и конечного событий равен «0». Работа лежит на критическом пути, если выполняются следующие требования:

1) ранний и поздний сроки свершения событий, из которых выходит работа-стрелка, совпадают, т.е.

$$t_p(i) = t_n(i);$$

2) ранний и поздний сроки свершения событий, в которые входит работа-стрелка, совпадают, т.е.

$$t_p(j) = t_n(j);$$

3) разница между ранними или поздними сроками свершения предшествующего и последующего событий работы равна продолжительности работы:

$$t_p(j) - t_p(i) = t_n(i) - t_n(i) = t_{(i,j)}.$$

Зная сроки свершения событий, можно определить временные параметры работ.

Пример. Рассчитаем временные параметры работ для сетевого графика, изображенного на рис. 4.25.

Ранний срок начала работы совпадает с ранним сроком свершения начального события:

$$t_{рн}(i, j) = t_p(i).$$

Ранний срок окончания работы равен раннему сроку начала работы плюс продолжительность работы:

$$t_{ро}(i, j) = t_{рн}(i, j) + t_{(i,j)}.$$

При расчете раннего срока начала работы $t_{рн}(i, j)$ и раннего срока окончания работы $t_{ро}(i, j)$ двигались по таблице сверху вниз. При расчете позднего срока начала работы $t_{пн}(i, j)$ и позднего срока окончания работы $t_{по}(i, j)$ необходимо двигаться снизу вверх.

Поздний срок окончания работы совпадает с поздним сроком свершения конечного события, т.е.

$$t_{по}(i, j) = t_n(i, j).$$

Поздний срок начала работы равен позднему сроку окончания работы минус продолжительность работы:

$$t_{пн}(i, j) = t_{по}(i, j) - t_{(i,j)}.$$

Полный резерв времени определяется как разность между поздним сроком окончания и ранним сроком начала работы и продолжительностью работы:

$$R_n(i, j) = t_{по}(i, j) - t_{рн}(i, j) - t_{(i,j)}$$

$$R_n(i, j) = t_n(j) - t_p(i) - t_{(i,j)}.$$

Полный резерв времени работы – это максимально возможный запас времени, на который можно отсрочить начало работы или увеличить продолжительность ее выполнения при условии, что конечное для данной работы событие наступит не позднее своего позднего срока. Работы, лежащие на критическом пути полного резервного времени не имеют.

Заполним сводную таблицу временных параметров работ (табл. 4.21).

Т а б л и ц а 4.21. **Временные параметры работ**

Условные обозначения работ (i,j)	Продолжительность работы $t_{(i,j)}$	Ранние сроки		Поздние сроки		Резерв времени		
		начала $t_{рн}(i,j)$	окончания $t_{ро}(i,j)$	начала $t_{пн}(i,j)$	окончания $t_{по}(i,j)$	полный $R_{п}(i,j)$	свободный $R_{c}(i,j)$	независимый $R_{н}(i,j)$
(1,2)	2	0	2	0	2	0	0	0
(1,3)	3	0	3	2	5	2	0	0
(1,4)	5	0	5	1	6	1	1	1
(2,4)	4	2	6	2	6	0	0	0
(3,4)	1	3	4	5	6	2	2	0
(4,5)	4	6	10	6	10	0	0	0
(4,6)	7	6	13	9	16	3	3	3
(5,6)	6	10	16	10	16	0	0	0

Полный резерв времени может быть использован частично или полностью для выполнения данной работы или для любой другой работы, лежащей на данном пути.

Если растянуть сроки выполнения работ, лежащих на критическом пути на одни сутки, то критический путь возрастет на одни сутки и, следовательно, на такое же время увеличится срок выполнения всего комплекса работ.

Свободный резерв времени – это запас времени, которым можно располагать при выполнении данной работы при условии, что начальное и конечное ее событие наступят в свои ранние сроки:

$$R_c(i,j) = t_p(j) - t_p(i) - t_{(i,j)}.$$

Свободный резерв присущ только данной работе, и его использование никак не повлияет на выполнение последующих работ.

Независимый резерв времени – это запас времени, которым можно располагать при выполнении данной работы при условии, что начальное ее событие наступит в свой поздний срок, а конечное – в свой ранний срок:

$$R_н(i,j) = t_p(j) - t_п(i) - t_{(i,j)}.$$

Для небольших проектов удобным дополнением к сетевому графику является *линейный график или график Ганта*. На нем каждая работа (i,j) изображается с учетом оси времени 0t горизонтальным отрезком, длина которого в соответствующем масштабе равна продолжительности работы $t_{(i,j)}$. Начало каждой работы совпадает с ранним сроком свершения ее начального события. Работы изображаются в той же последовательности, что и на сети (рис. 4.26).

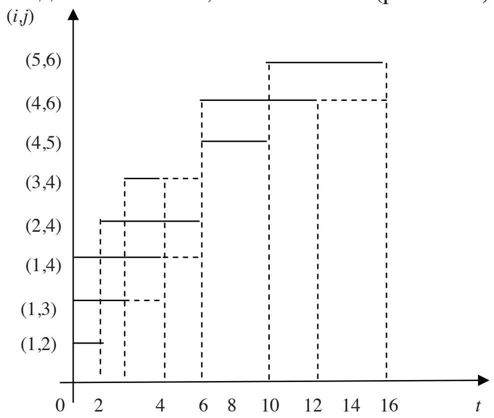


Рис. 4.26. График Ганта

4.7. Задачи распределения ресурсов на сетях

Рассмотрим задачу распределения ресурсов на сетевом графике. **Пример.** Допустим на перерабатывающем предприятии необходимо выполнить комплекс проектных работ, последовательность которых изображена на сетевом графике (рис. 4.27).

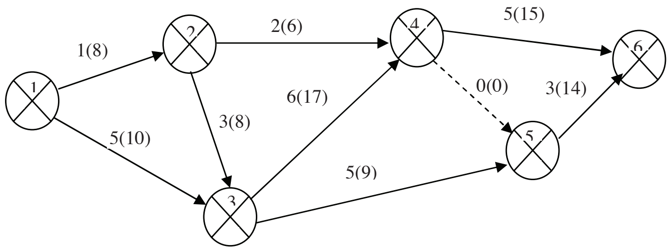


Рис. 4.27. Сетевой график комплекса проектных работ

На его дугах проставлена продолжительность выполнения работ и в скобках (необходимое для выполнения работы число исполнителей, т.е. интенсивность потребления ресурса $\nu(i,j)$.

В распоряжении руководителей проектных работ имеется 26 человек. Необходимо распределить трудовые ресурсы во времени, т.е. определить сроки начала и окончания работ так, чтобы с имеющимися трудовыми ресурсами выполнить проект в минимальный срок.

Используем *эвристический метод распределения ресурсов*.

Алгоритм решения задачи следующий.

1. Рассчитываем продолжительность критического пути.

2. Рассчитаем на графике ранний и поздний срок свершения событий и резерв времени событий. Критический путь равен 16 дней.

3. Рассчитаем временные характеристики работ (табл. 4.22).

Т а б л и ц а 4.22. **Временные характеристики работ**

Условное обозначение работ i, j	Продолжительность работы, $t_{(ij)}$	Интенсивность потребления ресурса $v(i, j)$	Ранние сроки		Поздние сроки		Резерв времени
			начала $t_{рн(i,j)}$	окончания $t_{ро(i,j)}$	начала $t_{пн(i,j)}$	окончания $t_{по(i,j)}$	полный $R_{п(i,j)}$
1,2	1	8	0	1	1	2	1
1,3	5	18	0	5	0	5	0
2,3	3	8	1	4	2	5	1
2,4	2	6	1	3	9	11	8
3,4	6	17	5	11	5	11	0
3,5	5	9	5	10	8	13	3
4,5	0	0	11	11	13	13	2
4,6	5	15	11	16	11	16	0
5,6	3	14	11	14	13	16	2

4. Строим сетевой график в календарной шкале времени по ранним и поздним срокам начала и окончания работ (график Ганта) (рис. 4.28).

5. Просуммируем количество человек, которые выполняют одновременно разные виды работ, и построим эпюру интенсивности потребления ресурсов (рис. 4.29). Запишем наверху каждой проекции – работы ее интенсивность, т.е. количество человек, которые должны выполнять работу.

Проецируем на ось времени (0t) начало и конец каждой работы и обозначим проекцию, совпадающую с началом координат через τ_0, следующую за ней τ_1 и т.д. Таким образом, получим промежутки:

1. $(\tau_0, \tau_1) = (0,1)$ 4. $(\tau_3, \tau_4) = (4,5)$ 7. $(\tau_6, \tau_7) = (11,14)$

2. $(\tau_1, \tau_2) = (1,3)$ 5. $(\tau_4, \tau_5) = (5,10)$ 8. $(\tau_7, \tau_8) = (14,16)$

3. $(\tau_2, \tau_3) = (3,4)$ 6. $(\tau_5, \tau_6) = (10,11)$.

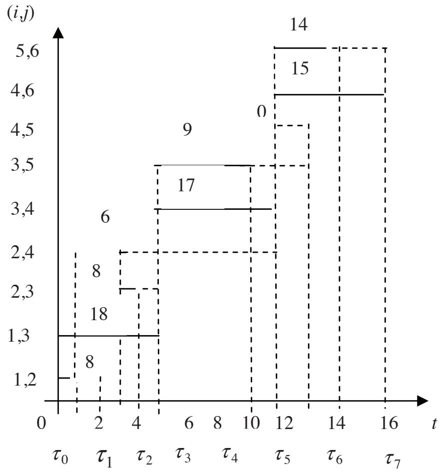


Рис. 4.28. График Ганта №1

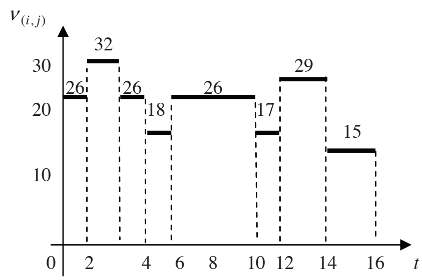


Рис. 4.29. Эпюра №1 интенсивности потребления ресурса

6. Из анализа графика Ганта и эпюры интенсивности потребления видно, что существуют два интервала (τ_1, τ_2) и (τ_6, τ_7), для которых интенсивность ресурсов превышает их наличное количество, следовательно, график необходимо оптимизировать:

а) рассмотрим первый промежуток $(\tau_0, \tau_1) = (0{,}1)$. Над ним расположены работы (1,2) и (1,3). Так как сумма ресурсов для их исполнения 8+18 не превышает наличных ресурсов 26 чел., то эти работы оставляем без изменения;

б) анализируем второй промежуток $(\tau_1, \tau_2) = (1{,}3)$, под ним расположены работы (1,3); (2,3); (2,4). Сумма ресурсов для их выполнения 18+8+6+32>26 наличных ресурсов. Установить порядок выполнения работ. В первую очередь выполняются работы, начатые в предыдущем промежутке, т.е. работа (1,3). Для ее выполнения необходимо 18 чел. Оставшиеся работы нумеруют в порядке возрастания их полных резервов, а если резервы одинаковы, то в порядке убывания интенсивностей. Работа (2,3) имеет полный резерв времени, который составляет один день, а работа (2,4) – 8 дней $(R_n(2{,}4)=8)$. Следовательно, начинаем выполнять сначала работу (2,3). Интенсивность работ (1,3) и (2,3)=18+8=26, а это равно наличным ресурсам, следовательно, начало выполнения работы (2,4) сдвигаем к моменту $\tau_2=3$ (рис. 4.30);

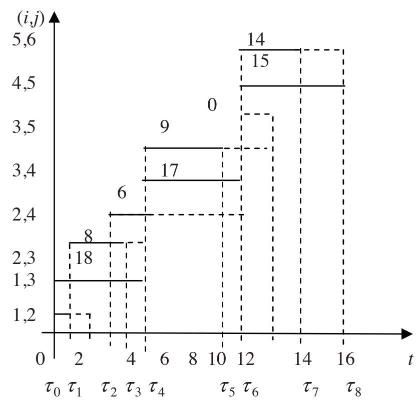


Рис. 4.30. График Ганта №2

в) сдвинув работу (2,4) к моменту τ_2, видим, что в промежутке (τ_2,τ_3) интенсивность потребления ресурса равна $\nu_{1,3}+\nu_{2,3}+\nu_{2,4}$ = =18+8+6=32>26 чел. Так как, работы (1,3) и (2,3) начаты в предыдущих промежутках, то работу (2,4) сдвигаем до момента $\tau_3=4$ (рис. 4.31);

г) в промежутке $(\tau_3,\tau_4)=(4{,}5)$ имеем интенсивность потребления ресурса равную 18+6$(\nu_{1,3}+\nu_{2,4})$<26.

Изобразим изменения на графике Ганта (рис. 4.31).

д) анализ графика Ганта показывает, что в промежутке $(\tau_3,\tau_4)=(5{,}6)$ интенсивность потребления превышает наличный ресурс $\nu_{2,4}+\nu_{3,4}+\nu_{3,5}$=6+17+9=32>26 чел.

Так как работа (2,4) выполнялась в предыдущем промежутке, следовательно, рассмотрим работы (3,4) и (3,5). Сравним их полные резервы времени $R_n(3{,}4)=0$; $R_n(3{,}5)=3$, следовательно, в момент $\tau_3=5$

начнем работу (3,4), а работу (3,5) сдвинем к моменту $\tau_4 = 6$. Получим линейный график (рис. 4.32).

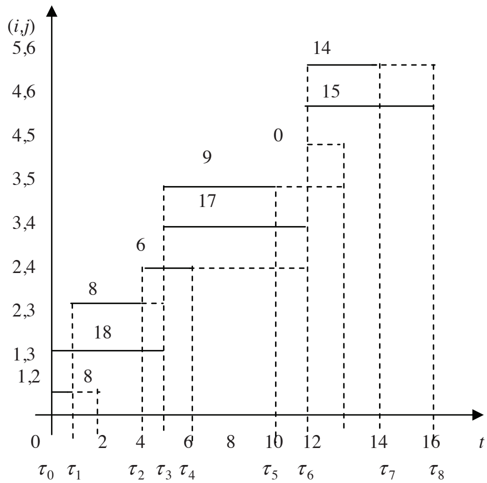


Рис. 4.31. График Ганта №3

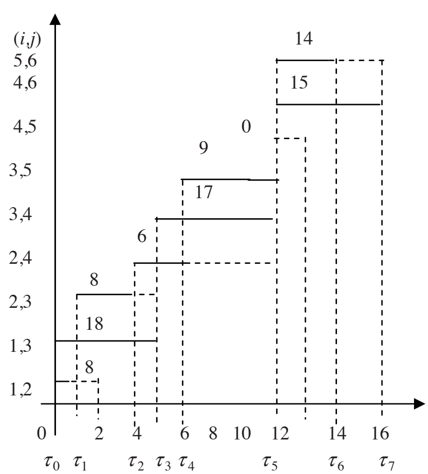


Рис. 4.32. График Ганта №4

е) в промежутке $(\tau_4, \tau_5) = (6{,}11)$ – интенсивность потребления ресурса равна (17+9)=26, т.е. равна наличному ресурсу, следовательно, время начала работ (3,4); (3,5) оставляем без изменения;

ж) в промежутке $(\tau_5, \tau_6) = (11{,}14)$ интенсивность потребления ресурса $v_{4,6} + v_{5,6} = 15 + 14 = 29 > 26$ чел., т.е. превышает ресурс. Так как $R_n(4{,}6) = 0$, $R_n(5{,}6) = 2$, то необходимо сдвинуть работу (5,6) до момента $\tau_7 = 16$.

Но это приведет к увеличению срока выполнения всего комплекса проектных работ на 3 дня, т.е. до 16+3=19 дней, но это не выгодно. Если есть возможность выбора, то растягиваем сроки выполнения работы, задействовав на ее выполнении меньше работников, т.е. увеличим продолжительность работы с 3 до 4 дней, сократив количество человек, ежедневно занятых на этой работе. На работе (5,6) надо отработать 14 чел. х 3 дня = 42 человеко-дней. Для выполнения работы (5,6) за 4 дня необходимо 42 чел.-дн.: 4 дня ≈ 11 человек. Таким образом, получим окончательный линейный график (рис. 4.33) и эпюру ежедневной потребности в трудовых ресурсах (рис. 4.34).

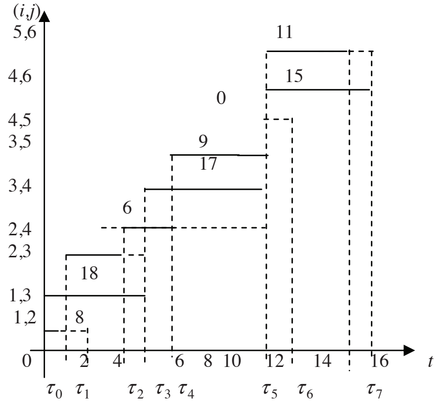


Рис. 4.33. График Ганта №5

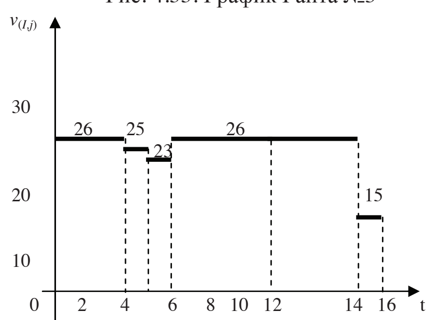


Рис. 4.34. Эпюра №2 интенсивности потребления ресурса

4.8. Задачи оптимизации сетей во времени

Необходимо обосновать минимальную величину дополнительных вложений x_{ij} в отдельные работы проекта с тем, чтобы общий срок его выполнения не превышал заданной величины времени t_0.

Пусть задан сетевой график выполнения проекта. Продолжительность каждой работы равна t_{ij}. Вложение дополнительных средств x_{ij} в работу (i,j) сокращает время ее выполнения до t'_{ij}, причем $t'_{ij} = t_{ij} - k_{ij} \cdot x_{ij}$, где k_{ij} – технологический коэффициент использования дополнительных средств. Но время выполнения каждой работы можно сократить до минимально возможного времени ее выполнения. Требуется определить количество дополнительных средств x_{ij}, которые надо вложить в работы (i,j), а также время начала t_{ij}^{H} и время окончания t_{ij}^{O} выполнения этих работ, чтобы проект должен быть выполнен в срок. При этом суммарные дополнительные затраты должны быть минимальными.

Запишем *структурную модель задачи оптимизации проекта по времени*.

I. Индексация:

i – номер предыдущего события (начального события работы);

j – номер последующего события (конечного события работы);

r – номер промежуточного события;

n – номер завершающего события работы;

1 – номер исходного события работы;

E – множество вершин орграфа;

$\vec{e}$ – множество дуг орграфа.

II. Неизвестные величины:

x_{ij} – величина дополнительных вложений в работу ij, позволяющая сократить время ее выполнения;

t_{ij}^{H} – время начала работы ij;

t_{ij}^{O} – время окончания работы ij.

III. Известные величины:

t_0 – срок выполнения проекта;

d_{ij} – минимально возможное время выполнения работы ij;

k_{ij} – технологический коэффициент использования дополнительных средств, позволяющих сократить время выполнения работы ij;

t_{ij} – время выполнения работы ij.

Целевая функция модели – суммарные затраты дополнительных вложений должны быть минимальными:

$$F_{\min} = \sum_{(i,j)\in \vec{e}} x_{ij} \ .$$

При условиях:

1) по времени завершения проекта, т.е. время завершения проекта не должно превышать заданного времени –

$$t^0_{i,n} \le t_0, (i,n) \in \vec{e} \ ,$$

2) по продолжительности работ, т.е. продолжительность работы должна быть не менее минимально возможной ее продолжительности –

$$t^0_{ij} - t^H_{ij} \ge d_{ij}, (i,j) \in \vec{e} \ ,$$

3) по сокращению времени продолжительности работ, т.е. в зависимости от величины вложенных средств, продолжительность работ может быть сокращена –

$$t^0_{ij} - t^H_{ij} = t_{ij} - k_{ij} x_{ij}, (i,j) \in \vec{e} \ ,$$

4) по последовательности выполнения работ, т.е. время начала выполнения каждой работы должно быть не меньше времени окончания непосредственно предшествующих ей работ –

а) $t^H_{1,j} = 0, (1,j) \in E$;

б) $t^H_{jr} \ge t^0_{ij}$, $(i,j,r) \in E$,

5) неотрицательность переменных –

$$t^H_{ij}, \ t^0_{ij}, \ \ x_{ij} \ge 0, \quad (i,j) \in \vec{e} \ .$$

Пример. Пусть проект (перевода фирменного магазина СПК на самообслуживание задан сетевым графиком (рис. 4.35).

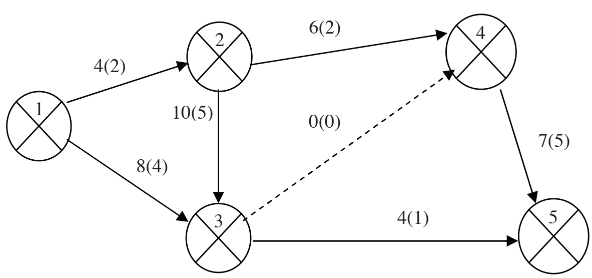


Рис. 4.35. Сетевой график перевода фирменного магазина СПК на самообслуживание

Для каждой работы приведены над дугами продолжительность работ (t_{ij}) и в скобках – минимально возможное время выполнения работы (d_{ij}). Задан срок выполнения проекта t_0=15 дней. $k_{45} = 0{,}4$. Известны также технологические коэффициенты использования дополнительных средств $k_{12}=0{,}2$, $k_{13}=0{,}5$, $k_{23}=0{,}1$, $k_{24}=0{,}3$, $k_{35}=0{,}2$.

Требуется найти такие значения t_{ij}^{H}, t_{ij}^{0}, x_{ij}, чтобы:

1. суммарное количество дополнительных средств было минимальным;

2. время выполнения всего комплекса работ не превышала t_0;

3. продолжительность выполнения каждой работы была не меньше заданной величины d_{ij}.

Весь комплекс работ можно выполнить за 21 день (рис. 4.36), а требуется завершить все работы по переводу фирменного магазина СПК на самообслуживание за 15 дней.

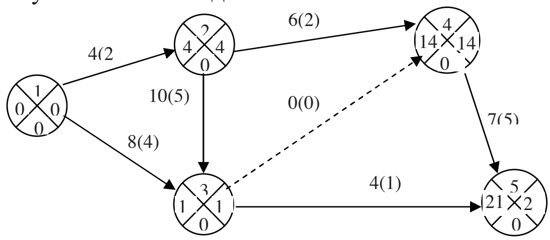


Рис. 4.36. Сетевой график перевода фирменного магазина СПК на самообслуживание при несрочном графике выполнения работ

Составим развернутую экономико-математическую задачу:

Целевая функция модели –

$$F_{min}=x_{12}+x_{13}+x_{23}+x_{24}+x_{35}+x_{45}.$$

При условиях:

I. По времени завершения проекта –

1. $t_{35}^{0}\le 15$

2. $t_{45}^{0}\le 15$

II. По продолжительности работ –

3. $t_{12}^{0}-t_{12}^{H}\ge 2$	5. $t_{23}^{0}-t_{23}^{H}\ge 3$	7. $t_{34}^{0}-t_{34}^{H}=0$
4. $t_{13}^{0}-t_{13}^{H}\ge 4$	6. $t_{24}^{0}-t_{24}^{H}\ge 2$	8. $t_{35}^{0}-t_{35}^{H}\ge 1$
		9. $t_{45}^{0}-t_{45}^{H}\ge 5$

III. По сокращению времени продолжительности работ –

10. $t_{12}^{0}-t_{12}^{H}=4-0{,}2x_{12}$	13. $t_{24}^{0}-t_{24}^{H}=6-0{,}3x_{24}$
11. $t_{13}^{0}-t_{13}^{H}=8-0{,}5x_{13}$	14. $t_{35}^{0}-t_{35}^{H}=4-0{,}2x_{35}$
12. $t_{23}^{0}-t_{23}^{H}=10-0{,}1x_{23}$	15. $t_{45}^{0}-t_{45}^{H}=7-0{,}4x_{45}$.

IV. По последовательности выполнения работ –

16. $t_{12}^{H}=0$	20. $t_{34}^{H}\ge t_{13}^{0}$	24. $t_{45}^{H}\ge t_{34}^{0}$
17. $t_{13}^{H}=0$	21. $t_{34}^{H}\ge t_{23}^{0}$	25. $t_{45}^{H}\ge t_{24}^{0}$

18. $t_{23}^{H} \geq t_{12}^{0}$ 22. $t_{35}^{H} \geq t_{23}^{0}$

19. $t_{24}^{H} \geq t_{12}^{0}$ 23. $t_{35}^{H} \geq t_{13}^{0}$

Информацию развернутой экономико-математической модели преобразуем:

1. все неизвестные величины переносим в левую часть ограничений, все известные величины – в правую и приводим подобные;

2. если получено: а) ограничение со знаком «≤», «=» или «≥» и отрицательным свободным членом $(-B_i)$; б) ограничение со знаком «≤» и свободным членом равным 0 (≤0), то левую и правую часть ограничения умножаем на (–1) и знак меняем на противоположный.

В таком виде информацию развернутой модели записываем в матрицу (т.е. в таблицу, в которой в математизированном виде записана информация задачи).

Решаем задачу на компьютере симплексным методом. После решения задачи получено следующее оптимальное решение: x_{12}=10; x_{13}=0; x_{23}=20; x_{24}=0; x_{35}=0; x_{45}=5; $t_{12}^{H}=0$; $t_{13}^{H}=0$; $t_{23}^{H}=2$; $t_{24}^{H}=4$; $t_{34}^{H}=10$; $t_{35}^{H}=10$; $t_{45}^{H}=10$; $t_{12}^{0}=2$; $t_{13}^{0}=8$; $t_{23}^{0}=10$; $t_{24}^{0}=10$; $t_{34}^{0}=10$; $t_{35}^{0}=14$; $t_{45}^{0}=15$; F_{min}=35.

Таким образом, выполнить проект можно за время t_0=15 дней, для этого необходимо дополнительно вложить 35 у.д.е. средств (рис. 4.37).

При этом средства будут направлены на работы (1,2); (2,3) и (4,5) соответственно 10, 20 и 5 у.д.е., что позволит сократить время выполнения этих работ соответственно с 4 до 2 дней, с 10 до 8 дней и с 7 до 5 дней.

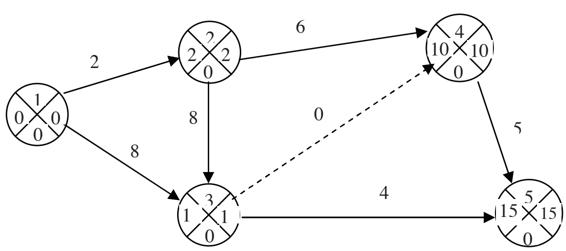


Рис. 4.37. Сетевой график перевода фирменного магазина СПК
на самообслуживание при срочном графике выполнения работ

Рассмотрим второй вариант этого типа задач.

Задача состоит в сокращении срока выполнения комплекса работ на столько, на сколько это возможно за счет вложения определенной суммы дополнительных средств (т.е. не более В). Время выполнения каждой работы должно быть не меньше минимально возможного времени (d_{ij}). Требуется определить время начала t_{ij}^{H} и окончания t_{ij}^{O} каждой работы и величину дополнительных средств x_{ij}, которые необходимо выделить для сокращения продолжительности выполнения работы (ij).

Используем ранее изложенные три группы условных обозначений: индексацию, неизвестные и известные величины. В известные величины добавим величину B – количество дополнительных средств, выделяемых для сокращения продолжительности работ.

Структурная экономико-математическая модель имеет следующий вид:
$$F_{\min} = \underset{(i,n)\in \vec{e}}{t_i^0},$$

т.е. срок выполнения проекта должен быть минимальным.

При условиях:

1. по использованию дополнительных вложений в работы, т.е. суммарное количество дополнительных вложений в работы проекта не должно превышать выделяемых для сокращения продолжительности работ дополнительных средств:
$$\sum_{(i,j)\in \vec{e}} x_{ij} \le B,$$

2. по продолжительности работ:
$$t_{ij}^{0} - t_{ij}^{H} \ge d_{ij}, (i,j)\in \vec{e},$$

3. по сокращению продолжительности работ:
$$t_{ij}^{0} - t_{ij}^{H} = t_{ij} - k_{ij}x_{ij}, (i,j)\in \vec{e}.$$

4. по последовательности выполнения работ:

а) $t_{1j}^{H} = 0$, $(1,j)\in E$;

б) $t_{jr}^{H} \ge t_{ij}^{0}$, $(i,j,r)\in E$,

5. неотрицательность переменных:
$$t_{ij}^{H},\ t_{ij}^{0},\quad x_{ij} \ge 0,\quad (i,j)\in \vec{e}.$$

Пример. Пусть сетевой график выполнения работ на новый календарный год имеет вид (рис. 4.38).

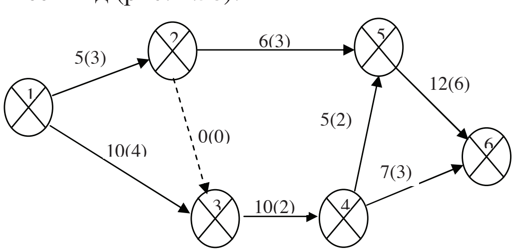


Рис. 4.38. Сетевой график комплекса работ

Для каждой работы под дугами приведены продолжительность работ (t_{ij}) и в скобках минимально возможное время выполнения работ (d_{ij}). Известны технологические коэффициенты использования дополнительных средств $k_{12} = 0{,}2, k_{13} = 0{,}8$, $k_{34} = 0{,}5$, $k_{25} = 0{,}1$, $k_{45} = 0{,}3$, $k_{46} = 0{,}6$, $k_{56} = 0{,}7$. Для сокращения продолжительности работ выделены дополнительные средства в размере 30 у.д.е.

Требуется найти такие значения t_{ij}^{H}, t_{ij}^{0}, x_{ij}, чтобы:

1. срок выполнения комплекса работ был минимальным;

2. суммарное количество дополнительных средств не превышало значения B;

3. продолжительность выполнения каждой работы не превышала заданной величины d_{ij}.

При несрочном режиме выполнения весь комплекс работ можно выполнить за 36 дней (рис. 4.39).

Требуется минимизировать срок выполнения работ комплекса. Для этого составим развернутую экономико-математическую модель. Так как в последнее событие сети входят сразу две работы, то необходимо добавить фиктивную работу и фиктивное событие №7, время выполнения работы (6,7) равно 0.

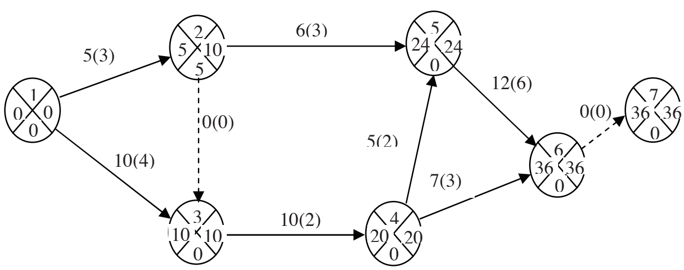


Рис. 4.39. Сетевой график комплекса работ при несрочном графике их выполнения

Тогда F_{min} можно записать так:

$F_{\min} = t_{6,7}^{0}$, т.е. срок выполнения проекта стремится к минимуму.

При условиях:

I. По использованию дополнительных вложений в работы, в целях сокращения их продолжительности:

1. $x_{12}+x_{13}+x_{25}+x_{34}+x_{45}+x_{46}+x_{56}\leq 30$

II. По продолжительности работ.

2. $t_{12}^{0} - t_{12}^{H} \geq 3$ 7. $t_{45}^{0} - t_{45}^{H} \geq 2$

3. $t_{13}^0 - t_{13}^H \geq 4$ 8. $t_{46}^0 - t_{46}^H \geq 3$

4. $t_{23}^0 - t_{23}^H = 0$ 9. $t_{56}^0 - t_{56}^H \geq 6$

5. $t_{34}^0 - t_{34}^H \geq 2$ 10. $t_{67}^0 - t_{67}^H = 0$

6. $t_{25}^0 - t_{25}^H \geq 3$

III. По сокращению продолжительности работ:

11. $t_{12}^0 - t_{12}^H = 5 - x_{12} \cdot 0{,}2$ 14. $t_{34}^0 - t_{34}^H = 10 - x_{34} \cdot 0{,}5$

12. $t_{13}^0 - t_{13}^H = 10 - x_{13} \cdot 0{,}8$ 15. $t_{45}^0 - t_{45}^H = 4 - x_{45} \cdot 0{,}3$

13. $t_{25}^0 - t_{25}^H = 6 - x_{25} \cdot 0{,}1$ 16. $t_{46}^0 - t_{46}^H = 7 - x_{46} \cdot 0{,}6$

17. $t_{56}^0 - t_{56}^H = 12 - x_{56} \cdot 0{,}7$

IV. По последовательности выполнения работ:

18. $t_{12}^H = 0$ 24. $t_{45}^H \geq t_{34}^0$

19. $t_{13}^H = 0$ 25. $t_{56}^H \geq t_{45}^0$

20. $t_{23}^H \geq t_{12}^0$ 26. $t_{56}^H \geq t_{25}^0$

21. $t_{34}^H \geq t_{13}^0$ 27. $t_{46}^H \geq t_{34}^0$

22. $t_{34}^H \geq t_{12}^0$ 28. $t_{67}^H \geq t_{56}^0$

23. $t_{25}^H \geq t_{12}^0$ 29. $t_{67}^H \geq t_{46}^0$

В процессе решения экономико-математической задачи на компьютере получены следующие значения переменных:

x_{12}=0;	$t_{12}^H = 0$	$t_{56}^H = 11{,}4$	$t_{12}^0 = 5$	$t_{56}^0 = 17{,}4$
x_{13}=6,25;	$t_{13}^H = 0$	$t_{67}^H = 17{,}4$	$t_{13}^0 = 5$	$t_{67}^0 = 17{,}4$
x_{25}=0;	$t_{23}^H = 5$		$t_{23}^0 = 5$	
x_{34}=15,18;	$t_{25}^H = 5{,}41$		$t_{25}^0 = 11{,}4$	
x_{45}=0;	$t_{34}^H = 5$		$t_{34}^0 = 7{,}4$	
x_{46}=0	$t_{45}^H = 7{,}4$		$t_{45}^0 = 11{,}4$	
x_{56}=8,57	$t_{46}^H = 10{,}4$		$t_{46}^0 = 17{,}4$	

$$F_{min}=17{,}4.$$

Рассчитаем продолжительность выполнения работ, позволяющих за счет их сокращения уменьшить срок выполнения всего комплекса работ:

$t_{13}^0 - t_{13}^H = 10 - 6{,}25 \cdot 0{,}8 = 10 - 5 = 5$

$t_{34}^0 - t_{34}^H = 10 - 15{,}18 \cdot 0{,}5 = 2{,}4$

$t_{56}^0 - t_{56}^H = 12 - 8{,}57 \cdot 0{,}7 = 6$.

Анализ оптимального решения свидетельствует, что весь комплекс работ можно сократить с 36 (см. рис. 4.39) до 17,4 дня (рис. 4.40) за счет дополнительного вложения средств (соответственно 6,25; 15,18 и 8,57 у.д.е.) в работы (1,3), (3,4) и (5,6). Это позволит уменьшить срок их выполнения соответственно с 10 до 5 дней, с 10 до 24 дня и с 12 до 6 дней соответственно.

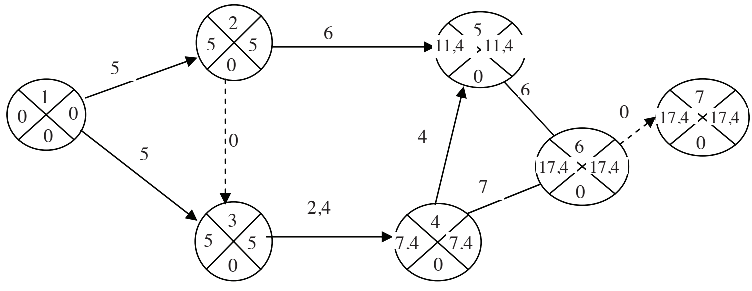


Рис. 4.40. Сетевой график комплекса работ при сокращении срока их выполнения

4.9. Задачи оптимизации сетей по стоимости

Рассмотрим *минимизацию стоимости проекта при фиксированной его продолжительности*. Пусть задан сетевой график проекта $G=(E,\vec{e})$ (рис. 4.41). Для каждой работы в скобках на графике дана минимальная продолжительность работ d_{ij} (т.е. срочный режим их выполнения), которому соответствуют наибольшие затраты средств C_{ij}. Также известна нормальная (или наибольшая) продолжительность работ D_{ij}, которой соответствуют наименьшие затраты средств c_{ij}.

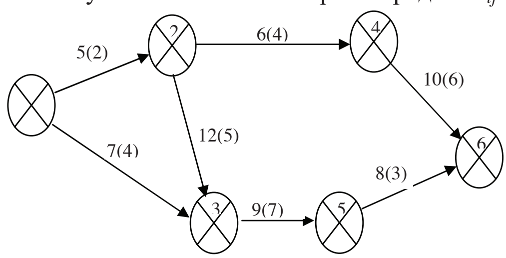


Рис. 4.41. Сетевой график проекта

Известно, что затраты на выполнение отдельных работ находятся в обратной зависимости от продолжительности их выполнения. Рассчитывают коэффициент дополнительных затрат $h_{ij}=\dfrac{C_{ij}-c_{ij}}{D_{ij}-d_{ij}}$, который показывает насколько увеличится стоимость работы (i,j) при уменьшении ее продолжительности на единицу времени. Параметры сетевого графика представлены в табл. 4.23.

Т а б л и ц а 4.23. **Параметры сетевого графика**

Параметры	Работы						
	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(3,5)	(4,6)	(5,6)
d_{ij}	2	4	5	4	7	6	3
C_{ij}	50	30	85	60	40	70	90
D_{ij}	5	7	12	6	9	10	8
c_{ij}	20	10	30	40	30	60	25
h_{ij}	10	6,67	7,86	10	5	2,5	13

Алгоритм решения задачи: 1) рассчитаем коэффициент дополнительных затрат для каждой работы; 2) продолжительность критического пути равна 34 дня, минимальная стоимость проекта равна $\sum_{(i,j)\in\wp} c_{ij} = 215$ у.д.е. (рис. 4.42).

Максимальная стоимость проекта равна $\sum_{(i,j)\in\wp} C_{ij} = 425$ у.д.е., продолжительность критического пути – 17 дней (рис. 4.43).

Требуется найти начало и окончание работ при необходимости выполнения проекта за фиксированное время $t_0 = 20$ дней при наименьшей стоимости затрат.

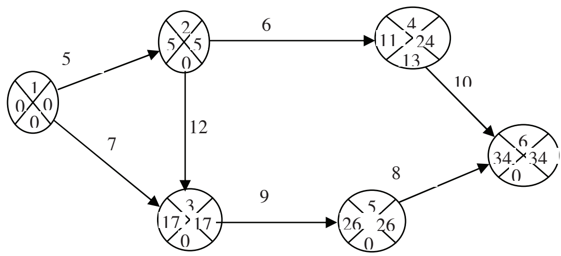


Рис. 4.42. Сетевой график проекта при минимальной его стоимости

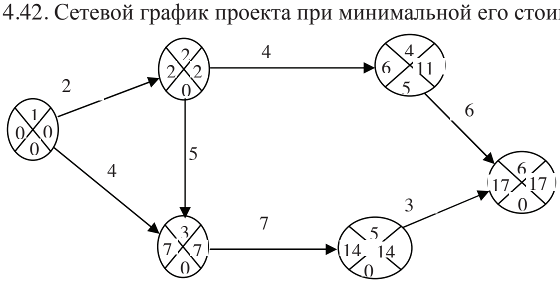


Рис. 4.43. Сетевой график проекта при максимальной его стоимости

Целевую функцию экономико-математической задачи можно записать в следующем виде $F_{\min} = \sum_{(i,j)\in \overset{\rho}{e}} [C_{ij} - h_{ij}(t_{ij}^0 - t_{ij}^H - d_{ij})]$.

При условиях:

1. по предельной продолжительности работ:

$$d_{ij} \le t_{ij}^0 - t_{ij}^H \le D_{ij}, (i,j) \in \overset{\rho}{e}$$

2. по окончанию проекта:

$$t_{i,n}^0 \le t_0, (i,n) \in \overset{\rho}{e}$$

3. по последовательности выполнения работ:

а) $t_{1,j}^H = 0, (i,j) \in E$

б) $t_{jr}^H \ge t_{ij}^0, (i,j,r) \in E$.

4. неотрицательность переменных:

$$t_{jr}^H, t_{ij}^0 \ge 0, (i,j) \in \overset{\rho}{e}.$$

3) составляем развернутую экономико-математическую модель.

$$F_{min} = 50 - 10(t_{1,2}^0 - t_{1,2}^H - 2) + 30 - 6{,}67(t_{1,3}^0 - t_{1,3}^H - 4) + 85 -$$
$$- 7{,}86(t_{2,3}^0 - t_{2,3}^H - 5) + 60 - 10(t_{2,4}^0 - t_{2,4}^H - 4) + 40 -$$
$$-5(t_{3,5}^0 - t_{3,5}^H - 7) + 70 - 2{,}5(t_{4,6}^0 - t_{4,6}^H - 6) + 90 - 13(t_{5,6}^0 - t_{5,6}^H - 3).$$

I. По предельной продолжительности работ:

1. $t_{12}^0 - t_{12}^H \ge 2$	8. $t_{12}^0 - t_{12}^H \le 5$
2. $t_{13}^0 - t_{13}^H \ge 4$	9. $t_{13}^0 - t_{13}^H \le 7$
3. $t_{23}^0 - t_{23}^H \ge 5$	10. $t_{23}^0 - t_{23}^H \le 12$
4. $t_{24}^0 - t_{24}^H \ge 4$	11. $t_{24}^0 - t_{24}^H \le 6$
5. $t_{35}^0 - t_{35}^H \ge 7$	12. $t_{35}^0 - t_{35}^H \le 9$
6. $t_{46}^0 - t_{46}^H \ge 6$	13. $t_{46}^0 - t_{46}^H \le 10$
7. $t_{56}^0 - t_{56}^H \ge 3$	14. $t_{56}^0 - t_{56}^H \le 8$.

II. По окончанию проекта:

15. $t_{56}^0 \le 20$.

III. По последовательности выполнения работ:

16. $t_{12}^H = 0$	21. $t_{35}^H \ge t_{23}^0$
17. $t_{13}^H = 0$	22. $t_{35}^H \ge t_{13}^0$
18. $t_{23}^H \ge t_{12}^0$	23. $t_{46}^H \ge t_{24}^0$
19. $t_{24}^H \ge t_{12}^0$	24. $t_{56}^H \ge t_{35}^0$.
20. $t_{24}^H \ge t_{12}^0$	

Преобразуем целевую функцию:

$$F_{min} = 50 - 10t_{1,2}^0 + 10t_{1,2}^H + 20 + 30 - 6{,}67t_{1,3}^0 + 26{,}68 + 6{,}67t_{1,3}^{Í} + 85 -$$
$$-7{,}86t_{2,3}^0 + 7{,}86t_{2,3}^H + 39{,}3 + 60 - 10t_{2,4}^0 + 10t_{2,3}^H + 40 + 40 - 5t_{3,5}^0 + 5t_{3,5}^H +$$

$$+35+70+2{,}5t^{H}_{4,6}+15-2{,}5t^{0}_{4,6}+90+13t^{H}_{5,6}+39-13t^{0}_{5,6}-=639{,}98-$$
$$-10t^{0}_{1,2}+10t^{H}_{1,2}-6{,}67t^{0}_{1,3}+6{,}67t^{H}_{1,3}-7{,}86t^{0}_{2,3}+7{,}86t^{H}_{2,3}-10t^{0}_{2,4}+10t^{H}_{2,4}-$$
$$-5t^{0}_{3,5}+5t^{H}_{3,5}-2{,}5t^{0}_{4,6}++2{,}5t^{H}_{4,6}-13t^{0}_{5,6}+13t^{H}_{5,6}.$$

После решения задачи на компьютере получены следующие результаты:

$$t^{H}_{12}=0 \quad t^{H}_{35}=7 \qquad t^{0}_{12}=2 \quad t^{0}_{35}=14$$
$$t^{H}_{13}=0 \quad t^{H}_{46}=8 \qquad t^{0}_{13}=7 \quad t^{0}_{46}=18$$
$$t^{H}_{23}=2 \quad t^{H}_{56}=14 \qquad t^{0}_{23}=7 \quad t^{0}_{56}=20\,.$$
$$t^{H}_{24}=2 \qquad t^{0}_{24}=8$$

Проанализируем результаты решения задачи (рис. 4.44).

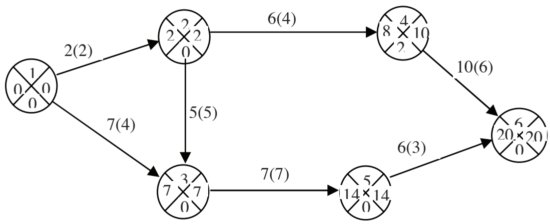


Рис. 4.44. Сетевой график проекта при оптимальной его стоимости

Рассчитаем оптимальные затраты средств в работы (i,j) (табл. 4.24):

$$C_{ijopt}=C_{ij}-h_{ij}(t^{0}_{ij}-t^{H}_{ij}-d_{ij})\,.$$

Т а б л и ц а 4.24. **Параметры сетевого графика**

Параметры	Работы						
	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(3,5)	(4,6)	(5,6)
C_{ij}	50	30	85	60	40	70	90
h_{ij}	10	6,67	7,86	10	5	2,5	13
$t_{ij}=t^{0}_{ij}-t^{H}_{ij}$	2	7	5	6	7	10	6
d_{ij}	2	4	5	4	7	6	3
C_{ijopt}	50	10	85	40	40	60	51
c_{ij}	20	10	30	40	30	60	25

Определим количество средств, необходимых для сокращения срока выполнения проекта $F_{min}=639{,}98–303{,}99=336{,}0$ у.д.е. или $\sum_{(i,j)\in\overset{\rho}{e}} c_{ijopt}$ =336,0 у.д.е.

Данный проект можно выполнить за 20 дней, вместо 34 дней, если вложить в него 336 у.д.е. средств вместо 215 у.д.е. (т.е. дополнительно вложить необходимо 121 у.д.е.: в работу (1,2) – 50–20=30 у.д.е., что позволит сократить ее продолжительность с 5 до 2 дней; в работу (2,3) – 85 – 30 = 55 у.д.е., что сократит ее продолжительность с 12 до 5 дней; в работу (3,5) – 40 – 30 = 10 у.д.е., что уменьшит срок ее выполнения с 9 до 7 дней и в работу (5,6) – 51 – 25 = 26 у.д.е. при уменьшении срока ее выполнения с 8 до 6 дней.

4.10. Варианты задачи о назначениях

Ставится задача так распределить исполнителей по работам, чтобы суммарная стоимость выполненных работ была максимальной или суммарные затраты на выполнение работ были минимальными.

Сформулированную таким образом *задачу о назначениях* можно представить как транспортную задачу, в которой исполнители соответствуют пунктам отправления груза A_i, а работы – пунктам назначения B_j. Если число исполнителей не равно числу работ, то открытая задача о назначениях должна быть приведена к закрытому виду путем ввода фиктивных исполнителей или фиктивных работ. Особенность задачи о назначениях состоит в том, что каждый исполнитель может работать только на одной работе, следовательно, A_i=1; B_j=1, и неизвестные величины задачи могут принимать только два значения:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ - если } i \text{ - й исполнитель выполняет работу вида } j \\ 0 \text{ - в противном случае}, (i, j = \overline{1,n}; i \neq j) \end{cases}$$

Назначения исполнителей на работы x_{ij} должны удовлетворять ограничениям:

1. по распределению работ для выполнения $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n}$
2. по распределению исполнителей по работам $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n}$
3. неотрицательность, целочисленность переменных $x_{ij} \geq 0; x_{ij} \in \{0,1\}$.

При этом, в зависимости от постановки, требуется максимизировать или минимизировать целевую функцию:

$$F_{\max} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \text{ или } F_{\min} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} ,$$

где c_{ij} – соответственно производительность исполнителя вида i при выполнении работы вида j или затраты на выполнение работы вида j исполнителем вида i.

Пример. Необходимо распределить 8 исполнителей на выполнение 8 работ с целью максимизации их стоимости. Производительность труда работников приведена в табл. 4.25.

Т а б л и ц а 4.25. **Производительность труда работников**

Исполни-тели, A_i	Работы, B_j, у.д.е.							
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8
A_1	4	6	5	1	7	2	9	13
A_2	7	8	12	5	4	–	–	10
A_3	1	3	5	8	9	–	–	14
A_4	15	13	10	6	3	–	–	2
A_5	3	–	–	2	10	8	12	5
A_6	8	–	–	7	12	6	1	3
A_7	7	–	–	4	8	5	6	1
A_8	2	5	9	10	13	1	16	4

Работников A_5, A_6 и A_7 не целесообразно использовать при выполнении работ B_2 и B_3, а на работах B_6 и B_7 нельзя использовать работников A_2, A_3 и A_4.

Составим ограничения развернутой экономико-математической задачи:

I. по распределению работ для выполнения:

1. работа $B_1 - x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}+x_{61}+x_{71}+x_{81}=1$
2. работа $B_2 - x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{82}=1$
3. работа $B_3 - x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{83}=1$
4. работа $B_4 - x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}+x_{64}+x_{74}+x_{84}=1$
5. работа $B_5 - x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}+x_{55}+x_{65}+x_{75}+x_{85}=1$
6. работа $B_6 - x_{16}+x_{56}+x_{66}+x_{76}+x_{86}=1$
7. работа $B_7 - x_{17}+x_{57}+x_{67}+x_{77}+x_{87}=1$
8. работа $B_8 - x_{18}+x_{28}+x_{38}+x_{48}+x_{58}+x_{68}+x_{78}+x_{88}=1$

II. по распределению исполнителей по работам

9. исполнитель $A_1 - x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}+x_{18}=1$
10. исполнитель $A_2 - x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{28}=1$
11. исполнитель $A_3 - x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}+x_{38}=1$
12. исполнитель $A_4 - x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}+x_{48}=1$
13. исполнитель $A_5 - x_{51}+x_{54}+x_{55}+x_{56}+x_{57}+x_{58}=1$
14. исполнитель $A_6 - x_{61}+x_{64}+x_{65}+x_{66}+x_{67}+x_{68}=1$
15. исполнитель $A_7 - x_{71}+x_{74}+x_{75}+x_{76}+x_{77}+x_{78}=1$
16. исполнитель $A_8 - x_{81}+x_{82}+x_{83}+x_{84}+x_{85}+x_{86}+x_{87}+x_{88}=1$

$$F_{\max} = 4x_{11} + 6x_{12} + 5x_{13} + 1x_{14} + 7x_{15} + 2x_{16} + 9x_{17} + 13x_{18} + 7x_{21} +$$
$$+ 8x_{22} + 12x_{23} + 5x_{24} + 4x_{25} + 10x_{28} + 1x_{31} + 3x_{32} + 5x_{33} + 8x_{34} +$$
$$+ 9x_{35} + 14x_{38} + 15x_{41} + 13x_{42} + 10x_{43} + 6x_{44} + 3x_{45} + 2x_{48} + 3x_{51} +$$
$$+ 2x_{54} + 10x_{53} + 8x_{56} + 12x_{57} + 5x_{58} + 8x_{61} + 7x_{64} + 12x_{65} + 6x_{66} +$$
$$+ 1x_{67} + 3x_{68} + 7x_{71} + 4x_{74} + 8x_{75} + 5x_{76} + 6x_{77} + 1x_{78} + 2x_{81} + 5x_{82} +$$
$$+ 9x_{83} + 10x_{84} + 13x_{85} + 1x_{86} + 16x_{87} + 4x_{88}$$

Для решения задачи используем «Поиск решения» в электронных таблицах Excel. При этом x_{ij} – двоичные, т.е. принимают значение 1 или 0.

После решения задачи на компьютере получены следующие значения:

$$x_{15}=1 \qquad x_{56}=1$$
$$x_{23}=1 \qquad x_{61}=1$$
$$x_{44}=1 \qquad x_{78}=1$$
$$x_{52}=1 \qquad x_{87}=1$$
$$F_{\max}=115$$

Первый индекс x_{ij} указывает номер исполнителя, второй индекс – номер работы, при таком распределении исполнителей по работам выполненная стоимость работ будет максимальной и равной 115 у.д.е.

Для решения задач о назначениях можно использовать *венгерский метод*, названный в честь венгерского математика Кёнига.

Пример. Требуется пятерых работников распределить между пятью работами с целью минимизации суммарных затрат на выполнение работ. Затраты на выполнение работ конкретными исполнителями приведены в табл. 4.26.

Т а б л и ц а 4.26. **Параметры задачи и выбор минимального элемента в строках**

A_i	B_j					$\min c_{ij}$
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	6	7	9	6	8	6
A_2	8	9	7	8	9	7
A_3	9	7	8	7	8	7
A_4	7	8	9	8	9	7
A_5	10	7	8	7	10	7

Алгоритм венгерского метода.

1. Среди элементов каждой строки матрицы c_{ij} (табл. 4.26) находим наименьшие элементы ($\min\limits_j c_{ij}$).

2. Из элементов каждой строки матрицы c_{ij} вычитаем выбранные минимальные элементы, результаты заносим в новую матрицу (табл. 4.27).

3. Выбираем среди элементов каждого столбца новой матрицы (табл. 4.27) наименьшие элементы ($\min\limits_i c_{ij}$).

4. Из элементов каждого столбца матрицы почленно вычитаем выбранные минимальные элементы, в результате получим таблицу, в ко-

торой каждая строка и каждый столбец содержит хотя бы по одному нулевому значению (табл. 4.28).

Т а б л и ц а 4.27. **Параметры задачи и выбор минимального элемента в столбцах**

A_i	B_j				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0	1	3	0	2
A_2	1	2	0	1	2
A_3	2	0	1	0	1
A_4	0	1	2	1	2
A_5	3	0	1	0	3
$\min c_{ij}$	0	0	0	0	1

5. Используя нулевые значения элементов, получаем допустимое решение задачи о назначениях.

6. Анализируя допустимое решение, находим оптимальное решение задачи о назначениях.

Проанализируем данные табл. 4.28. Строки A_2 и A_4 содержат по одному нулю, выделим их и примем x_{23}=1 и x_{41}=1.

Т а б л и ц а 4.28. **Допустимое решение задачи о назначениях**

A_i	B_j				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0	1	3	$\underline{0}$	1
A_2	1	2	$\underline{0}$	1	1
A_3	2	0	1	0	$\underline{0}$
A_4	$\underline{0}$	1	2	1	1
A_5	3	$\underline{0}$	1	0	2

Строки и столбцы, содержащие эти элементы, исключим из рассмотрения. Это строки A_2 и A_4 и столбцы B_1 и B_3. Среди оставшихся строк находим строку с минимальным количеством нулей. В нашем примере, это строка A_1, содержащая один нуль, следовательно, принимаем x_{14}=1 и исключаем из анализа первую строку и четвертый столбец.

Строка A_5 содержит один нуль, поэтому положим, что x_{52}=1. В оставшейся строке A_3 нулевой элемент укажет на x_{35}=1. Переменные $x_{14}, x_{23}, x_{35}, x_{41}, x_{52}$ равные единице укажут на оптимальную расстановку работников по работам, которой соответствуют суммарные затраты: $F_{\min}$ =6+7+8+7+7=35 у.д.е.

Рассмотрим различные ситуации при решении задачи о назначениях:

а) допустим, после проведения алгоритма венгерского метода имеется столбец или строка, не содержащие нулевых элементов, это является признаком недопустимого решения задачи. Для его поиска необходимо выполнить следующее:

1. Провести минимальное число прямых через строки и столбцы матрицы (кроме диагоналей) таким образом, чтобы они проходили через все нулевые элементы таблицы.

2. Найти наименьший элемент среди элементов, через которые не проходит ни одна из проведенных прямых.

3. Скорректировать элементы матрицы на величину выбранного элемента:

а) вычесть его из всех элементов, через которые не проходят прямые;

б) прибавить выбранный наименьший элемент ко всем элементам таблицы, которые находятся на пересечении прямых;

в) все элементы, которые пересекает только одна прямая оставить без изменения.

4. Используя полученное допустимое значение, найти оптимальное решение задачи.

Пример. Получено следующее решение задачи (табл. 4.29).

Т а б л и ц а 4.29. **Недопустимое решение задачи**

A_i	B_j			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	1	5	6
A_2	0	2	3	7
A_3	7	4	0	2
A_4	3	0	0	0

Так, в столбце B_2 и B_4 нулевые элементы стоят только в строке A_4, следовательно, можно из четырех назначений выполнить только три. Для выполнения всех назначений необходимо иметь нулевые элементы в каждой строке и в каждом столбце таблицы, так как данное условие не соблюдается, то проводим наименьшее число прямых через нулевые элементы таблицы (табл. 4.30).

Наименьшим элементом, через который не прошли прямые, является число 1. Используя выше изложенные правила, рассчитываем элементы новой таблицы (табл. 4.31).

Т а б л и ц а 4.30. **Недопустимое решение задачи**

A_i	B_j			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	1	5	6
A_2	0	2	3	7
A_3	7	4	0	2
A_4	3	0	0	0

Т а б л и ц а 4.31. **Скорректированные элементы таблицы**

A_i	B_j			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	$\underline{0}$	5	5
A_2	$\underline{0}$	1	3	6
A_3	7	3	$\underline{0}$	1
A_4	4	0	1	$\underline{0}$

Осуществляем назначения. Оптимальное решение будет равно $x_{12}=x_{21}=x_{33}=x_{44}=1$.

б) алгоритм венгерского метода предполагает минимизацию целевой функции задачи о назначениях. Если же целевую функцию требуется максимизировать, то все элементы первой таблицы умножают на (–1) и минимальный (наибольший по модулю отрицательный) элемент вычитаем из элементов соответствующих строк, получая положительные элементы скорректированной таблицы. Далее задача о назначениях решается с использованием выше изложенного алгоритма.

в) если в задаче имеются недопустимые назначения, то в соответствующую клетку таблицы заносят максимальный элемент c_{ij}, который позволяет избежать этого назначения.

г) если число работников m не равно числу работ n, то для решения задачи вводят фиктивных исполнителей или фиктивные работы.

4.11. Задача коммивояжера и ее приложения

Задачей схожей с задачей о назначениях является *задача о коммивояжере*, постановка которой состоит в том, что имеется n городов, которые должен посетить коммивояжер только один раз, выезжал из первого города и возвращаясь в исходный пункт.

Цель решения задачи – найти кратчайший замкнутый маршрут, проходящий через каждый пункт только один раз, называемый полным циклом.

Введем неизвестные величины:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ - если в маршрут входит перезд из города } i \text{ в город } j; \\ 0 \text{ - в противном случае.} \end{cases}$$

Требуется минимизировать маршрут коммивояжера:

$$F_{\min} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

где c_{ij} – расстояние между городом i и городом j.

При условиях:

1. По въезду в города: $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n}$.
2. По выезду из городов: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n}$
3. Неотрицательность, целочисленность переменных

$$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \{0,1\}.$$

Основными методами решения задачи коммивояжера являются методы решения целочисленных задач линейного программирования: методы ветвей и границ и отсекающих плоскостей.

Идея применения метода отсекающих плоскостей для решения задачи коммивояжера состоит в том, чтобы в первоначальную задачу ввести дополнительные ограничения, позволяющие исключить возможность разрыва пути коммивояжера и появления нескольких не связанных между собой подмаршрутов. Общее количество таких ограничений равно $(n-1) \cdot (n-2)$. Они имеют вид:

По формированию маршрута коммивояжера

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1,\ i, j = \overline{2,n},\ i \neq j.$$

Основным недостатком применения метода отсекающих плоскостей к решению данной задачи является увеличение размерности задачи при введении дополнительных ограничений.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте понятие графа, вершины, дуги, ребра, степени вершины.
2. Что такое путь, критический путь?
3. Как определяется длина пути?
4. Какими способами можно задать граф?
5. Чем отличается орграф от неориентированного графа?
6. Как формируются матрицы смежности дуг и ребер?
7. Как построить матрицы инциденций для дуг и ребер?
8. Каким образом сформировать матрицу смежности вершин?
9. Какими способами можно упорядочить граф.
10. Дайте понятие минимального покрывающего дерева.

11. Приведите алгоритм построения минимального покрывающего дерева.

12. Какими методами можно обосновать кратчайшую цепь?

13. Приведите алгоритм Дейкстры для нахождения кратчайшей цепи.

14. Приведите алгоритм Флойда для решения задач о кратчайших цепях.

15. Дайте понятие треугольного оператора Флойда.

16. Как построить матрицу расстояний и матрицу последовательности вершин графа?

17. Приведите структурные модели прямой и двойственной задач линейного программирования для обоснования кратчайшего пути между исходной и завершающей вершинами цепи.

18. Как формируется матрица пропускных способностей дуг (ребер) графа?

19. Приведите алгоритм Форда для решения задач о максимальном потоке в сети.

20. Приведите структурную модель задачи линейного программирования для обоснования максимального потока в сети.

21. Приведите структурную модель задачи линейного программирования для обоснования потока минимальной стоимости в сети.

22. Дайте понятие сетевого графика, события, работы, фиктивной работы.

23. Как рассчитать ранний, поздний сроки свершения и резерв времени события?

24. Как рассчитать ранние сроки начала и окончания работ?

25. Как рассчитать поздние сроки начала и окончания работ?

26. Приведите формулы расчета полного, свободного и независимого резерва времени работ.

27. Как строится график Ганта?

28. Приведите алгоритм распределения ресурсов на сетях.

29. Как построить эпюру интенсивности потребления ресурса?

30. Каким образом оптимизируется порядок выполнения работ при распределении ресурсов на сетях?

31. Приведите структурные экономико-математические модели оптимизации проекта во времени.

32. Приведите структурную экономико-математическую модель оптимизации сети по стоимости.

33. Как определятся и что показывает коэффициент дополнительных затрат в задачах оптимизации сетей по стоимости?

34. Как определить оптимальные затраты средств в работы при оптимизации сетей по стоимости?

35. Перечислите особенности задач о назначениях.

36. Приведите структурную экономико-математическую модель задачи о назначениях.

37. Приведите алгоритм венгерского метода решения задачи о назначениях.

38. Охарактеризуйте различные ситуации при решении задачи о назначениях.

39. Охарактеризуйте сущность задачи коммивояжера.

40. Приведите структурную экономико-математическую модель задачи коммивояжера.

5. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПОРЯДОЧЕНИЯ

5.1. Понятие теории расписаний. Классификация задач теории расписаний

Теория расписаний возникла на базе оперативно-календарного планирования производства в начале 20 в. Ее основоположником считается Гант, впервые предложивший оптимизировать планирование с помощью специальных графиков (Гант-Карт).

Под *операцией* в теории расписаний понимают какое-либо действие, направленное на достижение цели. Операции могут производиться над деталями, узлами, машинами, работами, которые принято называть *требованиями*. *Операция* – это детализированное мероприятие. На производстве с точки зрения технологии часто бывает безразлично, в каком порядке выполняются те или иные операции, но в интересах конкретного исполнителя этот порядок играет важную роль. Это вызвано приоритетностью заказов, затратами, связанными с различным порядком их выполнения на имеющемся оборудовании. Раздел исследования операций, который изучает эффективность выполнения операций в зависимости от порядка их следования, называется *теорией расписания*.

Операции выполняются на машинах или оборудовании, которые принято называть обслуживающим устройством. Под машиной или оборудованием понимают любое обслуживающее устройство, способное выполнять операцию. Множество машин, которые могут выполнять некоторое множество операций, называются *системой обслуживания*. Операции назначаются на машины согласно некоторой дисциплине обслуживания. Совокупность машин, операций и дисциплин назначения операций на машины называются *процессом обслуживания*. Для него составляется расписание, т.е. порядок обслуживания требований обслуживающим устройством. Дисциплина обслуживания, т.е. система выполнения работ на машинах (требований на обслуживающих устройствах) может быть конвейерной, случайной или произвольной.

В основном модели, рассматриваемые в теории расписаний, могут быть отнесены к классу детерминированных задач, т.е. наилучшее решение принимается в условиях определенности, когда четко известны операции и все значения неконтролируемых факторов.

В общем случае для задачи упорядочения должны быть известны:
1. подлежащие выполнению операции; 2. количество и типы обслуживающих устройств; 3. трудоемкость или время и порядок выполнения операций; 4. критерий эффективности расписания.

Задачи упорядочения различаются числом выполняемых операций, характером поступления требований в систему обслуживания (одновременно или в некоторые фиксированные моменты времени), количеством и последовательностью участия обслуживающих устройств в выполнении конкретных операций (системы с одним, двумя, тремя и более обслуживающими устройствами).

В настоящее время более глубоко изучены модели простых процессов обслуживания. Процесс называется *простым*, если:

1) каждое обслуживающее устройство может быть назначено в любой момент времени; 2) работы представляют строго упорядоченную последовательность требований. Для заданного (конкретного) требования существует не более одного требования, непосредственно следующего за ним, и не более одного, непосредственно предшествующего ему; 3) каждое требование обслуживается только на одном обслуживающем устройстве; 4) имеется только по одному обслуживающему устройству каждого вида; 5) отсутствует прерывание операций обслуживания; 6) одновременно не может реализоваться более одной операции одной и той же работы; 7) в каждый момент времени обслуживающее устройство может выполнять не более одной операции.

5.2. Системы с одним обслуживающим устройством

На практике выделяют три вида задач оптимального упорядочения систем с одним обслуживающим устройством. Дадим описание данной системы обслуживания. В систему, состоящую из одного обслуживающего устройства, для выполнения поступает конечное множество требований $N=\{1,2,\dots n\}$. Предполагается, что все эти требования поступают одновременно в нулевой момент времени. Под требованием подразумевается любой объект, например, детали, обрабатываемые на одном станке; сельскохозяйственные операции, выполняемые одним механизмом, работы, выполняемые бригадой строителей и т.д.

Задача состоит в том, чтобы указать расписание обслуживания требований, доставляющее оптимум тому или другому критерию эффективности.

Под *расписанием* понимают такое предписание, по которому в каждый момент времени можно установить, простаивает обслуживающее устройство или нет. Если оно не простаивает, то можно указать, какое из требований оно обслуживает. Т.е. *расписание* – это последовательность выбора требований на обслуживание, которое обозначается $\pi(n)=(i_1, i_2 \ldots i_n)$, где i_2 – элемент из множества N, занимающий в последовательности $\pi(n)$ второе место.

Предполагают, что обслуживающее устройство всегда готово для обслуживания требований. И если имеются ожидающие обслуживания требования (т.е. очередь), то обслуживающее устройство не простаивает. Обслуживание каждого последующего требования начинается сразу после окончания обслуживания предыдущего. Если нужна настройка обслуживающего устройства, то ее продолжительность присоединяется к длительности обслуживания требования.

Прерывание процесса обслуживания требования не допускается, т.е. требование, начав обслуживаться, будет занимать обслуживающее устройство до тех пор, пока не будет полностью обслужено. Задачи теории расписаний оцениваются определенным критерием эффективности.

I) По определению системы обслуживания все требования поступают в систему одновременно в нулевой момент времени и одно из требований обслуживается, а остальные стоят в очереди, следовательно, *первая задача теории расписаний состоит в том, чтобы минимизировать суммарный штраф, связанный с ожиданием всех требований в очереди*.

Очевидно, что суммарная длительность обслуживания всех требований равна сумме обслуживания каждого требования. Но время обслуживания каждого требования заранее известно и, следовательно, суммарная длительность обслуживания всех требований одинакова для всех $n!$ возможных расписаний. Поэтому в качестве критерия эффективности непригодна данная величина. В качестве критерия нельзя принимать максимальное или минимальное количество требований в системе, так как эти критерии не зависят от порядка обслуживания требований.

Введем условные обозначения.

t_i – продолжительность обслуживания требования вида i;

$\underline{t}_i$ – время начала обслуживания требований вида i;

$\bar{t}_i$ – время окончания обслуживания требований вида i, $i \in N$.

Пусть d_i – штраф за ожидание требования вида i в очереди в течение единицы времени. Тогда суммарный штраф, связанный с ожиданием всех требований в очереди будет зависеть от расписания и для заданного расписания. $\pi (n)$ будет вычисляться по формуле:

$$\Phi_1(\pi_n) = \sum_{i=1}^{n} d_i \cdot \underline{t}_i .$$

Первая задача состоит в том, чтобы построить такое расписание, при котором $\Phi_1 \pi (_n)$ критерий эффективности будет минимальным.

Рассмотрим *алгоритм решения первой задачи*.

Для решения первой задачи, т.е. построения такого расписания, которое минимизирует критерий эффективности $\Phi_1(\pi_n) = \sum_{i=1}^{n} d_i \cdot \underline{t}_i$ необходимо для всех требований вычислить отношение $\frac{t_i}{d_i}$, $i \in N$ и упорядочить требования по неубыванию этих отношений, т.е.

$$\frac{t_i}{d_i} \le \frac{t_{i+1}}{d_{i+1}}, \ i \in N .$$

Пример, необходимо построить расписание обслуживания требований одним устройством, минимизирующее суммарный штраф, связанный с ожиданием всех требований в очереди для информации, представленной в табл. 5.1 и вычислить величину штрафа.

Т а б л и ц а 5.1. **Исходная информация первой задачи**

Параметры	Требования						
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
Продолжительность обслуживания требования, t_i	5	2	7	10	6	8	4
Штраф за ожидание требования в очереди в течение единицы времени, α_i	10	8	20	2	3	1	20

Решение задачи.

Для информации задачи, заданной в табл. 5.1. определим:

а) время начала обслуживания требований по формуле:

$$\underline{t}_{i+1} = \underline{t}_i + t_i ,$$

т.е. время начала обслуживания последующего требования равно сумме времени начала обслуживания предыдущего требования и непосредственного времени его обслуживания;

б) пусть требования будут обслуживаться в порядке, установленном в табл. 5.1 (неоптимальном порядке обслуживания). Тогда требование T_1 поступает на обслуживание в нулевой момент времени, а требование T_2 – в момент времени равный 0+5=5, а требование T_3 – в момент времени 5+2=7 и т.д. (табл. 5.2);

в) найдем штраф, связанный с ожиданием каждого требования в очереди при неоптимальном порядке их обслуживании: $\alpha_i \cdot \underline{t}_i$ (табл. 5.2).

г) рассчитаем суммарный штраф $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \underline{t}_i$.

В нашем примере он равен 0+40+140+28+72+30+760=1070.

Т.е. для расписания $\pi(n)=(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7)$ критерий эффективности $\Phi_1(\pi n)$=1070 у.д.е;

д) вычислим для каждого требования отношение $\frac{t_i}{\alpha_i}$ (табл. 5.2).

Т а б л и ц а 5.2. **Решение первой задачи**

Параметры	Требования						
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
Продолжительность обслуживания требования, t_i	5	2	7	10	6	8	4
Штраф за ожидание требования в очереди в течение единицы времени, α_i	10	8	20	2	3	1	20
Неоптимальный порядок обслуживания	1	2	3	4	5	6	7
Время начала обслуживания требования, $\underline{t}_i$	0	5	7	14	24	30	38
Штраф, связанный с ожиданием требования в очереди, $\alpha_i \cdot \underline{t}_i$	0	40	140	28	72	30	760
Отношение $\frac{t_i}{\alpha_i}$	0,5	0,25	0,35	5	2	8	0,2
Оптимальный порядок обслуживания	4	2	3	6	5	7	1
Время начала обслуживания требования, $\underline{t}_i$	13	4	6	24	18	34	0
Штраф, связанный с ожиданием требования в очереди, $\alpha_i \cdot \underline{t}_i$	130	32	120	48	54	34	0

е) упорядочим требования по неубыванию этих отношений, т.е. $\frac{t_i}{\alpha_i} \le \frac{t_{i+1}}{\alpha_{i+1}}$, $i \in N$ и определим оптимальный порядок обслуживания требований (табл. 5.2);

ж) найдем время начала обслуживания требований для оптимального порядка их обслуживания ($\underline{t}_{i+1} = \underline{t}_i + t_i$) и расчеты внесем в табл. 5.2.

з) рассчитаем штраф, связанный с ожиданием каждого требования в очереди при оптимальном порядке их обслуживания ($\alpha_i \underline{t}_i$);

и) определим суммарный штраф ($\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \underline{t}_i$).

При оптимальном порядке обслуживания требований он равен 130+32+120+48+54+34+0=418 у.д.е.

Т.е. оптимальным расписанием является расписание $\pi_{(n)}=(T_7, T_2, T_3, T_1, T_5, T_4, T_6)$ и для него $\Phi_1(\pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \underline{t}_i$=418 у.д.е.;

к) эффект от оптимизации расписания обслуживания требований для первой задачи, в нашем примере, равен Э=1070–418=652 у.д.е.

II) Рассмотрим вторую задачу теории расписаний системы с одним обслуживающим устройством.

Допустим после завершения обслуживания требование остается в системе и ожидает до тех пор, пока не будет обслужено последнее из множества N, т.е. до момента времени $T = \sum_{i=1}^{n} t_i$.

Если γ_i – количество средств, связываемых требованием вида i в единицу времени после завершения его обслуживания, то суммарное количество средств, связанных всеми требованиями после завершения их обслуживания будет равно:

$$\Phi_2(\pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (T - \bar{t}_i) ,$$

где $\bar{t}_i$ – время окончания обслуживания i-го требования. Оно равно сумме времени начала его обслуживания и времени его непосредственного обслуживания:

$$\bar{t}_i = \underline{t}_i + t_i .$$

Вторая задача состоит в том, чтобы построить расписание минимизирующее суммарную величину средств, связываемых требованиями в связи с их пребыванием в системе после завершения обслуживания.

Для решения второй задачи необходимо упорядочить требования по невозрастанию отношений $\frac{t_i}{\gamma_i}$, $i \in N$, т.е.:

$$\frac{t_i}{\gamma_i} \geq \frac{t_{i+1}}{\gamma_{i+1}}, \; i \in N .$$

Пример, необходимо построить расписание обслуживания требований одним устройством минимизирующее величину средств, связываемых требованиями в связи с их пребыванием в системе до момента завершения обслуживания последнего требования для данных представленных в табл. 5.3. Требуется вычислить величину средств, связываемых требованиями, находящимися в системе после завершения обслуживания.

Решение задачи. Допустим, требования будут обслуживаться в том порядке, который, задан в табл. 5.3 (неоптимальный порядок обслуживания).

Т а б л и ц а 5.3. **Исходная информация второй задачи**

Параметры	Требования					
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
Продолжительность обслуживания требования, t_i	3	5	4	2	6	8
Количество средств, связываемых требованием в единицу времени после завершения его обслуживания, γ_i	3	2	8	1	2	5

а) Определим время окончания обслуживания каждого требования ($\bar{t}_i = \underline{t}_i + t_i$) при неоптимальном порядке их обслуживания (табл. 5.4). Например, требование T_1 начинает обслуживаться в нулевой момент времени и обслуживается 3 единицы времени, следовательно, время окончания его обслуживания будет 3 единицы. Требование T_2 начинает обслуживаться в третий момент времени и обслуживается 5 единиц времени, т.е. время окончания его обслуживания будет 3+5=8 единиц и т.д.;

б) рассчитываем время окончания обслуживания всех требований в системе по формуле:

$$T = \sum_{i=1}^{n} t_i .$$

Для нашего случая T=3+5+4+2+6+8=28 единиц времени;

в) определим время ожидания каждого требования в системе после завершения его обслуживания при неоптимальном порядке обслуживания: $T - \bar{t}_i$. Результаты расчетов заносим в табл. 5.4;

Т а б л и ц а 5.4. **Решение второй задачи**

Параметры	Требования					
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
Продолжительность обслуживания требования, t_i	3	5	4	2	6	8
Количество средств, связываемых требованием в единицу времени после завершения его обслуживания, γ_i	3	2	8	1	2	5
Неоптимальный порядок обслуживания	1	2	3	4	5	6
Время окончания обслуживания требования, $\bar{t}_i$	3	8	12	14	20	28
Время ожидания требования в системе после его обслуживания, $T-\bar{t}_i$	25	20	16	14	8	0
Количество средств, связываемых требованием после завершения его обслуживания, $\gamma_{\text{i}}(T-\bar{t}_i)$	75	40	128	14	16	0
Отношение $\frac{t_i}{\gamma_i}$	1	2,5	0,5	2	3	1,6
Оптимальный порядок обслуживания	5	2	6	3	1	4
Время окончания обслуживания требования, $\bar{t}_i$	24	11	28	13	6	21
Время ожидания требования в системе после его обслуживания, $T-\bar{t}_i$	4	17	0	15	22	7
Количество средств, связываемых требованием после завершения его обслуживания, $\gamma_i(T-\bar{t}_i)$	12	34	0	15	44	35

г) найдем количество средств, связываемых каждым требованием после завершения обслуживания при неоптимальном порядке их обслуживания: $\gamma_{\text{i}}(T-\bar{t}_i)$;

д) рассчитаем суммарное количество средств, связываемых требованиями после их обслуживания при неоптимальном порядке их обслуживания: $\sum_{i=1}^{n}\gamma_{\text{i}}(T-\bar{t}_i)$. В данном случае критерий эффективности равен 75+40+128+14+16+0=273 у.д.е., т.е. для расписания $\pi_{(n)}=(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$ критерий эффективности $\Phi_2\pi_{(n)}$=273 у.д.е.;

е) вычислим для каждого требования отношение $\frac{t_i}{\gamma_i}$ (табл. 5.4).

ж) упорядочим требования по невозрастанию этих отношений, т.е. $\frac{t_i}{\gamma_i} \geq \frac{t_{i+1}}{\gamma_{i+1}}$, $i \in N$ и установим оптимальный порядок обслуживания требований (табл. 5.4);

з) найдем время ожидания каждого требования в системе после завершения его обслуживания при оптимальном порядке обслуживания требований: $(T - \bar{t}_i)$;

и) рассчитаем количество средств, связываемых каждым требованием после завершения обслуживания при условии оптимального порядка их обслуживания: $(\gamma_i(T - \bar{t}_i))$;

к) определим суммарное количество средств, связываемых требованиями после их обслуживания при оптимальном порядке обслуживания требований: $(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i(T - \bar{t}_i))$. В нашем случае для оптимального расписания $\pi_{(n)}=(T_5,\ T_2,\ T_4,\ T_6,\ T_1,\ T_3)$, критерий эффективности $\Phi_2(\pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(T - \bar{t}_i)$=12+34+15+44+35=120 у.д.е.;

л) эффект от оптимизации расписания обслуживания требований для второй задачи, в нашем случае, равен Э=273–120=153 у.д.е.

III) Рассмотрим третью задачу оптимального упорядочения.

Допустим, D_i – директивный срок обслуживания требования вида i, $i \in N$, т.е. это момент времени, к которому желательно завершить процесс обслуживания этого требования. Но не всегда удается построить расписание, при котором обслуживание каждого требования вида i будет завершено не позднее директивного срока D_i. Тогда величина z_i будет обозначать задержку (т.е. превышение директивного срока окончания обслуживания) в обслуживании требования вида i по сравнению с его директивным сроком:

$$z_i = \max\{0, \bar{t}_i - D_i\},\ i \in N,$$

Пусть δ_i – штраф за задержку в обслуживании требования вида i на единицу времени. Тогда, критерий эффективности, связанный с задержкой требований, запишем так:

$$\Phi_3(\pi_n) = \max_{i \in N} \delta_i \cdot z_i .$$

Он позволяет вычислять величину максимального штрафа связанного с задержкой обслуживания требований.

Третья задача состоит в том, чтобы построить такое расписание π_n, которое будет доставлять минимум критерию эффективности $\Phi_3(\pi_n)$.

Третья задача построения расписания решается с помощью следующего алгоритма:

1. вычисляем время окончания обслуживания всех требований по формуле: $T=\sum_{i=1}^{n} t_i$;

2. среди всех неупорядоченных требований находим такое требование с номером λ, для которого будет выполняться условия:

$$\delta_\lambda \cdot z_\lambda = \min \delta_\lambda z'_\lambda ,$$

где z'_λ – задержка в обслуживании требования по сравнению с его директивным сроком при допущении, что последним обслуживается рассматриваемое требование.

При этом z'_λ определяется по формуле:

$$z'_\lambda = \max\{0; T - D_i\} ,$$

а минимальное значение произведения $\delta_\lambda z'_\lambda$ вычисляется только по множеству неупорядоченных требований;

3. найденное требование с номером λ ставим выполняться последним среди рассматриваемого множества. Исключаем требование с номером λ из рассмотрения. Если множество оставшихся требований не пусто, то принимаем T равным $T - t_\lambda$ и переходим к шагу 2, в противном случае – найден оптимальный порядок обслуживания требований.

Пример, требуется построить расписание обслуживания требований одним устройством оптимальное по критерию $\Phi_3(\pi_n) = \max_{i \in N} \delta_i z_i$ для данных представленных в табл. 5.5.

Т а б л и ц а 5.5. **Исходная информация третьей задачи**

Параметры	Требования					
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
Продолжительность обслуживания требования, t_i	2	4	3	5	1	6
Штраф за задержку обслуживания требования на единицу времени, δ_i	4	3	2	2	5	1
Директивный срок обслуживания требования, D_i	4	7	6	8	4	10

Решение задачи. Рассчитаем параметры системы при неоптимальном порядке обслуживания требований:

а) определим время окончания обслуживания каждого требования ($\bar{t}_i = \underline{t}_i + t_i$) при неоптимальном порядке их обслуживания. Расчеты заносим в табл. 5.6;

б) вычислим задержку в обслуживании каждого требования по сравнению с его директивным сроком, используя формулу:

$$z_i = \bar{t}_i - D_i \,.$$

При этом, если $\bar{t}_i < D_i$, то z_i принимаем равным нулю.

Например, для требования T_1 задержка в обслуживании равна $z_1 = \bar{t}_1 - D_1$=2–4=0, а для требования T_3 задержка в обслуживании равна $z_3 = \bar{t}_3 - D_3$=9–6=3 (табл. 5.6);

Т а б л и ц а 5.6. **Решение третьей задачи**

Параметры	Требования					
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
1	2	3	4	5	6	7
Продолжительность обслуживания требования, t_i	2	4	3	5	1	6
Штраф за задержку обслуживания требования на единицу времени, δ_i	4	3	2	2	5	1
Директивный срок обслуживания требования, D_i	4	7	6	8	4	10
Неопределенный порядок обслуживания	1	2	3	4	5	6
Время окончания обслуживания требования, $\bar{t}_i$	2	6	9	14	15	21
Задержка в обслуживании требования по сравнению с его директивным сроком, z_i	0	0	3	6	11	11
Штраф за задержку в обслуживании требования, $\delta_i z_i$	0	0	6	12	55	11
Задержка в обслуживании требования по сравнению с его директивным сроком при условии, что оно обслуживается последним, z_i' (при T=21)	17	14	15	13	17	11
Штраф за задержку в обслуживании требования при условии, что оно обслуживается последним, $\delta_i z_i'$	68	42	30	26	85	11
Задержка в обслуживании требования по сравнению с его директивным сроком при условии, что оно обслуживается последним, z_i' (при T=15)	11	8	9	7	11	–
Штраф за задержку в обслуживании требования при условии, что оно обслуживается последним, $\delta_i z_i'$	44	24	18	14	55	–
Задержка в обслуживании требования по сравнению с его директивным сроком при условии, что оно обслуживается последним, z_i' (при T=10)	8	6	7	–	9	–

Окончание табл. 5.6.

1	2	3	4	5	6	7
Штраф за задержку в обслуживании требования при условии, что оно обслуживается последним, $\delta_i z_i'$	32	18	14	–	45	–
Задержка в обслуживании требования по сравнению с его директивным сроком при условии, что оно обслуживается последним, z_i' (при T=7)	3	0	–	–	3	–
Штраф за задержку в обслуживании требования при условии, что оно обслуживается последним, $\delta_i z_i'$	12	0	–	–	15	–
Штраф за задержку в обслуживании требования при условии, что оно обслуживается последним, z_i' (при T=3)	0	–	–	–	0	–
Штраф за задержку в обслуживании требования при условии, что оно обслуживается последним, $\delta_i z_i'$	0	–	–	–	0	–
Оптимальный порядок обслуживания	1	3	4	5	2	6
Время окончания обслуживания требования, $\bar{t}_i$	2	7	10	15	3	21
Задержка в обслуживании требования по сравнению с его директивным сроком, z_i	0	0	3	7	0	11
Штраф за задержку в обслуживании требования, $\delta_i z_i$	0	0	6	14	0	11

в) находим штраф за задержку в обслуживании каждого требования при неоптимальном порядке обслуживания: $\delta_i z_i$;

г) определим значение критерия эффективности задачи при неоптимальном расписании:

$$\Phi_3(\pi_n) = \max_{i \in N} \delta_i \cdot z_i = 55 \text{ у.д.е.}$$

д) оптимизируем порядок обслуживания требований, для этого сначала вычислим время обслуживания всех требований в системе (или время обслуживания последнего требования): $T = \sum_{i=1}^{n} t_i$.

В нашем примере T=2+4+3+5+1+6=21 единицы времени.

е) определим задержку в обслуживании каждого требования по сравнению с его директивным сроком при условии, что последним обслуживается рассматриваемое требование с номером i. Данную задержку в обслуживании определяем по формуле:

$$z_i' = \max\{0;\ T - D_i\}$$

Например, для требования T_1 данная задержка равна $z_1' = T - D_1$=21–4=17 единиц времени;

ж) рассчитаем штраф за задержку в обслуживании каждого требования при условии, что оно обслуживается последним: $\delta_i z_i'$;

з) находим требование, для которого произведение $\delta_i z_i'$ самое минимальное. Это требование T_6, оно будет обслуживаться последним. Исключаем его из рассмотрения;

и) после исключения T_6 осталось множество требований (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5), для которых расчет повторяем сначала с пункта д) и определяем для них T=2+4+3+5+1=15. Определяем z_i'. Например, для требования T_1 задержка в обслуживании будет равна $z_1' = T - D_1$=15–4=11 и т.д. Для множества требований (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5) определяем требование для которого произведение $\delta_i z_i'$ будет минимальным. Это требование T_4, оно будет обслуживаться предпоследним. Изымаем его из рассмотрения и расчеты повторяем сначала с пункта д) и т.д. Для требований T_1 и T_5 произведение $\delta_i z_i'$ равно нулю, поэтому порядок обслуживания этих требований несущественен и любое из них может быть выбрано для обслуживания, как первым, так и вторым.

Таким образом, порядок обслуживания требований, которому соответствует минимальное значение Φ_3 будет следующим ([T_1, T_5], T_2, T_3, T_4, T_6). Запись [T_1, T_5] говорит о том, что порядок обслуживания требований T_1 и T_5 безразличен;

к) используя методику пунктов а, б, в, г определим значение критерия эффективности задачи при оптимальном расписании:

$$\Phi_3(\pi_n) = \max_{i \in N} \delta_i \cdot z_i = 14 \text{ у.д.е.}$$

л) рассчитаем, для нашего примера, эффект от оптимизации расписания обслуживания требований. Для третьей задачи он равен $Э$=55–14=41 у.д.е.

Для наглядности расписание обслуживания требований в системе с одним обслуживающим устройством можно представить графически.

Для этих целей наиболее часто пользуются графиком Ганта, который представляет собой программу занятости обслуживающего устройства. Каждая операция на графике изображается масштабированным отрезком прямой, соответствующим длительности обслуживания требования. Изобразим оптимальное расписание для информации третьей задачи в виде кусочно-непрерывной функции, т.е. в виде графика Ганта (рис. 5.1).

Кроме графика Ганта для наглядного изображения расписания используются планировочный и ленточные графики. Планировочный график позволяет схематически изобразить процесс обслуживания требований.

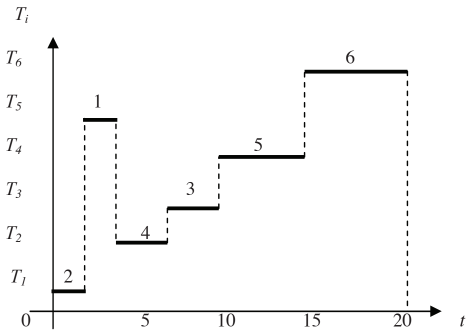


Рис. 5.1. График Ганта

При этом каждому требованию отводится одна строка, в которой проводится линия, соответствующая времени обслуживания требования в выбранном масштабе времени (рис. 5.2).

№	Требование	Время обслуживания																				
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	T_1																					
2	T_5																					
3	T_2																					
4	T_3																					
5	T_4																					
6	T_6																					

Рис. 5.2. Планировочный график

Ленточный график – это изображение последовательности обслуживания требований, время обслуживания которых на графике изображается последовательно с учетом длительности их обслуживания (рис. 5.3).

№	Требова-ние	Время обслуживания																				
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	T_1	■	■																			
2	T_5			■																		
3	T_2				■	■	■	■														
4	T_3								■	■	■											
5	T_4											■	■	■	■	■						
6	T_6																■	■	■	■	■	■

Рис. 5.3. Ленточный график

5.3. Последовательное обслуживание (Общая задача Джонсона. Задача Джонсона для двух и трех машин)

Общая задача Джонсона. Типичной задачей теории расписаний является проблема составления расписания работы технологической линии, состоящей из m-станков $\left(i=1,\overline{m}\right)$, на которых нужно обработать партии из n-деталей $\left(j=1,\overline{n}\right)$. Критерием эффективности расписания станет минимальное время обработки всех n-деталей, каждая из которых должна последовательно пройти обработку на каждом станке. Исходными данными задачи служит продолжительность обработки на i-ом станке j-ой детали t_{ij}.

Т.е. необходимо определить порядок обработки n-деталей, минимизирующий общее время их изготовления.

При условиях: 1) обработка каждой детали на i-м станке должна начинаться не ранее, чем окончится на станке i–1; 2) на каждом станке одновременно может обрабатываться не более одной детали; 3) начавшаяся операция не прерывается до полного ее завершения.

Такая задача получила название задачи Джонсона. В 1954г. американский ученый С.М. Джонсон сформулировал и решил ее для двух станков.

Задача Джонсона для двух машин.

Пример. Обжарочные и пароварочные камеры являются ведущим оборудованием термического цеха при выработке вареных колбасных изделий, поэтому повышение производительности этих камер позволяет увеличить производство колбасных изделий.

Полуфабрикаты колбасных изделий в термическом цехе, проходят последовательно обработку в обжарочных, а затем в пароварочных камерах, превращаются в готовую продукцию. Длительность обжарки колбас зависит от толщины оболочки, а варки – от диаметра оболочки.

В зависимости от вида колбас, имеющих разную толщину и диаметр оболочки, меняется длительность обжарки и варки колбас, что служит причиной простоя пароварочных камер. Необходимо составить такое расписание загрузки колбасных полуфабрикатов в обжарочную камеру, которое позволит в процессе их обжарки и варки свести простои пароварочной камеры к минимуму.

Длительность обжарки и варки колбасных изделий приведена в табл. 5.7.

Т а б л и ц а 5.7.**Длительность обжарки и варки колбасных изделий, мин**

№ п.п.	Колбаса	Обжарка	Варка
1	Чайная	60	50
2	Докторская	70	60
3	Сардельки	50	30
4	Любительская	120	140
5	Сосиски	40	20
6	Столовая	60	60
7	Отдельная	130	150

Определим простои пароварочной камеры, считая, что обжарка и варка колбасных полуфабрикатов происходит в неоптимальном порядке (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7).

Пусть x_i – продолжительность простоя пароварочной камеры, мин.

Определим простой пароварочной камеры при обжарки «Чайной» колбасы. Пока первый вид колбасных изделий обжаривается, пароварочная камера простаивает, следовательно, x_1=60 минут.

Определим простой пароварочной камеры при обжарки «Докторской» колбасы.

При этом необходимо учесть, что пароварочная камера не работает, пока «Чайная» и «Докторская» колбасы обжариваются. Но пароварочная камера простаивает 60 минут и пока обжаривается «Докторская» колбаса, происходит процесс варки «Чайной» колбасы, т.е.

x_2=60+70–50–60=20 минут.

Рассуждая аналогичным образом, определяем простои пароварочной камеры (если получено отрицательное число, это означает, что простоя нет).

$$x_3=130+50-110-60-20=0$$
$$x_4=180+120-110-30-60-20=80$$
$$x_5=300+40-140-140-80=0$$
$$x_6=340+60-280-20-80-80=0$$
$$x_7=400+130-300-60-80-80=10 \text{ (табл. 5.8).}$$

Т а б л и ц а 5.8. **Расчет простоев пароварочной камеры при неоптимальном порядке обслуживания требований**

№ п.п.	Колбаса	Длительность, мин		Простои пароварочной камеры, мин
		обжарки	варки	
T_1	Чайная	60	50	60
T_2	Докторская	70	60	20
T_3	Сардельки	50	30	0
T_4	Любительская	120	140	80
T_5	Сосиски	40	20	0
T_6	Столовая	60	60	0
T_7	Отдельная	130	150	10

Таким образом, суммарный простой пароварочной камеры составит 170 минут, в том числе по чайной колбасе – 60 минут; докторской – 20; любительской 80 и по отдельной – 10 минут.

Изобразим с помощью Ганта порядок обслуживания требований в системе с двумя обслуживающими устройствами при неоптимальном порядке обжарки и варки колбасных полуфабрикатов (рис. 5.4).

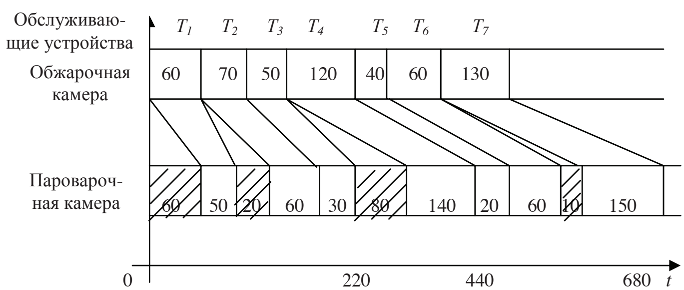


Рис. 5.4. График Ганта для системы с двумя обслуживающими устройствами при неоптимальном порядке обслуживания требований

На графике Ганта изображена последовательность обслуживания требований на первом и втором обслуживающих устройствах. При этом время простоя на графике изображено заштрихованной частью.

Если порядок прохождения обжарки и варки полуфабрикатов колбасных изделий поменять, то можно уменьшить суммарный простой пароварочной камеры.

Рассмотрим алгоритм решения задачи.

1. Запишем матрицу размерностью $n \cdot 2$, коэффициенты которой равны времени обслуживания требований t_{ij} первым и вторым устройствами (табл. 5.9).

Т а б л и ц а 5.9. **Определение оптимального порядка обслуживания требований**

Требования	Устройства		Оптимальный порядок обслуживания требований
	1	2	
T_1	60	50	5
T_2	70	60	4
T_3	50	30	6
T_4	120	140	2
T_5	40	20	7
T_6	60	60	1
T_7	130	150	3

2. В матрице $\|t_{ij}\|$ находим минимальный элемент. Если он находится в первом столбце, соответствующим первому обслуживающему устройству, то данное требование обслуживается первым, если во втором столбце, то – последним.

3. Исключаем из рассмотрения выбранное требование и работу продолжаем согласно п. 2 пока не упорядочим порядок обслуживания требований.

4. Если в одном столбце имеются несколько минимальных величин, то выбираем сначала требование с меньшим номером.

5. Если и в первом и во втором столбце есть несколько одинаковых минимальных величин, то выбираем сначала требования с первого столбца.

Решение задачи. Определяем минимальный элемент. Он равен 20, так как он стоит во втором столбце, то требование T_5 будет обслуживаться последним. Мысленно вычеркиваем из рассмотрения требование T_5, выбираем минимальный элемент равный 30. Он стоит во втором столбце, следовательно, требование T_3 будет обслуживаться предпоследним. Выбираем минимальный элемент равный 50. Он стоит во втором столбце, следовательно, требование T_1 обслуживается пятым. Выбираем минимальный элемент равный 60. Их несколько. Берем в первом столбце, следовательно, требование T_6 будет обслуживаться первым, а требование T_2 – четвертым, требование T_4 – вторым, а требование T_7 – третьим.

Рассчитаем простои пароварочной камеры при оптимальном порядке обслуживания требований, т.е. для расписания $\pi_{(n)}=(T_6, T_4, T_7, T_2, T_1, T_3, T_5)$. Приведем расчет простоев: $x_1=60$

$$x_2=60+120-60-60=60$$
$$x_3=180+130-60-140-60-60=0$$
$$x_4=310+70-200-150-120=0$$
$$x_5=380+60-350-60-120=0$$
$$x_6=420+50-410-50-120=0$$
$$x_7=470+40-460-30-120=0 \text{ (табл. 5.10).}$$

Т а б л и ц а 5.10. **Расчет простоев пароварочной камеры при оптимальном порядке обслуживания требований**

Требование	Колбаса	Длительность, мин		Простои пароварочной камеры, мин
		обжарки	варки	
T_6	Столовая	60	60	60
T_4	Любительская	120	140	60
T_7	Отдельная	130	150	0
T_2	Докторская	70	60	0
T_1	Чайная	60	50	0
T_3	Сардельки	50	30	0
T_5	Сосиски	40	20	0

Суммарный простой равен 120 минут. Т.е. простои пароварочной камеры сокращаются на 50 минут (170–120) или на $\frac{50}{170}=29{,}4\%$, что позволит при той же мощности оборудования увеличить производство продукции.

Изобразим с помощью графика Ганта оптимальное расписание (рис. 5.5).

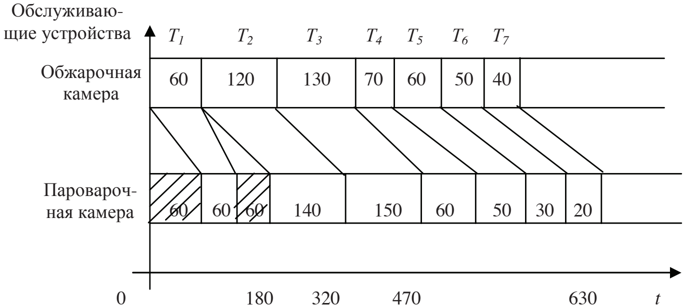


Рис. 5.5. График Ганта для системы с двумя обслуживающими устройствами при оптимальном порядке обслуживания требований

Задача Джонсона для трех машин или трех обслуживающих устройств.

При $m \geq 3$ алгоритм Джонсона не пригоден, а простых алгоритмов пока не найдено. При m = 3 можно воспользоваться алгоритмом Джонсона для двух обслуживающих устройств, так как оптимальный план задачи Джонсона произвольной размерности достижим на множество планов, в которых последовательность запуска деталей на первом станке совпадает с последовательностью обработки деталей на втором станке, а последовательность на последнем станке – с последовательностью на предпоследнем станке. Отсюда следует, что для трех станков последовательность обработки деталей на всех станках одинакова. Джонсон доказал, что алгоритм двух станков можно применить к трем станкам в случае, если:

$$\min a_j \geq \max b_j \text{ или } \min c_j \geq \max b_j,$$

где a_j – время обработки j-ой детали на первом станке;

b_j – время обработки j-ой детали на втором станке;

c_j – время обработки j-ой детали на третьем станке.

Алгоритм решения задачи следующий: оптимальный порядок обслуживания требований находят с помощью сумм $a_j + b_j$ и $b_j + c_j$. К ним применяют алгоритм Джонсона для двух станков.

Пример. Имеется 3 станка, на которых должны пройти обработку 6 деталей. Необходимо составить такое расписание обслуживания требований, т.е. определить такую последовательность обработки деталей на станках, которая позволит минимизировать простои станков. Время обслуживания требований на станках приведено в табл. 5.11.

Т а б л и ц а 5.11. **Время обработки деталей на трех станках**

Детали (требования)	Станки		
	1	2	3
T_1	8	5	9
T_2	12	6	15
T_3	9	4	10
T_4	10	6	12
T_5	7	5	8
T_6	11	7	14

Для расписания $\pi_{(n)}=(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$ найдем простои второго и третьего станков.

Простои для второго станка определяются из выше изложенного алгоритма, используемого при решении задачи оптимизации расписания обслуживания требований для двух обслуживающих устройств:

$$x_1=8$$
$$x_2=8+12–5–8=7$$
$$x_3=20+9–5–6–8–7=3$$
$$x_4=29+10–5–6–4–8–7–3=6$$
$$x_5=39+7–5–6–4–6–8–7–3–6=1$$
$$x_6=46+11–5–6–4–6–5–8–7–3–6–1=6 \text{ (табл. 5.12).}$$

Простои второго станка равны 8+7+3+6+1+6=31 единицы времени.

Рассчитаем простои третьего станка, исходя из следующих соображений. Третий станок стоит, пока первая деталь обрабатывается последовательно на первом и втором станках, следовательно, его простой равен x_1=8+5=13 единиц времени. Далее при расчете значения простоя учитывают время обслуживания на первом станке первой и второй детали и время обработки второй детали на втором станке без учета времени работы третьего станка при обработке первой детали и времени простоя третьего станка, т.е. x_2=8+12+6–9–13=4.

Рассуждая аналогично, определяем простои третьего станка:

$$x_1=8+5=13$$
$$x_2=8+12+6–9–13=4$$
$$x_3=20+9+4–9–15–13–4=0$$
$$x_4=29+10+6–9–15–10–13–4=0$$
$$x_5=39+7+5–9–15–10–12–13–4=0$$
$$x_6=46+11+7–9–15–10–12–8–13–4=0 \text{ (табл. 5.12).}$$

Простои третьего станка равны 13+4=17 единиц времени.

Т а б л и ц а 5.12. **Расчет простоев второго и третьего обслуживающих устройств при неоптимальном расписании**

Детали (требования)	Станки			Простои станков	
	1	2	3	2	3
T_1	8	5	9	8	13
T_2	12	6	15	7	4
T_3	9	4	10	3	0
T_4	10	6	12	6	0
T_5	7	5	8	1	0
T_6	11	7	14	6	0

Изобразим с помощью графика Ганта порядок обслуживания требований в системе с тремя обслуживающими устройствами при неоптимальном порядке обработки деталей на станках (рис. 5.6).

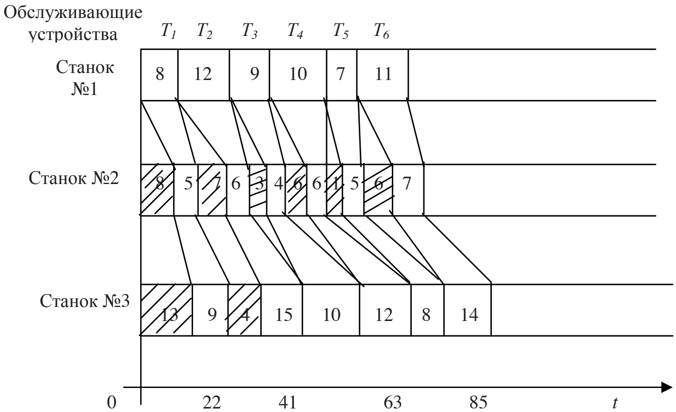


Рис. 5.6. График Ганта для системы с тремя обслуживающими устройствами при неоптимальном порядке обслуживания требований

На графике Ганта наглядно изображена последовательность обработки каждой детали сначала на первом, затем на втором и третьем станках.

С целью оптимизации расписания проверим выполнимость условия $\min a_j \geq \max b_j$ или $\min c_j \geq \max b_j$. Для этого находим минимальный элемент в первом столбце. Он равен 7, т.е. $\min a_j = 7$. Находим наибольшее число во втором столбце, $\max b_j$=7. А минимальный элемент в третьем столбце равен 8, т.е. $\min c_j = 8$. Т.е. максимальный элемент второго столбца не больше минимальных элементов, стоящих в первом и втором столбцах.

Следовательно, для оптимизации порядка обслуживания требований на трех обслуживающих устройствах можно применить алгоритм решения задачи обслуживания требований на двух обслуживающих устройствах (табл. 5.12).

Т а б л и ц а 5.12. **Определение оптимального порядка обслуживания требования на трех обслуживающих устройствах**

Требования	$a_j + b_j$	$b_j + c_j$	Оптимальный порядок обслуживания
T_1	13	14	2
T_2	18	21	5
T_3	13	14	3
T_4	16	18	4
T_5	12	13	1
T_6	18	21	6

Находим оптимальный порядок обслуживания требований, т.е. ищем минимальный элемент. Он равен 12 и стоит в первом столбце, значит, требование T_5 будет обслуживаться первым, мысленно вычеркиваем его и выбираем следующий минимальный элемент. Он равен 13, таких элементов два и они стоят в первом столбе, следовательно, вторым и третьим будут обслуживаться соответственно первое и третье требование. Далее на обслуживание поступят требование T_4, затем требования T_2 и T_6.

Рассчитаем простои станков в соответствии с принятым порядком обслуживания требований:

а) простои для второго станка

$$x_1=7$$
$$x_2=7+8-5-7=3$$
$$x_3=15+9-5-5-7-3=4$$
$$x_4=24+10-10-4-10-4=6$$
$$x_5=34+12-14-6-14-6=6$$
$$x_6=46+11-20-6-20-6=5.$$

Простои второго станка составят 31 единицу времени.

б) простои для третьего станка

$$x_1=7+5=12$$
$$x_2=7+8+5-8-12=0$$
$$x_3=15+9+4-8-9-12=0$$
$$x_4=24+10+6-17-10-12=1$$
$$x_5=34+12+6-27-12-12-1=0$$
$$x_6=46+6-39-15-12-1=0.$$

Простои третьего станка равны 13 единиц времени (табл. 5.13).

Т а б л и ц а 5.13. **Определение простоев второго и третьего станка при оптимальном расписании**

Оптимальный порядок обслуживания	Станки			Простои станков	
	1	2	3	№2	№3
T_5	7	5	8	7	12
T_1	8	5	9	3	0
T_3	9	4	10	4	0
T_4	10	6	12	6	1
T_2	12	6	15	6	0
T_6	11	7	15	5	0

Изобразим на графике Ганта оптимальный порядок обслуживания деталей на трех станках (рис. 5.7).

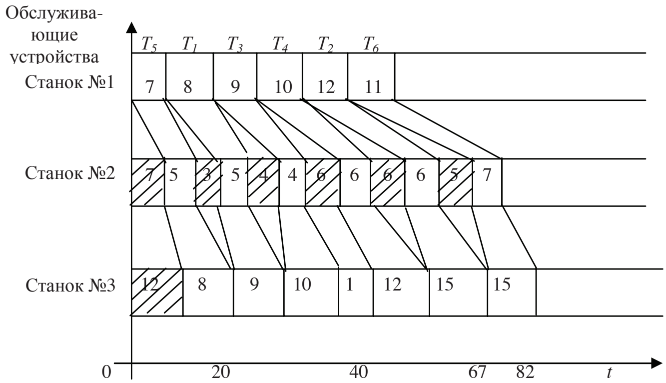


Рис. 5.7. График Ганта для системы с тремя обслуживающими устройствами при оптимальном порядке обслуживания требований

Таким образом, оптимизация расписания позволила сократить простои второго и третьего станков с 48 (31+17) до 44 (31+13) единиц времени, т.е. простои оборудования сокращены на 8,3%.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте понятие операции, требованию, системы обслуживания, процесса обслуживания.
2. Охарактеризуйте простой процесс обслуживания.
3. Дайте понятие расписания.
4. Приведите алгоритм решения задачи оптимального упорядочения с одним обслуживающим устройством при минимизации суммарного штрафа, связанного с ожиданием всех требований в очереди.
5. Перечислите правила решения задачи оптимального упорядочения с одним обслуживающим устройством при минимизации суммарной величины средств, связываемых требованиями в связи с их пребыванием в системе после завершения обслуживания.
6. Дайте понятие директивного срока обслуживания требования.
7. Приведите алгоритм решения задачи оптимального упорядочения с одним обслуживающим устройством при минимизации максимального штрафа за задержку в обслуживании требования.
8. Какими способами можно геометрически изобразить оптимальное расписание обслуживания требований?
9. Сформулируйте общую задачу Джонсона.

10. Как определяются простои второго обслуживающего устройства?

11. Как изображается порядок обслуживания требований в системе с двумя обслуживающими устройствами с помощью графика Ганта?

12. Приведите алгоритм решения задачи оптимального упорядочения для системы с двумя обслуживающими устройствами.

13. Как определить простои третьего обслуживающего устройства?

14. Приведите алгоритм обоснования оптимального расписания для системы с тремя обслуживающими устройствами.

6. МОДЕЛИ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

6.1. Общая характеристика системы массового обслуживания (понятие системы массового обслуживания, ее элементы, классификация систем)

Теория массового обслуживания начала развиваться в начале 20 века. В 1907 г. Иоханнсен сформулировал основные предпосылки новой теории. В 1909 г. А. К. Эрланг применил теорию вероятностей к исследованию зависимости обслуживания телефонных вызовов от числа поступающих на телефонную станцию вызовов. В 1963 г. А.Я. Хинчин, советский математик, систематизировал основные положения теории массового обслуживания в монографии «Работы по математической теории массового обслуживания».

В последние годы теория массового обслуживания (за рубежом она известна под названием «теория очередей») получила широкое применение в сфере обслуживания (в системах связи, погрузочно-разгрузочных комплексах, автозаправочных станциях, магазинах, билетных кассах и т.д.), современных высоких технологиях (компьютерных сетях, базах данных, поточных линиях, военных системах и т.д.), финансово-экономической сфере (в банках, страховых организациях, налоговых инспекциях, аудиторских служб и т.д.).

Теория массового обслуживания представляет собой научное направление, изучающее системы в которых возникают массовые запросы на выполнение определенных услуг и происходит удовлетворение этих запросов.

Предметом теории массового обслуживания является построение математических моделей, связывающих условия работы системы с показателями эффективности функционирования с целью определения наилучших вариантов управления данными системами.

Эти системы получили название *систем массового обслуживания*, а процессы, возникающие при этом, *называются процессами обслуживания*.

Элементами системы массового обслуживания являются входящий поток заявок, очередь, поток необслуженных (покинувших очередь) заявок, каналы обслуживания, выходящий поток обслуженных заявок (рис. 6.1).

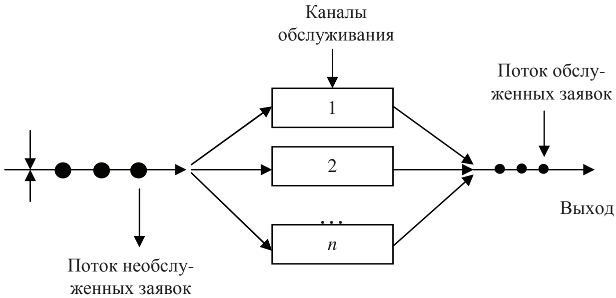


Рис. 6.1. Структура системы массового обслуживания

Обслуживающие устройства системы массового обслуживания (пункты, станции, приборы, устройства, кассовые аппараты, продавцы, телефонные линии связи и т.д.) называются *каналами обслуживания*.

Заявка (требование) – это запрос на выполнение каких-либо услуг или удовлетворение определенной потребности.

Под входящим потоком заявок (требований) понимают последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени.

Если поток событий имеет свойства стационарности, ординарности и отсутствия последствия, то он является *простейшим или пуассоновским потоком*.

Если вероятностные характеристики потока событий не зависят от времени, т.е. он имеет постоянную интенсивность, то такой поток называется *стационарным*. Если события происходят поодиночке, а не два и более одновременно, то такой поток событий является *ординарным*. В *потоке без последствий* события появляются в последовательные моменты времени независимо друг от друга, т.е. число событий, попадающих на любой один из произвольно выбранных промежутков времени, не зависит от числа событий, попавших на другой, произвольно выбранный промежуток времени.

Под потоком необслуженных заявок понимают заявки, поступившие в систему в тот момент, когда все каналы заняты и заявки получают отказ в обслуживании, покидают систему массового обслуживания и в дальнейшем процессе обслуживания не участвуют.

Заявки, стоящие в очереди могут обслуживаться любым освободившимся каналом обслуживания. В системах с последовательным расположением каналов каждый канал выступает как отдельная одноканальная система массового обслуживания или фаза обслуживания, т.е. выходной поток обслуженных заявок одним каналом обслуживания является входным потоком для последующего канала.

В зависимости от дисциплины очереди системы массового обслуживания подразделяются на системы *с приоритетами и без приоритетов*. При этом под *дисциплиной очереди* понимают порядок, который принят при поступлении заявок из очереди в канал обслуживания. Правило отбора требований на обслуживание может производиться в виде: случайного отбора; по критерию приоритетности; первый пришел – первый обслужен; последний пришел – первый обслужен.

По количеству этапов обслуживания системы массового обслуживания подразделяются на *однофазные* и *многофазные* системы. *Однофазными* называются те системы, которые выполняют одну и ту же операцию обслуживания. *Многофазные* системы массового обслуживания имеют неоднородные каналы, выполняющие разные операции обслуживания, осуществляемые с помощью последовательно расположенных каналов обслуживания.

6.2. Потоки событий и предельные вероятности состояний системы (уравнения Колмогорова)

Напомним, что потоком событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени. Поток характеризуется *интенсивностью* λ, под которой понимают частоту появления событий или среднее число событий, поступающих в систему массового обслуживания в единицу времени. Поток событий называется *регулярным*, если события следуют одно за другим через определенные равные промежутки времени. Простейший (пуассоновский) поток характеризуется стационарностью, ординарностью и отсутствием последствия (рис. 6.3).

При этом регулярный поток не является простейшим, так как моменты появления событий в таком потоке жестко зафиксированы и он обладает последействием.

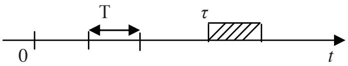


Рис. 6.3. Простейший поток событий

Для простейшего потока число m событий, попадающих на произвольный участок времени τ, распределено по закону Пуассона:

$$P_{m(\tau)} = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau},$$

для которого математическое ожидание случайной величины равно ее дисперсии: $\alpha = \sigma^2 = \lambda\tau$.

А вероятность того, что за время τ не произойдет ни одного события (m=0), равна: $p_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}$.

Найдем вероятность того, что на участке времени длиной t не появится ни одного из последующих событий. Она равна:

$$p(T \geq t) = e^{-\lambda t},$$

а вероятность противоположного события, т.е. функция распределения случайной величины T равна:

$$F(t) = p(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Плотность вероятности случайной величины равна производной ее функции распределения:

$$\varphi(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Данное распределение, т.е. интервал времени между двумя соседними произвольными событиями, называется *показательным или экспоненциальным*, для которого математическое ожидание равно среднему квадратическому отклонению случайной величины и обратно по величине интенсивности потока λ:

$$\alpha = \sigma = \frac{1}{\lambda}.$$

Важное свойство показательного распределения состоит в том, что для интервала времени T между двумя последовательными соседними событиями потока, любые данные о том, сколько времени протекал этот интервал, не влияют на закон распределения оставшейся части.

Согласно распределения случайной величины T вероятность попадания на элементарный (малый) отрезок времени Δt хотя бы одного события потока равна:

$$p_{\Delta t} = p(T < \Delta t) = 1 - e^{-\lambda\Delta t} \approx \lambda\Delta t.$$

Рассмотрим процесс работы простейшей системы массового обслуживания (рис. 6.4).

Допустим, система S состоит из двух каналов обслуживания, каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя, после чего мгновенно начинается ремонт канала, продолжающийся неизвестное случайное время.

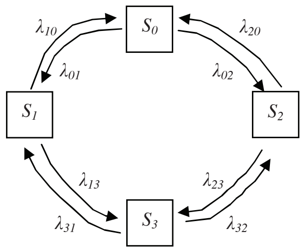


Рис. 6.4. Графическая модель массового обслуживания

Возможны следующие состояния системы: S_0 – оба канала исправны; S_1 – первый канал ремонтируется, второй исправен; S_2 – второй канал ремонтируется, первый исправен; S_3 – оба канала ремонтируются. Стрелка, направленная, например, из состояния S_0 в S_1 означает переход системы в момент отказа первого канала, из S_1 в S_0 – переход в момент окончания ремонта этого канала. Так как каналы независимы друг от друга, то вероятностью одновременного выхода из строя двух каналов (переход из S_0 в S_3) или одновременного окончания ремонта двух каналов (переход из S_3 в S_0) пренебрежем.

Предположим, что все переходы системы из состояния S_i в S_j происходят под воздействием простейших потоков событий с интенсивностями λ_{ij} $(i=\overline{0,3};\, j=\overline{0,3})$ с вероятностью p_i.

Вероятность i-го состояния называется вероятность $p_i(t)$ того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии S_i. При этом сумма вероятностей всех состояний системы для любого момента t равна единице:

$$\sum_{i=0}^{3} p_i(t) = 1 .$$

Зададим малый промежуток Δt и найдем вероятность $p_0(t+\Delta t)$ того, что система в момент $t+\Delta t$ будет находиться в состоянии S_0.

Рассмотрим данную систему:

1. система в момент t с вероятностью $p_0(t)$ находилась в состоянии S_0 и за время Δt не вышла из него. Вывести систему из состояния S_0 можно суммарным простейшим потоком с интенсивностью $(\lambda_{01}+\lambda_{02})$ с вероятностью, приближенно равной $(\lambda_{01}+\lambda_{02})\Delta t$. А вероятность того,

что система останется в состоянии S_0 равна $[1-(\lambda_{01}+\lambda_{02})\Delta t]$. Применяя теорему умножения вероятностей, получим:

$$p_0(t)[1-(\lambda_{01}+\lambda_{02})\Delta t];$$

2. система в момент t с вероятностями $p_1(t)$ или $p_2(t)$ находилась в состоянии S_1 и S_2 и за время Δt перешла в состояние S_0. Система может перейти в состояние S_0 в результате действия потока интенсивностью λ_{10} или λ_{20} с вероятностью ≈ $\lambda_{10}\Delta t$ или $\lambda_{20}\Delta t$. Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S_0 равна $p_1(t)\lambda_{10}\Delta t$ или $p_2(t)\lambda_{20}\Delta t$. Применяя теорему сложения вероятностей, получим:

$$p_0(t+\Delta t)=p_1(t)\lambda_{10}\Delta t+p_2(t)\lambda_{20}\Delta t+p_0(t)[1-(\lambda_{01}+\lambda_{02})\Delta t].$$

Отсюда найдем:

$$\frac{p_0(t+\Delta t)-p_0(t)}{\Delta t}=p_1(t)\lambda_{10}+p_2(t)\lambda_{20}-(\lambda_{01}+\lambda_{02})p_0(t).$$

При $\Delta t\to 0$, переходя к пределу, получим в левой части уравнения производную $p_0'(t)$. Обозначим ее как p_0':

$$p_0'=\lambda_{10}p_1+\lambda_{20}p_2-(\lambda_{01}+\lambda_{02})p_0.$$

Получили дифференциальное уравнение первого порядка, содержащее и неизвестную функцию и ее производную первого порядка.

Рассуждая аналогичным образом для других состояний системы S, получим *систему дифференциальных уравнений Колмогорова* для вероятностей состояний:

$$\begin{cases} p_0'=\lambda_{10}p_1+\lambda_{20}p_2-(\lambda_{01}+\lambda_{02})p_0, \\ p_1'=\lambda_{01}p_0+\lambda_{31}p_3-(\lambda_{10}+\lambda_{13})p_1, \\ p_2'=\lambda_{02}p_0+\lambda_{32}p_3-(\lambda_{20}+\lambda_{23})p_2, \\ p_3'=\lambda_{13}p_1+\lambda_{23}p_2-(\lambda_{31}+\lambda_{32})p_3. \end{cases}$$

Уравнения Колмогорова составлены по следующему правилу: в левой части каждого уравнения стоит производная вероятности i-го состояния, в правой части – сумма произведений вероятностей всех состояний, из которых идут стрелки в данное состояние, на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного состояния вида i.

Для решения данной системы в нее добавляют следующее уравнение:

$$\sum_{i=0}^{3}p_i(t)=1.$$

Задают начальные условия, например t=0, тогда система находится в состоянии S_0, т.е. $p_0(0)=1$; $p_1(0)=0$; $p_2(0)=0$; $p_3(0)=0$.

Уравнения Колмогорова позволяют найти все вероятности состояний системы как функции времени. В теории случайных процессов доказано, что если число состояний системы конечно и из каждого из них можно за конечное число шагов перейти в любое другое состояние, то предельные вероятности существуют и они постоянны, поэтому в уравнениях Колмогорова их производные можно заменить на нули:

$$\begin{cases} (\lambda_{01} + \lambda_{02}) p_0 = \lambda_{10} p_1 + \lambda_{20} p_2, \\ (\lambda_{10} + \lambda_{13}) p_1 = \lambda_{01} p_0 + \lambda_{31} p_3, \\ (\lambda_{20} + \lambda_{23}) p_2 = \lambda_{02} p_0 + \lambda_{32} p_3, \\ (\lambda_{31} + \lambda_{32}) p_3 = \lambda_{13} p_1 + \lambda_{23} p_2. \end{cases}$$

Данная система уравнений составлена по следующему правилу: слева в уравнениях стоит предельная вероятность данного состояния p_i, умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, ведущих из данного состояния, а справа – сумма произведений интенсивностей всех потоков, входящих в i-е состояние, на вероятности тех состояний, из которых эти потоки исходят.

6.3. Процесс гибели и размножения

Используя процесс гибели и размножения можно изучить множество состояний системы массового обслуживания. Термин «процесс гибели и размножения» связан с решением ряда биологических задач, в которых моделируется изменение численности биологических популяций. Рассмотрим упорядоченное множество состояний системы S_0, $S_1 \ldots S_n$ (рис. 6.5).

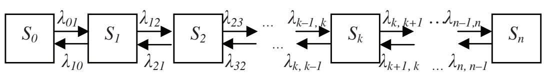


Рис. 6.5. Граф процесса гибели и размножения

Переходы от одного состояния системы в другое могут осуществляться из любого состояния только в состояния с соседними номерами. Допустим, что все потоки событий, переводящие систему из одного состояния в другое, являются простейшими с интенсивность λ.

Составим и решим уравнения для предельных вероятностей состояний. Например, для состояния S_0 уравнение имеет вид: $\lambda_{01} p_0 = \lambda_{10} p_1$, а для состояния S_1 – $(\lambda_{12} + \lambda_{10}) p_1 = \lambda_{01} p_0 + \lambda_{21} p_2$, подставив в него уравнение $\lambda_{01} p_0 = \lambda_{10} p_1$ и преобразовав, получим: $\lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2$. Аналогично рассуждая, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_{01} p_0 = \lambda_{10} p_1, \\ \lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2, \\ \ldots \\ \lambda_{k-1,k}\ p_{k-1} = \lambda_{k,k+1}\ p_k, \\ \ldots \\ \lambda_{n-1,n}\ p_{n-1} = \lambda_{n,n+1}\ p_n. \end{cases}$$

Добавим к системе нормировочное уравнение:

$$p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_k + \ldots + p_n = 1.$$

Решая систему уравнений, получим:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1,n}\ldots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n.n-1}\ldots\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1},$$

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0,$$

$$p_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0,$$

$$\ldots$$

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1,n}\ldots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\ldots\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0.$$

Видно, что в формуле расчета $p_1, p_2, \ldots, p_n$ коэффициенты при p_0 есть слагаемые, стоящие после единицы в формуле расчета p_0. Числители этих коэффициентов равны произведению всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих слева направо до данного состояния, а знаменатели – произведение всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих справа налево до данного состояния.

6.4. Показатели эффективности работы системы массового обслуживания

Целью теории массового обслуживания является выработка рекомендаций по рациональному построению систем массового обслуживания, рациональной организации их работы и регулированию потока заявок для обеспечения высокой эффективности функционирования систем.

В качестве характеристик эффективности работы систем массового обслуживания чаще всего используют 3 группы показателей:

I. Показатели эффективности использования системы:

1. абсолютная пропускная способность системы, т.е. среднее число заявок, которое может обслужить система массового обслуживания в единицу времени;

2. относительная пропускная способность системы, т.е. отношение среднего числа заявок, обслуживаемых в системе массового обслуживания в единицу времени, к среднему числу поступивших заявок за это же время;

3. средняя продолжительность периода занятости системы массового обслуживания;

4. коэффициент использования системы массового обслуживания, т.е. средняя доля времени, в течение которого система занята обслуживанием заявок.

II. Показатели качества обслуживания заявок:

1. среднее время ожидания заявки в очереди;

2. среднее время пребывания заявки в системе массового обслуживания;

3. вероятность отказа заявке в обслуживании без ожидания;

4. вероятность того, что поступившая заявка немедленно будет принята к обслуживанию;

5. закон распределения времени ожидания заявки в очереди;

6. закон распределения времени пребывания заявки в системе массового обслуживания;

7. среднее число заявок, находящихся в очереди;

8. среде число заявок, находящихся в системе массового обслуживания.

III. Показатели эффективности функционирования пары «система массового обслуживания – потребитель», где под «потребителем» понимают всю совокупность заявок или их источник:

1. средний доход, приносимый системе массового обслуживания в единицу времени;

2. затраты на обслуживание системы массового обслуживания;

3. доход, приносимый системе массового обслуживания.

6.5. Одноканальная система массового обслуживания с отказами

Простейшей одноканальной моделью с вероятностным входным потоком и процедурой обслуживания является модель, характеризуемая показательным распределением длительностей интервалов между поступлением заявок и их обслуживанием. Допустим, в систему массового обслуживания поступает простейший поток требований с заданной интенсивностью λ. Время обслуживания требований для одного канала экспоненциальное. Если требование поступает в систему в момент, когда канал занят, получает отказ и покидает систему обслуживания. Если же канал свободен, то требование принимается к обслуживанию и обслуживается с интенсивностью μ.

Представим данную систему графически (рис. 6.6).

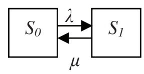


Рис. 6.6. Граф состояний одноканальной системы массового обслуживания с отказами

Система имеет два состояния: S_0 – канал свободен, S_1 – канал занят, т.е. идет обслуживание заявки. Пусть p_0 – вероятность состояния S_0, а p_1 – вероятность состояния S_1.

Составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\begin{cases} p_0' = -\lambda p_0 + \mu p_1 \\ p_1' = -\mu p_1 + \lambda p_0 \end{cases}$$

Введем в систему нормировочное уравнение: $p_0 + p_1 = 1$ и найдем значение вероятностей состояний:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu};$$

$$p_1 = 1 - p_0 .$$

Для одноканальной системы с отказами вероятность p_0 есть не что иное, как относительная пропускная способность системы q, так как для конкретного момента времени t среднее отношение числа обслуженных заявок к числу поступивших равно вероятности p_0 того, что в момент t канал свободен и заявка будет обслужена:

$$q = p_0 .$$

При $t \to \infty$ достигается стационарный (установившийся) режим и $q = p_0 = \dfrac{\mu}{\mu + \lambda}$.

Зная относительную пропускную способность, можно найти абсолютную, т.е. среднее число заявок, которое может обслужить система массового обслуживания в единицу времени:

$$A = \lambda \cdot q = \frac{\lambda \cdot \mu}{\lambda + \mu} .$$

Вероятность отказа в обслуживании заявки будет равна вероятности p_1:

$$p_{отк} = p_1 = 1 - p_0 = 1 - \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} .$$

Пример. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

На телефонную линию филиала банка поступает простейший поток вызовов клиентов с интенсивностью $\lambda = 1{,}5$ вызовов в минуту. Средняя продолжительность обслуживания $\bar{t}_{об.} = 2$ минуты. Вызов – звонок, поступивший в момент, когда телефонная линия занята – получает отказ в обслуживании. Поток вызовов и поток обслуживания являются простейшими.

Используя приведенную информацию:

1) определим μ – интенсивность потока обслуживания: $\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об.}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ звонков в минуту;

2) вычислим q – относительную пропускную способность:

$$q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{0{,}5}{1{,}5 + 0{,}5} = 0{,}25.$$

Будет обслужено 25% звонков-заказов.

3) найдем A – абсолютную пропускную способность: $A = \lambda \cdot q = 1{,}5 \cdot 0{,}25 = 0{,}375$.

Система в среднем осуществляет 0,375 обслуживаний в минуту.

4) определим $p_{отк.}$ – вероятность отказа: $p_{отк.} = 1 - q = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

Из 100 звонков-заказов в среднем 75 получают отказ в обслуживании.

5) вычислим $A_{ном}$ – номинальную пропускную способность системы: $A_{ном} = \frac{1}{\bar{t}_{об.}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ вызовов в минуту; $\frac{A_{ном}}{A} = \frac{0{,}5}{0{,}375} = 1{,}33$.

Номинальная пропускная способность системы в 1,33 раза больше, чем ее фактическая пропускная способность.

6) определим $\bar{t}_{пр}$ – среднее время простоя канала: $\bar{t}_{пр} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}67$ минуты;

Канал обслуживания в среднем простаивают 0,67 минуты.

7) вычислим p_0 – вероятность того, что канал свободен:

$$p_0 = \frac{\bar{t}_{пр}}{\bar{t}_{об} + \bar{t}_{пр}} = \frac{0{,}67}{2 + 0{,}67} = 0{,}25;$$

Вероятность того, что канал свободен, составляет 0,25.

8) вычислим p_1 – вероятность того, что канал занят:

$$а)\, p_1 = 1 - p_0 = 1 - 0{,}25 = 0{,}75;$$

$$б)\, p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{1{,}5}{1{,}5 + 0{,}5} = 0{,}75;$$

Вероятность того, что канал занят p_1=0,75 больше вероятности того, что канал свободен p_0=0,25 (p_1> p_0). Это следовало ожидать, так как интенсивность входящего потока λ=1,5 больше интенсивности производительности канала μ=0,5 (λ>μ). Следовательно, телефонная линия банка работает не эффективно. Для улучшения ее работы целесообразно увеличить интенсивность производительности канала обслуживания путем добавления канала обслуживания.

6.6. Одноканальная система массового обслуживания с ожиданием и ограничением очереди

Система массового обслуживания имеет один канал. Входящий поток заявок на обслуживание является простейшим потоком с интенсивностью λ. Интенсивность потока обслуживания равна μ. Длительность обслуживания – случайная величина, подчиненная показательному закону распределения. Поток обслуживания является простейшим пуассоновским потоком событий. Заявка, поступившая в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживание. Очередь плюс обслуженные заявки не превышают n заявок, а требования, не попавшие в очередь, покидают систему.

Граф состояний данной системы массового обслуживания имеет вид, изображенный на рис. 6.7.

Система имеет следующие состояния:

S_0 – канал свободен;

S_1 – канал занят и очереди нет;

S_2 – канал занят и одна заявка стоит в очереди;

…

S_k – канал занят и k заявок стоят в очереди;

…

S_n – канал занят и (n–1) заявок стоят в очереди.

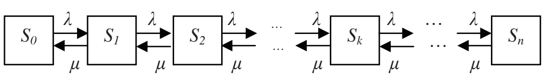


Рис. 6.7. Граф состояний одноканальной системы массового обслуживания с ожиданием (схема гибели и размножения)

Стационарный процесс в такой системе будет описываться следующей системой аглебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\rho \cdot p_0 + p_1 = 0,\ i = 0 \\ \ldots \\ -(1-\rho) p_n + p_{n+1} + \rho \cdot p_{n-1} = 0,\ 0 < i < n \\ \ldots \\ -p_n + \rho \cdot p_{n-1} = 0,\ i = n, \end{cases}$$

где ρ – относительная нагрузка на систему:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Решение системы уравнений имеет вид:

$$p_n = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}\right) \cdot \rho^n,\ \rho \neq 1,\ i = 0,1,\ldots,n \\ \dfrac{1}{(m+2)},\ \rho = 1 \end{cases}$$

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}},$$

Тогда $p_n = \begin{cases} p_0 \cdot \rho^n,\ \rho \neq 1,\ i = 0,1,\ldots,n \\ \dfrac{1}{(m+2)},\ \rho = 1. \end{cases}$

Определим характеристики одноканальной системы массового обслуживания с ожиданием и ограниченной длиной очереди *m*:

1) p_0, p_n – предельные вероятности системы (вероятность свободного состояния (p_0)):

$$p_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}},\ \text{если}\ \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{m+2},\ \text{если}\ \rho = 1 \end{cases}$$

$$p_n = \rho^n \cdot p_0; n = 1,\ldots,m+1,$$

где n – состояние системы;

m – максимальное число мест в очереди;

ρ – относительную нагрузку (трафик) на систему: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

2) $p_{отк}$ – вероятность отказа в обслуживании требования:

$$p_{отк} = \rho^{m+1} \cdot p_0;$$

3) q – относительная пропускная способность системы обслуживания: $q = 1 - p_{отк}$;

4) A – абсолютная пропускная способность системы:

$$A = \lambda \cdot q;$$

5) $\overline{N}$ – среднее число требований, находящихся в системе (т.е. на обслуживании и в очереди):

$$\overline{N}_{сис} = \begin{cases} \dfrac{\rho[1-(m+2)\rho^{m+1}+(m+1)\rho^{m+2}]}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}, \text{ если } \rho \neq 1; \\ \dfrac{m+1}{2}, \text{ если } \rho = 1 \end{cases}$$

6) $\overline{T}_{сис}$ – среднее время пребывания автомобиля в системе:

$$\overline{T}_{сис} = \frac{\overline{N}_{сис}}{\lambda(1-p_{m+1})};$$

7) $\overline{T}_{оч}$ – средняя продолжительность пребывания заявки в очереди на обслуживание: $\overline{T}_{оч} = \overline{T}_{сис} - \dfrac{1}{\mu}$;

8) $\overline{N}_{оч}$ – среднее число заявок в очереди (длину очереди):

$$\overline{N}_{оч} = \lambda \cdot (1-p_{m+1}) \cdot \overline{T}_{оч} .$$

Пример. Требуется определить вероятностные характеристики системы массового обслуживания.

Исходная информация.

На пост диагностики поступают автомобили, поток которых распределен по закону Пуассона и имеет интенсивность $\lambda = 0{,}6$ (автомобилей в час). Время диагностики автомобиля распределено по показательному закону и в среднем равно 1,5 часа $(\bar{t}_{об})$. Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведения диагностики, ограничено и равно трем $(m = 3)$. Если все стоянки заняты, т.е. в очереди стоят три автомобиля, то очередной автомобиль, прибывший на диагностику, в очередь на обслуживания не становится.

Используя приведенную информацию:

1) определим μ – интенсивность потока обслуживания: $\mu = \dfrac{1}{\bar{t}_{об}} = \dfrac{1}{1{,}5} = 0{,}67$ автомобилей в час;

2) рассчитываем ρ – относительную нагрузку на систему:

$$p = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}6}{0{,}67} = 0{,}90;$$

3) $p_0, p_к$ – предельные вероятности системы:

а) вероятность свободного состояния (p_0):

$$p_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}, \text{если } \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{\mathrm{m}+2}, \text{если } \rho = 1 \end{cases}$$

Так как $\rho = 0{,}90 \neq 1$, то $p_0 = \dfrac{1-0{,}9}{1-0{,}9^{3+2}} = \dfrac{0{,}1}{0{,}4095} = 0{,}244$;

б) $p_n = \rho^n \cdot p_0; n = 1,...,m+1$,

$p_1 = 0{,}9^1 \cdot 0{,}244 = 0{,}220$;

$p_2 = 0{,}9^2 \cdot 0{,}244 = 0{,}198$;

$p_3 = 0{,}9^3 \cdot 0{,}244 = 0{,}178$;

$p_4 = 0{,}9^4 \cdot 0{,}244 = 0{,}160$.

4) исходя из того, что три автомобиля стоит в очереди и один находится на обслуживании определим $p_{отк}$ – вероятность отказа в обслуживании требования: $p_{отк} = \rho^{m+1} \cdot p_0 = 0{,}9^{3+1} \cdot 0{,}244 = 0{,}16$;

Работа поста диагностики считается удовлетворительной, так как он не обслуживает автомобили в среднем в 16% случаев.

5) рассчитаем q – относительную пропускную способность системы обслуживания: $q = 1 - p_{отк} = 1 - 0{,}16 = 0{,}84$ автомобиля в час;

6) вычислим A – абсолютную пропускную способность системы:

$$A = \lambda \cdot q = 0{,}6 \cdot 0{,}84 = 0{,}504 \text{ автомобиля в час;}$$

7) определим $\overline{N}_{сис}$ – среднее число требований, находящихся в системе (то есть на обслуживании и в очереди):

$$\overline{N}_{сис} = \begin{cases} \dfrac{\rho\left[1 - (m+2)\rho^{m+1} + (m+1)\rho^{m+2}\right]}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}, \text{если } \rho \neq 1; \\ \dfrac{m+1}{2}, \text{если } \rho = 1. \end{cases}$$

Так как $\rho = 0{,}90 \neq 1$, то

$$\overline{N}_{сис} = \frac{0{,}9[1 - (3+2) \cdot 0{,}9^{3+1} + (3+1) \cdot 0{,}9^{3+2}]}{(1-0{,}9) \cdot (1-0{,}9^{3+2})} = 1{,}79 \text{ автомобиля.}$$

8) рассчитаем $\overline{T}_{сис}$ – среднее время пребывания требования в системе:

$$\overline{T}_{сис} = \frac{\overline{N}_{сис}}{\lambda(1-p_{m+1})} = \frac{1{,}79}{0{,}6(1-p_{отк})} = \frac{1{,}79}{0{,}6(1-0{,}16)} = 3{,}55 \text{ часа;}$$

9) вычислим $\overline{T}_{оч}$ – среднюю продолжительность пребывания заявки в очереди на обслуживание: $\overline{T}_{оч} = \overline{T}_{сис} - \dfrac{1}{\mu} = 3{,}55 - \dfrac{1}{0{,}67} = 2{,}06$ часа;

10) определим $\overline{N}_{оч}$ – среднее число заявок в очереди (длину очереди): $\overline{N}_{оч} = \lambda \cdot (1 - p_{m+1}) \cdot \overline{T}_{оч} = 0{,}6(1-0{,}16) \cdot 2{,}06 = 1{,}04$ автомобиля.

6.7. Одноканальная система массового обслуживания с ожиданием без ограничения очереди

Условия функционирования данной системы совпадают с условиями работы одноканальной системы массового обслуживания с ожиданием и ограничением очереди, кроме ограничения ожидания (т.е. $n \to \infty$). Стационарный режим функционирования этой системы существует при $t \to \infty$ для любого n=0, 1, 2,… и когда $\lambda < \mu$. Система уравнений в этом случае имеет вид:

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, n = 0 \\ \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} - (\lambda + \mu) p_n = 0, n > 0. \end{cases}$$

Решение системы уравнений имеет вид:

$$p_n = (1-\rho)\rho^n, n = 0,1,2,...,$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$.

Одноканальная система массового обслуживания с ожиданием, без ограничения на длину очереди, имеет следующие характеристики:

1) ρ – трафик системы: $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$;

2) p_0, p_n – предельные вероятности системы:

$$p_0 = 1 - \rho;$$

$$p_n = (1-\rho)\cdot\rho^n; n = 1,2,...;$$

3) $\overline{N}_{сис}$ – среднее число требований, находящихся в системе (то есть на обслуживании и в очереди): $\overline{N}_{сис} = \frac{\rho}{1-\rho}$;

4) $\overline{T}_{сис}$ – среднее время пребывания требования в системе:

$$\text{а) } \overline{T}_{сис} = \frac{\overline{N}_{сис}}{\lambda};$$

$$\text{б) } \overline{T}_{сис} = \frac{1}{\mu\cdot(1-\rho)};$$

$$\text{в) } \overline{T}_{сис} = \frac{\rho}{\lambda\cdot(1-\rho)};$$

5) $\overline{N}_{оч}$ – число требований в очереди на обслуживание:

$$\text{а) } \overline{N}_{оч} = \overline{N}_{сис} - \frac{\lambda}{\mu};$$

$$\text{б) } \overline{N}_{оч} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)};$$

6) $\overline{T}_{оч}$ – среднюю продолжительность пребывания требования в очереди (среднее время ожидания заявки в очереди):

$$\text{а) } \overline{T}_{оч} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)};$$

$$\text{б) } \overline{T}_{оч} = \frac{\overline{N}_{оч}}{\lambda};$$

$$\text{в) } \overline{T}_{оч} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)};$$

7) A – абсолютную пропускную способность: $A = \lambda\cdot q$, где q – относительная пропускная способность системы, $q = 1$, т.к. каждая заявка, пришедшая в систему, будет обслужена.

Пример. Требуется определить вероятностные характеристики системы массового обслуживания.

Исходная информация.

На разгрузку на перерабатывающее предприятие поступают автомобили с сырьем. Поток прибывающих автомобилей распределен по закону Пуассона и имеет интенсивность $\lambda = 0{,}8$ (автомобиля в час). Время разгрузки автомобиля распределено по показательному закону и в среднем равно 1,1 часа $(\bar{t}_{об})$. Количество площадок для стоянки прибывающих на обслуживание автомобилей, т.е. длина очереди не ограничена.

Используя приведенную информацию:

1) определим $\mu -$ интенсивность потока обслуживания: $\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{1}{1{,}1} = 0{,}909$ автомобилей в час;

2) определим $\rho -$ относительную нагрузку на систему:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}8}{0{,}909} = 0{,}88;$$

3) вычислим $p_0, p_n -$ предельные вероятности системы:

$p_0 = 1 - \rho = 1 - 0{,}88 = 0{,}12$, т.е. система простаивает в 12% случаев;

$$p_n = (1-\rho)\cdot\rho^n; n = 1,2,...;$$

$$p_1 = 0{,}12 \cdot 0{,}88^1 = 0{,}106;$$

$$p_2 = 0{,}12 \cdot 0{,}88^2 = 0{,}093;$$

$$p_3 = 0{,}12 \cdot 0{,}88^3 = 0{,}082;$$

$$p_4 = 0{,}12 \cdot 0{,}88^4 = 0{,}072;$$

$$p_5 = 0{,}12 \cdot 0{,}88^5 = 0{,}063 \text{ и т.д.};$$

4) определим $\overline{N}_{сис} -$ среднее число требований, находящихся в системе: $\overline{N}_{сис} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0{,}88}{1-0{,}88} = 7{,}3$ автомобиля;

5) рассчитаем $\overline{T}_{сис} -$ среднее время пребывания требования в системе:

$$\overline{T}_{сис} = \frac{\overline{N}_{сис}}{\lambda} = \frac{7{,}3}{0{,}8} = 9{,}1 \text{ часа};$$

6) вычислим $\overline{N}_{оч} -$ число требований в очереди на обслуживание:

$$\overline{N}_{оч} = \overline{N}_{сис} - \frac{\lambda}{\mu} = 7{,}3 - \frac{0{,}8}{0{,}909} = 6{,}4 \text{ автомобиля};$$

7) определим $\overline{T}_{оч} -$ среднюю продолжительность пребывания требования в очереди:

$$\overline{T}_{оч} = \frac{\overline{N}_{оч}}{\lambda} = \frac{6{,}4}{0{,}8} = 8{,}0 \text{ часов};$$

8) рассчитаем A – абсолютную пропускную способность:

$$A = \lambda \cdot q = 0{,}8 \cdot 1 = 0{,}8.$$

6.8. Многоканальная система массового обслуживания с отказами

На практике большинство систем массового обслуживания являются многоканальными. Процесс обслуживания имеет интенсивность входного потока λ, при этом параллельно может обслуживаться не более n заявок на n каналах обслуживания. Средняя продолжительность обслуживания одной заявки равна $\frac{1}{\mu}$. Входной и выходной потоки являются пуассоновскими. Режим функционирования того или иного обслуживающего канала не влияет на режим функционирования других обслуживающих каналов системы, а длительность процедуры обслуживания каждым из каналов является случайной величиной, подчиненной экспоненциальному закону распределения. Конечная цель использования n параллельно включенных обслуживающих каналов заключается в повышении по сравнению с одноканальной системой скорости обслуживания требований за счет обслуживания одновременно n заявок. Граф состояний данной системы имеет вид (рис. 6.8).

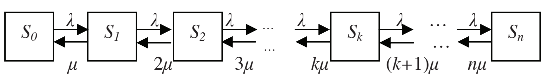


Рис. 6.8. Граф состояний многоканальной системы массового обслуживания с отказами

Состояния этой системы имеют следующую интерпретацию:

S_0 – все каналы свободны;

S_1 – занят один канал, остальные свободны;

…

S_k – заняты k каналов, остальные свободны;

…

S_n –заняты n каналов, заявка получает отказ в обслуживании.

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний системы будут иметь вид:

$$\begin{cases} p_0' = \lambda p_0 + \mu p_1; \\ \ldots \\ p_k' = \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu) p_k + \mu(k+1) p_{k+1}, 1 \le k \le n-1; \\ \ldots \\ p_n' = \lambda p_{n-1} - \mu \cdot n \cdot p_n. \end{cases}$$

Начальные условия решения системы:

$p_0(0) = 1$; $p_1(0) = 0$; $p_2(0) = 0$ …; $p_k(0) = 0$ …; $p_n(0) = 0$.

Стационарное решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} p_k = \dfrac{\dfrac{\rho^k}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\rho^k}{k!}} = \dfrac{\rho^k}{k!}\cdot\rho_0, k = 1,2,...,n \\ p_0 = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\rho^k}{k!}}, k = 0,1,2,...,n, \end{cases}$$

где $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Формулы для выполнения вероятностей p_k называются формулами Эрланга.

Определим вероятностные характеристики функционирования многоканальной системы массового обслуживания с отказами в стационарном режиме:

1) p_0, p_k – предельные вероятности состояния системы:

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}}; k = 0,1,...,n;$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!}\cdot p_0; k = 1,...,n;$$

2) $p_{отк}$ – вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$p_{отк} = p_n;$$

3) q – относительная пропускная способность системы:

$$q = 1 - p_{отк};$$

4) A – абсолютная пропускная способность системы:

$$A = \lambda q = \lambda(1 - p_{отк});$$

5) $\bar{k}$ – среднее число занятых каналов:

$$\bar{k} = \rho(1 - p_{отк}) = \rho q = \sum_{k=1}^{n} k\cdot p_k .$$

Пример. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

Торговая фирма планирует принимать заказы клиентов по телефону. Для этих целей выделено три телефонных аппарата (*n*=3). Предполагаемая интенсивность входящего потока требований составит: 0,7 заказа в минуту (λ). Длительность оформления заказа в среднем равна $\bar{t}_{об} = 2{,}0$ минуте. Звонок-заказ, поступивший в момент, когда телефоны заняты – получает отказ в обслуживании. Поток заказов и поток их оформления является простейшим.

Используя приведенную информацию:

1) рассчитаем μ – интенсивность потока обслуживания: $\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ заказа в минуту;

2) определим ρ – относительную нагрузку на систему: $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}7}{0{,}5} = 1{,}4$;

3) найдем p_0, p_k – предельные вероятности состояния системы, используя формулы Эрланга:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{1}{\frac{1{,}4^0}{0!} + \frac{1{,}4^1}{1!} + \frac{1{,}4^2}{2!} + \frac{1{,}4^3}{3!}} = \frac{1}{1 + 1{,}4 + 0{,}98 + 0{,}457} = 0{,}261$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0; k = 1,...,n;$$

$$p_1 = \frac{1{,}4^1}{1!} \cdot 0{,}261 = 0{,}365;$$

$$p_2 = \frac{1{,}4^2}{2!} \cdot 0{,}261 = 0{,}256;$$

$$p_3 = \frac{1{,}4^3}{3!} \cdot 0{,}261 = 0{,}118;$$

4) определяем $p_{отк}$ – вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$p_{отк} = p_n = 0{,}118;$$

5) вычисляем q – относительную пропускную способность системы:

$$q = 1 - p_{отк} = 1 - 0{,}118 = 0{,}882;$$

6) рассчитываем A – абсолютную пропускную способность системы:

$$A = \lambda q = 0{,}7 \cdot 0{,}882 = 0{,}617;$$

7) найдем $\bar{k}$ – среднее число занятых каналов:

$$\bar{k} = 1{,}4 \cdot 0{,}882 = 1{,}235.$$

Таким образом, при установившемся режим работы системы в среднем занято 1,2 телефонных аппарата из трех, остальные 1,8 простаивают, поэтому работа торговой фирмы по приему заказов клиентов по телефону считается неудовлетворительной, так как фирма не обслуживает заявки в среднем в 11,8% случаев ($p_{отк} = 0{,}118$). Пропускную способность данной системы при искомых λ и μ можно увеличить за счет увеличения числа телефонных аппаратов.

8) определим оптимальное число каналов обслуживания, используемых для приема заказов клиентов, в целях сокращения числа необслуженных заявок, поступающих в систему. Для этого используем формулу $p_{отк}$ – определения вероятности отказа в обслуживании заявки: $p_{отк} = \frac{\rho^n}{n!} p_0$.

Расчеты заносим в табл. 6.1.

Т а б л и ц а 6.1. **Некоторые характеристики системы**

n – количество каналов обслуживания	1	2	3	4	5	6
p_0 – вероятность свободного состояния системы	0,417	0,296	0,261	0,250	0,247	0,247
$p_{отк}$ – вероятность отказа в обслуживании заявки	0,583	0,290	0,118	0,040	0,011	0,002

$p_0 = \dfrac{1}{\dfrac{1{,}4^0}{0!}+\dfrac{1{,}4^1}{1!}} = 0{,}417$; $p_{отк} = \dfrac{1{,}4^1}{1!}\cdot 0{,}417 = 0{,}583$, при n=1;

$p_0 = \dfrac{1}{\dfrac{1{,}4^0}{0!}+\dfrac{1{,}4^1}{1!}+\dfrac{1{,}4^2}{2!}} = 0{,}296$; $p_{отк} = \dfrac{1{,}4^2}{2!}\cdot 0{,}296 = 0{,}290$, при n=2;

$p_0 = \dfrac{1}{\dfrac{1{,}4^0}{0!}+\dfrac{1{,}4^1}{1!}+\dfrac{1{,}4^2}{2!}+\dfrac{1{,}4^3}{3!}} = 0{,}261$; $p_{отк} = \dfrac{1{,}4^3}{3!}\cdot 0{,}261 = 0{,}118$, при n=3;

$p_0 = \dfrac{1}{\dfrac{1{,}4^0}{0!}+\dfrac{1{,}4^1}{1!}+\dfrac{1{,}4^2}{2!}+\dfrac{1{,}4^3}{3!}+\dfrac{1{,}4^4}{4!}} = 0{,}250$; $p_{отк} = \dfrac{1{,}4^4}{4!}\cdot 0{,}250 = 0{,}040$, при n=4;

$p_0 = \dfrac{1}{\dfrac{1{,}4^0}{0!}+\dfrac{1{,}4^1}{1!}+\dfrac{1{,}4^2}{2!}+\dfrac{1{,}4^3}{3!}+\dfrac{1{,}4^4}{4!}+\dfrac{1{,}4^5}{5!}} = 0{,}247$; $p_{отк} = \dfrac{1{,}4^5}{5!}\cdot 0{,}247 = 0{,}011$, при n=5;

$p_0 = \dfrac{1}{\dfrac{1{,}4^0}{0!}+\dfrac{1{,}4^1}{1!}+\dfrac{1{,}4^2}{2!}+\dfrac{1{,}4^3}{3!}+\dfrac{1{,}4^4}{4!}+\dfrac{1{,}4^5}{5!}+\dfrac{1{,}4^6}{6!}} = 0{,}247$; $p_{отк} = \dfrac{1{,}4^6}{6!}\cdot 0{,}247 = 0{,}002$, при n=6.

Анализируя данные табл. 6.1. видно, что расширение количества телефонных аппаратов при данных значения λ и μ до 6 единиц позволит обеспечить удовлетворение заявок на 99,8%, так как при n=6 вероятность отказа в обслуживании $p_{отк} = 0{,}002$.

6.9. Многоканальная система массового обслуживания с ожиданием и неограниченной очередью

Поток заявок, поступающих в систему, имеет интенсивность λ, а поток обслуживаний – интенсивность μ. Система может находиться в одном из состояний S_0, S_1, S_2,…, S_k,…, S_n,…, нумеруемых по числу заявок, находящихся в системе массового обслуживания:

S_0 – в системе заявок нет (все каналы обслуживания свободны);

S_1 – занят один канал, остальные свободны;

S_2 – заняты два канала, остальные свободны;

…

S_k – занято k каналов, остальные свободны;

…

S_n – заняты все n каналов (очереди нет);

S_{n+1} – заняты все n каналов, в очереди одна заявка;

…

S_{n+r} – заняты все n каналов, r заявок стоят в очереди;

… (рис. 6.9).

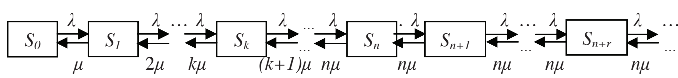


Рис. 6.9. Граф состояний системы массового обслуживания с ожиданием и неограниченной очередью

Интенсивность потока обслуживания данной системы не остается постоянной, а по мере увеличения числа заявок в системе от 0 до n увеличивается от величины μ до $n\mu$, так как увеличивается число каналов обслуживания (n каналов). При числе заявок в системе больше, чем n, интенсивность потока обслуживания сохраняется равной $n\mu$.

Используя формулы расчета $p_0, p_1, p_2,\dots, p_n$ для процесса гибели и размножения, можно получить следующие формулы для предельных вероятностей состояний n-канальной системы с неограниченной очередью:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1},$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!}p_0, \dots, p_k = \frac{\rho^k}{k!}p_0, \dots, p_n = \frac{\rho^n}{n!}p_0,$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!}p_0, \dots, p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!}p_0, \dots$$

Вероятность того, что заявка окажется в очереди:

$$p_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}p_0.$$

Найдем другие характеристики данной системы:

1) при $r \to \infty, p_{отк} = 0; q = 1; A = \lambda; \bar{k} = \rho;$

2) $\bar{N}_{оч}$ – среднее число заявок в очереди на обслуживание:

$$\overline{N}_{оч} = \frac{p_0 \cdot \rho^{n+1}}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2};$$

3) $\overline{N}_{сис}$ – среднее число находящихся в системе заявок:

$$\overline{N}_{сис} = \overline{N}_{оч} + \rho$$

4) $\overline{T}_{оч}$ – среднее время пребывания требования в очереди на обслуживание:

$$\overline{T}_{оч} = \frac{\overline{N}_{оч}}{\lambda};$$

5) $\overline{T}_{сис}$ – среднее время пребывания требования в системе:

$$\overline{T}_{сис} = \overline{T}_{оч} + \bar{t}_{об}\ .$$

Пример. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

На элеватор поступают машины с зерном с сельскохозяйственных организаций района. Элеватор оборудован четырьмя разгрузочными площадками (n). Поток поступающих автомобилей имеет интенсивность $\lambda = 3$ автомобиля в час. Среднее время обслуживания одного автомобиля равно 0,9 часа $(\bar{t}_{об})$.

Используя приведенную информацию:

1) определим μ – интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{1}{0,9} = 1,11\ ;$$

2) рассчитаем ρ – относительную нагрузку на систему: $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{1,11} = 2,7$, так как $\frac{\rho}{n} < 1$, то очередь растет не до бесконечности.

3) найдем p_0, p_n – предельные вероятности состояния системы:

$$p_0 = (1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + ... + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)})^{-1} = (1 + 2,7 + \frac{2,7^2}{2!} + \frac{2,7^3}{3!} +$$

$$+ \frac{2,7^4}{4!} + \frac{2,7^5}{4!(4-2,7)})^{-1} = 0,057.$$

В среднем 5,7% времени разгрузочные площадки будут простаивать.

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 ; k = 1,...,n;$$

$$p_1 = \frac{2,7^1}{1!} \cdot 0,057 = 0,154\ ;$$

$$p_2 = \frac{2,7^2}{2!} \cdot 0,057 = 0,208\ ;$$

$$p_3 = \frac{2,7^3}{3!} \cdot 0,057 = 0,187\,;$$

$$p_4 = \frac{2,7^4}{4!} \cdot 0,057 = 0,126\,;$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 = \frac{2,7^5}{4 \cdot 4!} \cdot 0,057 = 0,012\,;$$

$$p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0\,;$$

$$p_6 = \frac{2,7^{4+2}}{4^2 \cdot 4!} \cdot 0,057 = 0,058\,;$$

$$p_7 = \frac{2,7^{4+3}}{4^3 \cdot 4!} \cdot 0,057 = 0,039\,;$$

4) определим $p_{оч}$ – вероятность того, что очередь будет расти:

$$p_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0 = \frac{2,7^5}{4!(4-2,7)} \cdot 0,057 = 0,262\,;$$

5) вероятность отказа в обслуживании заявки, при $r \to \infty$ равна нулю: $p_{отк} = 0$;

6) при $r \to \infty$, относительная пропускная способность системы равна 1: $q = 1$;

7) при $r \to \infty$, абсолютная пропускная способность системы равна интенсивности λ: $A = \lambda = 3$ автомобиля в час;

8) при $r \to \infty$, среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho = 2,7\,;$$

9) определим $\bar{\bar{k}}$ – долю каналов, занятых обслуживанием:

$$\bar{\bar{k}} = \frac{\bar{k}}{n} = \frac{2,7}{4} = 0,675\,;$$

10) рассчитаем $\overline{N}_{оч}$ – среднее число заявок в очереди на обслуживание: $\overline{N}_{оч} = \dfrac{p_0 \cdot \rho^{n+1}}{n \cdot n! \left(1 - \dfrac{\rho}{n}\right)^2} = \dfrac{0,057 \cdot 2,7^{4+1}}{4 \cdot 4! \left(1 - \dfrac{2,7}{4}\right)^2} = 0,8$ автомобиля;

11) вычислим $\overline{N}_{сис}$ – среднее число находящихся в системе заявок:

$$\overline{N}_{сис} = \overline{N}_{оч} + \rho = 0,8 + 2,7 = 3,5 \text{ автомобиля;}$$

12) найдем $\overline{T}_{оч}$ – среднее время пребывания требования в очереди на обслуживание:

$$\overline{T}_{оч} = \frac{\overline{N}_{оч}}{\lambda} = \frac{0,8}{3} = 0,27 \text{ часа;}$$

13) определим $\overline{T}_{сис}$ – среднее время пребывания требования в системе:

$$\overline{T}_{сис} = \overline{T}_{оч} + \bar{t}_{об} = 0,27 + 0,9 = 1,17\,.$$

6.10. Многоканальная система массового обслуживания с ожиданием и ограниченной очередью

Системы массового обслуживания с ограниченной очередью отличаются от рассмотренных в вопросе 6.9 тем, что число заявок в очереди ограничено и не может быть более m. Если новая заявка поступает в момент времени, когда все места в очереди заняты, она покидает систему необслуженной. Для вычисления предельных вероятностей состояний и показателей эффективности таких систем суммируют не бесконечную, а конечную прогрессию.

Предельные вероятности состояния многоканальной системы массового обслуживания с ожиданием и ограниченной очередью:

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \ldots + \frac{\rho^{n+1}\left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)}{n \cdot n!\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)} \right]^{-1},$$

$$p_1 = \frac{\rho^1}{1!} p_0, \ldots, p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \ldots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0,$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, \ldots, p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0, (r = 1, \ldots, m).$$

Рассчитаем другие показатели функционирования системы массового обслуживания:

1) $p_{отк}$ – вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$p_{отк} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \cdot p_0;$$

2) q – относительная пропускная способность системы:

$$q = 1 - p_{отк} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0;$$

3) A – абсолютная пропускная способность системы:

$$A = \lambda q = \lambda\left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0\right)$$

4) $\bar{k}$ – среднее число занятых каналов обслуживания:

$$\bar{k} = \rho \cdot \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0\right) = \rho q;$$

5) $\bar{N}_{оч}$ – среднее число заявок в очереди на обслуживание:

$$\overline{N}_{оч} = \frac{p_0 \rho^{n+1} \cdot \left[1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m \cdot \left(m + 1 - \frac{m\rho}{n}\right)\right]}{n \cdot n! \cdot \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2};$$

6) $\overline{N}_{сис}$ – среднее число находящихся в системе заявок:

$$\overline{N}_{сис} = \overline{N}_{оч} + \overline{k};$$

7) $\overline{T}_{оч}$ – среднее время пребывания требования в очереди на обслуживание:

$$\overline{T}_{оч} = \frac{\overline{N}_{оч}}{A};$$

8) $\overline{T}_{сис}$ – среднее время пребывания требования в системе:

$$\overline{T}_{сис} = \overline{T}_{оч} + \overline{t}_{об}.$$

Пример. Требуется проанализировать работу системы массового обслуживания.

Исходная информация.

Торговая база по заготовке овощей и картофеля оборудована тремя разгрузочно-сортировочными площадками (n). Прибывающие на разгрузку автомобили могут ожидать своей очереди на площадке, вмещающей не более 6 автомобилей (m). Поток автомобилей имеет интенсивность прибытия $\lambda = 4$ автомобиля в час. Среднее время обслуживания одного автомобиля равно 0,5 часа ($\overline{t}_{об}$). Если прибывший с грузом автомобиль застает все места для ожидания занятыми, то он отправляется на другую торговую базу.

Используя приведенную информацию:

1) определим μ – интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\overline{t}_{об}} = \frac{1}{0,5} = 2;$$

2) рассчитаем ρ – относительную нагрузку на систему:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{2} = 2;$$

3) найдем p_0, p_n – предельные вероятности состояния системы:

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \ldots + \frac{\rho^{n+1}\left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)}\right]^{-1} =$$

$$=\left[1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^6\right)}{3\cdot 3!(1-\frac{2}{3})}\right]^{-1}=0{,}114.$$

В среднем 11,4% времени разгрузочно-сортировочные площадки будут простаивать.

$$p_n=\frac{\rho^n}{n!}p_0,$$

$$p_1=\frac{2^1}{1!}\cdot 0{,}114=0{,}228,$$

$$p_2=\frac{2^2}{2!}\cdot 0{,}114=0{,}228,$$

$$p_3=\frac{2^3}{3!}\cdot 0{,}114=0{,}152,$$

$$p_{n+r}=\frac{\rho^{n+r}}{n^r\cdot n!}p_0,(r=1,...,m),$$

$$p_4=\frac{2^4}{3^1\cdot 3!}\cdot 0{,}114=0{,}101,$$

$$p_5=\frac{2^5}{3^2\cdot 3!}\cdot 0{,}114=0{,}068,$$

$$p_6=\frac{2^6}{3^3\cdot 3!}\cdot 0{,}114=0{,}045,$$

$$p_7=\frac{2^7}{3^4\cdot 3!}\cdot 0{,}114=0{,}030,$$

$$p_8=\frac{2^8}{3^5\cdot 3!}\cdot 0{,}114=0{,}020,$$

$$p_9=\frac{2^9}{3^6\cdot 3!}\cdot 0{,}114=0{,}013;$$

4) определим $p_{отк}$ – вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$p_{отк}=p_{n+m}=0{,}013$$

5) вычислим q – относительную пропускную способность системы:

$$q=1-p_{отк}=1-0{,}013=0{,}987;$$

6) определим A – абсолютную пропускную способность системы:

$$A=\lambda q=4\cdot 0{,}987=3{,}948;$$

7) найдем $\bar{k}$ – среднее число занятых каналов:

$$\bar{k}=p\cdot q=2\cdot 0{,}987=1{,}97;$$

8) рассчитаем $\bar{N}_{оч}$ – среднее число заявок в очереди на обслуживание:

$$\overline{N}_{оч} = \frac{p_0 \cdot \rho^{n+1}\left[1-\left(\frac{\rho}{n}\right)^m \cdot \left(m+1-\frac{m\rho}{n}\right)\right]}{n \cdot n! \left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2} =$$

$$= \frac{0{,}114 \cdot 2^4\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(6+1-\frac{6 \cdot 2}{3}\right)\right]}{3 \cdot 3! \left(1-\frac{2}{3}\right)^2} = 0{,}67$$

9) вычислим $\overline{N}_{сис}$ – среднее число находящихся в системе заявок:

$$\overline{N}_{сис} = \overline{N}_{оч} + \bar{k} = 0{,}67 + 1{,}97 = 2{,}64;$$

10) найдем $\overline{T}_{оч}$ – среднее время пребывания требования в очереди на обслуживание:

$$\overline{T}_{оч} = \frac{\overline{N}_{оч}}{A} = \frac{0{,}67}{3{,}948} = 0{,}17 \text{ часа};$$

11) определим $\overline{T}_{сис}$ – среднее время пребывания требования в системе:

$$\overline{T}_{сис} = \overline{T}_{оч} + \bar{t}_{об} = 0{,}17 + 0{,}5 = 0{,}67 \text{ часа}.$$

6.11. Замкнутая система массового обслуживания

В замкнутых системах массового обслуживания или системах Энгесета источник требований находится внутри системы, и интенсивность потока заявок зависит от состояния самой системы. Чаще всего потоком требований в такой системе является поток неисправностей от некоторой группы работающих устройств. Пусть имеется m работающих устройств, которые могут выходить из строя за счет неисправностей. Имеется n каналов обслуживания этих требований. Обычно $n<m$ (рис. 6.10).

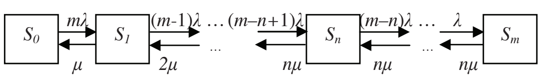


Рис. 6.10. Граф состояний замкнутой системы массового обслуживания

Система может находиться в одном из состояний:

S_0 – все устройства работают и каналы обслуживания свободны;

S_1 – одно устройство вышло из строя и обслуживается одним каналом;

…

S_n – n устройств не работают и все n каналов обслуживания заняты;

…

S_m – все устройства не работают, из них n – обслуживаются, а m–n – ожидают обслуживания в очереди.

Вероятности состояний и характеристики замкнутой системы массового обслуживания определяются следующим образом:

1) p_0, p_k – предельные вероятности состояния системы для вариантов ее организации:

$$p_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{N!}{k!(N-k)!}\rho^k + \sum_{n+1}^{N} \frac{N!}{n^{k-n} \cdot n!(N-k)!}\rho^k\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{N!}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!(N-k)!} + \frac{n^n}{n!}\sum_{k=n+1}^{N} \frac{\rho^k}{n^k(N-k)!}\right)^{-1}.$$

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{N}!\rho^k p_0}{k!(\mathrm{N}-k)!}, 1 \le k \le n; \\ \dfrac{\mathrm{N}! p^k p_0}{n^{k-n} n!(N-k)!}, n+1 \le k \le N, \end{cases}$$

где N – число источников заявок.

2) $\overline{N}_{оч}$ – среднее число требований в очереди на обслуживание (для вариантов организации системы):

$$\overline{N}_{оч} = \sum_{n+1}^{N} (k-n) p_k;$$

3) $\overline{N}_{сис}$ – среднее число требований в системе (на обслуживании и в очереди) для вариантов организации системы:

$$\overline{N}_{сис} = \sum_{k=1}^{N} k p_k;$$

4) $\overline{N}_{пр}$ – среднее число каналов, простаивающих из-за отсутствия работы (для вариантов организации системы):

$$\overline{N}_{пр} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) p_k;$$

5) A – абсолютная пропускная способность системы:

$$A = (N - \overline{N}_{сист})\lambda;$$

6) q – относительная пропускная способность системы: $q = 1$;

7) a_1 – коэффициент простоя требования в очереди (для вариантов организации системы): $a_1 = \dfrac{\overline{N}_{оч}}{N}$;

8) a_2 – коэффициент использования устройства (для вариантов организации системы): $a_2 = 1 - \dfrac{\overline{N}_{сис}}{N}$;

9) a_3 – коэффициент простоя обслуживающих каналов (для вариан-

тов организации системы): $a_3 = \frac{\overline{N}_{пр}}{N}$;

10) $\overline{T}_{ож}$ – среднее время ожидания обслуживания требования (для вариантов организации системы): $\overline{T}_{ож} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1-a_2}{a_2}\right) - \frac{1}{\mu}$.

Пример. Требуется выбрать оптимальный вариант организации замкнутой системы массового обслуживания.

Исходная информация.

На кафедре для обслуживания двенадцати персональных компьютеров выделено два инженера одинаковой производительностью. Поток отказов (неисправностей) одного компьютера – пуассоновский с интенсивностью $\lambda = 0{,}2$. Время обслуживания компьютера подчиняется показательному закону. Среднее время обслуживания одного компьютера одним инженером составляет: $\bar{t}_{об} = 1{,}3$ часа.

Рассматриваются два варианта организации обслуживания персональных компьютеров:

а) создать один компьютерный класс, тогда при отказе компьютера его будет обслуживать один из свободных инженеров $(n = 2; N = 12)$;

б) создать два компьютерных класса по 6 компьютеров в каждом $(n = 1; N = 6)$.

Рассмотрим первый вариант работы системы.

Используя приведенную информацию,

1) определим μ – интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{1}{1{,}3} = 0{,}769;$$

2) рассчитаем ρ – относительную нагрузку на систему:

$$p = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}2}{0{,}769} = 0{,}26;$$

3) найдем p_0, p_k – предельные вероятности состояния системы для двух вариантов ее организации:

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{N}!\rho^k p_0}{k!(\mathrm{N}-k)!}, 1 \le k \le n; \\ \dfrac{\mathrm{N}!\rho^k p_0}{n^{k-n} n!(N-k)!}, n+1 \le k \le N, \end{cases}$$

где N – число источников заявок.

$$p_1 = \frac{12! \cdot 0{,}26^1}{1!(12-1)!} \cdot p_0 = 3{,}2 p_0 = 0{,}070;$$

$$p_2 = \frac{12! \cdot 0{,}26^2}{2!(12-2)!} \cdot p_0 = 4{,}462 p_0 = 0{,}098;$$

$$p_3=\frac{12!\cdot 0{,}26^3}{2!\cdot 2^{3-2}(12-3)!}\cdot p_0=5{,}801p_0=0{,}127\,;$$

$$p_4=\frac{12!\cdot 0{,}26^4}{2!\cdot 2^{4-2}(12-4)!}\cdot p_0=6{,}786p_0=0{,}149\,;$$

$$p_5=\frac{12!\cdot 0{,}26^5}{2!\cdot 2^{5-2}(12-5)!}\cdot p_0=7{,}058p_0=0{,}155\,;$$

$$p_6=\frac{12!\cdot 0{,}26^6}{2!\cdot 2^{6-2}(12-6)!}\cdot p_0=6{,}422p_0=0{,}141\,;$$

$$p_7=\frac{12!\cdot 0{,}26^7}{2!\cdot 2^{7-2}(12-7)!}\cdot p_0=5{,}009p_0=0{,}110\,;$$

$$p_8=\frac{12!\cdot 0{,}26^8}{2!\cdot 2^{8-2}(12-8)!}\cdot p_0=3{,}256p_0=0{,}071\,;$$

$$p_9=\frac{12!\cdot 0{,}26^9}{2!\cdot 2^{9-2}(12-9)!}\cdot p_0=1{,}693p_0=0{,}037\,;$$

$$p_{10}=\frac{12!\cdot 0{,}26^{10}}{2!\cdot 2^{10-2}(12-10)!}\cdot p_0=0{,}660p_0=0{,}014\,;$$

$$p_{11}=\frac{12!\cdot 0{,}26^{11}}{2!\cdot 2^{11-2}(12-11)!}\cdot p_0=0{,}172p_0=0{,}004\,;$$

$$p_{12}=\frac{12!\cdot 0{,}26^{12}}{2!\cdot 2^{12-2}(12-12)!}\cdot p_0=0{,}022p_0=0{,}0005\,.$$

Так как $\sum_{k=0}^{N} p_k=1$, то найдем p_0;

$$\sum_{k=0}^{N} p_k=p_0(1+3{,}2+4{,}462+5{,}801+6{,}786+7{,}058+6{,}422+5{,}009+3{,}256+$$
$$+1{,}693+0{,}660+0{,}172+0{,}022)=1,$$

Отсюда p_0=0,022, подставив p_0, найдем значения p_1– p_{12}.

4) определим $\overline{N}_{оч}$ – среднее число компьютеров в очереди на обслуживание:

$$\overline{N}_{оч}=\sum_{k=n+1}^{N}(k-n)p_k=(3-2)\cdot 0{,}127+(4-2)\cdot 0{,}149+(5-2)\cdot$$
$$\cdot 0{,}155+(6-2)\cdot 0{,}141+(7-2)\cdot 0{,}110+(8-2)\cdot 0{,}071+(9-2)\cdot$$
$$\cdot 0{,}037+(10-2)\cdot 0{,}014+(11-2)\cdot 0{,}004+(12-2)\cdot 0{,}0005=2{,}84;$$

5) определим $\overline{N}_{сис}$ – среднее число компьютеров в системе (на обслуживании и в очереди):

$$\overline{N}_{сис}=\sum_{k=1}^{N}kp_k=1\cdot 0{,}07+2\cdot 0{,}098+3\cdot 0{,}127+4\cdot 0{,}149+5\cdot 0{,}155+$$
$$+6\cdot 0{,}141+7\cdot 0{,}110+8\cdot 0{,}071+9\cdot 0{,}037+10\cdot 0{,}014+11\cdot 0{,}004+$$
$$+12\cdot 0{,}0005=4{,}72;$$

6) рассчитаем $\overline{N}_{пр}$ – среднее число инженеров, простаивающих из-за

отсутствия работы:

$$\overline{N}_{пр} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)p_k = (2-0)\cdot p_0 + (2-1)\cdot p_1 =$$
$$= 2\cdot 0{,}022 + 1\cdot 0{,}07 = 0{,}114;$$

7) определим a_1 – коэффициент простоя персонального компьютера в очереди:

$$a_1 = \frac{\overline{N}_{оч}}{N} = \frac{2{,}84}{12} = 0{,}237\,;$$

8) определим a_2 – коэффициент использования компьютеров:

$$a_2 = 1 - \frac{\overline{N}_{сис}}{N} = 1 - \frac{4{,}72}{12} = 0{,}606\,;$$

9) определим a_3 – коэффициент простоя обслуживающих инженеров:

$$a_3 = \frac{\overline{N}_{пр}}{N} = \frac{0{,}114}{12} = 0{,}010\,;$$

10) рассчитаем $\overline{T}_{ож}$ – среднее время ожидания обслуживания компьютера:

$$\overline{T}_{ож} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1-a_2}{a_2}\right) - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0{,}2}\left(\frac{1-0{,}606}{0{,}606}\right) - \frac{1}{0{,}769} = 1{,}95.$$

Рассчитаем характеристики работы системы для второго варианта ее организации:

11) определим p_0, p_k – предельные вероятности состояния системы:

$$p_1 = \frac{6!\cdot 0{,}26^1}{1!\cdot(6-1)!}\cdot p_0 = 1{,}560\,p_0 = 0{,}165\,;$$

$$p_2 = \frac{6!\cdot 0{,}26^2}{1!\cdot 1^{2-2}(6-1)!}\cdot p_0 = 2{,}028\,p_0 = 0{,}215\,;$$

$$p_3 = \frac{6!\cdot 0{,}26^3}{1!\cdot 1^1(6-3)!}\cdot p_0 = 2{,}109\,p_0 = 0{,}224\,;$$

$$p_4 = \frac{6!\cdot 0{,}26^4}{(6-4)!}\cdot p_0 = 1{,}645\,p_0 = 0{,}174\,;$$

$$p_5 = \frac{6!\cdot 0{,}26^5}{(6-5)!}\cdot p_0 = 0{,}855\,p_0 = 0{,}091\,;$$

$$p_6 = \frac{6!\cdot 0{,}26^6}{(6-6)!}\cdot p_0 = 0{,}222\,p_0 = 0{,}024\,.$$

Найдем $p_0 = 1 - \sum_{k=1}^{N} p_k = 0{,}106$, подставив значение p_0 в выше изложенные формулы, определим p_1– p_6.

12) определим $\overline{N}_{оч}$ – среднее число компьютеров в очереди на обслуживание:

$$\overline{N}_{оч} = \sum_{k=n}^{N}(k-n)p_k = (6-1)\cdot 0{,}024 + (6-2)\cdot 0{,}091 + (6-3)\cdot 0{,}174 +$$
$$+ (6-4)\cdot 0{,}224 + (6-5)\cdot 0{,}215 = 1{,}666;$$

13) определим $\overline{N}_{сис}$ – среднее число компьютеров в системе (на обслуживании и в очереди):

$$\overline{N}_{сис} = \sum_{k=1}^{N} kp_k = 1\cdot 0{,}165 + 2\cdot 0{,}215 + 3\cdot 0{,}224 + 4\cdot 0{,}174 +$$
$$+ 5\cdot 0{,}091 + 6\cdot 0{,}024 = 2{,}559;$$

14) рассчитаем $\overline{N}_{пр}$ – среднее число инженеров, простаивающих из-за отсутствия работы: $\overline{N}_{пр} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)p_k = (1-0)\cdot p_0 = 0{,}106;$

15) определим a_1 – коэффициент простоя персонального компьютера в очереди: $a_1 = \dfrac{\overline{N}_{оч}}{N} = \dfrac{1{,}666}{6} = 0{,}278;$

16) определим a_2 – коэффициент использования компьютеров: $a_2 = 1 - \dfrac{\overline{N}_{сис}}{N} = 1 - \dfrac{2{,}559}{6} = 0{,}574;$

17) определим a_3 – коэффициент простоя обслуживающих инженеров: $a_3 = \dfrac{\overline{N}_{пр}}{N} = \dfrac{0{,}106}{6} = 0{,}018;$

18) рассчитаем $\overline{T}_{ож}$ – среднее время ожидания обслуживания компьютера: $\overline{T}_{ож} = \dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{1-a_2}{a_2}\right) - \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{0{,}2}\left(\dfrac{1-0{,}574}{0{,}574}\right) - \dfrac{1}{0{,}769} = 2{,}41;$

19) расчеты заносим в табл. 6.2, проанализируем ее и найдем оптимальное решение задачи.

Таблица 6.2. **Некоторые вероятностные характеристики системы**

Вероятностные характеристики	Варианты организации системы	
	I	II
a_1 – коэффициент простоя компьютера в очереди	0,237	0,278
a_2 – коэффициент использования компьютеров	0,606	0,574
a_3 – коэффициент простоя обслуживающих инженеров	0,010	0,018
$\overline{T}_{ож}$ – среднее время ожидания обслуживания компьютера	1,95	2,41

При первом варианте организации системы персональный компьютер стоит в очереди для ожидания обслуживания 0,237 часа рабочего времени, что меньше, чем при втором варианте организации системы (a_1=0,278 часа). Вероятность того, что персональный компьютер в любой момент времени будет работать при первом варианте выше, чем при втором варианте организации системы (a_2=0,606>0,574), следовательно, первый вариант организации работ по обслуживанию персональных компьютеров эффективнее, чем второй.

Вопросы для самопроверки

1. Какие вопросы можно решить с помощью теории массового обслуживания?
2. Дайте понятие системы массового обслуживания, процесса обслуживания, канала обслуживания, заявки или требования, точке возобновления заказа.
3. Какими свойствами обладают случайные процессы, протекающие в системе массового обслуживания?
4. Какие системы массового обслуживания являются марковскими?
5. Какими свойствами характеризуются простейшие потоки?
6. Каков закон распределения интервала времени между событиями простейшего потока?
7. Приведите классификацию систем массового обслуживания.
8. Приведите уравнения Колмогорова для расчета предельных вероятностей состояний системы массового обслуживания.
9. Охарактеризуйте процесс гибели и размножения системы массового обслуживания.
10. Охарактеризуйте систему массового обслуживания с отказами.
11. Охарактеризуйте систему массового обслуживания с ожиданием.
12. Что такое однофазная система массового обслуживания?
13. Что такое многофазная система массового обслуживания?
14. Что такое замкнутая система массового обслуживания?
15. Что собой представляет размеченный граф состояний системы?
16. Назовите основные показатели эффективности функционирования одноканальной и многоканальной систем массового обслуживания с отказами.
17. Назовите основные показатели эффективности функционирования одноканальной и многоканальной систем массового обслуживания с ожиданием.
18. Назовите основные показатели эффективности функционирования одноканальной и многоканальной систем массового обслуживания с ожиданием и ограничением на длину очереди.

19. Назовите критерии оптимальности одноканальной и многоканальной систем массового обслуживания.

20. Перечислите характеристики замкнутой системы массового обслуживания

7. МОДЕЛИ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

7.1. Постановка задачи управления запасами

Основными причинами создания производственных запасов служат необходимость обеспечения бесперебойного снабжения производственного процесса, периодичность производства различных видов продукции поставщиками, осуществление транспортировки большинства видов продукции от поставщика к потребителю партиями, а также несовпадение ритма производства с ритмом потребления.

Под запасами понимают все то, на что имеется спрос и что выключено временно из потребления. Запасы подразделяются на запасы средств производства и запасы предметов потребления.

Предприятия стремятся уменьшить свои запасы, так как оплачивают их хранение, отвлекают денежные средства на их оплату, несут потери от морального износа и естественной убыли запасов. Но слишком низкий уровень запасов связан с риском возникновения их дефицита, остановкой производства, изменением конъюнктуры, случайными колебаниями спроса, что приводит к увеличению упущенной прибыли.

Предметом теории управления запасами является отыскание такой организации поставок или производства, при которых суммарные затраты на функционирование системы были бы минимальными. *Под организацией поставок* понимается определение объемов поставок и периодичность заказов.

Возникновение теории управления запасами можно связать с работами Ф. Эджуорта и Ф. Харриса, опубликованными в конце 19 – начала 20 в., в которых исследовалась простая модель для определения экономичного размера партии поставки для складской системы с постоянным равномерным расходом и периодическим поступлением хранимого продукта. Как научная дисциплина теория управления запасами начала формироваться в середине 1950-х гг. В настоящее время в литературе имеется более 300 моделей управления запасами.

Существует четыре основных вида затрат, которые могут оказать влияние на решение задачи по управлению запасами, т.е. суммарные затраты системы управления запасами состоят из: 1) затрат на приобретение запасов; 2) затрат на организацию заказа; 3) затрат на хранение запас; 4) потерь от дефицита запаса.

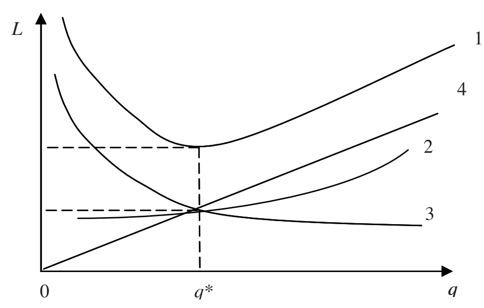
Затраты на приобретение запасов характеризуются стоимостью единицы продукции, которая может быть постоянной или переменной. При этом цена единицы продукции может зависеть от величины партии заказа, что выражается в виде оптовых скидок. При этом затраты, которые не зависят от величины и периодичности заказов при решении задач не учитываются.

К *затратам на организацию заказа* относят постоянные расходы, связанные с размещением заказов: расходы на разъезды и командировки, почтово-телеграфные расходы, транспортные затраты. При размещении более мелких заказов и, следовательно, более частых эти затраты возрастают по сравнению с размещением более крупных, но менее частных заказов.

Затраты на хранение запаса включают затраты на амортизацию и эксплуатацию складов, на содержание и грузопереработку запаса на складах. Они возрастают с увеличением уровня запаса.

Потери от дефицита – это расходы, обусловленные отсутствием необходимых ресурсов или продукции, и возможные потери из-за утраты доверия покупателей. Эти потери рассматриваются как уменьшение прибыли за счет простоя мощности и обслуживающего персонала предприятия, переналадки производственного процесса, замены дефицитных материалов другими более дорогими, штрафа за нарушение сроков поставки продукции.

Суммарные затраты можно проиллюстрировать графически: по оси абсцисс ($0x$) откладываем уровень запаса; по оси ординат (y) откладываем суммарные затраты (рис. 7.1).



1 – суммарные затраты; 2 – затраты на приобретение; 3 – затраты на оформление; 4 – затраты на хранение; 5 – потери от дефицита.

Рис. 7.1. Зависимость суммарных затрат от размера партии поставок

Классификация моделей управления запасами. Большое разнообразие моделей управления запасами объясняется многообразием реальных ситуаций, характером спроса. Спрос может быть детерминированным (достаточно известным) и вероятностным (случайным). Детерминированный спрос может быть 1) статическим, т.е. неизменным во времени, интенсивность потребления постоянна во времени; 2) динамическим, когда спрос изменяется во времени.

Вероятностный спрос может быть:

1) стационарным, т.е. с неизменной во времени плотностью вероятности;

2) нестационарный, т.е. с изменяющейся во времени плотностью вероятности.

На разнообразие форм моделей управления запасов влияет:

1) число видов продукции, т.е. модели могут быть однопродуктовыми (однономенклатурными) и многопродуктовыми (многономенклатурными);

2) число пунктов накопления запасов (один или несколько);

3) период времени (интервал) в течении которого осуществляется регулирование уровня запасов (этот период может быть конечным и бесконечным).

Модели управления запасами различаются по:

1) пополнению запасов (этот процесс может происходить мгновенно или равномерно во времени);

2) запаздыванию поставок, т.е. заказ может быть поставлен немедленно или для его выполнения требуется некоторое время.

Интервалом времени между моментом размещения заказов и его поставкой называется *срок выполнения заказов*. Эта величина может быть детерминированной и случайной.

7.2. Статическая детерминированная однопродуктовая модель

Самая простая модель характеризуется постоянным во времени спросом, мгновенным пополнением запасов и отсутствием дефицита.

Введем условные обозначения:

1. v – интенсивность спроса;
2. K – затраты на организацию поставки;
3. q – величина заказанной партии;
4. s – издержки содержания единицы продукции в единицу времени;
5. $I(t)$ – уровень запасов в зависимости от времени;
6. τ – интервал между двумя поставками.

Простая модель оптимальной партии поставки строится при следующих предположениях: 1. спрос в единицу времени – постоянной; 2. заказанная партия доставляется мгновенно; 3. дефицит недопустим; 4. затраты на организацию поставки постоянны и не зависят от величины партии; 5. издержки содержания единицы продукции в течение единицы времени составляют s.

В простой модели уровень запасов уменьшается равномерно от q до 0, после чего подается заказ на доставку новой партии величиной q. Заказ выполняется мгновенно, и уровень запаса восстанавливается до величины q.

В простой модели динамику изменения запасов можно изобразить в виде пилообразной ломаной (рис. 7.2).

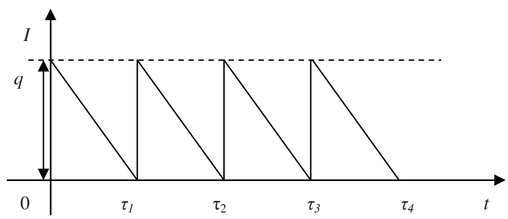


Рис. 7.2. Динамика изменения уровня запасов в модели Уилсона

Интервал времени между поставками τ называется *циклом*. Издержки в течение цикла $L_ц$ состоят из стоимости заказа K и затрат на содержание запаса, которые пропорциональны средней величине запаса $I = \frac{q}{2}$ и длина цикла $\tau = \frac{q}{v}$, следовательно, издержки в течение цикла вычисляются по формуле:

$$L_ц = K + s\frac{q}{2}\cdot\frac{q}{v}.$$

Разделим это выражение на длину цикла ($\tau = \frac{q}{v}$), получим издержки в единицу времени:

$$\frac{L_ц}{\tau} = L \text{ или } \frac{L_ц}{\tau} = K\frac{v}{q} + s\frac{q}{2}.$$

Чтобы найти точку минимума, продифференцируем выражение по q, получим:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{(Kv)'q - Kv(q)'}{q^2} + \frac{1}{2}(sq)' = \frac{0\cdot q - Kv\cdot 1}{q^2} + \frac{1}{2}s\cdot 1 = -\frac{Kv}{q^2} + \frac{s}{2},$$

так как $-\frac{Kv}{q^2}+\frac{s}{2}=0$, то найдем отсюда оптимальный размер партии заказа (q^*):

$$\frac{Kv}{q^2}=\frac{s}{2} \text{ или } q^2 s = 2Kv \text{ или } q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}}.$$

Эта формула называется формулой Уилсона или формулой для определения экономной величины заказа или размера партии.

Рассчитаем остальные оптимальные параметры системы:

$$\tau^* = \frac{q^*}{v} = \sqrt{\frac{2Kv}{sv^2}} = \sqrt{\frac{2K}{sv}},$$

где τ^* – оптимальная продолжительность цикла потребления или оптимальный интервал между поставками.

Суммарные затраты по формированию оптимального размера партии заказа и содержанию запасов в единицу времени рассчитываются по формуле:

$$L^* = \sqrt{2Ksv} = sq^*,$$

так как $\frac{d^2L}{dq^2} \geq 0$, то для всех $q>0$ выражение $L^* = sq^*$ является минимумом функции затрат.

Пример. Требуется определить оптимальную партию запуска продукции, периодичность и среднегодовые издержки работы системы.

Исходная информация.

Перерабатывающее предприятие выпускает различные виды макаронных изделий партиями на одном и том же оборудовании. При переходе от одного вида макаронных изделий к другому предприятие несет затраты от переналадок оборудования, которые в среднем равны $K=300$ у.д.е. Средняя потребность в макаронных изделиях каждого вида $v=1500$ т в год, стоимость 1 т $\alpha = 400$ у.д.е. Издержки на хранение изделий составляют p=1% от стоимости хранимой продукции.

Используя приведенную информацию:

1) найдем s – издержки содержания единицы продукции в единицу времени: $s=\alpha p$; $s = 400 \cdot 0{,}1 = 4$ у.д.е.

2) используя модель Уилсона, определим q^* – оптимальный размер партии поставки (запуска):

$$q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}};\ q^* = \sqrt{\frac{2\cdot 300\cdot 1500}{4}} = 474{,}34 \text{ т.}$$

3) определим τ^* – оптимальный интервал между поставками (переналадками):

$$\tau^* = \frac{q^*}{v} = \sqrt{\frac{2K}{sv}};\ \tau^* = \frac{474{,}34}{1500} = 0{,}316 \text{ года или 115 дней.}$$

4) найдем L^* – наименьшие суммарные затраты работы системы по

формированию поставок и содержанию запасов в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ksv}\,;\; L^* = \sqrt{2 \cdot 300 \cdot 4 \cdot 1500} = 1897{,}4 \text{ у.д.е.}$$

Таким образом, если партия запуска продукции будет 474,34 т, а интервал между переналадками – 115 дней, то суммарные затраты работы системы по формированию партии запуска и содержанию переналадок в единицу времени будут минимальными и равны 1897,4 у.д.е.

Пример. Требуется определить оптимальные параметры системы и сравнить их с затратами при действующей системе.

Исходная информация.

На одной линии упаковки перерабатывающего предприятия разливаются разные соки в пакеты. Вид сока для упаковки изменяется через месяц (τ_∂). Затраты на подготовительно-заключительные операции составляют $K = 300$ у.д.е. Потребность в соках составляет $\nu = 1{,}8$ тыс. л в месяц. Стоимость хранения 1 л сока в течение дня равна $s = 0{,}1$ у.д.е.

Используя приведенную информацию:

1) найдем s – издержки содержания единицы продукции в месяц:

$$s = 0{,}1 \cdot 30 \text{ дней} = 3 \text{ у.д.е. в месяц;}$$

2) используя модель Уилсона, определим q^* – оптимальный размер партии поставки: $q = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 300 \cdot 1800}{3}} = 600$ л;

3) определим τ^* – оптимальный интервал между поставками:

$$\tau^* = \frac{600}{1800} = 0{,}33 \text{ месяца или 10 дней;}$$

4) найдем L^* – наименьшие суммарные затраты работы системы в единицу времени: $L^* = \sqrt{2 \cdot 300 \cdot 3 \cdot 1800} = 1800$ у.д.е.;

5) найдем q_∂ – размер партии поставки при действующей системе:

$$q_\partial = \tau_\partial \nu\,;\; q_\partial = 1 \cdot 1800 = 1800 \text{ л;}$$

6) определим L – суммарные затраты работы действующей системы в единицу времени:

$$L_\partial = \frac{K\nu}{q} + \frac{sq}{2}\,;$$

$$L_\partial = \frac{300 \cdot 1800}{1800} + \frac{3 \cdot 1800}{2} = 3000 \text{ у.д.е.}$$

Таким образом, если в течение 10 дней разливать один сок, то оптимальная партия данного сока составит 600 л вместо 1800 л и затраты в единицу времени в течение цикла уменьшатся до 3000 до 1800 у.д.е., экономия составит 3000–1800=1200 у.д.е.

7.3. Обоснование точки заказа в модели Уилсона

В статической детерминированной однопродуктовой модели предполагали, что заказы выполняются мгновенно. На практике необходимо учитывать время их доставки. Пусть Θ – время от момента размещения заказа до его появления у потребителя. Заказ должен подаваться заранее, чтобы избежать дефицита наличного ресурса, которого должно быть достаточно для удовлетворения потребности за время реализации заказа. Рассмотрим три случая:

1) $\Theta = \tau^*$, т.е. в момент поступления очередной партии необходимо давать заказ на пополнение запаса. При этом точка заказа равна нулю: r=0. Под *точкой заказа* понимают величину наличного запаса, при котором подается заказ на пополнение запаса. Если $\Theta = \tau^*$, то средний уровень фиктивного запаса равен $\tau^* v + q^*/2 = 3/2q^*$. Под *фиктивным уровнем текущего запаса* понимают сумму наличного запаса и заказанного ресурса или товара в любой момент времени. При $\Theta = \tau^*$ динамика изменения текущего уровня фиктивного запаса изображена на рис. 7.3 пунктирной линией.

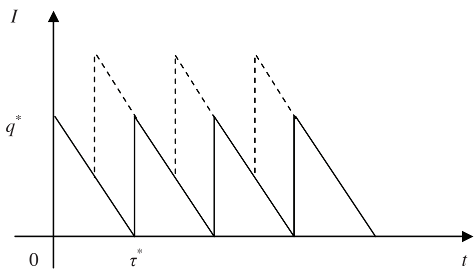


Рис. 7.3. Динамика изменения фиктивного уровня текущего запаса, если время выполнения заказа равно длительности одного цикла ($\Theta = \tau^*$)

2) Если $\Theta < \tau^*$, то точка размещения заказа $r = \Theta v$, а средний уровень фиктивного запаса составляет $\Theta v + q^*/2$. Динамика изменения текущего уровня фиктивного запаса при $\Theta < \tau^*$ отражена пунктиром на рис. 7.4.

3) Если $\Theta > \tau^*$, то динамика изменения фиктивного уровня запаса изображена пунктиром на рис. 7.5.

Допустим $\Theta = 2{,}5\tau^*$, т.е. $\Theta > \tau^*$, то в интервале $[t_k, k\tau^*]$ средняя величина заказанного ресурса или товара равна $2{,}5q^* = 2{,}5\tau^* v = \Theta v$, а это соответствует величине потребления за время реализации заказа.

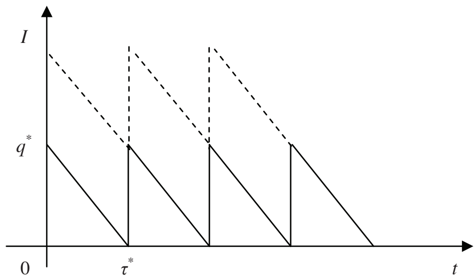


Рис. 7.4. Динамика изменения фиктивного уровня текущего запаса, если время выполнения заказа меньше длительности одного цикла ($\Theta < \tau^*$)

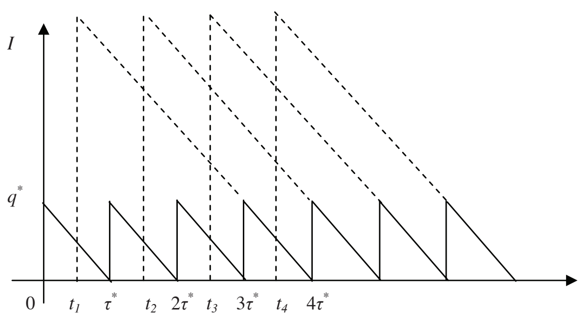


Рис. 7.5. Динамика изменения фиктивного уровня текущего запаса, если время выполнения заказа больше длительности одного цикла ($\Theta > \tau^*$)

Обобщим рассмотренные ситуации. Через $[\Theta/\tau^*]$ обозначим наибольшее целое число, не превышающее Θ/τ^*. Тогда в интервалах $[t_k, k\tau^*]$ перед поступлением очередной партии количество товара или ресурса в невыполненных заказах будет равно $[\Theta/\tau^*]q^*$, а в интервалах $(k\tau^*, t_{k+1})$ после поступления до момента размещения заказа – $([\Theta/\tau^*]+1)q^*$. Если Θ/τ^* – является целым числом, то имеется Θ/τ^* невыполненных заказов. Отсюда следует, что точка размещения заказа определяется по формуле:

$$r = \Theta v - \left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right] q^* .$$

Если $\Theta = \tau^*$, то имеем $r = \Theta v - q^* = 0$, если $\Theta < \tau^*$, то $\left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right] = 0$ и, следовательно, $r = \Theta v$.

Для бесперебойной работы системы необходимо иметь минимальный начальный запас I_0, который можно рассчитать по формуле:

$$I_0 = \Theta v \ .$$

Если I – наличный начальный запас, то для бездефицитной работы необходимо, чтобы $I \geq \Theta v$.Тогда отношение $\frac{I}{v}$ определит время потребления запаса I. Чтобы партия прибыла к моменту полного использования начального уровня, ее надо разместить в момент времени t_0:

$$t_0 = \frac{I}{v} - \Theta \ .$$

Остальные заказы выполнить в моменты времени t_k:

$$t_k = \frac{I}{v} - \Theta + k\tau^*, k = 0,1,2...$$

Пример. Требуется обосновать точку размещения заказа и другие оптимальные параметры системы.

Исходная информация.

Заводу по выпуску сельскохозяйственной техники требуется $v = 10$ тыс. чугунных заготовок в год. Издержки размещения заказа $K = 300$ у.д.е., содержание одной заготовки $s = 2$ у.д.е. в год. Среднее время реализации заказа $\Theta = 30$ дней или 0,082 года.

Используя приведенную информацию:

1) определим q^* – оптимальный размер партии поставки:

$$q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 300 \cdot 10000}{2}} = 1732 \text{ штуки;}$$

2) определим τ^* – оптимальный интервал между поставками:

$$\tau^* = \frac{q^*}{v} = \frac{1732}{1000} = 0{,}173 \text{ или } 63{,}2 \text{ дня;}$$

3) найдем r – точку размещения (возобновления) заказа:

$$r = \Theta v - \left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right] q^*, \text{ где} \left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right] \text{– целая часть числа} \frac{\Theta}{\tau^*};$$

$$\tau = 0{,}082 \cdot 10000 - \left[\frac{0{,}082}{0{,}173}\right] \cdot 1732 = 820 \text{ штук;}$$

4) рассчитаем I_0 – минимальный начальный запас, гарантирующий бездефицитное потребление:

$$I_0 = \Theta v = 0{,}082 \cdot 10000 = 820 \text{ штук;}$$

5) определим t_k – моменты размещения заказов:

$$t_k = \frac{I}{v} - \Theta + k\tau^*, k = 0,1,2...; \text{ где } I \text{ – фактический начальный запас;}$$

$$t_0 = \frac{820}{10000} - 0{,}082 + 0 \cdot 0{,}173 = 0 \text{ года;}$$

$$t_1 = \frac{820}{10000} - 0{,}082 + 1 \cdot 0{,}173 = 0{,}173 \text{ года или } 63{,}1 \text{ дня;}$$

$$t_2 = \frac{820}{10000} - 0{,}082 + 2 \cdot 0{,}173 = 0{,}346 \text{ года или } 126{,}3 \text{ дня;}$$

6) найдем L^* – наименьшие суммарные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ksv} = \sqrt{2 \cdot 300 \cdot 2 \cdot 10000} = 3464{,}1 \text{ у.д.е. в год.}$$

7.4. Учет дискретности в модели Уилсона

В простейшей модели Уилсона предполагали, что спрос является непрерывной величиной. Если же спрос – непрерывная величина, а на размер партии заказа налагается ограничение положительности и целочисленности, тогда зависимость суммарных издержек работы системы от размера партии изображена на рис. 7.6, для которой выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} \Delta L(q) = L(q) - L(q-1) \le 0 \\ \Delta L(q+1) = L(q+1) - L(q) \ge 0. \end{cases}$$

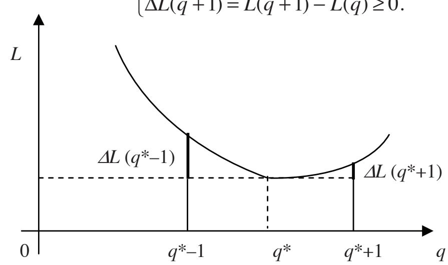


Рис. 7.6. Зависимость суммарных издержек работы системы от размера партии поставок

Так как $L(q) = \frac{Kv}{q} + \frac{sq}{2}$, то найдем q:

$$-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2Kv}{s}} \le q \le \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2Kv}{s}}\ ,$$

$$q^* = \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2Kv}{s}}\right],$$

где $[a]$ – целая часть числа a.

Обозначим
$$q_1^* = \left[-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2Kv}{s}}\right],$$

$$q_2^* = \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2Kv}{s}}\right],$$

тогда имеем два оптимальных решения:

$$q_1^* \le q^* \le q_2^*$$

Оптимальный интервал поставок $\tau^* = \frac{q^*}{v}$ может быть нецелочисленным, поэтому представим суммарные издержки работы системы как функцию от величины интервала возобновления поставки τ:

$$L(\tau) = \frac{K}{\tau} + \frac{2sv\tau}{2}.$$

Для данной функции выполняются условия:

$$\begin{cases} \Delta L(\tau) = L(\tau) - L(\tau - 1) \le 0 \\ \Delta L(\tau + 1) = L(\tau + 1) - L(\tau) \ge 0 \end{cases}$$

Откуда найдем значение τ:

$$-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K}{sv}} \le \tau \le \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K}{sv}},$$

$$\tau^* = \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K}{sv}}\right],$$

где $[a]$ – целая часть числа a.

Обозначим $$\tau_1^* = \left[-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K}{sv}}\right],$$

$$\tau_2^* = \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2K}{sv}}\right],$$

Имеем два оптимальных значения:

$$\tau_1^* \le \tau^* \le \tau_2^*.$$

Пример. Требуется определить оптимальный размер партии поставки.

Исходная информация.

Завод по выпуску сельскохозяйственной техники поставляет сельскохозяйственным организациям района трактора. Средняя потребность в них равна $v = 4$ трактора в месяц. Стоимость организации заказа $K = 1000$ у.д.е., издержки содержания 1 трактора в месяц $s = 200$ у.д.е.

Используя приведенную информацию:

1) найдем $q^*(q_1^*; q_2^*)$ – оптимальный размер партии поставки (на размер партии поставки налагается условие положительности и целочисленности):

$$q^* = \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2Kv}{s}}\right],$$

$$q^* = \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2 \cdot 1000 \cdot 4}{200}}\right] = 6 \text{ тракторов};$$

где $[a]$ – целая часть числа a;

$$q_1^* \le q^* \le q_2^*;$$

$$\left[-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{2K\nu}{s}}\right]\le q^*\le\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{2K\nu}{s}}\right];$$

$$\left[-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{2\cdot1000\cdot4}{200}}\right]\le q^*\le\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{2\cdot1000\cdot4}{200}}\right];$$

$$[-0{,}5+6{,}3]\le q^*\le[0{,}5+6{,}3];$$

$$5\le q^*\le 6;$$

2) определим $L^*(L_1^*, L_2^*)$ – наименьшие суммарные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^*=\frac{K\nu}{q^*}+\frac{sq^*}{2};$$

$$L_1^*=\frac{1000\cdot4}{5}+\frac{200\cdot5}{2}=1300 \text{ у.д.е., при } q^*=5 \text{ тракторов;}$$

$$L_2^*=\frac{1000\cdot4}{6}+\frac{200\cdot6}{2}=1266{,}7 \text{ у.д.е., при } q^*=6 \text{ тракторов;}$$

3) рассчитаем $\tau^*(\tau_1^*, \tau_2^*)$ – оптимальный интервал между поставками:

$$\tau^*=\frac{q^*}{\nu};\ \tau_1^*=\frac{q_1^*}{\nu}=\frac{5}{4}=1{,}25 \text{ месяца или 37 дней;}$$

$$\tau_2^*=\frac{q_2^*}{\nu}=\frac{6}{4}=1{,}5 \text{ месяца или 45 дней.}$$

7.5. Модель оптимальной партии поставки с конечной интенсивностью поступления партии

В модели Уилсона предполагалось, что вся партия поступает заказчику одновременно. На практике часто партия поступает по частям с интенсивностью λ. Например, один цех завода производит детали, которые поступают на склад с определенной интенсивностью и используются другим цехом для производства товара с интенсивностью потребления ν. В этом случае, система может работать бездефицитно, если $\lambda \ge \nu$. Динамика изменения запасов в системе изображена на рис. 7.7.

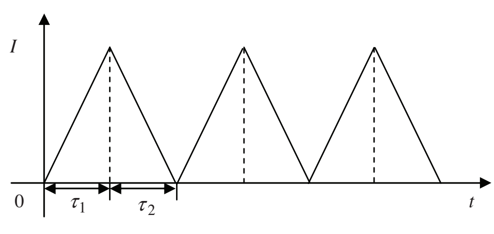


Рис. 7.7. Динамика изменения уровня запасов в модели с конечной интенсивностью поступления заказа

За время τ_1 запас одновременно поступает и расходуется, а в течение времени τ_2 запас только расходуется.

Длина цикла определяется по формуле:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 .$$

Скорость пополнения запасов равна $(\lambda - v)$. Величина партии поставки равна q, но максимальный уровень запаса $I_{\max} < q$, так как продукция используется по мере изготовления.

Если производственный цикл длится t единиц времени, то общий объем продукции, произведенной за цикл равен:

$$q = \lambda t .$$

Найдем отсюда $t = \dfrac{q}{\lambda}$.

Тогда максимальный уровень запаса определяется по формуле:

$$I_{\max} = (\lambda - v)t = (\lambda - v)\frac{q}{\lambda} = (1 - \frac{v}{\lambda})q .$$

Отсюда следует, что средний уровень запаса равен:

$$\bar{I} = \left(1 - \frac{v}{\lambda}\right)\frac{q}{2} .$$

Тогда издержки системы в единицу времени составят:

$$L = \frac{Kv}{q} + \frac{sq}{2}(1 - \frac{v}{\lambda}) .$$

Для определения оптимальных параметров работы системы найдем величину оптимальной партии:

$$q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v}{s}}} ;$$

оптимальный период возобновления производства:

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2K}{sv}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v}{s}}} ;$$

время производства:

$$\tau_1^* = \frac{q^*}{\lambda} ;$$

время чистого потребления:

$$\tau_2^* = \sqrt{\frac{2K}{sv}} \cdot \sqrt{1 - \frac{v}{s}} ;$$

минимальные издержки в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ksv} \cdot \sqrt{1 - \frac{v}{s}} .$$

При определении оптимальной точки заказа рассматриваются два случая:

а) $r=\Theta\nu-\left[\dfrac{\Theta}{\tau^*}\right]q^*$, если $\Theta-\left[\dfrac{\Theta}{\tau^*}\right]\tau^*<\tau_2^*$;

б) $r=\Theta(\nu-\lambda)+\left(\left[\dfrac{\Theta}{\tau^*}\right]+1\right)\cdot\left(\dfrac{\lambda}{\nu}-1\right)q^*$, если $\Theta-\left[\dfrac{\Theta}{\tau^*}\right]\tau^*>\tau_2^*$;

моменты размещения заказа при $(t_0=0)$:

$$t_k=t_0+k\tau^*, k=1,2\dots.$$

Пример. Требуется определить оптимальную партию поставки и другие характеристики системы.

Исходная информация.

Консервный завод выпускает партиями 6 различных видов консервов на одном и том же оборудовании. Спрос на каждый вид консерв равен $\nu=500$ тыс. туб. в год. Издержки переналадки оборудования, связанные с его очисткой и переоборудованием перед выработкой другого вида консервов равны $K=200$ у.д.е. Стоимость хранения 1 тыс. туб. консервов на складе $s=30$ у.д.е. в год. Производительность завода (интенсивность) $\lambda=2500{,}0$ тыс. туб. в год. Время реализации заказа (от его получения до выдачи готовой продукции) $\Theta=2$ месяца или 0,164 года.

Используя приведенную информацию:

1) найдем q^* – оптимальный размер партии поставки:

$$q^*=\sqrt{\frac{2K\nu}{s}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\nu}{\lambda}}}=\sqrt{\frac{2\cdot200\cdot500}{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{500}{2500}}}=91{,}3 \text{ тыс. туб. в год}$$

2) рассчитаем τ_1^* – время производства:

$$\tau_1^*=\frac{q^*}{\lambda}=\frac{91{,}3}{2500}=0{,}0365 \text{ года или 13,3 дня;}$$

3) рассчитаем τ_2^* – время чистого потребления:

$$\tau_2^*=\sqrt{\frac{2K}{s\nu}}\cdot\sqrt{1-\frac{\nu}{\lambda}}=\sqrt{\frac{2\cdot200}{30\cdot50}}\cdot\sqrt{1-\frac{500}{2500}}=0{,}146 \text{ года или 53,3 дня;}$$

4) определяем оптимальное время между началом выпуска партии:

$$\tau^*=\sqrt{\frac{2K}{s\nu}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\nu}{\lambda}}}=\sqrt{\frac{2\cdot200}{30\cdot500}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{500}{2500}}}=0{,}183 \text{ года или 66,6 дня;}$$

5) определим r – точку заказа:

рассчитаем:

$$\Theta-\left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right]\tau^*=0{,}164-\left[\frac{0{,}164}{0{,}183}\right]\cdot0{,}183=0{,}164\text{ ;}$$

Так как $0{,}164 > 0{,}146$, то

$$r = \Theta(\nu - \lambda) + \left(\left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right] + 1\right) \cdot \left(\frac{\lambda}{\nu} - 1\right) q^* = 0{,}164 \cdot (500 - 2500) +$$

$$+ \left(\left[\frac{0{,}164}{0{,}183}\right] + 1\right) \cdot \left(\frac{2500}{500} - 1\right) \cdot 91{,}3 = 37{,}2 \textit{тыс.туб.}$$

6) определим t_k – моменты размещения заказа при $(t_0 = 0)$:

$$t_k = t_0 + k\tau^*, k = 1,2...;\ t_0 = 0;$$

$$t_1 = 1 \cdot 0{,}183 = 0{,}183 \text{ года;}$$

$$t_2 = 2 \cdot 0{,}183 = 0{,}366 \text{ года и т.д.;}$$

7) определим максимальный уровень запасов:

$$I_{\max} = q^*(1 - \frac{\nu}{\lambda}) = 91{,}3 \cdot (1 - \frac{500}{2500}) = 81{,}7 \text{ тыс. туб.;}$$

8) рассчитаем L^* – минимальные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} \cdot \sqrt{1 - \frac{\nu}{\lambda}} = \sqrt{2 \cdot 200 \cdot 30 \cdot 500} \cdot \sqrt{1 - \frac{500}{2500}} = 2190{,}9 \text{ у.д.е.}$$

7.6. Модель оптимальной партии поставки с дефицитом при учете неудовлетворенных требований

В модели Уилсона предполагается, что дефицит не допустим. Однако на практике требования, поступающие в моменты дефицита, ставятся на учет и при поступлении очередной партии, в первую очередь, удовлетворяется задолженный спрос, а затем пополняется запас. Изменение запаса показано на рис. 7.8. На рис. 7.8 видно, что y – максимальная величина задолженного спроса; q–y – максимальная величина наличного запаса; τ_1 и τ_2 – соответственно время существования наличного запаса и время дефицита. Издержки d, вызванные дефицитом единицы запаса в единицу времени пропорциональны средней величине дефицита и времени его существования.

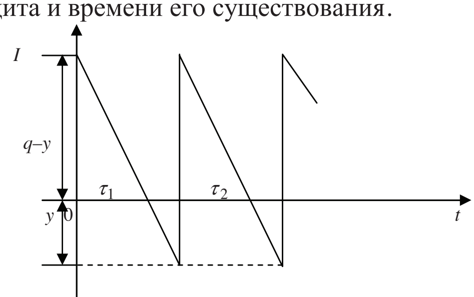


Рис. 7.8. Динамика изменения уровня запаса в модели при дефиците с учетом неудовлетворенных требований

Тогда издержки цикла, включающие затраты на размещение заказа, содержание запаса и потери от дефицита будут равны:

$$L_ц = K + \frac{s(q-y)^2}{2v} + \frac{dy^2}{2v}.$$

Разделим издержки цикла на его величину $\tau_1 + \tau_2$, получим средние издержки работы системы в единицу времени:

$$L = \frac{Kv}{q} + \frac{s(q-y)^2}{2q} + \frac{dy^2}{2q}.$$

Отсюда определяем оптимальные параметры системы:

оптимальный размер партии поставки:

$$q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}} \cdot \sqrt{1 + \frac{s}{d}};$$

максимальная величина задолженного спроса (максимальный уровень дефицита):

$$y^* = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2Kv}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}};$$

максимальная величина наличных (текущих) запасов:

$$Y^* = q^* - y^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}};$$

время существования наличного запаса:

$$\tau_1^* = \frac{Y^*}{v} = \sqrt{\frac{2K}{sv}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}};$$

время существования дефицита:

$$\tau_2^* = \frac{y^*}{v} = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2K}{sv}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}};$$

оптимальный период возобновления заказа (продолжительность цикла):

$$\tau^* = \tau_1^* + \tau_2^* = \frac{q^*}{v} = \sqrt{\frac{2K}{sv}} \cdot \sqrt{1+\frac{s}{d}};$$

точка заказа:

$$r = \Theta v - \left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right] q^* - y^*;$$

Точка заказа может принимать отрицательное значение, что показывает, что заказ необходимо разместить в момент, когда величина требований, поставленных на учет, равна $|r|$;

минимальные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}}.$$

Пример. Требуется определить оптимальную партию поставки и другие характеристики системы.

Исходная информация.

Согласно договорам сельскохозяйственная организация поставляет в торговую сеть картофель. Спрос на продукцию составляет $\nu = 4000$ т в год. Стоимость хранения картофеля с учетом естественной убыли, включая потери, связанные с нереализованной продукции $s = 50$ у.д.е. за 1 т в год. Издержки размещения заказа $K = 600$ у.д.е. Неудовлетворенные требования берутся на учет. При поступлении очередной партии картофеля в первую очередь удовлетворяется задолженный спрос, а затем пополняется запас. Удельные издержки, связанные с дефицитом 1 т картофеля в единицу времени в течение года (штрафы за дефицит) составляют $d = 100$ у.д.е. Время реализации заказа (от его получения до поставки картофеля в торговую сеть) $\Theta = 1$ месяц или 0,082 года.

Используя приведенную информацию:

1) найдем q^* – оптимальный размер партии поставки:

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \sqrt{1+\frac{s}{d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 600 \cdot 4000}{50}} \cdot \sqrt{1+\frac{50}{100}} = 379{,}5 \text{ т};$$

2) рассчитаем y^* – максимальную величину задолженного спроса (максимальный уровень дефицита):

$$y^* = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}} = \frac{50}{100}\sqrt{\frac{2 \cdot 600 \cdot 4000}{50}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{50}{100}}} = 126{,}5 \text{ т};$$

3) определяем Y^* – максимальную величину наличных (текущих) запасов:

$$Y^* = q^* - y^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}} = 379{,}5 - 126{,}5 = 253{,}0 \text{ т};$$

4) найдем τ_1^* – время существования наличного запаса:

$$\tau_1^* = \frac{Y^*}{\nu} = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}} = \frac{253{,}0}{4000} = 0{,}0633 \text{ года или 23,1 дня};$$

5) найдем τ_2^* – время существования дефицита:

$$\tau_2^* = \frac{y^*}{\nu} = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{s}{d}}} = \frac{126{,}5}{4000} = 0{,}0316 \text{ года или 11,5 дня};$$

6) найдем τ^* – оптимальный период возобновления заказа (продол-

жительность цикла):

$$\tau^* = \tau_1^* + \tau_2^* = \frac{q^*}{\nu} = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \sqrt{1 + \frac{s}{d}} = \frac{379{,}5}{4000} = 0{,}0949 \text{ года или } 34{,}6 \text{ дня;}$$

7) определим r – точку заказа:

$$r = \Theta\nu - \left[\frac{\Theta}{\tau^*}\right] q^* - y^* = 0{,}082 \cdot 4000 - \left[\frac{0{,}082}{0{,}0949}\right] \cdot 379{,}5 - 126{,}5 = 201{,}5 \text{ т;}$$

8) рассчитаем L^* – минимальные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s}{d}}} = \sqrt{2 \cdot 600 \cdot 50 \cdot 4000} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{50}{100}}} = 12649{,}2 \text{ у.д.е.}$$

7.7. Обобщенная модель оптимальной партии поставки с учетом неудовлетворенных требований

В данной модели предполагается, что товар или ресурс поступает на склад непосредственно с производственной линии с постоянной интенсивностью спроса v и поступления λ в единицу времени. По достижении некоторого уровня запаса производство товара или ресурса прекращается. Возобновление его производства и поставки на склад осуществляется в момент, когда неудовлетворенный спрос достигает некоторого значения (рис. 7.9).

Из рис. 7.9 видно, что запас пополняется и расходуется одновременно в течение интервала τ_1 каждого цикла. Причем в течение τ_1 идет одновременное и пополнение запасов и их расходование, поэтому абсолютная интенсивность поступления определяется как разность между λ и v, т.е. $(\lambda - v)$.

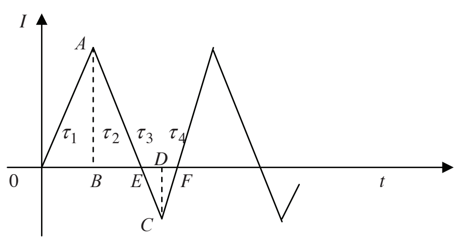


Рис. 7.9. Динамика изменения уровня запаса в обобщенной модели при дефиците с учетом неудовлетворенных требований

Максимальная величина запаса AB равна: $(\lambda - v)\tau_1$. Запас, накопленный в интервале τ_1, т.е. $(\lambda - v)\tau_1$ полностью расходуется в течение интервала τ_2, поэтому *AB* равно $v\tau_2$. В интервале τ_3 спрос не удовлетворяется, идет рост дефицита со скоростью, равной интенсивности потребления, поэтому *CD* равно $v\tau_3$. Неудовлетворенный спрос покрывается в течение интервала τ_4, интенсивность поступлений равна λ, а интенсивность потребления v, следовательно, разность $(\lambda - v)$ характеризует скорость ликвидации дефицита и *CD* равна: $(\lambda - v)\tau_4$. Продолжительность цикла равна $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4$ или $\tau = \frac{q}{v}$. Если d – удельные издержки дефицита, а s – удельные издержки содержания, то имеем пропорцию *AB*:*CD*=*d*:*s* и следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (\lambda - v)\tau_1 = v\tau_2 \\ v\tau_3 = (\lambda - v)\tau_4 \\ \dfrac{\tau_2}{\tau_3} = \dfrac{d}{s} \\ \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = \dfrac{q}{v}. \end{cases}$$

Решим систему четырех уравнений и найдем значения τ_1, τ_2, τ_3 и τ_4:

τ_1^* – время возрастания запаса:

$$\tau_1^* = \frac{q^*}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{d}};$$

τ_2^* – время, в течение которого уровень запаса понижается до нуля:

$$\tau_2^* = \frac{q^*}{v} \cdot \frac{1 - \frac{v}{\lambda}}{1 + \frac{s}{d}};$$

τ_3^* – время роста дефицита (время накопления невыполненных заказов):

$$\tau_3^* = \frac{q^*}{v} \cdot \frac{1 - \frac{v}{\lambda}}{1 + \frac{s}{d}} \cdot \frac{s}{d};$$

τ_4^* – время, в течение которого дефицит ликвидируется:

$$\tau_4^* = \frac{q^*}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{d}} \cdot \frac{s}{d};$$

Найдем τ^* – продолжительность цикла:

$$\tau^* = \tau_1^* + \tau_2^* + \tau_3^* + \tau_4^* = \frac{q^*}{v} = \sqrt{\frac{2K}{sv}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{s}{d}}{1 - \frac{v}{\lambda}}}.$$

Определим $\tau_{пр}^*$ – время, затраченное на производство партии:

$$\tau_{пр}^* = \tau_1^* + \tau_4^* = \frac{q^*}{\lambda}.$$

При формировании издержек будем учитывать: издержки формирования запаса K и содержания запасов, которые пропорциональны величине текущего запаса и времени содержания L_1, издержки дефицита, которые пропорциональны величине текущего дефицита и времени существования дефицита. Из рис. 7.9 видно, что площадь треугольника OAE определяет среднюю величину запаса в течение цикла, а треугольника ECF – среднюю величину дефицита, поэтому издержки содержания запасов рассчитываются произведением удельных издержек содержания s на площадь треугольника OAE:

$$L_1 = \frac{s \cdot AB(\tau_1 + \tau_2)}{2} = \frac{sd^2(\lambda - \nu)q^2}{2}.$$

Издержки от дефицита равны величине d, умноженной на площадь треугольника ECF:

$$L_2 = \frac{d \cdot CD(\tau_3 + \tau_4)}{2} = \frac{s^2 d(\lambda - \nu)q^2}{2}.$$

Суммарные издержки работы системы в течение цикла равны:

$$L_ц = K + L_1 + L_2 = K + \frac{s \cdot (1 - \frac{\nu}{\lambda})}{2 \cdot (1 + \frac{s}{d})} \cdot \frac{q^2}{\nu}.$$

Разделив общие издержки в течение цикла на τ, получим удельные издержки функционирования системы:

$$L = \frac{K\nu}{q} + \frac{sq \cdot (1 - \frac{\nu}{\lambda})}{2 \cdot (1 + \frac{s}{d})}.$$

Из уравнения найдем $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$ и определим значение оптимального размера партии поставки q^*:

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{s}{d}}{1 - \frac{\nu}{\lambda}}}.$$

Найдем другие параметры системы:

y^* – максимальный уровень дефицита:

$$y^* = I_{\min} = \nu\tau_3^* = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{\nu}{\lambda}}{1 + \frac{s}{d}}};$$

Y^* – максимальный уровень наличных запасов:

$$Y^* = I_{\max} = \nu\tau_2^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{\nu}{\lambda}}{1+\frac{s}{d}}};$$

L^* – минимальные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{\nu}{\lambda}}{1+\frac{s}{d}}}.$$

Пример. Требуется определить оптимальные параметры работы системы.

Исходная информация.

Один из цехов перерабатывающего предприятия производит 8 видов полуфабрикатов колбасных изделий. Производительность $\lambda = 50{,}0$ ц в сутки. Средний объем потребления каждого вида полуфабрикатов колбасных изделий термического цеха $\nu = 4$ ц в сутки. Стоимость переналадки оборудования при переходе от одного вида полуфабрикатов к другому и очистке оборудования составляют $K = 30{,}0$ у.д.е. Стоимость хранения 1 ц полуфабрикатов в холодильнике $s = 0{,}06$ в сутки. Неудовлетворенные требования берутся на учет. Удельные издержки дефицита $d = 0{,}15$ у.д.е. в сутки.

Используя приведенную информацию:

1) найдем q^* – оптимальный размер партии поставки:

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \sqrt{\frac{1+\frac{s}{d}}{1-\frac{\nu}{\lambda}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 30\cdot 4}{0{,}06}} \cdot \sqrt{\frac{1+\frac{0{,}06}{0{,}15}}{1-\frac{4}{50}}} = 78{,}0 \text{ ц};$$

2) рассчитаем y^* – максимальный уровень дефицита:

$$y^* = \frac{s}{d}\sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{\nu}{\lambda}}{1+\frac{s}{d}}} = \frac{0{,}06}{0{,}15} \cdot \sqrt{\frac{2\cdot 30\cdot 4}{0{,}06}} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{4}{50}}{1+\frac{0{,}06}{0{,}15}}} = 20{,}5 \text{ ц};$$

3) определим Y^* – максимальный уровень наличных запасов:

$$Y^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{\nu}{\lambda}}{1+\frac{s}{d}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 30\cdot 4}{0{,}06}} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{4}{50}}{1+\frac{0{,}06}{0{,}15}}} = 51{,}3 \text{ ц};$$

4) найдем τ_1^* – время возрастания запаса:

$$\tau_1^* = \frac{q^*}{\lambda} \cdot \frac{1}{1+\frac{s}{d}} = \frac{78}{50} \cdot \frac{1}{1+\frac{0{,}06}{0{,}15}} = 1{,}1 \text{ суток или 26,7 часа;}$$

5) найдем τ_2^* – время, в течение которого уровень запаса понижается до нуля:

$$\tau_2^* = \frac{q^*}{\nu} \cdot \frac{1-\frac{\nu}{\lambda}}{1+\frac{s}{d}} = \frac{78}{4} \cdot \frac{1-\frac{4}{50}}{1+\frac{0{,}06}{0{,}15}} = 12{,}8 \text{ суток или } 307{,}5 \text{ часа;}$$

6) найдем τ_3^* – время роста дефицита (время накопления невыполненных заказов):

$$\tau_3^* = \frac{q^*}{\nu} \cdot \frac{1-\frac{\nu}{\lambda}}{1+\frac{s}{d}} \cdot \frac{s}{d} = \frac{78}{4} \cdot \frac{1-\frac{4}{50}}{1+\frac{0{,}06}{0{,}15}} \cdot \frac{0{,}06}{0{,}15} = 5{,}1 \text{ суток или } 123{,}0 \text{ часа;}$$

7) найдем τ_4^* – время, в течение которого дефицит ликвидируется:

$$\tau_4^* = \frac{q^*}{\lambda} \cdot \frac{1}{1+\frac{s}{d}} \cdot \frac{s}{d} = \frac{78}{50} \cdot \frac{1}{1+\frac{0{,}06}{0{,}15}} \cdot \frac{0{,}06}{0{,}15} = 0{,}5 \text{ суток или } 10{,}8 \text{ часа;}$$

8) найдем τ^* – оптимальный период возобновления заказа (продолжительность цикла):

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} \cdot \sqrt{\frac{1+\frac{s}{d}}{1-\frac{\nu}{\lambda}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30}{0{,}06 \cdot 4}} \cdot \sqrt{\frac{1+\frac{0{,}06}{0{,}15}}{1-\frac{4}{50}}} = 19{,}5 \text{ суток или } 468{,}0 \text{ часа;}$$

9) найдем $\tau_{пр}^*$ – время, затраченное на производство партии:

$$\tau_{пр}^* = \tau_1^* + \tau_4^* = 1{,}1 + 0{,}5 = 1{,}6 \text{ суток;}$$

10) рассчитаем L^* – минимальные затраты работы системы в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{\nu}{\lambda}}{1+\frac{s}{d}}} = \sqrt{2 \cdot 30 \cdot 0{,}06 \cdot 4} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{4}{50}}{1+\frac{0{,}06}{0{,}15}}} = 3{,}1 \text{ у.д.е. в сутки.}$$

Мощность цеха перерабатывающего предприятия позволяет наладить выпуск продукции партиями восьми видов полуфабрикатов ($\tau_{пр} \cdot 8 = 1{,}6 \cdot 8 = 12{,}8$ суток). Можно расширить ассортимент выпускаемой продукции (24 сутки: 1,6 суток = 15) до 15 видов полуфабрикатов колбасных изделий.

7.8. Многопродуктовая модель размера партий поставок при отсутствии взаимодействия между запасами различных видов

Складские системы содержат множество видов товаров или ресурсов. Если взаимодействие между запасами различных видов отсутствует, то общие издержки в единицу времени, связанные с размещением заказов и содержанием запасов n видов, составляют:

$$L=\sum_{i=1}^{n}(\frac{K_i v_i}{q_i}+\frac{s_i q_i}{2}) .$$

Найдем частные производные L по q_i, приравняем их к нулю и найдем q_i:

$$q_i=\sqrt{\frac{2K_i v_i}{s_i}}, i=\overline{1,n} .$$

Минимальные издержки в единицу времени составляет:

$$L^*=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2K_i\cdot s_i\cdot v_i} .$$

В данную модель необходимо ввести ограничение на складские помещения, площадь которых составляет f, а на единицу товара или ресурса i-го вида необходимо f_i единиц складской площади. Ограничение на использование площадей склада имеет вид:

$$h\sum_{i=1}^{n}f_i\cdot q_i\le f ,$$

где h – нормировочный множитель, характеризующий уровень запаса или их поступление на склад в разное время. Если h=1, то поставки поступили в одно время и имеется их максимальный уровень, а если $h=\frac{1}{2}$, то поставки прибыли в разное время и на складе имеется средний уровень запаса. Таким образом, считается, что $\frac{1}{2}\le h\le 1$.

Применим метод неопределенных множителей Лагранжа к решению задачи вида:

$$1)\ L=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{K_i v_i}{q_i}+\frac{s_i q_i}{2}\right);$$

$$2)\ q_i=\sqrt{\frac{2K_i v_i}{s_i}}, i=\overline{1,n} ;$$

$$3)\ L^*=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2K_i\cdot s_i\cdot v_i} ;$$

$$4)\ h\sum_{i=1}^{n}f_i\cdot q_i\le f .$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L'=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{K_i v_i}{q_i}+\frac{s_i q_i}{2}\right)+\lambda(h\sum_{i=1}^{n}f_i\cdot q_i-f) ,$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа.

Из уравнений: $\frac{\partial L'}{\partial q_i}=0$ и $\frac{\partial L'}{\partial \lambda}=0$ найдем:

$$q_i = \sqrt{\frac{2K_i v_i}{s_i + 2\lambda h f_i}} ;$$

$$h\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot q_i = f .$$

Так как $s_i \le s_i + 2\lambda h f_i$, то размер оптимальной партии уменьшается, растет число партий поставок в плановом периоде и, следовательно, возрастают затраты на содержание запаса, т.е.:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{2K_i \cdot (s_i + 2\lambda h \cdot f_i) v_i} > \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2K_i s_i v_i} .$$

Таким образом, если $q_i^* = \sqrt{\frac{2K_i v_i}{s_i + 2\lambda^* h f_i}}$, то минимальные затраты работы системы в единицу времени с учетом ограничений на складские площади $L(q^*)$ равны:

$$L(q^*) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2K_i \cdot (s_i + 2\lambda^* h \cdot f_i) v_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{s_i + 2\lambda^* h f_i)} q_i^* .$$

При этом λ^* – неопределенный множитель Лагранжа, который показывает, на сколько можно сократить минимальные издержки функционирования системы в единицу времени, увеличив ограниченные складские площади на единицу. Его значение определяется из уравнения:

$$h\sum_{i=1}^{n} f_i \sqrt{\frac{2K_i v_i}{s_i + 2\lambda^* h f_i}} = f .$$

Пример. Требуется определить оптимальные партии поставок при ограничении на площади холодильника.

Исходная информация.

В холодильник перерабатывающего предприятия поступает готовая продукция шести ассортиментных групп (n). Холодильник имеет площадь $f = 300$ м^2. Характеристики запасов готовой продукции приведены в табл. 7.1.

Т а б л и ц а 7.1. **Характеристики запасов готовой продукции**

Ассортиментные группы продукции	v_i – интенсивность потребления, т/год	K_i – издержки размещения заказа, у.д.е.	s_i – издержки содержания (хранения) в год, у.д.е.	f_i – расход площади холодильника, м^2/т
1	800	6	5	1
2	2000	4	20	3
3	1200	3	10	2
4	1800	5	25	3
5	1700	2	15	2
6	1400	7	30	1

Используя приведенную информацию:

1) определим q_i^0 – оптимальные размеры партий поставок при отсутствии ограничений на площадь холодильника:

$$q_i^0 = \sqrt{\frac{2K_i\nu_i}{s_i}}, i = \overline{1,n};$$

$$q_1^0 = \sqrt{\frac{2\cdot 6\cdot 800}{5}} = 43{,}8 \text{ т}; \quad q_4^0 = \sqrt{\frac{2\cdot 5\cdot 1800}{25}} = 26{,}8 \text{ т};$$

$$q_2^0 = \sqrt{\frac{2\cdot 4\cdot 2000}{20}} = 28{,}3 \text{ т}; \quad q_5^0 = \sqrt{\frac{2\cdot 2\cdot 1700}{15}} = 21{,}3 \text{ т};$$

$$q_3^0 = \sqrt{\frac{2\cdot 3\cdot 1200}{10}} = 26{,}8 \text{ т}; \quad q_6^0 = \sqrt{\frac{2\cdot 7\cdot 1400}{30}} = 25{,}6 \text{ т};$$

2) проверим, существует ли ограничение на площадь холодильника при максимальном уровне запасов:

$$h\sum_{i=1}^{n} f_i q_i^0 \le f \; .$$

Найдем:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i q_i^0 = 1\cdot 43{,}8 + 3\cdot 28{,}3 + 2\cdot 26{,}8 + 3\cdot 26{,}8 + 2\cdot 21{,}3 + 1\cdot 25{,}6 = 330{,}9 \text{ м}^2.$$

Если $h = 1$, то $1\cdot \sum_{i=1}^{n} f_i q_i^0 > 300$, т.е. ограничение на площадь холодильника имеется;

3) определим λ^*, используя следующую формулу:

$$h\sum_{i=1}^{n} f_i \sqrt{\frac{2K_i\nu_i}{s_i + 2\lambda^* h f_i}} = f \;;$$

$$1\cdot\left(1\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 6\cdot 800}{5+2\lambda^*\cdot 1\cdot 1}} + 3\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 4\cdot 2000}{20+2\lambda^*\cdot 1\cdot 3}} + 2\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 3\cdot 1200}{10+2\lambda^*\cdot 1\cdot 2}} + \right.$$

$$\left. + 3\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 5\cdot 1800}{25+2\lambda^*\cdot 1\cdot 3}} + 2\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 2\cdot 1700}{15+2\lambda^*\cdot 1\cdot 2}} + 1\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 7\cdot 1400}{30+2\lambda^*\cdot 1\cdot 1}}\right) = 300.$$

Используя метод дихотомии, определим из данного уравнения значение λ^*. Оно равно 0,753;

4) найдем q_i^* – оптимальные размеры партий поставок с учетом ограничений на площадь холодильника:

$$q_i^* = \sqrt{\frac{2K_i\nu_i}{s_i + 2\lambda^* h f_i}};$$

$$q_1^* = \sqrt{\frac{2\cdot 6\cdot 800}{5+2\cdot 0{,}753\cdot 1\cdot 1}} = 38{,}4 \text{ т}; \quad q_4^* = \sqrt{\frac{2\cdot 5\cdot 1800}{25+2\cdot 0{,}753\cdot 1\cdot 3}} = 24{,}7 \text{ т};$$

$$q_2^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 2000}{20 + 2 \cdot 0{,}753 \cdot 1 \cdot 3}} = 25{,}5 \text{ т}; \quad q_5^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 1700}{15 + 2 \cdot 0{,}753 \cdot 1 \cdot 2}} = 19{,}4 \text{ т};$$

$$q_3^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 3 \cdot 1200}{10 + 2 \cdot 0{,}753 \cdot 1 \cdot 2}} = 23{,}5 \text{ т}; \quad q_6^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 7 \cdot 1400}{30 + 2 \cdot 0{,}753 \cdot 1 \cdot 1}} = 24{,}9 \text{ т};$$

5) определим $L(q^0)$ – минимальные затраты работы системы в единицу времени при отсутствии ограничений на площадь холодильника:

$$L(q^0) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2K_i s_i \nu_i} = \sum_{i=1}^{n} s_i q_i^0 = 5 \cdot 43{,}8 + 20 \cdot 28{,}3 + 10 \cdot 26{,}8 +$$
$$+ 25 \cdot 26{,}8 + 15 \cdot 21{,}3 + 30 \cdot 25{,}6 = 2810{,}5 \text{ у.д.е.};$$

6) определим $L(q^*)$ – минимальные затраты работы системы в единицу времени с учетом ограничений на площадь холодильника:

$$L(q^*) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2K_i (s_i + 2\lambda^* f_i)\nu_i} = \sum_{i=1}^{n} (s_i + 2\lambda^* f_i) q_i^* = (5 + 2 \cdot 0{,}753 \cdot$$
$$\cdot 1 \cdot 1) \cdot 38{,}4 + (20 + 2 \cdot 0{,}753 \cdot 1 \cdot 3) \cdot 25{,}5 + (10 + 2 \cdot 0{,}753 \cdot 1 \cdot 2) \cdot 23{,}5 +$$
$$+ (25 + 2 \cdot 0{,}753 \cdot 1 \cdot 3) \cdot 24{,}7 + (15 + 2 \cdot 0{,}753 \cdot 1 \cdot 2) \cdot 19{,}4 + (30 + 2 \cdot$$
$$\cdot 0{,}753 \cdot 1 \cdot 1) \cdot 24{,}9 = 3043{,}8 \text{ у.д.е.};$$

7) определим эффект от расширения площадей холодильника:

$$L(q^*) - L(q^0) = 3043{,}8 - 2810{,}5 = 233{,}3 \text{ у.д.е.}$$

Таким образом, недостаток площадей холодильника по шести видам продукции обходится перерабатывающему предприятию в 233,3 у.д.е. в год.

7.9. Многопродуктовая модель размера партий поставок в случае нескольких ограничений

На практике чаще всего встречаются случаи, когда функционирование системы происходит при ограничениях на складские помещения и на оборотные средства, вложенные в запасы. Для обоснования оптимального решения такой модели определяют размеры партии поставок товаров или ресурсов вида i без учета ограничений, т.е. q_i^0. Их значения подставляют в ограничения, и если они не нарушаются, то оптимальное решение задачи найдено. Если же нет, то поочередно в модель вводят ограничения и, используя метод неопределенных множителей Лагранжа, определяют оптимальные параметры системы: q_i^*, $L^*(q)$.

Пример. Требуется определить оптимальные партии поставок при ограничении на складские площади и на оборотные средства, вложенные в запасы.

Исходная информация.

На оптовую базу поступают товары n=6 видов. При нормировании оборотных средств, вложенных в запасы товаров, установлено ограничение в размере $A = 8500$ у.д.е. (ограничение на средний текущий запас). Площадь складских помещений под товары не превышает $f = 600$ м^2. Издержки содержания (хранения) исчисляются в размере $p = 8$ % от стоимости хранимых товаров. Характеристики запасов товаров приведены в табл. 7.2.

Т а б л и ц а 7.2. **Характеристики запасов товаров**

Товары	ν_i – интенсивность потребления в месяц, т	K_i – издержки размещения заказа, у.д.е.	α_i – стоимость i-го товара, у.д.е.	s_i – издержки содержания (хранения) i-го товара в месяц, у.д.е.	f_i – расход складской площади на 1 тонну товара, м^2
1	800	18	22	1,76	1,4
2	1800	15	12	0,96	1,2
3	1400	10	18	1,44	1,5
4	1200	30	10	0,80	1,0
5	2000	25	20	1,60	0,9
6	1600	20	25	2,00	1,6

Используя приведенную информацию:

1) найдем s – издержки содержания единицы продукции в единице времени:

$$s = \alpha \cdot p \text{ (табл. 7.2)};$$

2) определим q_i^0 – оптимальные размеры партий поставок при отсутствии ограничений:

$$q_i^0 = \sqrt{\frac{2K_i\nu_i}{s_i}}, i = \overline{1,n};$$

$$q_1^0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 18 \cdot 800}{1,76}} = 127,9 \text{ т}; \qquad q_4^0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 30 \cdot 1200}{0,80}} = 300,0 \text{ т};$$

$$q_2^0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 15 \cdot 1800}{0,96}} = 237,2 \text{ т}; \qquad q_5^0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 2000}{1,60}} = 250,0 \text{ т};$$

$$q_3^0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 1400}{1,44}} = 139,4 \text{ т}; \qquad q_6^0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 1600}{2,00}} = 178,9 \text{ т};$$

3) проверим, существует ли ограничение на складские площади (при среднем уровне запаса – $h = \frac{1}{2}$):

$$h\sum_{i=1}^{n} f_i q_i^0 \le f \ .$$

Найдем

$$\sum_{i=1}^{n} f_i q_i^0 = 1{,}4 \cdot 127{,}9 + 1{,}2 \cdot 237{,}2 \cdot +15 \cdot 139{,}4 + 1{,}0 \cdot 300{,}0 +$$
$$+ 0{,}9 \cdot 250{,}0 + 1{,}6 \cdot 178{,}9 = 1484 \text{ м}^2;$$

$\frac{1}{2} \cdot 1484 > 600$, следовательно, ограничение на складские площади существует;

4) проверим, существует ли ограничение по оборотным средствам (при среднем уровне запаса $- h = \frac{1}{2}$):

$$h \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i^0 \le A.$$

Найдем

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i^0 = 22 \cdot 127{,}9 + 12 \cdot 237{,}2 + 18 \cdot 139{,}4 + 10 \cdot 300{,}0 + 20 \cdot 250{,}0 +$$
$$+ 25 \cdot 178{,}9 = 20641{,}9 \text{ у.д.е.};$$

$\frac{1}{2} \cdot 20641{,}9 > 8500$, т.е. ограничение на оборотные средства имеет место;

5) так как оба ограничения существенны, то определим λ^*, введя сначала ограничение на складские площади, используя формулу:

$$h \sum_{i=1}^{n} f_i \sqrt{\frac{2K_i \nu_i}{s_i + 2\lambda^* h f_i}} = f, \text{при } h = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(1{,}4 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 18 \cdot 800}{1{,}76 + 2\lambda^* \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}4}} + 1{,}2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 15 \cdot 1800}{0{,}96 + 2\lambda^* \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}2}} + \right.$$
$$+ 1{,}5 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 1400}{1{,}44 + 2\lambda^* \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}5}} + 1{,}0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 30 \cdot 1200}{0{,}8 + 2\lambda^* \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}0}} +$$
$$\left. + 0{,}9 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 2000}{1{,}6 + 2\lambda^* \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}9}} + 1{,}6 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 1600}{2{,}0 + 2\lambda^* \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}6}} \right) = 600.$$

Из выше приведенного уравнения найдем значение λ^*. Оно равно λ^*=0,554.

6) найдем q_i^* – оптимальные размеры партий поставок с учетом ограничений на складские площади:

$$q_i^* = \sqrt{\frac{2K_i \nu_i}{s_i + 2\lambda^* h f_i}};$$

$$q_1^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 18 \cdot 800}{1{,}76 + 2 \cdot 0{,}554 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}4}} = 106{,}6 \text{ т};$$

$$q_2^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 15 \cdot 1800}{0{,}96 + 2 \cdot 0{,}554 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}2}} = 182{,}3 \text{ т};$$

$$q_3^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 1400}{1{,}44 + 2 \cdot 0{,}554 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}5}} = 111{,}0 \text{ т};$$

$$q_4^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 30 \cdot 1200}{0{,}8 + 2 \cdot 0{,}554 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}0}} = 230{,}6 \text{ т};$$

$$q_5^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 2000}{1{,}6 + 2 \cdot 0{,}554 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}9}} = 218{,}3 \text{ т};$$

$$q_6^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 1600}{2 + 2 \cdot 0{,}554 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}6}} = 148{,}9 \text{ т};$$

7) проверим, удовлетворяют ли q_i^* ограничению на оборотные средства:

$$h\sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i^* < A, \text{при } h = \frac{1}{2}.$$

Найдем

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i^* = 22 \cdot 106{,}6 + 12 \cdot 182{,}3 + 18 \cdot 111{,}0 + 10 \cdot 230{,}6 + 20 \cdot 218{,}3 +$$
$$+ 25 \cdot 148{,}9 = 16925{,}3 \text{ у.д.е.};$$

$\frac{1}{2} \cdot 16925{,}3 < 8500$, т.е. требование ограничения на оборотные средства удовлетворяются и q_i^*, при $h = \frac{1}{2}$ являются оптимальными;

8) так как выше изложенное условие выполняется, то задача решена, в противном случае необходимо определить λ^*, используя формулу:

$$h\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sqrt{\frac{2K_i \nu_i}{s_i + 2\lambda^* h f_i}} = A, \text{при } h = \frac{1}{2}.$$

Затем найти q_i^* – оптимальные размеры партий поставок с учетом ограничений на оборотные средства, используя формулу:

$$q_i^* = \sqrt{\frac{2K_i \nu_i}{s_i + 2\lambda^* h f_i}}.$$

И проверить, удовлетворяют ли найденные значения q_i^* требованию ограничения на складские площади;

9) определим $L(q^0)$ – минимальные затраты работы системы в единицу времени без ограничений:

$$L(q^0) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2K_i s_i \nu_i} = \sum_{i=1}^{n} s_i q_i^0 = 1{,}76 \cdot 127{,}9 + 0{,}96 \cdot 237{,}2 + 1{,}44 \cdot$$
$$\cdot 139{,}4 + 0{,}80 \cdot 300{,}0 + 1{,}6 \cdot 250{,}0 + 2{,}0 \cdot 178{,}9 = 1651{,}4 \text{ у.д.е.};$$

10) определим $L(q^*)$ – минимальные затраты работы системы в единицу времени с учетом ограничений на складские площади и оборотные средства:

$$L(q^*) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2K_i(s_i + 2\lambda^* hf_i)\nu_i} = \sum_{i=1}^{n} (s_i + 2\lambda^* f_i) q_i^* = (1{,}76 + 2 \cdot 0{,}554 \cdot$$
$$\cdot 0{,}5 \cdot 1{,}4) \cdot 106{,}6 + (0{,}96 + 2 \cdot 0{,}554 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}2) \cdot 182{,}3 + (1{,}44 + 2 \cdot 0{,}554 \cdot 0{,}5 \cdot$$
$$\cdot 1{,}5) \cdot 111{,}0 + (0{,}80 + 2 \cdot 0{,}554 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}0) \cdot 230{,}6 + (1{,}60 + 2 \cdot 0{,}554 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}9) \cdot$$
$$\cdot 218{,}3 + (2{,}0 + 2 \cdot 0{,}554 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}6) \cdot 148{,}9 = 2018{,}7 \text{ у.д.е.};$$

11) рассчитаем потери, связанные с ограничениями на складские помещения и оборотные средства:

$$L(q^*) - L(q^0) = 2018{,}7 - 1651{,}4 = 367{,}3 \text{ у.д.е.}$$

Таким образом, расширение складских помещений с 600 до 742 м^2 и увеличение оборотных средств, вложенных в запасы с 8500 до 10321 у.д.е. позволит сэкономить 367,3 у.д.е. суммарных издержек.

7.10. Многопродуктовая модель размера партий поставок с периодическими проверками при полном совмещении заказов

Рассмотрим многопродуктовую модель со стационарным детерминированным спросом, мгновенным получением заказа и не допущением дефицита. Обозначим через τ период возобновления заказов, который является одинаковым для всех товаров или ресурсов вида i. Издержки размещения заказов K считаем пропорциональными числу заказов:

$$K = q(1 + \gamma \cdot n),$$

где g – фиксированные издержки, не зависящие от числа одновременно заказываемых товаров или ресурсов и от величины партий поставок;

γ – доля издержек, связанная с размещением заказа по каждому товару или ресурсу;

n – количество товаров или ресурсов.

Используя данные обозначения, запишем издержки размещения заказов и содержания запасов в единицу времени:

$$L = \frac{q(1 + \gamma \cdot n)}{\tau} + \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^{n} s_i v_i .$$

Решив уравнение $\frac{\partial L}{\partial \tau} = 0$, получим оптимальный период совместного размещения всех n товаров или ресурсов вида i:

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2q(1 + \gamma \cdot n)}{\sum_{i=1}^{n} s_i v_i}} .$$

Величины оптимальных партий поставок определяются по формуле:

$$q_i^* = v_i \tau^*, (i = \overline{1,n});$$

Минимальные затраты работы системы в единицу времени составят L^*:

$$L^* = \sqrt{2q(1+\gamma \cdot n)\sum_{i=1}^{n} s_i v_i} = \tau^* \sum_{i=1}^{n} s_i v_i .$$

Пример. Требуется определить оптимальные партии поставок (поставочный комплект), среднегодовые издержки и период повторения заказов.

Исходная информация.

Предприятие заказывает n=6 видов товаров с оптовой базы. Складские площади предприятия $f = 350$ м^2. Оборотные средства, вложенные в запасы, не должны превышать $A = 2000$ у.д.е. Маркетинговая служба предприятия определила, что издержки заказывания зависят от количества (n) одновременно заказываемых товаров и описываются уравнением: $K = 10(1 + \frac{n}{5})$ или $K = q(1+\gamma \cdot n)$. Характеристики запасов товаров приведены в табл. 7.3.

Т а б л и ц а 7.3. **Характеристики запасов товаров**

Товары	v_i – интенсивность потребления в год, т	α_i – стоимость i-го товара, у.д.е.	s_i – издержки содержания (хранения) i-го товара в год, у.д.е.	f_i – расход складской площади на 1 т товара, м^2
1	120	10	2,2	1,3
2	140	8	1,6	2,6
3	150	14	1,3	2,0
4	200	16	1,8	3,5
5	160	12	0,9	1,5
6	180	15	1,2	2,5

Используя приведенную информацию:

1) определим τ^0 – оптимальный период возобновления поставок без учета ограничений:

$$\tau^0 = \sqrt{\frac{2q(1+\gamma \cdot n)}{\sum_{i=1}^{n} s_i v_i}} .$$

Рассчитаем

$$\sum_{i=1}^{n} s_i v_i = 2{,}2\cdot 120 + 1{,}6\cdot 140 + 1{,}3\cdot 150 + 1{,}8\cdot 200 + 0{,}9\cdot 160 + 1{,}2\cdot 180 = 1403.$$

Тогда $\tau^0 = \sqrt{\dfrac{2\cdot 10\left(1+\dfrac{6}{5}\right)}{1403}} = 0{,}177$ года или 64,6 дня;

2) определим q_i^0 – оптимальные размеры партий поставок при отсутствии ограничений:

$$q_i^0 = v_i \tau^0, (i = \overline{1,n});$$

$$q_1^0 = 120\cdot 0{,}177 = 21{,}2 \text{ т}; \quad q_4^0 = 200\cdot 0{,}177 = 35{,}4 \text{ т};$$

$$q_2^0 = 140\cdot 0{,}177 = 25{,}8 \text{ т}; \quad q_5^0 = 160\cdot 0{,}177 = 28{,}3 \text{ т};$$

$$q_3^0 = 150\cdot 0{,}177 = 26{,}6 \text{ т}; \quad q_6^0 = 180\cdot 0{,}177 = 31{,}9 \text{ т};$$

3) проверим, существует ли ограничение на складские площади:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i q_i^0 \le f;$$

$$1{,}3\cdot 21{,}2 + 2{,}6\cdot 25{,}8 + 2{,}0\cdot 26{,}6 + 3{,}5\cdot 35{,}4 + 1{,}5\cdot 28{,}3 + 2{,}5\cdot 31{,}9 = 393{,}9 \text{ м}^2.$$

Так как 393,9>350, то ограничение на складские помещения имеет место;

4) проверим, существует ли ограничение по оборотным средствам:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i^0 \le A;$$

$$10\cdot 21{,}2 + 8\cdot 25{,}8 + 14\cdot 26{,}6 + 16\cdot 35{,}4 + 12\cdot 28{,}3 + 15\cdot 31{,}9 = 2175{,}3 \text{ у.д.е.}$$

Так как 2175,3>2000, то ограничение по оборотным средствам существует;

5) оба ограничения существенны, поэтому определим $\bar{\tau}^*$ – оптимальный период повторения заказов, в случае ограничения на складские помещения:

$$\bar{\tau}^* = \frac{f}{\sum_{i=1}^{n} f_i v_i} = \frac{350}{120\cdot 1{,}3 + 140\cdot 2{,}6 + 150\cdot 2 + 200\cdot 3{,}5 + 160\cdot 1{,}5 + 180\cdot 2{,}5} =$$

$$= \frac{350}{2210} = 0{,}158 \text{ года или } 57{,}8 \text{ дня};$$

6) определим $\bar{\bar{\tau}}^*$ – оптимальный период повторения заказов, в случае ограничения на оборотные средства:

$$\bar{\bar{\tau}}^* = \frac{A}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i} = \frac{200}{120\cdot 10 + 140\cdot 8 + 150\cdot 14 + 200\cdot 16 + 160\cdot 12 + 180\cdot 15} =$$

$$= \frac{2000}{12240} = 0{,}163 \text{ года или } 59{,}6 \text{ дня};$$

7) определим τ^* – оптимальный период повторения заказов в случае обоих ограничений:

$$\tau^* = \min\left\{\frac{f}{\sum_{i=1}^{n} f_i \nu_i}; \frac{A}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu_i}\right\} \text{ или } \tau^* = \min(\overline{\tau}^*; \overline{\overline{\tau}}^*);$$

$$\tau^* = \min(0{,}158; 0{,}163) = 0{,}158 \text{ года или } 57{,}8 \text{ дня};$$

8) рассчитаем q_i^* – оптимальный поставочный комплект:

$$q_i^* = \nu_i \tau^*, (i = n);$$

$$q_1^* = 120 \cdot 0{,}158 = 19{,}0 \text{ т}; \quad q_4^* = 200 \cdot 0{,}158 = 31{,}6 \text{ т};$$

$$q_2^* = 140 \cdot 0{,}158 = 22{,}1 \text{ т}; \quad q_5^* = 160 \cdot 0{,}158 = 25{,}3 \text{ т};$$

$$q_3^* = 150 \cdot 0{,}158 = 23{,}7 \text{ т}; \quad q^* = 180 \cdot 0{,}158 = 28{,}4 \text{ т};$$

9) определим L^* – минимальные затраты работы системы в единицу времени с учетом ограничений:

$$L^* = \sqrt{2q(1 + \gamma \cdot n)\sum_{i=1}^{n} s_i \nu_i} = \tau^* \sum_{i=1}^{n} s_i \nu_i = 0{,}158 \cdot 1403 = 221{,}7 \text{ у.д.е.}$$

Вопросы для самопроверки

1. Что такое организация поставок?
2. Какие затраты относят к затратам на организацию заказа и хранение запасов?
3. Что такое потери от дефицита?
4. Выведите самостоятельно формулу Уилсона.
5. Дайте определение точки заказа.
6. Что такое начальный запас, фиктивный уровень текущего запаса?
7. Назовите особенности модели с конечной интенсивностью поступления запаса.
8. Почему максимальный уровень внутрипроизводственного запаса меньше величины партии?
9. Каковы виды моделей планирования дефицита?
10. За счет какого вида затрат происходит снижение общих затрат в случае учета неудовлетворенных требований?
11. Что такое задолженный спрос?
12. Может ли точка заказа в моделях с учетом неудовлетворенных требований быть отрицательной величиной?
13. Постройте графики динамики изменения уровня запаса в однопродуктовой модели без дефицита и с дефицитом при учете неудовлетворенных требований.

ПРИЛОЖЕНИЯ

П р и л о ж е н и е А

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы R	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,1	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

П р и л о ж е н и е В

Теория матриц в формировании экономико-математических задач

Содержание экономико-математической задачи определяет матрица.

Совокупность упорядоченных взаимосвязанных чисел, расположенных в m-строках и n-столбцах называются *матрицей* размером m x n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} = \|a_{ij}\|_{m \cdot n}.$$

Матрица, состоящая из одной строки i=1 и n столбцов, называется матрицей-строкой.

Матрица, состоящая из одного столбца j=1 и m строк, называется матрицей-столбцом.

Если количество строк не равно количеству столбцов ($m \neq n$), то имеем прямоугольную матрицу.

Если количество строк матрицы равно количеству столбцов ($m = n$), то имеет квадратную матрицу.

Диагональная матрица – это такая квадратная матрица, у которой все элементы не стоящие на главной диагонали равны нулю.

Скалярная матрица – это нулевая матрица, у которой все элементы равны нулю.

Треугольная матрица – это матрица, у которой все элементы выше или ниже главной диагонали равны нулю.

Разобьем матрицу A на клетки, каждая из которой будет некоторой матрицей более низких размеров, получим блочную матрицу. Особый интерес представляют блочные матрицы, имеющие квадратные диагональные клетки.

$$A = \left(\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$$

Квазидиагональные матрицы – это блочные матрицы, у которых все клетки, кроме клеток, стоящих на главной диагонали являются нуль-матрицами.

Матрица A^T называется транспонированной к матрице A, если элемент a_{ij} матрицы A^T равен элементу a_{ji} матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ и } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Понятие невырожденной матрицы связано с понятием ее ранга.

Рангом матрицы называется максимальный порядок отличных от нуля миноров или наибольшее число линейно-независимых строк или столбцов матрицы.

Для того, чтобы система ограничений экономико-математической задачи была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу ее расширенной матрицы.

Расширенная матрица получается из матрицы A путем добавления в нее столбца свободных членов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & A_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & A_2 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} & A_n \end{pmatrix}.$$

Матрица называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля. И вырожденной – если определитель равен нулю.

Экономико-математическая задача, имеющая вырожденную матрицу, решений не имеет. Для матриц определены операции сложения (вычитания) и умножения.

Суммой (разностью) двух матриц A и B называется такая матрица C, элементы которой равны сумме (разности) соответствующих элементов матриц-слагаемых.

Сложение (вычитание) двух матриц $\left\|a_{ij}\right\|$ и $\left\|b_{ij}\right\|$ возможно тогда, когда они имеют одинаковую размерность:

$$\left\|c_{ij}\right\|_{m\cdot n} = \left\|a_{ij} + b_{ij}\right\|_{m\cdot n}$$

Произведением матрицы A на матрицу B называется такая матрица C, каждый элемент которой равен сумме произведений элементов строки матрицы A на соответствующие элементы столбца матрицы B. Из определения следует, что произведение $A{\cdot}B$ имеет смысл, если матрица A имеет столько же столбцов, сколько матрица B строк:

$$\left\|c_{ij}\right\|_{m\cdot k} = \left\|a_{ij}\right\|_{m\cdot n} \cdot \left\|b_{ij}\right\|_{n\cdot k}.$$

Обратная матрица к матрице A – это такая матрица A^{-1} элементы которой равны частному от деления алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A на определитель системы с последующим транспонированием:

$$\text{если } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\text{то } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det} & \frac{A_{21}}{\det} & \dots & \frac{A_{m1}}{\det} \\ \frac{A_{12}}{\det} & \frac{A_{22}}{\det} & \dots & \frac{A_{m2}}{\det} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\det} & \frac{A_{2n}}{\det} & \dots & \frac{A_{mn}}{\det} \end{pmatrix}.$$

Необходимым и достаточным условием существования обратной матрицы по отношению к матрице A является невырожденность матрицы A.

Пример, имеем матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матрица A – невырожденная, так как det=23≠0, следовательно можно найти обратную матрицу к матрице A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{23} & \frac{-16}{23} & \frac{13}{23} \\ \frac{8}{23} & \frac{13}{23} & \frac{-12}{23} \\ \frac{-6}{23} & \frac{-4}{23} & \frac{9}{23} \end{pmatrix},$$

где A_{11}=–1; A_{12}=8; A_{13}=–6; A_{21}=–16; A_{22}=13; A_{23}=–4; A_{31}=13; A_{32}=–12; A_{33}=9.

Обратная матрица используется при решении экономико-математической задачи. Если найти матрицу A^{-1} и умножить ее на столбец свободных членов, то получим значение неизвестных величин задачи: $X_{n\cdot 1} = A^{-1}_{n\cdot n} \cdot Y_{n\cdot 1}$.

Приложение С

Теория определителей в формировании экономико-математических задач

Из математики известно, что значение переменных экономико-математической задачи можно найти, используя формулы Крамера, т.е. $x_j = \frac{\det_{xj}}{\det}$, только в том случае, если определитель (детерминант) системы не равен нулю ($\det \neq 0$), и хотя бы один из определителей переменных не равен нулю ($\det_{xj} \neq 0$).

Определитель переменной $\det_{xj}$ получают из определителя системы заменой коэффициентов столбца соответствующего определенной переменной x_j коэффициентами столбца свободных членов:

$$\det = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad \det_{xj} = \begin{vmatrix} A_1 & a_{12} & a_{13} \\ A_2 & a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Определитель n-ого порядка, состоящий из n^2 элементов равен алгебраической сумме $n!$ членов, каждый из которых включает по одному и только по одному элементу с каждой строки или столбца. При этом знак определителя определяется выражением $(-1)^t$, где t – число инверсий перестановок вторых индексов элементов членов, записанных в порядке возрастания их первых индексов $\det = \sum_{n!} (-1)^t a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \ldots a_{nk_n}$.

Число инверсий перестановки определяется суммированием общего числа нарушений перед каждым значением.

Следовательно, необходимо определить в каких случаях конструкция экономико-математической задачи предполагает равенство нулю определителя системы, чтобы избежать таких ситуаций при конструировании модели.

Рассмотрим свойства определителей.

1. Если все элементы какой-нибудь строки (или столбца) экономико-математической модели равны нулю, то и определитель равен нулю.

Доказательство вытекает из определения определителя, так как в любой член определителя входит элемент из каждой строки или каждого столбца, состоящего из нулей, то все члены определителя (в силу того, что они являются произведением элементов) равны нулю, а следовательно и их сумма равна нулю.

2. Если среди строк (или столбцов) экономико-математической модели имеется две одинаковых строки (или столбца), то определитель равен нулю.

Доказательство: Так как по условию две строки (или два столбца) одинаковы, то их перестановка не меняет величины определителя. Но с другой стороны, происходит инверсия (т.е. если число инверсий перестановок было число четное, то оно поменяется на нечетное и наоборот), следовательно, знак определителя изменится на противоположный, получим, что $\det = -\det$; $2\det = 0$; $\det = 0$.

Такая ситуация при конструировании экономико-математической модели создается тогда, когда в модель, например, вводят два вида переменных, обозначающих зерновые культуры или группы различных половозрастных групп животных одного вида с близкой технологией выращивания, следовательно, технико-экономические коэффициенты при неизвестных в этом случае могут совпадать и определитель системы будет равен нулю. Чтобы избежать такой ситуации необходимо объединять отрасли с совпадающими параметрами.

3. Если поменять местами две строки (или два столбца), то знак определителя изменится на противоположный, а абсолютная величина останется прежней.

Доказательство: При перестановке двух строк (или столбцов) число инверсий перестановок изменяется из четной на нечетную или из нечетной на четную, следовательно, знак определителя изменится на противоположный, т.е. если был «+» станет «–» и наоборот. Но величина определителя не изменится, так как не изменятся величины элементов определителя. Таким образом, если при составлении экономико-математической задачи пропустили одно или несколько ограничений или переменных, то их можно записать на другое место в модели, что не повлияет на значение переменных задачи, так как $x_j = \frac{\det_{xj}}{\det}$ и $x_j = \frac{-\det_{xj}}{-\det}$.

4. Если все элементы строки (или столбца) экономико-математической модели содержат общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

Доказательство. Известно, что $x_j = \frac{\det_{xj}}{\det}$. В этом случае общий множитель на значение переменных экономико-математической модели не влияет. Это свойство применяется в ограничениях модели с большими числами. Например, в модели оптимизации специализации и сочетания отраслей сельскохозяйственной организации, в ограничении по формированию основных производственных фондов. Если технико-экономические коэффициенты данного ограничения имеют единицы измерения тыс. руб., то можно общий коэффициент равный 1000 вынести за знак системы ограничений экономико-математической модели, т.е. это равносильно записи ограничения в единицах измерения млн. руб.

5. Определитель с двумя пропорциональными (т.е. полученными в результате линейного преобразования) строками или столбцами равен нулю. Смысл линейного преобразования состоит в том, что технико-экономические коэффициенты новой строки или столбца получены в результате умножения технико-экономического коэффициента уже имеющейся в ЭМЗ строки или столбца.

Доказательство: вытекает из свойства четыре, т.е. необходимо общий множитель k строки или столбца вынести за знак определителя. Получим две одинаковые строки или два одинаковых столбца, т.е. строка или столбец полученные в результате линейного преобразования, ничего нового в определение особенности и функционирования исследуемой системы не вносит, поэтому таких ограничений в экономико-математической модели быть не должно.

6. Если все элементы строки (столбца) являются суммами из одинакового числа слагаемых, то определитель равен сумме определителей, в которых элементами этой строки (столбца) служат отдельные слагаемые:

$$\det = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{z1}+b_{z1} & a_{22}+b_{z2} & \dots & a_{zn}+b_{zn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{z1} & a_{z2} & \dots a_{zn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{z1} & b_{z2} & \dots b_{zn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Вычисление определителя разложением по элементам некоторой строки или столбца можно упростить, если предварительно его преобразовать.

Изложенная методика определения значения переменных требует большого объема вычислений, так как с увеличением порядка определителя число его элементов быстро растет, следовательно, необходимо изучить свойства определителей, позволяющих упростить их вычисления.

7. Сумма произведений элементов некоторой строки или столбца на их алгебраические дополнения равна определителю.

A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} называется его минор, взятый со знаком «+», если сумма номеров строки и столбца, которым принадлежит этот элемент, есть число четное, и со знаком «–», если это число нечетное $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

M_{ij} – минором элемента a_{ij} называется новый определитель более низкого порядка, полученный в результате вычеркивания строки *i* и столбца *j*.

8. Величина определителя не изменится, если к элементам некоторой его строки или столбца прибавить соответствующие элементы другой строки или столбца, умноженные на один и тот же множитель.

Например, требуется определить значение определителя:

$$\det = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

К первой строке почленно прибавим третью и четвертую строки, получим:

$$\det = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -2 \\ 6 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель путем размножения по второму столбцу:

$$\det = 1^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель, используя седьмое свойство:

$$\det = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) +$$
$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = -(-9-4) - 4(-18-8) -$$
$$-2(12-12) = 117$$

П р и л о ж е н и е D

Векторное пространство

Конкретная ЭМЗ определяется матрицей, а теория векторов позволяет представить матрицу размерностью *m* х *n* как *m* х *n* вектор.

Вместе с тем матрицу ЭМЗ можно рассматривать, если нам это нужно, и как совокупность векторов-строк и совокупность векторов-столбцов. При этом каждый вектор выражает какую-то закономерность моделируемой системы.

Векторы $a_1, a_2 \ldots a_n$ *n*-мерного пространства называются *линейно-независимыми*, если выполняется равенство $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$ только в том случае, если $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Если данное равенство выполняется и при ненулевом значении хотя бы одного значения α_n, т.е. $\alpha_n \neq 0$, то векторы $a_1, a_2 \ldots a_n$ называются *линейно-зависимыми*. Линейная зависимость векторов означает, что такие векторы не выражают новой закономерности изучаемой системы.

В n-мерном пространстве всегда может быть n-линейно-независимых векторов, но всякий n+1 вектор будет линейно-зависимым, т.е. будет являться линейной комбинацией n-векторов, т.е. вектор n+1 можно выразить через компоненты n-векторов с помощью чисел $\alpha_n \neq 0$. Векторы можно представить геометрически.

Если размерность вектора, который представляем геометрически больше двух, то получим тело:

Отличительной особенностью выпуклых тел является то, что они содержат в себе как крайние точки отрезка, так и сам отрезок. Невыпуклые тела таким свойством не обладают. Выпуклое тело имеет крайние угловые точки, которые получены путем пересечения граней или плоскостей. Крайними угловыми точками называются точки, которые не являются внутренними ни для какого-нибудь отрезка, целиком принадлежащего телу или множеству точек. У выпуклого многогранника крайней угловой точкой являются его вершины (их всегда конечное множество). У невыпуклого многогранника не каждая вершина является крайней угловой точкой.

Матрица ЭМЗ в n-мерном пространстве определяет многогранник, который имеет конечное число вершин. Решить задачу значит найти параметры крайней угловой точки и затем, двигаясь от вершины к вершине, найти координаты крайней угловой точки, которые придадут целевой функции экстремальное значение. Т.е. выпуклые тела являются геометрическим представлением экономико-математической задачи, процесс решения которой связан с оценкой и перебором крайних угловых точек. Процесс перебора вершин или перемещение от одной вершины к другой осуществляется с помощью выпуклой линейной комбинацией.

Любая точка замкнутого выпуклого множества может быть представлена выпуклой линейной комбинацией его крайних угловых точек. Причем параметры этой точки будут характеризоваться выражением $\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n$ при условиях, что $\alpha_1 ... \alpha_n \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{n} \alpha_n = 1$.

Выпуклая линейная комбинация является аппаратом, позволяющим осуществить перебор и оценку параметров крайней угловой точки в соответствии с требованиями, предъявляемыми к экономико-математической задаче.

Если мы имеем систему линейных неравенств с n-неизвестными и n+1 ограничениями вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... \geq A_1 \\ a_{n+1,1}x_1 + ... + a_{n+1,n}x_n \geq A_{n+1} \end{cases},$$

то общий многогранник решений или симплекс будет в том случае, если $\det \neq 0, A_{iAi} \neq 0$ и алгебраические дополнения столбца свободных членов (A_{iAi}) имеют одинаковые знаки.

Приложение Е

Графический метод решения задач линейного программирования

Для решения задач линейного программирования с двумя переменными (x_1, x_2)

используется графический метод, который состоит из следующих этапов:

а) отображение области допустимых решений на основе составленных ограничений;

б) построение линии целевой функции;

в) определение и вычисление координат точки максимума (при решении задачи на максимум) или минимума (при решении задачи на минимум);

г) расчет значения целевой функции в найденной точке.

При решении задач линейного программирования могут возникать следующие случаи (рис. 1):

1. оптимальное решение единственно (а);

2. оптимальных решений бесконечное множество: линия уровня проходит через сторону области допустимых решений (б);

3. целевая функция не ограничена, т.е. сколько бы не перемещали линию уровня, она не может занять разрешающегося положения (в);

4. область допустимых решений состоит из точки, в которой целевая функция одновременно имеет и максимальное, и минимальное значение (г);

5. задача решений не имеет, так как система ограничений несовместна (д).

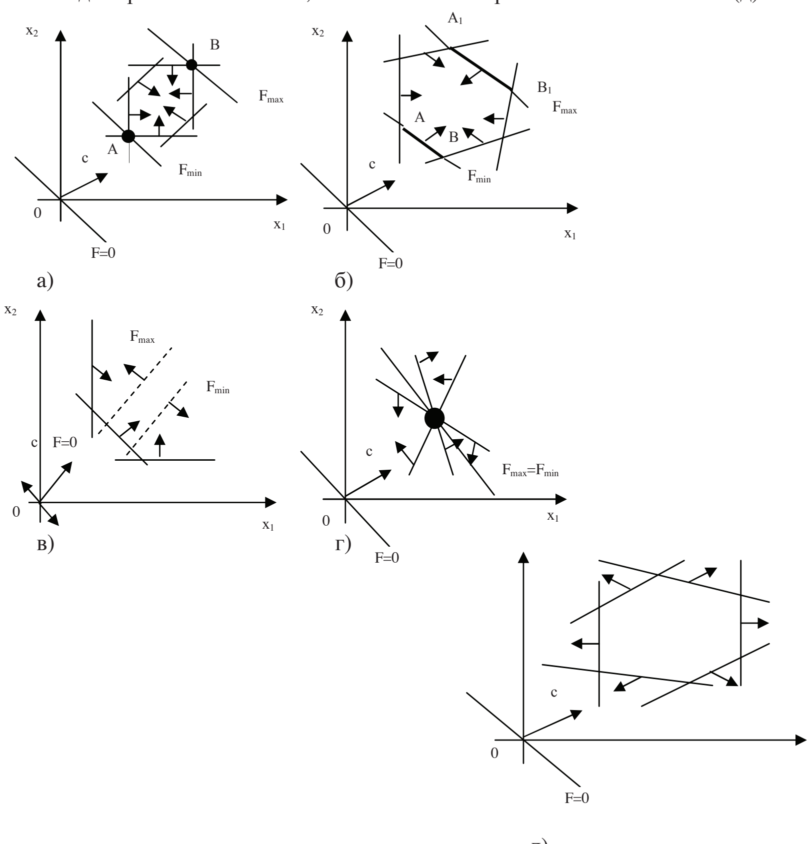


Рис. 1. Геометрическая интерпретация задач линейного программирования.

В общем случае линейный характер целевой функции и выпуклость области допустимых значений позволяют сделать следующий вывод: оптимальному решению соответствует, по крайней мере, одна из вершин многогранника, описывающего область допустимых решений.

П р и л о ж е н и е F

Алгоритм симплексного метода

Универсальным методом решения задач линейного программирования является симплексный метод, основанный на принципе последовательного улучшения. Его идея состоит в отыскании какой-либо вершины многогранника допустимых решений, проверки ее координат на оптимальность. Если решение не оптимально, то осуществляя переход к другой вершине многогранника, вновь проверяют его на оптимальность. Причем, при переходе от одной вершины к другой значение целевой функции убывает (при решении задачи на минимум) или возрастает (в задаче на максимум). Так как выпуклый многогранник имеет конечное число вершин (вследствие конечности числа ограничений задачи), то за определенное количество «шагов» точка оптимума будет найдена.

Пусть дана задача линейного программирования:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le A_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le A_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le A_m \end{cases}$$

$$x_1, x_2 ... x_n \ge 0$$

$$F_{\max} = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n .$$

Представим ее в канонической форме:

$$\begin{cases} y_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = A_1 \\ y_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = A_2 \\ .... \\ y_m + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = A_m \end{cases}$$

$$x_1, x_2 ... x_n \ge 0$$

$$F_{\max} = y \cdot 0 + p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n .$$

Для этого в ограничения и целевую функцию модели вводят дополнительные переменные y_i. С экономической точки зрения дополнительные переменные обозначают величину недоиспользования ресурсов, если исходные ограничения имеют вид меньше-равно (≤), или обозначают величину превышения сверх минимума, если исходные ограничения – типа больше-равно (≥).

Решают задачу относительно дополнительных переменных y_i, которые в этом случае образуют базис и называются базисными, а основные переменные x_j являются небазисными. Все расчеты проводят в симплексных таблицах (табл.).

Коэффициенты симплексных таблиц имеют определенный экономический смысл. Так, в первой симплексной таблице коэффициенты, стоящие в столбцах небазисных переменных показывают, на сколько единиц уменьшится при знаке «плюс» или увеличится при знаке «минус» объем ресурсов, если небазисная переменная войдет в план в размере единицы.

Т а б л и ц а. **Первая симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		x_1	x_2	…	x_n
y_1	A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
y_2	A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…
y_m	A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}
F_{max}	0	$-p_1$	$-p_2$	…	$-p_n$

Дальнейшая реализация задачи включает поиск допустимого (или опорного) и оптимального решений.

Признаком опорного решения является отсутствие в столбце свободных членов отрицательных коэффициентов и нулей среди базисных переменных.

Изучим различные варианты отсутствия опорного решения. Допустим, в столбце базисных переменных стоит «0». Такая ситуация возникает в случае записи условия задачи в виде ограничения-уравнения. Пусть, например, $y_5=0$. Тогда при поиске опорного решения пользуемся следующей методикой:

1. Находим в нулевой строке, т.е. строке, содержащей в базисных переменных «0» (если она есть), любой положительный элемент.

2. Проводя деление коэффициентов столбца свободных членов на соответствующие коэффициенты столбца с выбранным положительным элементом, находим наименьшее положительное значение, которое укажет на разрешающий коэффициент. Он показывает, какие переменные среди базисных и небазисных меняются местами. Таким образом, «0» из базисных перейдет в небазисные переменные. Такая замена предполагает изменение коэффициентов симплексной таблицы, которые определяются следующим образом:

1. Новый коэффициент вместо разрешающего равен единице, деленной на разрешающий коэффициент. При этом новыми будем называть коэффициенты следующей симплексной таблицы по отношению к предыдущей:

$$a'_{rk} = \frac{1}{a_{rk}},$$

где a_{rk} – разрешающий элемент, стоящий в строке r и столбце k, при $r \in i, k \in j$;

i – номер строки, $i = 1..m$;

j – номер столбца, $j = 1..n$;

a'_{rk} – новый коэффициент вместо разрешающего.

2. Новые коэффициенты строки разрешающего элемента (a'_{rj}) равны предыдущим (a_{rj}), деленным на разрешающий:

$$a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}}.$$

При $j \neq k$ это правило не распространяется на разрешающий элемент.

3. Новые коэффициенты столбца разрешающего элемента (a'_{ik}) равны предыдущим, деленным на разрешающий элемент, взятый с противоположным знаком:

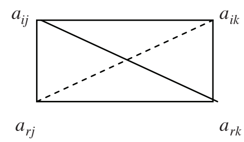
$$a'_{ik} = \frac{a_{ik}}{-a_{rk}}.$$

При $i \neq r$ это правило не распространяется на разрешающий элемент.

4. Новые коэффициенты, не стоящие в строке и столбце разрешающего элемента (a_{ij}), равны частному от деления разности произведения коэффициентов главной и побочной диагоналей на разрешающий элемент:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rk} - a_{ik} \cdot a_{rj}}{a_{rk}}.$$

При $i \neq r, j \neq k$ это правило не распространяется на коэффициенты строки и столбца разрешающего элемента. При этом коэффициенты прямоугольника с учетом разрешающего элемента относятся к главной диагонали.



Допустим, в новой симплексной таблице «0» из базисных переменных переместился в небазисные. Далее в ней вычеркиваем все коэффициенты нулевого столбца и продолжаем поиск опорного решения.

Итерационная процедура симплекс-метода сводится к последовательному преобразованию симплекс-таблиц, что соответствует целенаправленному переходу от одной вершины симплекса к другой. Поэтому методика поиска опорного решения заключается в том, что среди отрицательных свободных членов выбираем любой. Затем в строке взятого отрицательного свободного члена находим первый отрицательный коэффициент. Делим свободные члены на соответствующие коэффициенты столбца, в котором мы взяли отрицательный элемент.

Коэффициенты F строки в расчетах по поиску разрешающего элемента не участвуют.

С экономической точки зрения данные положительные симплексные отношения показывают, сколько единиц небазисной переменной можно ввести в базис, если ограниченным является один ресурс.

В случае, если частное от деления на выбранный нами отрицательный элемент получится наименьшим положительным по сравнению с другими положительными частными, то этот отрицательный коэффициент станет разрешающим элементом.

С экономической точки зрения введение x в число базисных переменных обозначает, что переменная вошла в план, т.е. получила не нулевое значение. В некоторых случаях может получиться, что частное от деления на отрицательный элемент не будет иметь наименьшее значение. Тогда поступаем следующим образом.

В строке отрицательного свободного члена, если это возможно, находим следующий отрицательный элемент и делим свободные члены на соответствующие коэффициенты этого столбца, т.е. столбца с новым отрицательным элементом. Если частное от деления на новый отрицательный коэффициент будет меньшим положительным по сравнению с другими, то этот коэффициент возьмем за разрешающий (разрешающий элемент в симплексной таблице обводим рамкой). Если частное не является наименьшим положительным, то ищем следующий отрицательный коэффициент в строке отрицательного свободного члена и производим те же вычисления до тех пор, пока не найдем разрешающий элемент.

Примечание 1. Если в строке с отрицательным свободным членом нет ни одного отрицательного коэффициента, то это означает, что система ограничений несовместна, а задача решения не имеет (приложение Е, рис. 1, д).

Используя вышеизложенные правила, определяем новые коэффициенты второй симплексной таблицы, предварительно меняя местами базисные и небазисные переменные, соответствующие разрешающему коэффициенту.

Преобразования по вышеизложенному алгоритму продолжаются до тех пор, пока не будет найдено опорное решение.

Приступаем к поиску оптимального решения. Опорное решение будет оптимальным, если коэффициенты целевой функции (F-строки) будут отрицательными (или один, несколько нулей) при решении задачи на минимум и положительными (или один, несколько нулей) – при решении на максимум. Если оптимальное решение отсутствует, то его поиск начинаем с определения разрешающего столбца. Разрешающим столбцом при поиске минимума функции будет являться тот, в целевой функции которого находится наибольший положительный коэффициент, а при поиске максимума функции – наибольший по абсолютной величине отрицательный коэффициент.

Чтобы найти разрешающий элемент, делим коэффициенты столбца свободных членов на соответствующие коэффициенты разрешающего столбца. Разрешающим будет тот элемент, от деления на который получим наименьшее положительное частное.

По вышеизложенным правилам определяют коэффициенты новой симплексной таблицы. Рассмотрим их экономическое содержание:

1. Новый коэффициент, вместо разрешающего показывает, сколько единиц вводимой в базис небазисной переменной можно иметь за счет единицы ограниченного ресурса.

2. Новые коэффициенты разрешающей строки показывают, на сколько единиц возрастет при знаке «минус» или уменьшится при знаке «плюс» введенная в базис переменная, если в план ввести небазисную переменную в размере единицы.

3. Новые коэффициенты разрешающего столбца показывают расход ресурса при знаке «плюс» или поступление ресурса при знаке «минус», если объем ограниченного ресурса уменьшится на единицу.

4. Новые коэффициенты, не стоящие в разрешающей строке и разрешающем столбце показывают расход ресурса при знаке «плюс» или поступление ресурса при знаке «минус» на единицу небазисной переменной и на величину изменения ранее введенной в план переменной.

Примечание 2. Если при решении задачи на максимум в строке целевой функции имеется отрицательный коэффициент, а в разрешающем столбце нет ни одного положительного коэффициента, то это говорит о неограниченности функции. Если при решении задачи на минимум в строке целевой функции имеется положительный коэффициент, а в разрешающем столбце все коэффициенты отрицательные, то это приводит к подобному результату. На практике такая ситуация возникает, если при составлении задачи упущено одно или несколько ограничений (приложение Е, рис. 1, в). Расчеты по изложенной методике выполняем до тех пор, пока не получим оптимальное решение (примечание 3). Если в последней симплексной таблице получен оптимальный план, а в строке целевой функции стоит один или несколько нулей, это свидетельствует о множественности решений задачи при одинаковом значении целевой функции. С геометрической точки зрения это означает, что линия уровня проходит через ребро симплекса (приложение Е, рис. 1, б). Если получен оптимальный план и в строке целевой отсутствуют нули, то получено единственное решение задачи. С геометрической точки зрения это означает, что линия уровня прошла через вершину многогранника допустимых решений (приложение Е, рис. 1, а).

П р и л о ж е н и е G

Методика обоснования двойственных оценок

Значения двойственных оценок получают в результате решения двойственной задачи, которая составляется на базе прямой задачи.

Рассмотрим прямую задачу.

Допустим, в сельскохозяйственной организации имеются ресурсы $A_1, A_2 \ldots A_m$. Их планируется использовать для получения продукции от различных сельскохозяйственных отраслей, размер которых $x_1, x_2 \ldots x_n$ необходимо определить. При этом общая стоимость продукции должна быть максимальной, т.е.:

$$F_{\max} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n .$$

При условиях, что расход ресурсов не должен превышать их наличия:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le A_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le A_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le A_m , \end{cases}$$

где c_j – оценочный коэффициент (стоимость продукции от единицы отрасли вида *j*);

a_{ij} – расход ресурса вида *i* на единицу отрасли вида *j*;

A_i – объем ресурса вида *i*;

x_j – размер отрасли вида *j*.

Все неизвестные задачи по своему экономическому смыслу неотрицательны: $x_1, x_2 \ldots x_n \ge 0$.

Предположим, что перерабатывающее предприятие решило приобрести все ресурсы, которыми располагает организация, для развития собственного сельхозпроизводства. Необходимо установить объективно обусловленные оценки, т.е. $u_1, u_2 \ldots u_m$, исходя из следующих условий:

1. Стоимость всех ресурсов покупающая сторона стремится минимизировать, т.е.

$$F_{\min} = A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_m u_m .$$

2. За ресурсы перерабатывающее предприятие должно заплатить сельскохозяйственной организации не менее той суммы, которую она может получить, организовав собственное производство. Значит, на единицу первой отрасли расходуется a_{11} единиц первого ресурса ценой u_1, a_{21} единиц второго ресурса ценой u_2 и т.д. Следовательно, стоимость всех ресурсов, идущих на производство продукции с единицы первой отрасли, равна: $a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m$ и должна быть не менее стоимости продукции, получаемой с единицы первой отрасли:

$$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m \ge c_1 .$$

Рассуждая аналогично для второй, третьей и других отраслей получим следующую систему ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + ... + a_{m1}u_m \geq c_1 \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{m2}u_m \geq c_2 \\ .... \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + ... + a_{mn}u_m \geq c_n. \end{cases}$$

Таким образом, на базе информации исходной задачи построена новая задача (одна из них является прямой, другая – двойственной).

Сформулируем вышеизложенные задачи в общем виде:

i – номер строки (ограничения);

I_0 – множество строк (ограничений);

j – номер столбца (переменной);

J_0 – множество столбцов (переменных);

a_{ij} – коэффициент строки i столбца j;

A_i – наличие ресурсов строки i;

c_j – оценочный коэффициент в столбце j.

Прямая задача имеет вид: найти x_j при условии –

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j \leq A_i, i \in I_0;$$

$$x_j \geq 0;$$

$$F_{\max} = \sum_{j \in J_0} c_j x_j.$$

Двойственная задача имеет вид: найти u_i при условии –

$$\sum_{i \in I_0} a_{ij} u_i \geq c_j, j \in J_0;$$

$$u_i \geq 0;$$

$$F_{\min} = \sum_{i \in I_0} A_i u_i.$$

Следовательно, двойственная задача по отношению к прямой строится по следующей схеме:

а) коэффициенты столбцов прямой задачи являются коэффициентами строк двойственной задачи;

б) знаки ограничений прямой задачи противоположны знакам ограничений двойственной задачи;

в) коэффициенты целевой функции прямой задачи являются свободными членами двойственной задачи;

г) если целевая функция одной из задач максимизируется, то целевая функция другой задачи минимизируется.

П р и л о ж е н и е Н

Решение прямой задачи линейного программирования симплексным методом

Дана следующая задача:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 60 \\ 6x_1 + 26x_2 + 2x_3 + 25x_4 \le 1800 \\ 50x_4 \le 12x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 808 \\ x_1 \le 36 \end{cases} \qquad F_{\max} = 50x_1 + 20x_2 + 70x_4 .$$

Решим задачу, используя методику расчетов, приведенную в приложении F (табл. 1-4).

Т а б л и ц а 1. **Первая симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	60	1	1	1	0
y_2	1800	6	26	2	25
y_3	808	–12	–15	–25	$\boxed{50}$
y_4	36	1	0	0	0
F_{max}	0	–50	–20	0	–70

Т а б л и ц а 2. **Вторая симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		x_1	x_2	x_3	y_3
y_1	60	1	1	1	0
y_2	1396	12	33,5	14,5	–0,5
x_4	16,16	–0,24	–0,3	–0,5	0,02
y_4	36	$\boxed{1}$	0	0	0
F_{max}	1131,2	–66,8	–41,0	–35	1,4

Т а б л и ц а 3. **Третья симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		y_4	x_2	x_3	y_3
y_1	24	–1	$\boxed{1}$	1	0
y_2	964	–12	33,5	14,5	–0,5
x_4	24,8	0,24	–0,3	–0,5	0,02
x_1	36	1	0	0	0
F_{max}	3536	66,8	–41,0	–35	1,4

Т а б л и ц а 4. **Четвертая симплексная таблица**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные			
		y_4	y_1	x_3	y_3
x_2	24	–1	1	1	0
y_2	160	21,5	–33,5	–19	–0,5
x_4	32	–0,06	0,3	–0,2	0,02
x_1	36	1	0	0	0
F_{max}	4520	25,8	41,0	6,0	1,4

Приложение I

Результаты решения прямой и двойственной задач по программе LPX.88

```
F   SOLUTION IS OPTIMAL    DATE  02-01-2016   TIME 12:17:05
    ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ    ДАТА               ВРЕМЯ

MAXIMUM     ENTERS:       BASIS X:   3       VARIABLES:    4
                                             ПЕРЕМЕННЫЕ
PIVOTS: 3   LEAVES:       BASIS S:   1       SLACKS:       4
ИТЕРАЦИИ                                ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ
LAST INV: 0   DELTA    0   RETURN   4520     CONSTRAINTS:  4
                           КРИТЕРИЙ          ОГРАНИЧЕНИЯ

BASIS    X.2     S.2     X.4     X.1
БАЗИС
PRIMAL   24      160     32      36
ПРЯМАЯ
DUAL     41      0       1.4     25.8
ДВОЙСТВЕННАЯ
```

```
F1  SOLUTION IS MAXIMUM     RETURN  4520    DATE 02-01-2016
    PRIMAL PROBLEM SOLUTION КРИТЕРИЙ        TIME   12:17:11
    РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ
VARIABLE  STATUS  VALUE  RETURN/UNIT VALUE/UNIT  NET RETURN
ПЕРЕМЕННЫЕ  ТИП    ЗНАЧЕНИЕ КРИТЕРИЙ/ ВЛИЯНИЕ/   ИЗМЕНЕНИЕ
                         КОЭФФИЦИЕНТ КОЭФФИЦИЕНТ КРИТЕРИЯ
X.1   BASIS (БАЗИС)  36       50           50           0
X.2   BASIS          24       20           20           0
X.3   NONBASIS (НЕБАЗИС) 0    0            6           -6
X.4   BASIS          32       70           70           0
S.1   NONBASIS       0        0            41         -41
S.2   BASIS          160      0            0            0
S.3   NONBASIS       0        0            1.4        -1.4
S.4   NONBASIS       0        0            25.8       -25.8

F2    SOLUTION IS MAXIMUM    RETURN  4520   DATE 02-01-2016
      DUAL PROBLEM SOLUTION  КРИТЕРИЙ       TIME  12:17:11
      РЕШЕНИЕ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ

ROW ID  STATUS   DUAL VALUE    RHS VALUE    USAGE   SLACK
СТРОКА  ТИП     ДВОЙСТВЕННАЯ    ОБЪЕМ      РАСХОД  ОСТАТОК
                   ОЦЕНКА      РЕСУРСОВ
Y.1 BINDING (ДЕФИЦИТ) 41          60          60        0
Y.2 NONBINDING (НЕДИФИЦИТ) 0      1800        1640      160
Y.3 BINDING           1.4         808         808       0
Y.4 BINDING           25.8        36          36        0
```

F_3 SOLUTION IS MAXIMUM RETURN 4520 DATE 02-01-2016
OBJECTIVE ROW RANGES *КРИТЕРИЙ* TIME 12:25:27
УСТОЙЧИВОСТЬ ПО КРИТЕРИЮ

VARIABLE *ПЕРЕМЕННАЯ*	STATUS *ТИП*	VALUE *ЗНАЧЕНИЕ*	RETURN/UNIT *КРИТЕРИЙ/ КОЭФФИЦИЕНТ*	MINIMUM *НИЖНЯЯ ГРАНИЦА*	MAXIMUM *ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА*
X.1	BASIS	36	50	24.2	NONE
X.2	BASIS	24	20	14	45.8
X.3	NONBASIS	0	0	NONE	6
X.4	BASIS	32	70	0	100

F_4 SOLUTION IS MAXIMUM RETURN 4520 DATE 02-01-2016
RIGHT HAND SIDE RANGES *КРИТЕРИЙ* TIME 12:25:28
УСТОЙЧИВОСТЬ ПО РЕСУРСАМ

ROW ID *СТРОКА*	STATUS *ТИП*	DUAL VALUE *ДВОЙСТВЕННАЯ ОЦЕНКА*	RHS VALUE *ОБЪЕМ РЕСУРСОВ*	MINIMUM *НИЖНЯЯ ГРАНИЦА*	MAXIMUM *ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА*
Y.1	BINDING	41	60	36	64.77612
Y.2	NONBINDING	0	1800	1640	NONE
Y.3	BINDING	1.4	808	-792	1128
Y.4	BINDING	25.8	36	28.55814	60

F_5 SOLUTION IS MAXIMUM RETURN 4520 DATE 02-01-2016
INVERSE COEFFICIENTS *КРИТЕРИЙ* TIME 12:25:29
ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

	RETURN	X.2	S.2	X.4	X.1
X.1	0	0	0	0	1
X.2	0	1	0	0	-1
X.4	0	.3	0	.02	-.06
S.2	0	-33.5	1	-5	21.5

Приложение J

Результаты решения прямой и двойственной задач по программе Поиск решения из Excel

Пусть имеем прямую задачу:

$$1.\ x_1 + x_2 + x_3 \le 60$$
$$2.\ 6x_1 + 26x_2 + 2x_3 + 25x_4 \le 1800$$
$$3.\ 50x_4 \le 12x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 808$$
$$4.\ x_1 \le 36$$
$$F_{\max} = 50x_1 + 20x_2 + 70x_4 .$$

Для решения задачи на компьютере информацию задачи можно представить на рабочем листе Excel в следующем виде:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Расчет оптимальных размеров отраслей						
2	Показатели	Зерновые	Картофель	Многолетние травы на сено	Коровы	Итого	Имеется
3	Площадь, га	0	0	0		=СУММ(B3:D3)	60
4	Поголовье, гол.				0		
5	Затраты труда, чел.-дн.	=6*B3	=26*C3	=2*D3	=25*E4	=СУММ(B5:E5)	1800
6	Выход кормов, ц к.ед.	=12*B3	=15*C3	=25*D3		=СУММ(B6:D6)	=F6+808
7	Потребность в кормах, ц к.ед.				=50*E4	=E7	
8	Прибыль, у.д.е.	=50*B3	=20*C3		=70*E4	=B8+C8+E8	=F8
9							

Изначально, ячейки, значение которых необходимо найти (изменяемые ячейки), должны быть равны нулю. После этого необходимо установив табличный курсор в целевую ячейку, которая должна принимать максимальное, минимальное либо конкретное значение. В рассматриваемом случае это ячейка G8 (прибыль), выполнить команду «Сервис → Поиск решения…». Появится диалоговое окно «Поиск решения» (рис. 1).

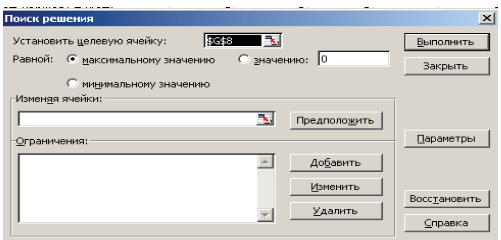


Рис. 1. Диалоговое окно «Поиск решения»

В поле «Изменяя ячейки»: указывают ячейки или диапазоны ячеек, значения которых необходимо найти (в рассматриваемом случае B3, C3, D3 и E4). Если ячеек либо диапазонов ячеек несколько, они указываются через точку с запятой.

Для учета ограничений, которые накладываются на условия задачи, используют диалоговое окно «Добавление ограничения» (рис. 2), щелкнув по кнопке «Добавить».

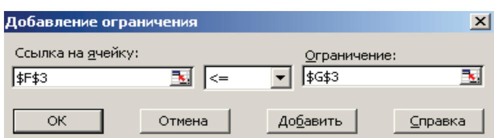


Рис. 2. Диалоговое окно «Добавление ограничения»

В нашем случае необходимо учесть следующие ограничения:

Ограничение	Описание
B3:D3≥0	Площадь посева не может принимать отрицательные значения
F3≤G3	Общая площадь посева культур не должна превышать площадь имеющихся пахотных земель
F5≤G5	Затраты труда на возделывание культур и содержания животных не могут превышать имеющиеся ресурсы труда
E4≥0	Поголовье коров не может принимать отрицательные значения
F7≤G6	Потребность в кормах отрасли животноводства не должна превышать выхода этих кормов с отрасли растениеводства
B3≤36	Площадь посева зерновых культур не может быть больше 40% от площади пашни (36 га)

После ввода последнего ограничения, щелкнув на кнопке «ОК», получим диалоговое окно «Поиск решения» следующего вида (рис. 3).

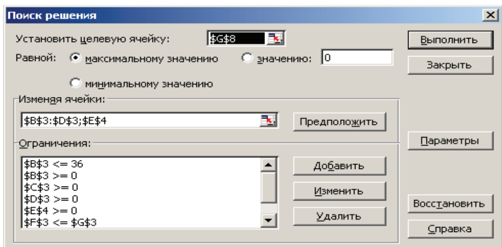


Рис. 3. Диалоговое окно «Поиск решения»

Щелкнув по кнопке «Выполнить», получим оптимальное решение задачи (рис. 4).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Расчет оптимальных размеров отраслей						
2	Показатели	Зерновые	Картофель	Многолетние травы на сено	Коровы	Итого	Имеется
3	Площадь, га	36	24	0		60	60
4	Поголовье, гол.				32		
5	Затраты труда, чел.-дн.	216	624	0	800	1640	1800
6	Выход кормов, ц к.ед.	432	360	0		792	1600
7	Потребность в кормах, ц к.ед.				1600	1600	
8	Прибыль, у.д.е.	1800	480		2240	4520	4520
9							

Рис. 4. Результаты решения задачи

Из рис. 4 видны значения неизвестных величин задачи:

$x_1=36 \qquad y_1=0$

$x_2=24 \qquad y_2=160$

x_3=0 y_3=0

x_4=32 y_4=0

F_{max}=4520.

В диалоговом окне «Результаты поиска решения» (рис. 5), указывают тип отчета:

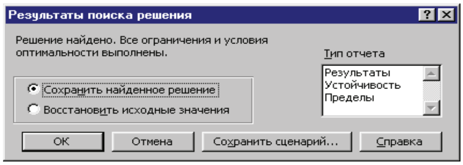


Рис. 5. Диалоговое окно «Результаты поиска решения».

Результаты.

Используется для создания отчета, состоящего из целевой ячейки и списка влияющих ячеек модели, их исходных и конечных значений, а также формул ограничений и дополнительных сведений о наложенных ограничениях.

Устойчивость.

Используется для создания отчета, содержащего сведения о чувствительности решения к малым изменениям в формуле модели или в формулах ограничений (рис. 6).

Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Свете5.xls]Лист1
Отчет создан: 04.02.2009 10:26:36

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. градиент
B3	Площадь, га Зерновые	36	25,8
C3	Площадь, га Картофель	24	0
D3	Площадь, га Многолетние травы на сено	0	-6
E4	Поголовье, гол.	32	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Лагранжа Множитель
F3	Итого	60	41
F5	Затраты труда, чел.-дн. Итого	1640	0
F7	Потребность в кормах, ц к.ед. Итого	1600	1,4

Рис. 6. Отчет по устойчивости.

Такой отчет не создается для моделей, значения в которых ограничены множеством целых чисел. В случае нелинейных моделей отчет содержит данные для градиентов и множителей Лагранжа. В отчет по нелинейным моделям включаются ограниченные затраты, фиктивные цены, объективный коэффициент (с некоторым допуском), а также диапазоны ограничений справа.

Пределы.

Используется для создания отчета, состоящего из целевой ячейки и списка влияющих ячеек модели, их значений, а также нижних и верхних границ (рис. 7). Такой отчет не создается для моделей, значения в которых ограничены множеством целых чисел. Нижним пределом является наименьшее значение, которое может содержать влияющая ячейка, в то время как значения остальных влияющих ячеек фиксированы и удовлетворяют наложенным ограничениям. Соответственно верхним пределом называется наибольшее значение.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по пределам
Рабочий лист: [Свете5.xls]Отчет по пределам 2
Отчет создан: 04.02.2009 10:26:36

Ячейка	Целевое Имя	Значение
G8	Прибыль, у.д.е. Имеется	4520

Ячейка	Изменяемое Имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
B3	Площадь, га Зерновые	36	36	4520	36	4520
C3	Площадь, га Картофель	24	24	4520	24	4520
D3	Площадь, га Многолетние травы на сено	0	0	4520	0	4520
E4	Поголовье, гол.	32	0	2280	32	4520

Рис. 7. Отчет по пределам

П р и л о ж е н и е К

Метод ветвей и границ

Пример. Для реконструкции перерабатывающего предприятия было разработано три проекта, каждый из которых характеризуется показателями (табл. 1).

Т а б л и ц а 1. **Характеристика проектов по реконструкции предприятия**

Показатели	Проекты			Ресурсы
	1	2	3	
Затраты труда, чел.-час	100	120	130	250
Материально-денежные затраты, тыс. у.д.е.	80	60	100	180
Прибыль, тыс. у.д.е.	80	85	90	–

Требуется обосновать выбор проектов по реконструкции перерабатывающего предприятия с целью максимизации прибыли.

Решение. Введем неизвестные величины задачи: x_1, x_2 и x_3 – соответственно первый, второй и третий проекты.

Математическая модель имеет вид:

$$F_{max}=80x_1+85x_2+90x_3$$

при условиях:

по использованию труда: $100x_1+120x_2+130x_3\leq 250$

по использованию материально-денежных средств:

$$80x_1+60x_2+100x_3\leq 180$$

по неотрицательности переменных:

$$x_1\geq 0;\ x_2\geq 0;\ x_3\geq 0$$

по целочисленности переменных:

$$x_1, x_2\ x_3 \text{ – целые числа.}$$

Отбросив условие целочисленности, запишем задачу в первую симплексную таблицу (табл. 2).

Т а б л и ц а 2. **Первая симплексная таблица задачи №1 без учета целочисленности переменных**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	x_3
y_1	250	100	120	130
y_2	180	80	60	$\boxed{10}$
F_{max}	0	–80	–85	–90

Решим задачу симплексным методом (табл. 3-5).

Т а б л и ц а 3. **Вторая симплексная таблица задачи №1 без учета целочисленности переменных**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	y_2
y_1	16	–4	$\boxed{42}$	–1,3
x_3	1,8	0,8	0,6	0,01
F_{max}	162	–8	–31	0,9

Т а б л и ц а 4. **Третья симплексная таблица задачи №1 без учета целочисленности переменных**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_1	y_2
x_2	0,381	–0,095	0,024	–0,031
x_3	1,571	$\boxed{0,85}$	–0,014	0,029
F_{max}	173,810	–10,952	0,738	–0,060

Т а б л и ц а 5. **Четвертая симплексная таблица задачи №1 без учета целочисленности переменных**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_3	y_1	y_2
x_2	0,555	0,111	0,022	–0,028
x_1	1,833	1,667	–0,016	0,034
F_{max}	193,889	12,779	0,559	0,311

В табл. 5 получено оптимальное решение задачи: x_1=1,8; x_2=0,6; F_{max}=183,06 тыс. у.д.е.

Значение переменных x_1 и x_2 – дробное. Так как x_2=0,555, то из области решения исключим полосу, содержащую дробное оптимальное значение x_2 и разобьем задачу на две задачи, добавив в каждую по дополнительному ограничению:

Задача №2.

$$F_{max}=80x_1+85x_2+90x_3$$
при условиях:
$$100x_1+120x_2+130x_3\leq 250$$
$$80x_1+60x_2+100x_3\leq 180$$
$$x_2\leq 0.$$

Задача №3.

$$F_{max}=80x_1+85x_2+90x_3$$
при условиях:
$$100x_1+120x_2+130x_3\leq 250$$
$$80x_1+60x_2+100x_3\leq 180$$
$$x_2\geq 1.$$

Поочередно включим дополнительные ограничения во вторую симплексную таблицу (табл. 3) и решим задачи №2 и №3 (табл. 6-9 и 10-13).

Т а б л и ц а 6. **Первая симплексная таблица задачи №2**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	y_2
y_1	16	–4	$\boxed{42}$	–1,3
x_3	1,8	0,8	0,6	0,01
y_3	0	0	1	0
F_{max}	162	–8	–31	0,9

Т а б л и ц а 7. **Вторая симплексная таблица задачи №2**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_1	y_2
x_2	0,381	–0,095	0,024	–0,031
x_3	1,571	0,857	–0,014	0,029
y_3	–0,381	0,095	$\boxed{-0{,}024}$	0,031
F_{max}	173,810	–10,952	0,738	–0,060

Т а б л и ц а 8. **Третья симплексная таблица задачи №2**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_3	y_2
x_2	0	0	1	0
x_3	1,793	$\boxed{0{,}802}$	–0,583	0,011
y_1	15,875	–3,958	–41,667	–1,292
F_{max}	162,094	–8,031	30,750	0,893

Т а б л и ц а 9. **Четвертая симплексная таблица задачи №2**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_3	y_2
x_2	0	0	1	0
x_1	2,25	1,247	–0,727	0,014
y_1	24,724	4,935	–44,544	–1,238
F_{max}	180	10	25	1

Решим задачу №3 (табл. 10-13).

Т а б л и ц а 10. **Первая симплексная таблица задачи №3**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	y_2
y_1	16	–4	$\boxed{42}$	–1,3
x_3	1,8	0,8	0,6	0,01
y_3	–1	0	–1	0
F_{max}	162	–8	–31	0,9

Т а б л и ц а 11. **Вторая симплексная таблица задачи №3**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_1	y_2
x_2	0,381	–0,095	0,024	–0,031
x_3	1,571	0,857	–0,014	0,029
y_4	–0,619	–0,095	0,024	$\boxed{-0{,}031}$
F_{max}	173,81	–10,952	0,738	–0,06

Т а б л и ц а 12. **Третья симплексная таблица задачи №3**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_1	y_4
x_2	1	0	0	–1
x_3	0,992	$\boxed{0{,}768}$	0,0085	0,935
y_2	19,968	3,065	0,774	–32,258
F_{max}	175,008	–10,768	0,692	–1,935

В табл. 9 и 13 получены оптимальные решения задач №2 и №3.

Т а б л и ц а 13. **Четвертая симплексная таблица задачи №3**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_3	y_1	y_4
x_2	1	0	0	–1
x_1	1,3	1,302	0,011	1,217
y_2	16	–3,991	70,774	–35,989
F_{max}	189,0	14	0,8	11

Сравниваем значения их целевых функций, так как $F_{2\max} < F_{3\max}$, то для дальнейших расчетов выбираем задачу №3 и по переменной x_1 с дробным ее значением снова строим два дополнительных ограничения и разбиваем задачу №3 еще на две новые задачи:

Задача №4.
F_{max}=80x_1+85x_2+90x_3
при условиях:
100x_1+120x_2+130x_3≤250
80x_1+60x_2+100x_3≤180
x_1≤1.

Задача №5.
F_{max}=80x_1+85x_2+90x_3
при условиях:
100x_1+120x_2+130x_3≤250
80x_1+60x_2+100x_3≤180
x_1≥2.

Поочередно включаем дополнительные ограничения в табл. 11 и решаем задачу №4 и №5 (табл. 14-16 и 17-18).

Т а б л и ц а 14. **Первая симплексная таблица задачи №4**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_1	y_4
x_2	1	0	0	–1
x_3	0,992	0,768	0,009	0,935
y_2	19,968	3,065	0,774	–32,258
y_5	1	$\boxed{1}$	0	0
F_{max}	175,008	–10,768	0,692	–1,935

Т а б л и ц а 15. **Вторая симплексная таблица задачи №4**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_5	y_1	y_4
x_2	1	0	0	–1
x_3	0,224	–0,768	0,009	$\boxed{0,935}$
y_2	16,903	3,065	0,774	–32,258
x_1	1	1	0	0
F_{max}	185,776	–10,768	0,692	–1,935

Т а б л и ц а 16. **Третья симплексная таблица задачи №4**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_5	y_1	x_3
x_2	1,25	0	0	1,07
y_4	0,24	–0,82	0,01	1,07
y_2	24,63	–3,065	0,77	34,5
x_1	1	1	0	0
F_{max}	186,25	9,17	0,708	2,083

Т а б л и ц а 17. **Первая симплексная таблица задачи №5**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_1	y_4
x_2	1	0	0	–1
x_3	0,992	0,768	0,009	0,935
y_2	19,968	3,065	0,774	–32,258
y_6	–2	$\boxed{-1}$	0	0
F_{max}	175,008	–10,768	0,692	–1,935

Т а б л и ц а 18. **Вторая симплексная таблица задачи №5**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_6	y_1	y_4
x_2	1	0	0	–1
x_3	–0,544	0,768	0,009	0,935
y_2	13,838	3,065	0,774	–32,258
x_1	2	–1	0	0
F_{max}	196,544	10,768	0,692	–1,935

Допустимого решения задачи №5 найти нельзя, так как система ограничений задачи не совместна. Проанализируем оптимальное решение задачи №4: x_1=1; x_2=1,25; x_3=0, следовательно, в табл. 6 необходимо поочередно ввести ограничения, позволяющие исключить дробную часть значения переменной x_2, т.е. $x_2 \leq 1$ и $x_2 \geq 2$ и решить задачи №6 (табл. 19-22) и №7 (табл. 23-27).

Т а б л и ц а 19. **Первая симплексная таблица задачи №6**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	y_2
y_1	16	–4	42	–1,3
x_3	1,8	0,8	0,6	0,01
y_3	–1	0	$\boxed{-1}$	0
y_4	1	1	0	0
y_5	1	0	1	0
F_{max}	162	–8	–31	0,9

Т а б л и ц а 20. **Вторая симплексная таблица задачи №6**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_4	y_2
y_1	–26	–4	42	$\boxed{-1,3}$
x_3	1,2	0,8	0,6	0,01
x_2	1	0	–1	0
y_5	1	1	0	0
y_6	0	0	1	0
F_{max}	193	–8	–31	0,9

Т а б л и ц а 21. **Третья симплексная таблица задачи №6**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_4	y_1
y_2	20	3,077	–32,308	–0,769
x_3	1	0,769	0,923	0,008
x_2	1	0	–1	0
y_5	1	$\boxed{1}$	0	0
y_6	0	0	1	0
F_{max}	175	–10,769	1,923	0,692

Т а б л и ц а 22. **Четвертая симплексная таблица задачи №6**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_5	y_4	y_1
y_2	16,923	–3,077	–32,308	–0,769
x_3	0,231	–0,769	0,923	0,008
x_2	1	0	–1	0
x_1	1	1	0	0
y_6	0	0	1	0
F_{max}	185,769	10,769	1,923	0,692

Т а б л и ц а 23. **Первая симплексная таблица задачи №7**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	y_2
y_1	16	–4	42	–1,3
x_3	1,8	0,8	0,6	0,01
y_4	–1	0	$\boxed{-1}$	0
y_5	1	1	0	0
y_7	–2	0	–1	0
F_{max}	162	–8	–31	0,9

Т а б л и ц а 24. **Вторая симплексная таблица задачи №7**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_4	y_2
y_1	–26	–4	42	–1,3
x_3	1,2	0,8	0,6	0,01
x_2	1	0	–1	0
y_5	1	1	0	0
y_7	–1	0	$\boxed{-1}$	0
F_{max}	131	–8	–31	0,9

Т а б л и ц а 25. **Третья симплексная таблица задачи №7**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_7	y_2
y_1	–68	–4	42	$\boxed{-1{,}3}$
x_3	0,6	0,8	0,6	0,01
x_2	2	0	–1	0
y_5	1	1	0	0
y_4	1	0	–1	0
F_{max}	162	–8	–31	0,9

Т а б л и ц а 26. **Четвертая симплексная таблица задачи №7**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_7	y_1
y_2	52,308	3,077	–32,308	–0,769
x_3	0,077	$\boxed{0{,}769}$	0,923	0,008
x_2	2	0	–1	0
y_5	1	1	0	0
y_4	1	0	1	0
F_{max}	114,923	–10,769	1,923	0,692

Т а б л и ц а 27. **Пятая симплексная таблица задачи №7**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_3	y_7	y_1
y_2	52,0	–4	–36	–0,8
x_1	0,1	1,3	1,2	0,01
x_2	2	0	–1	0
y_5	0,9	–1,3	–1,2	–0,01
y_4	1	0	1	0
F_{max}	178	14	11	0,8

В табл. 22 и 27 получены оптимальные решения задач №6 и №7. Сравниваем значения их целевых функций, так как $F_{6\max} > F_{7\max}$, то для дальнейших расчетов выбираем задачу №6 и по переменной x_3 строим два дополнительных ограничения, позволяющих исключить дробную часть значения переменной x_3, т.е. в табл. 2 вводим ранее введенные ограничения и ограничения: $x_3 \leq 0$ и $x_3 \geq 1$, получаем две новые задачи: №8 (табл. 28-32) и №9 (табл. 33-37).

Т а б л и ц а 28. **Первая симплексная таблица задачи №8**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	x_3
y_1	250	100	120	130
y_2	180	80	60	100
y_3	–1	0	$\boxed{-1}$	0
y_4	1	1	0	0
y_5	1	0	1	0
y_6	0	0	0	1
F_{max}	0	–80	–85	–90

Т а б л и ц а 29. **Вторая симплексная таблица задачи №8**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_3	x_3
y_1	130	100	120	130
y_2	120	80	60	100
x_2	1	0	–1	0
y_4	1	1	0	0
y_5	0	0	1	0
y_6	0	0	0	$\boxed{1}$
F_{max}	85	–80	–85	–90

Т а б л и ц а 30. **Третья симплексная таблица задачи №8**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_3	y_6
y_1	130	100	120	–130
y_2	120	80	60	–100
x_2	1	0	–1	0
y_4	1	1	0	0
y_5	0	0	$\boxed{1}$	0
x_3	0	0	0	1
F_{max}	85	–80	–85	90

Т а б л и ц а 31. **Четвертая симплексная таблица задачи №8**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_5	y_6
y_1	130	100	–120	–130
y_2	120	80	–60	–100
x_2	1	0	1	0
y_4	1	$\boxed{1}$	0	0
y_5	0	0	1	0
x_3	0	0	0	1
F_{max}	85	–80	85	90

Т а б л и ц а 32. **Пятая симплексная таблица задачи №8**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_4	y_5	y_6
y_1	30	–100	–120	–130
y_2	40	–80	–60	–100
x_2	1	0	1	0
x_1	1	1	0	0
y_5	0	0	1	0
x_3	0	0	0	1
F_{max}	165	80	85	90

Задача №8 имеет оптимальное целочисленное решение (табл. 32): x_1=1; x_2=1; x_3=0; $F_{\max} = 165$.

Т а б л и ц а 33. **Первая симплексная таблица задачи №9**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	x_2	x_3
y_1	250	100	120	130
y_2	180	80	60	100
y_3	–1	0	$\boxed{-1}$	0
y_4	1	1	0	0
y_5	1	0	1	0
y_6	–1	0	0	–1
F_{max}	0	–80	–85	–90

Т а б л и ц а 34. **Вторая симплексная таблица задачи №9**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_3	x_3
y_1	130	100	120	130
y_2	120	80	60	100
x_2	1	0	–1	0
y_4	1	1	0	0
y_5	0	0	1	0
y_6	–1	0	0	$\boxed{-1}$
F_{max}	85	–80	–85	–90

Т а б л и ц а 35. **Третья симплексная таблица задачи №9**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	y_3	y_6
y_1	0	100	120	$\boxed{130}$
y_2	20	80	60	100
x_2	1	0	–1	0
y_4	1	1	0	0
y_5	0	0	1	0
x_3	1	0	0	–1
F_{max}	175	–80	–85	–90

Т а б л и ц а 36. **Четвертая симплексная таблица задачи №9**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		x_1	$У_3$	$У_1$
y_6	0	$\boxed{0{,}769}$	0,923	0,008
y_2	20	80	60	–0,769
x_2	1	0	–1	0
y_4	1	1	0	0
y_5	0	0	1	0
x_3	1	0,769	0,923	0,008
F_{max}	175	–10,769	–1,923	0,692

Т а б л и ц а 37. **Пятая симплексная таблица задачи №9**

Базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y_6	y_3	y_1
x_1	0	1,30	1,20	0,01
y_2	20	–104,031	–36,021	–1,601
x_2	1	0	–1	0
y_4	1	–1,30	–1,20	–0,01
y_5	0	0	1	0
x_3	1	–1	0	0
F_{max}	175	14	11	0,8

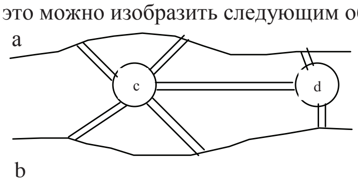
Задача №9 имеет оптимальное целочисленное решение (табл. 37): x_1=0; x_2=1; x_3=1; $F_{\max} = 175$.

Сравниваем значения целевых функций задач №8 и №9. Так как $F_{9\max} > F_{8\max}$, то решением задачи является выбор второго и третьего проектов по реконструкции перерабатывающего предприятия, позволяющий получить максимальную прибыль равную 175 тыс. у.д.е.

П р и л о ж е н и е L

Теория графов

Основы теории графов были заложены Л. Эйлером в 1736г. 20-летний Эйлер решил задачу, называемую проблемой Кенигсбергских мостов. Город Кенигсберг (Калининград) был расположен на берегах и двух островах реки Преголи, т.е. схематично это можно изобразить следующим образом:



Острова с берегами и между собой были связаны семью мостами. Проблема состояла в том, чтобы совершить прогулку таким образом, чтобы выйдя из любого места города, можно было бы вернуться в него, пройдя только один раз по каждому мосту. Для решения этой задачи Эйлер обозначил каждую часть пути точкой a, b, c, d. А каждый мост обозначил линией (т.е. ребром), соединяющей точки (т.е. вершины). Получилась следующая схема, которая называется графом (рис. 1).

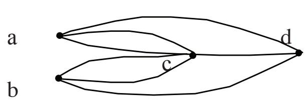


Рис. 1. Граф

Эйлер дал отрицательный ответ на поставленный вопрос. Данная задача решается положительно, если каждая из вершин графа связана с четным числом ребер. Число задач решаемых с помощью графов росло. Сейчас, например, в торговле и материально-техническом снабжении вершинами графа можно считать поставщиков и потребителей, а ребра или дуги обозначают связи между ними.

Приложение М

Матрицы смежности вершин, дуг (ребер) графа

Рассмотрим матрицу смежности вершин. Пусть даны следующие графы (рис. 1-2)

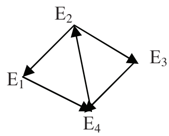


Рис. 1. Ориентированный граф

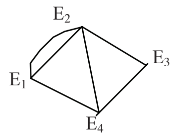


Рис. 2. Неориентированный граф

Если в орграфе обозначить через a_{ij} число дуг, идущих из вершины E_i в вершину E_j, то матрица $\|a_{ij}\|$ с *n* строками и *n* столбцами будет матрицей смежности вершин графа. Для орграфа матрица смежности не симметрична:

E_i \ E_j	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	0	1	0	1
E_2	1	0	1	0
E_3	0	0	0	1
E_4	0	1	0	0

Для неориентированного графа – симметричная, так как из $(E_i, E_j) \in G$ следует $(E_j, E_i) \in G$:

E_i \ E_j	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	0	2	0	1
E_2	2	0	1	1
E_3	0	1	0	1
E_4	1	1	1	0

Обозначим через $\vec{e}_i, \vec{e}_j$ – ребра или дуги графа и построим матрицу смежности ребер или дуг.

Матрицей смежности ребер графа называется матрица $B = \|b_{ij}\|, \overline{i, j} = \overline{1, m}$, где *m* -

число ребер графа, причем

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } \vec{e}_i \text{ и } \vec{e}_j \text{ имеют общий конец или общую вершину} \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$$

Матрицей смежности дуг графа называется квадратная матрица $\|b_{ij}\|$, где

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если дуга } \vec{e}_i \text{ непосредственно предшествует дуге } \vec{e}_j \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$$

Построим матрицы смежности дуг (табл. 1) и ребер (табл. 2) для орграфа (рис. 3) и неориентированного графа (рис. 4).

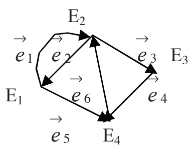


Рис. 3. Орграф.

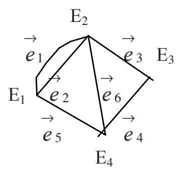


Рис. 4. Неориентированный орграф.

Т а б л и ц а 1. **Матрица смежности дуг**

$\vec{e}_i \backslash \vec{e}_j$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_4$	$\vec{e}_5$	$\vec{e}_6$
$\vec{e}_1$	0	1	1	0	0	0
$\vec{e}_2$	1	0	0	0	1	0
$\vec{e}_3$	0	0	0	1	0	0
$\vec{e}_4$	0	0	0	0	0	1
$\vec{e}_5$	0	0	0	0	0	1
$\vec{e}_6$	0	1	1	0	0	0

Т а б л и ц а 2. **Матрица смежности ребер**

$\vec{e}_i \backslash \vec{e}_j$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_4$	$\vec{e}_5$	$\vec{e}_6$
$\vec{e}_1$	0	1	1	0	1	1
$\vec{e}_2$	1	0	1	0	1	1
$\vec{e}_3$	1	1	0	1	0	1
$\vec{e}_4$	0	0	1	0	1	1
$\vec{e}_5$	1	1	0	1	0	1
$\vec{e}_6$	1	1	1	1	1	0

П р и л о ж е н и е N

Матрица инциденций для дуг (ребер) графа

Построим *матрицу инциденций* для дуг, ребер графа. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m$ – дуги, а $E_1, E_2, \ldots, E_n$ – вершины орграфа, причем граф не имеет петель. Тогда матрица $\|c_{ij}\|$ размером $m \cdot n$, где

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } \vec{e}_j \text{ выходит из } E_i \\ -1, \text{если } \vec{e}_j \text{ входит в } E_i \\ 0, \text{если } \vec{e}_j \text{ не инцидента } E_i, \end{cases}$$

называется матрицей инциденций для дуг орграфа.

Если имеем неориентированный граф, то матрица $\|d_{ij}\|$ размером $m \cdot n$, где

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } \mathrm{E_i}\,(\mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{n}}) \text{ инцидента } \vec{e}_j \; (\mathrm{j} = \overline{1,\mathrm{m}}) \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

называется матрицей инциденций для ребер графа.

Для орграфа (рис. 3) и неориентированного графа (рис. 4) приведем матрицы инциденций для дуг и ребер графа (табл. 1 и 2).

Т а б л и ц а 1. **Матрица инциденций для дуг орграфа**

E_i \ $\vec{e}_j$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_4$	$\vec{e}_5$	$\vec{e}_6$
E_1	1	-1	0	0	1	0
E_2	-1	1	1	0	0	-1
E_3	0	0	-1	1	0	0
E_4	0	0	0	-1	-1	1

Т а б л и ц а 2. **Матрица инциденций для ребер неориентированного графа**

E_i \ $\vec{e}_j$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_4$	$\vec{e}_5$	$\vec{e}_6$
E_1	1	1	0	0	1	0
E_2	1	1	1	0	0	1
E_3	0	0	1	1	0	0
E_4	0	0	0	1	1	1

П р и л о ж е н и е О

Упорядочение вершин графа с помощью матрицы смежности вершин

Рассмотрим упорядочение на матрице смежности вершин связного орграфа без контуров. Обозначим векторы-строки матрицы смежности через $V_{Ei} = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$, $i = \overline{1,n}$. Найдем компоненты вектора $V_1 = V_{E1} + V_{E2} + ... + V_{En}$. Поместим вектор в ($n$+1)-ю строку матрицы, так как $a_{ij} \in \{0,1\}$, принимают значения 0 и 1, то компоненты вектора V_1 - неотрицательны. Вектор V_1 должен содержать хотя бы одну компоненту равную нулю. В противном случае граф содержит контур. Компоненты равные нулю обозначают вершины, в которых не входит ни одна дуга. Эти вершины относят к первому слою (рангу). Пусть это будет вершина E_k. Вычисляют компоненты вектора $V_2 = V_1 - V_{Ek}$. Он содержит компоненты равные нулю, поэтому соответствующие вершины относят ко второму слою и т.д. Расчеты продолжают до тех пор, пока не получат вектор-строку, компоненты которой равны нулю. Упорядочив вершины графа по рангам, нумеруют их и строят граф, изоморфный первоначальному. Номера рангов располагают по возрастающей слева направо. Дуги графа располагаются слева направо. Построим матрицу смежности вершин графа, изображенного на рис. 3.15.

Находим компоненты вектора $V_1=(0, 1, 2, 1, 1, 2, 3)$, так как $a_{11}=0$, то вершина x_1 относится к первому рангу. Рассчитываем компоненты вектора $V_2=V_1-V_{E1}=$(0, 1, 2, 1, 1, 2, 3)-(0, 1, 0, 1, 1, 0, 0)=(*, 0, 2, 0, 0, 2, 3). Так как $a_{22}=0$, $a_{24}=0$, $a_{25}=0$, то вершины E_2, E_4, E_5 относим ко второму рангу. Рассчитаем компоненты вектора $V_3=V_2-V_{E2}-V_{E4}-V_{E5}$=(*0, 2, 0, 0, 2, 3)-(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)-(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)-(0, 0, 1, 0, 0, 1, 1)=(*, *, 0, *, *, 1, 1), так как $a_{33}=0$, то вершина E_3 относится к третьему рангу. Определяем компоненты вектора $V_4=V_3-V_{x3}$=(*, *, 0, *, *, 1, 1)-(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)=(*, *, *, *, *, 0, 1), так как $a_{46}=0$, то вершина E_6 относится к четвертому рангу. Определяем компоненты вектора $V_5=V_4-V_{E6}$=(*, *, *, *, *, 0, 1)–(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)=(*, *, *, *, *, *, 0), т.е. вершину E_7 относим к пятому рангу (табл. 1).

Т а б л и ц а 1. **Упорядочение вершин графа с помощью матрицы смежности вершин**

E_i \ E_j	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	Номер ранга
E_1	0	1	0	1	1	0	0	I
E_2	0	0	1	0	0	0	0	II
E_3	0	0	0	0	0	1	0	III
E_4	0	0	0	0	0	0	1	II
E_5	0	0	1	0	0	1	1	II
E_6	0	0	0	0	0	0	1	IV
E_7	0	0	0	0	0	0	0	IV
V_1	0	1	2	1	1	2	3	
V_2	*	0	2	0	0	2	3	
V_3	*	*	0	*	*	1	1	
V_4	*	*	*	*	*	0	1	
V_5	*	*	*	*	*	*	0	

Пронумеруем вершины графа. Изобразим изоморфный граф с упорядоченными по рангам вершинами (рис. 1).

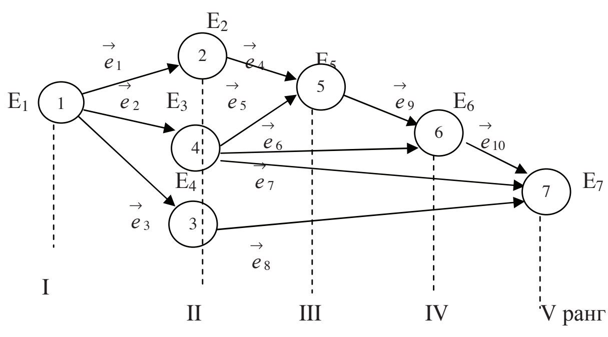


Рис. 1. Граф с упорядоченными по рангам вершинами

ЛИТЕРАТУРА

1. Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учеб. пособие для студентов эконом, спец. вузов. / И. Л. Акулич. – М.: Высш. шк., 1986. – 319 с.

2. Акулич И. Л. Экономико-математические методы и модели. Компьютерные технологии и решения / И. Л. Акулич. – Мн., 2003. – 348 с.

3. Афанасьев, М.Ю. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения: учеб. пособие / М.Ю. Афанасьев, Б.П. Суворов. М.: ИНФРА, 2003. – 444 с.

4. Афанасьев, М.Ю. Прикладные задачи исследования операций: учеб. пособие / М.Ю. Афанасьев, К.А. Багриновский, В.М. Матюшонок. М.: ИНФРА-М, 2006. – 352 с.

5. Балашевич, В. А. Математические методы в управлении производством / В. А. Балашевич. – Мн.: Выш. школа, 1976. – 334 с.

6. Бережная, Е.В. Математические методы моделирования экономических систем – 2-е изд., перераб. и доп. / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. – М.: Финансы и статистика, 2006. — 432 с.

7. Бережная, Е. В. Методы и модели принятия управленческих решений: учеб. пособие / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. – М.: ИНФРА-М. 2014. – 384 с.

8. Браславец, М. Е. Практикум по экономико-математическим методам в организации и планировании сельскохозяйственного производства. – Изд. 2-е, перераб. и доп. / М. Е. Браславец. – М.: Экономика, 1975. – 232 с.

9. Вагнер, Г. Основы исследования операций / Г. Вагнер // В 3-х томах, т. 1. Перевод с англ. В. Я. Алтаева. – М.: Мир, 1972. – 336 с.

10. Вагнер, Г. Основы исследования операций / Г. Вагнер // В 3-х томах, т. 2. Перевод с англ. В. Я. Алтаева. – М.: Мир, 1973. – 488 с.

11. Вагнер, Г. Основы исследования операций / Г. Вагнер // В 3-х томах, т. 3. Перевод с англ. В. Я. Алтаева. – М.: Мир, 1973. – 503 с.

12. Вентцель, Е. С. Введение в иссследование операций / Е. С. Вентцель. – М.: Советское радио, 1964. – 390 с.

13. Вентцель, Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология / Е. С. Вентцель. – М.: Советское радио, 1972. – 552 с.

14. Волкова, В.Н. Теория систем и системный анализ : учебник для академического бакалавриата / В.Н. Волкова, А.А. Денисов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Изд-во Юрайт, 2015. – 462 с.

15. Гатаулин, А. М. Экономико-математические методы в планировании сельскохозяйственного производства / А. М. Гатаулин, Л. А. Харитонова, Г. В. Гаврилов. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Агропромиздат, 1986. – 272 с.

16. Гармаш, А.Н. Экономико-математические методы в примерах и задачах : учеб. пособие / А.Н. Гармаш, И.В. Орлова, Н.В. Концевая, Е.Н. Горбатенко, В.А. Большаков. Под ред. А.Н. Гармаша. – М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М. – 2015. – 416 с.

17. Глухов, В.В. Математические методы и модели для менеджмента: учеб. пособие. – 2-е изд., испр. и доп. / В.В. Глухов, М.Д. Медников, С.Б. Коробко. – СПб.: Лань, 2005. – 528 с.

18. Гринберг, А. С. Информационные технологии моделирования процессов управления экономикой: учеб. пособие / А. С. Гринберг, В. М. Шестаков. – Мн.: Академия управления при Президенте Республики Беларусь, 2003. – 410 с.

19. Данциг, Д. Линейное программирование, его применения и обобщения / Д. Данциг. // Перевод с англ. Г.Н. Андреева и др. Общ. ред. и предисловие Н. Н. Воробьёва.. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.

20. Excel для экономистов и менеджеров / А. Г. Дубина, С. С. Орлова, Н. Ю. Шубина [и др.]. – СПб.: Питер, 2004. – 295 с.

21. Зайченко, Ю.П. Исследование операций / Ю.П. Зайченко. Киев: Выща школа, 1979. – 320 с.

22. Иванов, П.В. Экономико-математическое моделирование в АПК: учеб. пособие / П. В. Иванов, И. В. Ткаченко. – Ростов н/Д : Феникс, 2013. – 254.

23. Ильченко, А.Н. Экономико-математические методы: учеб. пособие / А.Н. Ильченко. М.: Финансы и статистика, 2006. – 288 с.

24. Исследование операций в экономике: учеб. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. М.: Изд-во Юрайтт ; ИД Юрайт, 2010. – 430 с.

25. Канторович, Л. В. Математическое оптимальное программирование в экономике / Л. В. Канторович, А. Б. Горстко. – М.: Знание, 1968. – 95 с.

26. Канторович, Л.В. Оптимальные решения в экономике / Л. В. Канторович, А. Б. Горстко. – М.: Наука, 1972. – 232 с.

27. Канторович, Л.В. Экономика и оптимизация / Л. Канторович, В. Лассманн, Х. Шилар, К. Шварц, С. Брентьев. – М.: Наука, 1990. – 248 с.

28. Каплан, А. В. Решение экономических задач на компьютере / А. В. Каплан, В. Е. Каплан. М. В. Мащенко, Е.В. Овечкина – М.: ДМК Пресс, Спб.: Питер, 2004.– 600 с.

29. Кардаш, В. А. Моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / В. А. Кардаш, Э. О. Рапопорт. – Новосибирск: Наука, 1979. – 157 с.

30. Кац, М. Микроэкономика / М. Кац, Х. Роузен; Пер. с англ. И. Пустовалова и др. – Мн.: Новое знание, 2004. – 828 с.

31. Колемаев, В.А. Математические методы и модели исследования операций / В.А. Колемаев и др. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2008. – 591 с.

32. Колемаев, В.А. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов систем: учеб. для студентов вузов / В.А. Колемаев. – М.: Юнити–Дана, 2005. – 295 с.

33. Колеснёв, В.И. Компьютерное моделирование для анализа и планирования АПК: монография / В.И. Колеснёв, И.В. Шафранская. – Горки: БГСХА, 2014. – 292 с.

34. Колеснёв, В. И. Обоснование параметров экономических показателей сельскохозяйственных организаций при оптимизации структуры производства продукции на основе применения информационных технологий и экономико-математических моделей : рекомендации / В. И. Колеснёв, И. В. Шафранская. – Горки: БГСХА, 2013. – 46 с.

35. Колеснёв, В. И. Экономико-математические методы и модели. Практикум / В. И. Колеснёв. – Мн.: ИВЦ Минфина, 2010. – 273 с.

36. Конюховский, П.В. Математические методы исследования операций в экономике / П.В. Конюховский. СПб: Питер, 2000. – 208 с.

37. Косоруков, О.А. Исследование операций: учебник / О.А. Косоруков, А.В. Мищенко // Под общ. ред. д.э.н., проф. Н.П. Тихомирова. М.: Из-во «Экзамен», 2003. – 448 с.
38. Костевич, Л. С. Исследование операций. Теория игр: учеб. пособие / Л. С. Костевич, А. А. Лапко. – 2-е изд., перераб. и доп. – Мн.: Выш. школа, 2008. – 368 с.
39. Костевич, Л. С. Математическое программирование. Информационные технологии оптимальных решений: учеб. пособие / Л. С. Костевич. – Мн.: Новое знание, 2003. – 424 с.
40. Костевич, Л. С. Математическое программирование. Практикум / Л. С. Костевич, И. В. Гайдукевич. – Мн.: БГЭУ, 2009. – 224 с.
41. Корнев, Г. Н. Анализ экономических систем: принципы, теория, практика. На примере сельскохозяйственного производства / Г. Н. Корнев, В. Б. Яковлев. – М.: ИНФРА-М, 2012. – 224 с.
42. Кравченко, Р. Г. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / Р. Г. Кравченко. – М.: Колос, 1978. – 424 с.
43. Красс, М.С. Математика в экономике. Математические методы и модели: учебник / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 544 с.
44. Красс, М. С. Математические методы и модели для магистрантов экономики: учеб. пособие / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2006. – 496 с.
45. Кремер, Н. Ш. Исследование операций в экономике / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407с.
46. Крылатых, Э. Н. Система моделей в планировании сельского хозяйства / Э. Н. Крылатых. – М.: Экономика, 1979. – 147 с.
47. Кузнецов, А. В. Руководство к решению задач по математическому программированию: учеб. пособие / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – 2-е изд., перераб. и доп. – Мн.: Выш. школа, 2001. – 448 с.
48. Курносов, А. П. Вычислительная техника и экономико-математические методы в сельском хозяйстве / А. П. Курносов, И. С. Сысоев. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 304 с.
49. Курносов, А. П. Двойственные задачи и их применение / А. П. Курносов, В. П. Подтележников, А. Г. Буховец. – Воронеж: ВСХИ, 1984. – 101 с.
50. Лабскер, Л. Г. Теория массового обслуживания в экономической сфере / Л.Г. Лабскер, Л.О. Бабешко. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 319 с.
51. Ланге, О. Оптимальные решения: Основы программирования // О. Ланге. – М.: МГУ, 1967. – 284 с.
52. Леньков, И.И. Моделирование и прогнозирование экономики агропромышленного комплекса / И. И. Леньков. – Мн.: БГАТУ, 2011. – 228 с.
53. Леньков, И.И. Экономико-математическое моделирование экономических систем и процессов в сельском хозяйстве: учеб. пособие / И. И.Леньков. – Мн.: Дизайн ПРО, 1997. – 304 с.
54. Леньков, И. И. Экономико-математические методы в экономике АПК: пособие / И. И. Леньков. – Мн.: БГАТУ, 2009. – 168 с.
55. Ленькова, Р. К. Экономико-математические методы и модели / Р. К. Ленькова, Е. В. Гончарова. – Горки: БГСХА, 2011. – 220 с.

56. Мастяева, И.Н. Исследование операций в экономике: учеб. пособие / И.Н. Мастяева, Г.Я. Горбовцов, О.Н. Семенихина. М.: 2003. – 113 с.

57. Математические и инструментальные методы экономики : учеб. пособие / коллектив авторов. – 2-е изд., стер. – М. : КНОРУС, 2014. – 224 с.

58. Математические методы и модели в планировании / А. И. Карасев, Н. Ш. Кремер, Т. И. Савельева; под ред. А. И. Карасева. – М.: Экономика, 1987. – 240 с.

59. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / Гатаулин А.М., Гаврилов Г.В., Сорокина Т.Н. и др.; под ред. Гатаулина А.М. – СПб.: ООО «ИТК ГРАНИТ», 2009. – 432 с.

60. Милосердов, В. В. Региональное планирование развития сельского хозяйства / В.В. Милосердов., Г.В. Беспахотный. – М.: Экономика, 1982. – 216 с.

61. Минько, Э. В. Методы прогнозирования и исследования операций: учеб. пособие / Э. В. Минько, А. Э. Минько; под ред. А. С. Будагова. – М.: Финансы и статистика; ИНФРА-М. 2012. – 480 с.

62. Невежин, В.П. Исследование операций и принятие решений в экономике. Сборник задач и упражнений : учеб. пособие для вузов / В.П. Невежин, С.И. Кружилов, Ю.В. Невежин / под общ. ред. В.П. Невежина. – М. : ФОРУМ, 2012. – 400 с.

63. Нейман, Дж. фон. Теория игр и экономическое поведение / Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн // Пер. с англ., под ред. и с доб. Н.Н. Воробьёва. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1970. – 708 с.

64. Немчинов, В. С. Экономико-математические методы и модели / В. С. Немчинов. // Изд. 2-е перераб. и доп. – М.: Мысль, 1965. – 478 с.

65. Новицкий, Н.И. Сетевое планирование и управление производством: Учеб.-практ. пособие / Н.И. Новицкий. М.: Новое знание, 2004. – 159 с.

66. О р л о в а, И.В. Экономико-математические методы и модели. Выполнение расчетов в среде Excel.: учеб. пособие для вузов / И.В. Орлова. – М.: Финстатинформ, 2000. – 136 с.

67. Орехов, Н. А. Математические методы и модели в экономике: учеб. пособие / Н. А. Орехов, А. Г. Левин, Е. А. Горбунов; под ред. Н. А. Орехова. – М.: ЮНИТИ, 2004. – 304 с.

68. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах: учеб. пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – М.: Высш. шк., 2005. – 544 с.

69. Пастернак, П. П. Системное моделирование экономических процессов в АПК / П. П. Пастернак. – М.: Агропромиздат, 1985. – 176 с.

70. Попов, И. Г. Математические методы в экономических расчетах по сельскому хозяйству / И. Г. Попов. – М.: Колос, 1964. – 238 с.

71. Попов, И. Г. Математические методы планирования сельского хозяйства / И. Г. Попов. – М.: Колос, 1975. – 127 с.

72. Розен, В. В. Математические модели принятия решений в экономике: учеб. пособие / В. В. Розен. – М.: Книжный дом «Университет», Высшая школа, 2002.– 288 с.

73. Сакович, В. А. Исследование операций (детерминированные методы и модели) / В. А. Сакович. – Мн.: Выш.школа, 1984. – 256 с.

74. Сакович, В. А. Оптимальные решения экономических задач / В. А. Сакович. – Мн.: Выш. школа, 1982. – 272 с.

75. Советов, Б. Я. Моделирование систем: учебник / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев.– М.: Высш. шк., 2001. – 343 с.

76. Таха, Хэмди А. Введение в исследование операций. В 2-х томах, Кн. 1. / Хэмди А. Таха // Пер. с англ. В. Я. Алтаева, Б.Т. Вавилова, В.С. Данилина, В.И. Моториеа – М.: Мир, 1985. – 479 с.

77. Таха, Хэмди А. Введение в исследование операций. В 2-х томах, Кн. 2. / Хэмди А. Таха // Пер. с англ. В. Я. Алтаева, Б.Т. Вавилова, В.С. Данилина, В.И. Моториеа – М.: Мир, 1985. – 496 с.

78. Таха, Хэмди А. Введение в исследование операций, 6-е изд. / Хэмди А. Таха; пер. с англ. – М.: Издательский Дом «Вильямс», 2001. – 912 с.

79. Томас, Р. Количественный анализ хозяйственных операций и управленческих решений: учебник / Р. Томас. – М.: Дело, 2004. – 432 с.

80. Трояновский, В. М. Математическое моделирование в менеджменте: учеб. пособие / В. М. Трояновский. – М.: РДЛ, 2002. – 256 с.

81. Тунеев, М. М. Экономико-математическое моделирование в организации и планировании сельскохозяйственного производства: учеб. пособие / М. М. Тунеев, В. Ф. Сухоруков. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 144 с.

82. Федоренко, Н.П. О разработке системы оптимального функционирования экономики / Н.П. Федоренко. – М.: Наука, 1968 . – 243 с.

83. Хеди, Э. Методы линейного программирования / Э. Хеди, У. Кандлер. // Пер. с англ. Под ред. Е.М. Четыркина. – М.: Колос, 1965. – 447 с.

84. Холод, Н. И. Математические методы анализа и планирования / Н. И. Холод. – Мн.: Ураджай, 1989. – 160 с.

85. Черняк, В. З. Методы принятия управленческих решений: учеб. для студ. учреждений высш. Проф. Образования / В. З. Черняк, И. В. Довдиенко. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 240 с.

86. Шапкин, А. С. Математические методы и модели исследования операций: учебник для студ. вузов, обуч. по спец. 061800 «Математические методы в экономике» / А. С. Шапкин, Н. П. Мазаева. – 4-е изд. – М.: Дашков и К, 2007. – 400 с.

87. Шафранская, И. В. Анализ работы и обоснование перспективной программы развития сельскохозяйственных организаций на основе эконометрических и оптимизационных моделей : рекомендации / И. В. Шафранская [и др.]. – Горки : БГСХА, 2016. – 101 с.

88. Шафранская, И. В. Информационное обеспечение программы развития сельскохозяйственной организации : рекомендации / И. В. Шафранская, И.В. Колеснев, И.Н. Шафранский. – Горки : БГСХА, 2015. – 116 с.

89. Шафранская, И. В. Исследование операций: практикум / И. В. Шафранская. – Горки: БГСХА, 2013. – 160 с.

90. Шафранская, И. В. Оптимизация экономических систем: курс лекций / И.В. Шафранская. – Горки: БГСХА, 2012. – 140 с.

91. Шафранская, И. В. Системный анализ и моделирование программы развития аграрных организаций: монография / И.В. Шафранская, О.М. Недюхина, И.Н. Шафранский. – Горки: БГСХА, 2016. – 290 с.

92. Шелобаев, С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнес: учеб. Пособие для вузов / С. И. Шелобаев. – М.: ЮНИТИ-ДАНА , 2001. – 367 с.

93. Шикин, Е.В. Исследование операций: учеб. / Е.В. Шикин, Г.Е. Шикина. М.: ТК Велби, Изд-во Проспект, 2006. – 280 с.

94. Эддоус, М. Методы принятия решений / М. Эддоус, Р. Стэнсфилд; пер. с англ.; под ред. член-корр. РАН И. И. Елисеевой. – М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997. – 590 с.

95. Экономико-математическое моделирование: учебник / Под общ ред. И. Н. Дрогобыцкого. – М.: Экзамен, 2004. – 800 с.

96. Экономическое моделирование в Microsoft Excel, 6-е изд. / Дж. Мур, Ларри Р. Уэдерфорд [и др.]; пер. с англ. – М.: Издательский Дом «Вильямс», 2004. –1024 с.

97. Экономико-математические методы и модели : учеб. пособие / Н. И. Холод, А. В. Кузнецов, Я. Н. Жихар [и др.]; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – 2-е изд. – Мн.: БГЭУ, 2000. – 412 с.

98. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие / С. Ф. Миксюк, В. Н. Комков, И. В. Белько [и др.]; под общ. ред. С. Ф. Миксюк, В. Н. Комкова. – Мн.: БГЭУ, 2006. – 219 с.

99. Экономико-математические методы и модели: практикум / С. Ф. Миксюк [и др.]; под общ. ред. С. Ф. Миксюк. – Мн.: БГЭУ, 2008. – 312 с.

100. Экономико-математические методы и прикладные модели: учеб. пособие / В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, Д. М. Дайтбегов [и др.]; под ред. В. В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 391 с.

101. Юдин, Д. Б. Линейное программирование / Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. – М.: Гос. изд-во физ.-мат.лит., 1963. – 776 с.

102. Юдин, Д. Б. Линейное программирование. Теория, методы и приложения / Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. – М.: Наука, 1969. – 424 с.