

Лабораторная работа

МАТРИЧНЫЕ ФУНКЦИИ В MS EXCEL. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Краткий комментарий

Электронная таблица позволяет выполнять линейные преобразования матриц: умножение, деление матриц на число, прибавление или вычитание чисел, а также операции над матрицами: сложение, умножение матриц, транспонирование, вычисление определителей. Средствами MS Excel можно решать системы линейных алгебраических уравнений. Для этих целей электронная таблица имеет ряд функций для работы с матрицами:

МОБР(массив) – вычисление обратной матрицы;

МОПРЕД(массив) – вычисление определителя матрицы;

МУМНОЖ(массив; массив) – умножение матриц;

ТРАНСП(массив) – транспонирование матриц.

Практическая работа

Задание 1. Вычислите $A+B$, $A*B$, $(A+B)^{-1}$, $(A+B)^T$, $(A+B)^{-1}*1,5$, $|(A+B)^T|$, где A и B матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Технология выполнения

1. Сформируйте форму для выполнения основных матричных операций в соответствии с образцом:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Основные матричные операции:													
2														
3	Исходные матрицы:			8	4	2	3			3	2	2	1	
4				7	2	2	9			6	1	6	2	
5				3	6	3	1			2	4	2	6	
6			A:	2	3	2	4		B:	1	8	5	7	
7														
8	Действия:													
9														
10														
11														
12	Сложение/Умножение		A+B=						A*B=					
13														
14														
15														
16	Обращение/													
17	Транспонирование		(A+B)⁻¹=						(A*B)^T=					
18														
19														
20														
21	Умножение на число/													
22	Вычисление определителя		(A+B)⁻¹*1,5=						 (A*B)^T =					
23														

2. Выполните первое матричное действие (сложение: $A+B$), для этого выделите мышкой место под результат, диапазон D9:G12, поставьте знак равно, запишите формулу: $=D3:G6+J3:M6$ (диапазоны соответствующих матриц следует выделять с помощью мышки). Обязательно завершите выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift+Ctrl+Enter**. Данная операция распространяет действие формулы на весь выделенный диапазон.

3. Выполните умножение матриц ($A*B$) по правилам матричного умножения. Выделите диапазон J9:M12. Введите формулу: $=\text{МУМНОЖ}(D3:G6;J3:M6)$ или воспользуйтесь мастером функций. Для получения результата нажмите одновременно клавиши **Shift+Ctrl+Enter**.

4. Вычислите обратную матрицу $(A+B)^{-1}$. Выделите диапазон D14:G17. Введите формулу: $=\text{МОБР}(D9:G12)$ или воспользуйтесь мастером функций. Для получения результата нажмите одновременно клавиши **Shift+Ctrl+Enter**.

5. Осуществите транспонирование матрицы $(A*B)$. Выделите диапазон J14:M17. Введите формулу: $=\text{ТРАНСП}(J9:M12)$ или воспользуйтесь мастером функций. Для получения результата

нажмите одновременно клавиши **Shift+Ctrl+Enter**

6. Вычислите произведение матрицы (A+B) на число 1,5. Выделите диапазон D19:G22. Введите формулу: =D14:G17*1,5 (диапазоны матриц следует выделять с помощью мышки). Для получения результата нажмите одновременно клавиши **Shift+Ctrl+Enter**.

7. Вычислите определитель матрицы. Выделите ячейку J22. Введите формулу: =МОПРЕД(J14:M17) или воспользуйтесь мастером функций. Нажмите клавишу Enter или кнопку ОК.

8. Сохраните рабочую книгу под именем **Задание 1**.

Задание 2. Решите систему линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} x_2 - 13x_3 + 4x_4 = -5; \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4; \\ 3x_1 + 21x_2 - 5x_4 = 2; \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 3. \end{cases}$$

Технология выполнения.

1. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы находится по формуле: $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, где \mathbf{A} – матрица коэффициентов, \mathbf{A}^{-1} – обратная матрица к \mathbf{A} , \mathbf{b} – вектор свободных коэффициентов.

2. Введите матрицу \mathbf{A} и \mathbf{b} в рабочий лист MS Excel.

	A	B	C	D	E	F	G
1		0	1	-13	4		-5
2	A=	1	0	-2	3	b=	-4
3		3	21	0	-5		2
4		4	3	-5	0		3
5							
6							

3. Вычислите обратную матрицу $\mathbf{A}_{\text{обр}}$, используя функцию МОБР.

	A	B	C	D	E	F	G
1	A=	0	1	-13	4	b=	-5
2		1	0	-2	3		-4
3		3	21	0	-5		2
4		4	3	-5	0		3
5							
6	A _{обр} =	-0,11	0,0969	-0,03	0,2484	X=	0,8496
7		0,0116	0,0775	0,0558	-0,061		-0,44
8		-0,081	0,124	0,0093	-0,038		-0,184
9		-0,017	0,3837	0,0163	-0,108		-1,74
10							

4. Вычислите X, используя функцию МУМНОЖ.

G6 fx {=МУМНОЖ(B6:E9;G1:G4)}

	A	B	C	D	E	F	G
1	A=	0	1	-13	4	b=	-5
2		1	0	-2	3		-4
3		3	21	0	-5		2
4		4	3	-5	0		3
5							
6	A _{обр} =	-0,11	0,0969	-0,03	0,2484	X=	0,8496
7		0,0116	0,0775	0,0558	-0,061		-0,44
8		-0,081	0,124	0,0093	-0,038		-0,184
9		-0,017	0,3837	0,0163	-0,108		-1,74
10							

5. Сделайте проверку (b=AX)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	A=	0	1	-13	4	b=	-5	Проверка	-5
2		1	0	-2	3		-4		-4
3		3	21	0	-5		2		2
4		4	3	-5	0		3		3
5									
6	A _{обр} =	-0,11	0,0969	-0,03	0,2484	X=	0,8496		
7		0,0116	0,0775	0,0558	-0,061		-0,44		
8		-0,081	0,124	0,0093	-0,038		-0,184		
9		-0,017	0,3837	0,0163	-0,108		-1,74		

6. Сохраните рабочую книгу под именем **Задание 2**.

Задание 3. Решите систему линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} x_2 - 13x_3 + 4x_4 = -5; \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4; \\ 3x_1 + 21x_2 - 5x_4 = 2; \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 3. \end{cases}$$

Метод Крамера. В этом случае неизвестные вычисляются по формуле: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1 \dots n$,

где Δ – определитель матрицы **A**;

Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы **A** путем замены i -го столбца вектором **b**.

Технология выполнения.

1. Сформируйте дополнительные матрицы **A1**, **A2**, **A3**, **A4** последовательно заменяя i столбец на столбец вектора **b**.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	A=	0	1	-13	4	b=	-5	
2		1	0	-2	3		-4	
3		3	21	0	-5		2	
4		4	3	-5	0		3	
5								
6	A1=	-5	1	-13	4		D=	2580
7		-4	0	-2	3		D1=	2192
8		2	21	0	-5		D2=	-1136
9		3	3	-5	0		D3=	-476
10							D4=	-4488
11								
12	A2=	0	-5	-13	4		x=	0,8496
13		1	-4	-2	3	-0,44		
14		3	2	0	-5	-0,184		
15	4	3	-5	0	-1,74			
16								
17	A3=	0	1	-5	4			
18		1	0	-4	3			
19		3	21	2	-5			
20								
21								
22	A4=	0	1	-13	-5			
23		1	0	-2	-4			
24		3	21	0	2			
24		4	3	-5	3			

2. Вычислите определители матриц A, A1, A2, A3, A4 соответственно в ячейках H6, H7, H8, H9, H10, используя функцию МОПРЕД.

H6=МОПРЕД(B1:E4)

H7=МОПРЕД(B6:E9),

H8=МОПРЕД(B11:E14),

H9=МОПРЕД(B16:E19),

H10=МОПРЕД(B21:E24).

3. Вычислите x_i . В ячейку H12 введите формулу =H7/\$H\$6. Скопируйте формулу в ячейки H13, H14, H15. Система решена.

4. Сохраните рабочую книгу под именем **Задание 3**.

Применение массивов в решении экономических задач

Задание 4. Выполнить следующие задания экономического содержания, используя операции с матрицами в Microsoft Excel.

1. Частный предприниматель приобрел 250 единиц товара I вида и 600 единиц товара II вида; другой частный предприниматель – 200 единиц товара I вида и 700 единиц товара II вида. После удачно проведенной рекламной кампании товара I вида первый предприниматель сделал следующие закупки: I вида – 350 единиц, II вида – 550 единиц; второй предприниматель соответственно 350 и 600 единиц.

Запишите матрицы: а) A_1 и A_2 всех закупок первым и вторым предпринимателем соответственно; б) общих закупок двумя предпринимателями сначала до, а затем после рекламной кампании.

2. Ниже приведены данные о продажах фирмы, владеющей несколькими магазинами. В строках матриц указаны суммы, вырученные на протяжении различных сезонов (весна, лето, осень, зима), а в столбцах – доходы от продажи различных видов товаров (телевизоры, музыкальные центры, видеокамеры):

$$\begin{bmatrix} 17 & 4 & 12 \\ 6 & 4 & 13 \\ 11 & 4 & 8 \\ 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 & 5 & 10 \\ 10 & 5 & 15 \\ 20 & 5 & 8 \\ 10 & 5 & 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 & 3 & 4 \\ 8 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

(магазин 1) (магазин 2) (магазин 3)

Покажите, что в каждый сезон магазины 1 и 3 взятые вместе продали больше каждого вида товаров, чем магазин 2. Найдите матрицу общей продажи всех трех магазинов.

Задание 5. Составьте математическую модель задач в виде системы линейных уравнений и решите ее средствами Microsoft Excel.

1. Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех типов. Характеристики производства описаны в следующей таблице.

Тип сырья	Нормы расхода по видам изделий, у. е.			Запас сырья, у.е.
	1	2	3	
1	8	12	16	1800
2	14	21	13	2700
3	9	11	19	2000

Найдите объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

2. Иванов, Петров и Сидоров купили продукты трех видов соответственно в количестве 2, 5 и 4 кг; 6, 2 и 3 кг; 1,4 и 7 кг. Иванов уплатил 27 ден. ед., Петров — 23,5 ден. ед. и Сидоров — 34 ден. ед. Определите цены этих продуктов.

Самостоятельная работа

Задание 1. Решите систему линейных алгебраических уравнений и выполните проверку найденного решения:

- 1) методом обратной матрицы (на **Листе 1** рабочей книги);
- 2) по формуле Крамера (на **Листе 2**);

Варианты

$$1) \begin{cases} 8x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -18, \\ -2x_1 - 4x_3 - 6x_4 = -2, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = -14, \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 8x_4 = -6; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} -8x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 34, \\ -6x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 24, \\ -10x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 68, \\ -2x_1 - 6x_2 + 8x_3 - 4x_4 = -36; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 6x_1 - 4x_3 - 4x_4 = -34, \\ -10x_1 + 10x_3 = 20, \\ -8x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 44, \\ -2x_1 - 10x_2 + 6x_3 + 4x_4 = -2; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -32, \\ 2x_1 + 4x_3 + 2x_4 = -14, \\ 2x_1 - 8x_2 - 8x_3 = 6, \\ -10x_1 - 4x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 24; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = -16, \\ -6x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 34, \\ -2x_2 + 6x_3 - 10x_4 = -60, \\ 6x_1 - 10x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -78; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 4x_4 = -46, \\ -6x_1 - 4x_2 + 10x_3 + 10x_4 = 36, \\ x_3 - 4x_4 = -19, \\ 8x_2 - 4x_3 + 10x_4 = 60; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 6x_1 + 8x_3 - 6x_4 = -2, \\ 10x_1 - 10x_2 - 2x_3 - 8x_4 = 42, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 10x_4 = 12, \\ -4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 4; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} -4x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 6x_4 = -18, \\ 4x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -18, \\ 2x_2 - 6x_3 + 6x_4 = 0, \\ -2x_3 - 2x_4 = 2; \end{cases}$$

Задание 2. Выполните следующие задания экономического содержания, используя операции с матрицами в Microsoft Excel.

1. Данные о доходах (тыс. ден. ед.) холдинговой компании по трем регионам трех компаний за 2001 и 2003 гг. представлены в матрицах А и В.

$$A = \begin{bmatrix} 440 & 780 & 210 \\ 1050 & 360 & 990 \\ 500 & 1220 & 1700 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 520 & 2010 & 520 \\ 1070 & 610 & 790 \\ 3460 & 1220 & 7800 \end{bmatrix}$$

По строкам группируются данные о доходах трех компаний, по столбцам — по регионам продаж. Рассчитайте матрицу приростов доходов за период с 2010 по 2013 г. и матрицу, характеризующую средние размеры приростов доходов компании холдинга за год.

2. Тарифы (ден. ед.) перевозки единицы некоторого товара с трех фабрик четырем базам определяются матрицей

$$S = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 9 & 7 \\ 14 & 8 & 12 & 8 \\ 6 & 14 & 22 & 17 \end{bmatrix}$$

Себестоимость единицы товара на первой фабрике – 40 ден. ед., на второй – 38 ден. ед. и на третьей – 41 ден. ед. Запишите матрицу Р издержек производства размером 3x4, элементы которой группируются по строкам и столбцам так же, как и в S. Определите матрицу К совокупных издержек на производство и транспортировку товара.

3. Предприятие производит продукцию двух видов и использует сырье двух типов. Нормы затрат сырья на единицу продукции каждого вида заданы матрицей:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix},$$

у которой по строкам указано количество (у. е.) сырья, расходуемого на производство единицы продукции I и II вида. Стоимость (ден. ед.) единицы сырья каждого типа задана матрицей $B = [70 \ 30]$. Каковы общие затраты предприятия на производство 100 у.е. продукции I вида и 150 у.е. II вида?

4. Предприятие выпускает 3 вида изделий, используя при этом сырье 3 типов. Нормы расхода сырья по видам изделий указаны в таблице.

Тип сырья	Норма расхода сырья на 1 изделие по видам		
	1	2	3
I	4	5	6
II	1	2	3
III	0	1	4

Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида, если известно, что запас сырья I типа составляет 5500 единиц, II типа – 2050 единиц, III типа – 1400 единиц. Указанные запасы сырья должны быть использованы полностью.