

Лабораторная работа

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЗАКРЫТОГО И ОТКРЫТОГО ТИПОВ

Краткие сведения.

Классическая постановка транспортной задачи общего вида.

Имеется m пунктов отправления («поставщиков») и n пунктов потребления («потребителей») некоторого одинакового товара. Для каждого пункта определены:

a_i – объемы производства i -го поставщика, $i = 1, \dots, m$;

b_j – спрос j -го потребителя, $j = 1, \dots, n$;

c_{ij} – стоимость перевозки одной единицы продукции из пункта A_i – i -го поставщика, в пункт B_j – j -го потребителя.

Для наглядности данные удобно представлять в виде таблицы, которую называют таблицей стоимостей перевозок.

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	C_{11}	C_{12}		C_{1n}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}		C_{2n}	a_2
...					
A_m	C_{m1}	C_{m2}		C_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2		b_n	

Требуется найти план перевозок, при котором бы полностью удовлетворялся спрос всех потребителей, при этом хватало бы запасов поставщиков и суммарные транспортные расходы были бы минимальными.

Под планом перевозок понимают объем перевозок, т.е. количество товара, которое необходимо перевезти от i -го поставщика к j -му потребителю. Для построения математической модели задачи необходимо ввести $m \cdot n$ штук переменных x_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, каждая переменная x_{ij} обозначает объем перевозок из пункта A_i в пункт B_j . Набор переменных $X = \{x_{ij}\}$ и будет планом, который необходимо найти, исходя из постановки задачи.

Математическая модель задачи выглядит следующим образом.

Целевая функция (ЦФ) имеет вид:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min.$$

ЦФ выражает суммарную стоимость перевозок.

Ограничения имеют вид:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad \text{вывоз груза из } i\text{-го пункта отправления равен запасу груза в}$$

этом пункте. $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}$ доставка груза в j -ый пункт назначения равен спросу на груз в этом пункте.

Граничное условие: $x_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1, m}$ $j = \overline{1, n}$, объем перевозимого груза не может быть отрицательным

Очевидно, что для разрешимости задачи необходимо, чтобы суммарный спрос не превышал объема производства у поставщиков:

$$\sum_{j=1}^n b_j \leq \sum_{i=1}^m a_i$$

Если это неравенство выполняется строго

$$\sum_{j=1}^n b_j < \sum_{i=1}^m a_i,$$

то транспортная задача называется задачей с **нарушенным балансом (несбалансированной)**, а ее модель – **открытой**.

Если же

$$\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^m a_i,$$

то задача называется задачей с **правильным балансом (сбалансированной)**, а ее модель – **закрытой**.

Решение задачи с нарушенным балансом сводится к решению задачи с правильным балансом введением в ее математическую модель фиктивного поставщика или фиктивного потребителя. Тарифы на перевозку грузов от таких поставщиков или к таким потребителям полагаются равными 0 (т.е. фактически соответствующие перевозки не производятся).

В случае превышения общего запаса продукции над потребностью, т.е. если

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$$

в рассмотрение вводится фиктивный потребитель с потребностью

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$$

и тарифами на перевозку $c_{i(n+1)} = 0$.

Если же

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$$

то вводится фиктивный поставщик, запасы которого равны

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$$

с тарифами на перевозку $c_{(m+1)j}=0$.

Этим приемом задача сводится к закрытой транспортной задаче, из оптимального плана которой получается оптимальный план исходной задачи.

Практическая работа

Задание 1. Составить математическую модель транспортной задачи и решить её средствами MS Excel.

Задача 1. Три поставщика одного и того же продукта располагают в планируемый период следующими запасами этого продукта: первый - 120 условных единиц, второй - 100 и третий 80 единиц. Этот продукт должен быть перевезен к трем потребителям, спросы которых соответственно равны 90, 90 и 120 условных единиц. Приведенная ниже таблица содержит показатели затрат, связанных с перевозкой продукта из i -го пункта отправления в j -й пункт потребления.

Поставщики	Потребители			Запасы
	А	Б	В	
I	7	6	4	120
II	3	8	5	100
III	2	3	7	80
Спрос	90	90	120	

Требуется перевезти продукт с минимальными затратами.

Математическая модель

Неизвестные задачи: x_{ij} , $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,3}$.

Целевая функция имеет вид: $F = 7x_{11} + 6x_{12} + 4x_{13} + 3x_{21} + 8x_{22} + 5x_{23} + 2x_{31} + 3x_{32} + 7x_{33} \rightarrow \min$

Ограничения имеют вид:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 120; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 100; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 80. \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 90; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 90; \\ x_{31} + x_{23} + x_{33} = 120. \end{cases}$$

Граничные условия

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}.$$

Технология выполнения

Вид электронной таблицы Excel, созданной для решения задачи, представлен на рисунке. Искомые значения x_{ij} находятся в блоке ячеек $B12:D14$. Требования к ограничениям по спросу и запасам представлены соответственно в ячейках $B7:D7$ и $E4:E6$. Коэффициенты ЦФ, означающие затраты на доставку расположены в блоке ячеек $B4:D4$.

Формулы целевой функции и ограничений находятся соответственно в ячейке E15 и ячейках B15:D15 (ограничения по спросу), E12:E14 (ограничения по запасам).

	A	B	C	D	E
1	Затраты на поставку единицы груза				
2	Поставщики	Потребители			Запас
3		A	B	C	
4		I	7	6	
5	II	3	8	5	120
6	III	2	3	7	100
7	Спрос	90	90	120	80
8					
9	Объемы поставок				
10	Поставщики	Потребители			Вывоз
11		A	B	C	
12		I	0	0	
13	II	0	0	0	=СУММ(B12:D12)
14	III	0	0	0	=СУММ(B13:D13)
15	Доставка	=СУММ(B12:B14)	=СУММ(C12:C14)	=СУММ(D12:D14)	=СУММПРОИЗВ(B4:D6;B12:D14)

Вид электронной таблицы в режиме отображения формул:

Таблица в режиме отображения значений

	A	B	C	D	E
1	Затраты на поставку единицы груза				
2	Поставщики	Потребители			Запас
3		A	B	C	
4		I	7	6	
5	II	3	8	5	120
6	III	2	3	7	100
7	Спрос	90	90	120	80
8					
9	Объемы поставок				
10	Поставщики	Потребители			Вывоз
11		A	B	C	
12		I	0	0	
13	II	0	0	0	0
14	III	0	0	0	0
15	Доставка	0	0	0	0

Поиск оптимального решения

1. Выполнить команду меню Данные ► Поиск решения.
2. Ввести параметры поиска в окне диалога Поиск решения:

Результат поиска оптимального решения

	А	В	С	Д	Е
1	Затраты на поставку единицы груза				
2	Поставщики	Потребители			Запас
3		А	В	С	
4		I	7	6	
5	II	3	8	5	100
6	III	2	3	7	80
7	Спрос	90	90	120	
8					
9	Объемы поставок				
10	Поставщики	Потребители			Вывоз
11		А	В	С	
12		I	0	10	
13	II	90	0	10	100
14	III	0	80	0	80
15	Доставка	90	90	120	1060

Рассмотрим решение транспортной задачи с нарушенным балансом

Транспортная задача с нарушенным балансом

Задание 2. Составить математическую модель транспортной задачи с нарушенным балансом (открытого типа) и решить её средствами MS Excel.

Задача 2. Три поставщика одного и того же продукта располагают в планируемый период следующими запасами этого продукта: первый - 160 условных единиц, второй - 140 и третий 60 единиц. Этот продукт должен быть перевезен четырем потребителям, потребности которых соответственно равны 80, 80, 60 и 80 условных единиц. Приведенная ниже таблица содержит показатели затрат, связанных с перевозкой продукта из i -го пункта отправления в j -й пункт потребления.

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	3	4	160
A_2	3	2	5	5	140
A_3	1	6	3	2	60
Потребности	80	80	60	80	

Требуется перевезти продукт с минимальными затратами.

Технология выполнения:

1. **Проверяем условие баланса:** $160+140+60=360$; $80+80+60+80=300$

Общий запас превышает общие потребности. Вводим фиктивного потребителя

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_5(\text{фик})$	
A_1	5	4	3	4	0	160
A_2	3	2	5	5	0	140
A_3	1	6	3	2	0	60
Потребности	80	80	60	80	60	

2. Составляем математическую модель задачи

Переменные $X = \{x_{ij}\}$, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,5}$.

Целевая функция имеет вид:

$$5x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} + 0x_{15} + 3x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + 5x_{24} + 0x_{25} + \\ + x_{31} + 6x_{32} + 3x_{33} + x_{34} + 0x_{35} \rightarrow \min$$

Ограничения имеют вид:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 160; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 140; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 60. \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 80; \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60; \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 80; \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 60. \end{cases}$$

Граничные условия

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,5}.$$

3. Создаем электронную таблицу с исходными данными и необходимыми формулами.

Вид электронной таблицы Excel, созданной для решения задачи, представлен на рисунке.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2			Затраты на перевозку единицы груза				
3							
4	Поставщики	Потребители					Запасы
5		B1	B2	B3	B4	B5_фик	
6	A1	5	4	3	4	0	160
7	A2	3	2	5	5	0	140
8	A3	1	6	3	2	0	60
9	Спрос	80	80	60	80	60	
10							
11		Объемы поставок					
12	Поставщики	Потребители					Вывоз
13		B1	B2	B3	B4	B5_фик	
14	A1	0	0	0	0	0	=СУММ(B13:F13)
15	A2	0	0	0	0	0	=СУММ(B14:F14)
16	A3	0	0	0	0	0	=СУММ(B15:F15)
17	Доставка	=СУММ(B13:B15)	=СУММ(C13:C15)	=СУММ(D13:D15)	=СУММ(E13:E15)	=СУММ(F13:F15)	=СУММПРОИЗВ(B5:F7;B13:F15)

Вид электронной таблицы в режиме отображения формул:

Таблица в режиме отображения значений

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2			Затраты на перевозку единицы груза				
3							
4	Поставщики	Потребители					Запасы
5		B1	B2	B3	B4	B5_фик	
6	A1	5	4	3	4	0	160
7	A2	3	2	5	5	0	140
8	A3	1	6	3	2	0	60
9	Спрос	80	80	60	80	60	
10							
11		Объемы поставок					
12	Поставщики	Потребители					Вывоз
13		B1	B2	B3	B4	B5_фик	
14	A1	0	0	0	0	0	0
15	A2	0	0	0	0	0	0
16	A3	0	0	0	0	0	0
17	Доставка	0	0	0	0	0	0

4. Осуществляем поиск оптимального решения

- Выполнить команду меню **Данные**→**Поиск решения**.
- Ввести параметры поиска в окне диалога **Поиск решения** самостоятельно аналогично задаче 1.

Результат поиска оптимального решения

	A	B	C	D	E	F	G
1		Затраты на перевозку единицы груза					
2							
3	Поставщики	Потребители					Запасы
4		B1	B2	B3	B4	B5_фик	
5	A1	5	4	3	4	0	160
6	A2	3	2	5	5	0	140
7	A3	1	6	3	2	0	60
8	Спрос	80	80	60	80	60	
9							
10		Объемы поставок					
11	Поставщики	Потребители					Вывоз
12		B1	B2	B3	B4	B5_фик	
13	A1	0	0	60	40	60	160
14	A2	60	80	0	0	0	140
15	A3	20	0	0	40	0	60
16	Доставка	80	80	60	80	60	780

Самостоятельная работа

Задание 1С. Составить оптимальный план перевозки груза от поставщика к потребителям. Стоимость перевозки ед. груза, запасы и спрос потребителей представлены в таблице.

Затраты на поставку единицы груза

Поставщики	Потребители				Запас
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
A ₁	15	7	11	7	300
A ₂	6	4	12	18	1200
A ₃	7	11	5	10	600
Спрос	500	550	550	500	

Ответ: 13 100

а) Решить задачу 1С при условии, что запрещена перевозка груза от 2-го поставщика 3-ему потребителю. Определить, как изменились затраты из-за запрета перевозки по сравнению с оптимальным вариантом;

б) Решить задачу 1С при условии, что поставка груза от 2-го поставщика 4-ому потребителю равна 100 единиц. Оценить удорожание перевозок груза по сравнению с оптимальным вариантом;

Задание 2С. Решить транспортную задачу

Затраты на перевозку груза

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	2	3	1	80
A_2	6	3	5	6	140
A_3	3	2	6	3	70
Потребности	80	50	50	70	

Ответ: 720

Задание 3С. Решить несбалансированную транспортную задачу (с фиктивным поставщиком)

Составить оптимальный план перевозки груза от поставщиков к потребителям. Стоимость перевозки ед. груза, объемы производства и спрос потребителей представлены в таблице.

Затраты на поставку единицы груза

Поставщики	Потребители				Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	8	10	5	40
A_2	1	4	6	2	190
A_3	3	1	9	7	80
Спрос	80	30	120	180	

Задача 4С. На трех складах оптовой базы сосредоточена мука в количествах, равных 150, 360 и 180 т соответственно. Эту муку необходимо завезти в пять магазинов, каждый из которых должен получить 90, 120, 230, 180 и 60 т соответственно. С 1-го склада муку не представляется возможным перевозить во 2-й и 5-й магазины, а из 2-го склада в 3-й магазин должно быть завезено 100 т муки. Тарифы на перевозку 1 т муки с каждого склада в соответствующие магазины, представлены в таблице:

Склады	Тарифы на перевозку 1 т				
	Магазин №1	Магазин №2	Магазин №3	Магазин №4	Магазин №5
Склад №1	7	6	8	2	4
Склад №2	4	3	1	5	6
Склад №3	5	2	3	2	8